Inventiones math. 15, 206 – 226 (1972)

La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$

Pierre Deligne* (Bures-sur-Yvette)

1. Enoncé du théorème

Soient $\mathbf{F}_q$ un corps à q éléments, $\overline{\mathbf{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$, $\varphi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ la substitution de Frobenius $x \mapsto x^q$ et $F = \varphi^{-1}$ le «Frobenius géométrique».

Soit X un schéma (séparé de type fini) sur $\mathbf{F}_q$, et soit $\overline{X}$ le schéma sur $\overline{\mathbf{F}}_q$ qui s'en déduit par extension des scalaires. Pour tout point fermé x de X, soit $\deg(x) = [k(x): \mathbf{F}_q]$ le degré sur $\mathbf{F}_q$ de l'extension résiduelle. La fonction zêta $Z(X, t) \in \mathbf{Z}[[t]]$ est définie par

$$Z(X, t) = \prod_{x \in X} (1 - t^{\deg(x)})^{-1} \qquad (x \text{ point fermé de } X),$$

$$\log Z(X, t) = \sum_{n > 0} \# X(\mathbf{F}_{q^n}) \frac{t^n}{n}.$$

Pour tout nombre premier ℓ premier à q, la cohomologie ℓ-adique à supports propres $H_c^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ de $\overline{X}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_\ell$, sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ agit par transport de structures. D'après Grothendieck, on a

$$Z(X, t) = \prod_i \det\left(1 - F t, H_c^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)\right)^{(-1)^{i+1}}.$$

Prenons pour X une surface projective non singulière. On sait dans ce cas que les facteurs

$$P_i(t) = \det\left(1 - F t, H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)\right)$$

de $Z(X, t)$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels indépendants de ℓ. La *conjecture de Weil* affirme ici que les racines du polynôme $P_i(t)$ sont de valeur absolue complexe $q^{-i/2}$. Cette conjecture est invariante par extension finie du corps fini de base. Pour X comme plus haut, et $i \neq 2$, elle résulte de Weil [9]. Si, pour simplifier, on suppose X géométriquement connexe, on a en effet

$$P_0(t) = 1 - t \qquad P_4(t) = 1 - q^2 t$$

$$P_1(t) = \det\left(1 - \varphi t; T_\ell(\mathrm{Pic}^0(X)_{\mathrm{red}})\right)$$

$$P_3(t) = P_1(q t).$$

---

* Cet article a été rédigé pendant un séjour à l'Université de Warwick, que je remercie de son hospitalité.

Soient k un corps de caractéristique 0 et X une surface projective non singulière géométriquement connexe sur k. On dit que X est une *surface* $K3$ si X est régulière et de diviseur canonique trivial, c'est-à-dire si $H^1(X,\mathcal{O})=0$ et que Ω_X^2 est isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Pour les mirifiques propriétés de ces surfaces, on renvoie à [8]. Nous utiliserons surtout les faits suivants.

1.1. **Lemme.** (i) *On a* $h^{2,0}=h^{0,2}=1$.

(i) *On a* $H^2(X,T_X^1)=0$ *(les déformations infinitésimales ne sont pas obstruées), l'application déduite du produit intérieur*

$$H^1(X,T_X^1)\otimes H^0(X,\Omega_X^2)\xrightarrow{\sim}H^1(X,\Omega_X^1) \tag{1.1.1}$$

est bijective, et $H^0(X,T_X^1)=0$ *(X n'a pas d'automorphismes infinitésimaux).*

On a $h^{2,0}=_{\mathrm{dfn}}\dim H^0(X,\Omega_X^2)=\dim H^0(X,\mathcal{O}_X)=1$, et (i) s'en déduit par symétrie de Hodge. Puisque $H^1(X,\mathcal{O}_X)=0$, on a par symétrie de Hodge et dualité de Serre $h^{0,1}=h^{1,0}=h^{2,1}=h^{1,2}=0$. Puisque $\Omega_X^2=\mathcal{O}_X$, l'isomorphisme «produit intérieur»

$$T_X^1\otimes\Omega_X^2\xrightarrow{\sim}\Omega_X^1$$

induit des isomorphismes $T_X^1\simeq\Omega_X^1$. La nullité de $H^2(X,T_X^1)$ se déduit donc de celle de $h^{1,2}$, et il est clair que (1.1.1) est bijectif. Le même argument donne $H^0(X,T_X^1)=0$.

1.2. **Lemme.** *Soit Y_0 une surface projective non singulière sur un corps fini $\mathbf{F}_q$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique V de corps résiduel fini k, un morphisme propre et lisse f_V: $Y\to\mathrm{Spec}(V)$ de fibre générale une surface $K3$ et i: $\mathbf{F}_q\to k$ tel que $Y_0\otimes_{\mathbf{F}_q}k\simeq Y\otimes_V k$.*

(ii) *Il existe un schéma intègre S de corps des fractions de caractéristique 0, un point $s\in S$, un morphisme propre et lisse f: $Y\to S$ de fibre générale une surface $K3$ et i: $\mathbf{F}_q\to k(s)$ tel que $Y_0\otimes_{\mathbf{F}_q}k(s)\simeq Y_s$.*

La démonstration utilise un passage à la limite standard. Si les conditions équivalentes de 1.2 sont remplies, on dit que Y_0 *se relève* en une surface $K3$.

1.3. **Théorème.** *Une surface projective non singulière sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ qui se relève en une surface $K3$ vérifie la conjecture de Weil.*

Ce théorème a été obtenu indépendamment par Pjateckii-Shapiro et Šafarevitch.

Il s'applique par exemple aux surfaces de degré 4 dans $\mathbf{P}^3$. Les nombres de Betti d'une $K3$ sont $(1,0,22,0,1)$; le théorème implique donc que

$$|\#X(\mathbf{F}_q)-\#\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)|\leqq 21q.$$

La théorie conjecturale des motifs de Grothendieck (en particulier sa théorie du «groupe de Galois motivique») m'a été très utile pour construire la démonstration. Dans ce langage (qui ne sera pas utilisé par la suite), l'idée est, en gros, de construire par réduction de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{F}_q$ une variété abélienne A et un «morphisme» injectif de motifs

$$H^2(X)\hookrightarrow H^1(A)\otimes H^1(A),$$

pour déduire la conjecture de Weil pour X du théorème de Weil pour A. Toutefois, nous ne définissons pas ce «morphisme» par un cycle algébrique; ce n'est donc pas un morphisme au sens de [5]. En théorie de Hodge, son mode de définition a l'analogue suivant (qui ne sera pas utilisé par la suite).

1.4. **Lemme.** *Soit H une variation de structures de Hodge de poids n sur un schéma S. Si le système local $H_{\mathbf{Z}}$ n'a pour sections globales que la section s et ses multiples, alors s est en tout point de S de type $(n/2, n/2)$.*

1.5. *Notations.* 1.5.1. On notera en indice les extensions de scalaires: si M_A est un module sur un anneau (commutatif à unité) A (ou un schéma sur A, par exemple un groupe algébrique sur A), on désignera par M_B le module sur la A-algèbre B (ou le schéma sur B) qui s'en déduit par extension des scalaires.

1.5.2. Si un groupe G agit sur un ensemble X, on notera $g*x$ le transformé de x par g.

1.5.3. Quand une égalité est la définition de l'un des membres, on la note $=_{\mathrm{dfn}}$.

2. Structures de Hodge polarisées

Pour manier les structures de Hodge, nous utiliserons le formalisme exposé dans [4] et brièvement rappelé ci-dessous.

2.1. Soient $\underline{S}$ le groupe algébrique réel des éléments inversibles de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{C}$, w: $\mathbf{G}_{m_{\mathbf{R}}}\to\underline{S}$ l'inclusion de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{C}^*$ et t: $\underline{S}\to\mathbf{G}_{m_{\mathbf{R}}}$ l'inverse de la norme; on a $t\,w(x)=x^{-2}$. Soit V un vectoriel réel de dimension finie. Il revient au même de se donner

a) ρ: $\underline{S}\to GL(V)$ de poids n: $\rho\,w(x)*v=x^n\cdot v$;

b) une bigraduation de Hodge de poids n de $V_{\mathbf{C}}=V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$:

$$V_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}\quad\text{avec}\quad \overline{V^{p,q}}=V^{q,p};$$

c) une filtration de Hodge de poids n de $V_{\mathbf{C}}=V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$: c'est une filtration décroissante avec $F^p(V_{\mathbf{C}})\oplus\overline{F}^{n-p+1}(V_{\mathbf{C}})\xrightarrow{\sim}V_{\mathbf{C}}$.

On a $F^p(V_{\mathbf{C}}) = \bigoplus_{p' \geq p} V^{p',q'}$; pour $z \in S(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^*$ et $v^{p,q} \in V^{p,q}$, on a $z * v^{p,q} = z^p \bar{z}^q v^{p,q}$. On pose $C = \rho(i)$: c'est *l'opérateur C de Weil*. On a $C v^{p,q} = i^{p-q} v^{p,q}$. Pour $\mathscr{E}$ une partie de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, un bigraduation de Hodge est dite de *type $\mathscr{E}$* si les *nombres de Hodge* $h^{pq} = \dim V^{pq}$ sont nuls pour $(p, q) \notin \mathscr{E}$.

2.2. On appelera ici *structure de Hodge de poids n H* la donnée d'un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini $H_{\mathbf{Z}}$ et d'une bigraduation de Hodge de poids n de $H_{\mathbf{C}} = H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C}$. La *structure de Hodge de Tate* $\mathbf{Z}(n)$ est la structure de Hodge de type $\{(-n, -n)\}$ donnée par

$$\mathbf{Z}(n)_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}(n)_{\mathbf{Z}} = (2\pi i)^n \mathbf{Z} \subset \mathbf{C}.$$

Une polarisation d'une structure de Hodge de poids n H est un morphisme de structures de Hodge ψ: $H \otimes H \to \mathbf{Z}(-n)$ telle que, sur $H_{\mathbf{R}} = H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{R}$, la forme bilinéaire réelle

$$(2\pi i)^n \psi(x, C y)$$

soit symétrique et définie positive. La forme ψ est alors $(-1)^n$-symétrique.

Une *structure de Hodge* de poids n *rationnelle* consiste en un $\mathbf{Q}$-vectoriel $H_{\mathbf{Q}}$ et une bigraduation de Hodge de poids n de $H_{\mathbf{C}} = H_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C}$. On désigne par $\mathbf{Q}(n)$ la structure de Hodge rationnelle sous-jacente à $\mathbf{Z}(n)$. La définition des polarisations est laissée au lecteur.

L'énoncé suivant reformule un théorème de Riemann.

2.3. **Scholie.** *Le foncteur $A \mapsto H^1(A, \mathbf{Z})$ identifie les variétés abéliennes polarisées aux structures de Hodge polarisées de type* $\{(0, 1), (1, 0)\}$.

De la fin de ce n^0, nous n'utiliserons que 2.11(iii') $\Rightarrow$ (ii). Pour prouver cette implication, on peut se limiter à ne considérer que des groupes connexes, ce qui rend 2.5 inutile ou évident.

2.4. Soit G un groupe algébrique linéaire réel. On dit que G est *compact* si $G(\mathbf{R})$ est compact et que toute composante connexe de $G(\mathbf{C})$ a un point réel. Le foncteur évident est alors une équivalence de la catégorie des représentations linéaires algébriques de G avec la catégorie des représentations linéaires du groupe compact $G(\mathbf{R})$.

2.5. **Lemme.** *Tout sous-groupe algébrique réel H d'un groupe algébrique réel compact G est compact.*

On sait que l'application

$$(g, \ell) \mapsto g \cdot \exp(i\ell) \colon G(\mathbf{R}) \times \mathrm{Lie}(G) \to G(\mathbf{C})$$

est bijective. Il suffit de prouver que pour tout sous-groupe réel H de G et tout $h = g \cdot \exp(i\ell) \in H(\mathbf{C})$, on a $\ell \in \mathrm{Lie}(H)$. Puisque $\bar{h} \in H(\mathbf{C})$, on a

$\exp(2i\ell)=\bar{h}^{-1}h\in H(\mathbf{C})$. Regardons $G(\mathbf{C})$ comme l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique réel. Soit $\bar{J}\subset H(\mathbf{C})$ l'adhérence de Zariski, dans ce groupe, de $J=\{\exp(n\,i\ell)|n\in 2\mathbf{Z}\}$. Les $g\in J$, donc les $g\in\bar{J}$, vérifient $g^{-1}=\bar{g}$, d'où $\mathrm{Lie}(\bar{J})\subset i\,\mathrm{Lie}(G)$. L'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\bar{J})$ est abélienne, et $\exp(\mathrm{Lie}(\bar{J}))$ est un groupe, nécessairement d'indice fini dans $\bar{J}$. Il existe donc n et $\ell'\in\mathrm{Lie}(\bar{J})$ tel que

$$\exp(n\,i\ell)=\exp(\ell').$$

On a alors $i\ell\in\mathrm{Lie}(\bar{J})\subset\mathrm{Lie}(H)$ et $\ell\in\mathrm{Lie}(H)$, ce qui achève la démonstration.

2.6. **Lemme.** *Soit G un groupe algébrique réel. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *G est compact;*

(ii) *Pour toute représentation linéaire réelle (resp. complexe) de G, il existe une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) symétrique (resp. hermitienne) définie positive et G-invariante;*

(iii) *Pour une représentation fidèle de G, il existe une forme comme en* (ii).

Pour G connexe, ces conditions équivalent encore à

(iii') *Pour une représentation de G, de noyau fini, il existe une forme comme en* (ii).

Pour G compact, la G-invariance équivaut à la $G(\mathbf{R})$-invariance et (ii) est classique. Si (iii) est vérifié, G est sous-groupe d'un groupe orthogonal ou unitaire, et on applique 2.5. La condition (iii') implique que $G(\mathbf{R})$ est compact (comme revêtement fini d'un groupe compact); si G est connexe, G est donc compact.

2.7. Soit G un groupe algébrique linéaire réel. Pour tout automorphisme involutif σ de G, soit $G^{(\sigma)}$ la forme réelle de $G_{\mathbf{C}}$ définie par l'involution antilinéaire $g\mapsto\sigma(\bar{g})$. On dit que σ est une *involution de Cartan* si $G^{(\sigma)}$ est compact.

Soit C un élément de $G(\mathbf{R})$ de carré central. Une représentation réelle (resp. complexe) de G sera dite C-polarisable s'il existe sur V une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) G-invariante ψ telle que la forme $\psi(x,Cy)$ soit symétrique (resp. hermitienne) et définie positive. On dit alors que ψ est une C-polarisation de V. Un cas particulier du lemme suivant est énoncé sans démonstration dans [4].

2.8. **Lemme.** a) *Que ψ soit une C-polarisation de V ne dépend que de la classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison de C.*

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) ad C *est une involution de Cartan de* G;

(ii) *toute représentation réelle (resp. complexe) de* G *est* C*-polarisable;*

(iii) G *admet une représentation réelle (resp. complexe)* C*-polarisable fidèle.*

Si G *est connexe, ces conditions équivalent encore à*

(iii′) G *admet une représentation réelle (resp. complexe)* C*-polarisable de noyau fini.*

Pour prouver a), on note que $\psi(x, gCg^{-1}y)=\psi(g^{-1}x, Cg^{-1}y)$.

Une forme sesquilinéaire ψ sur une représentation complexe de G est G-invariante si et seulement si

$$\psi(gx, \bar{g}y)=\psi(x,y) \quad \text{pour } g\in G(\mathbf{C}).$$

Cette condition équivaut à

$$\psi(gx, CC^{-1}\bar{g}Cy)=\psi(x, Cy) \quad \text{pour } g\in G(\mathbf{C})$$

(remplacer y par Cy), i.e. à la $G^{(\mathrm{ad}\,C)}$-invariance de $\psi(x, Cy)$. La forme respée de 2.8 résulte donc de 2.6. La forme non respée s'en déduit:

a) la complexifiée (resp. réellifiée) d'une représentation réelle (resp. complexe) C-polarisable est C-polarisable;

b) une polarisation de V induit une polarisation de toute sous-représentation de V;

c) pour V réel (resp. complexe), on a $V\hookrightarrow V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$.

2.9. Soient G un groupe réductif sur $\mathbf{Q}$, et t et w des morphismes définis sur $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{G}_m \xrightarrow{w} G \xrightarrow{t} \mathbf{G}_m$$

avec $tw(x)=x^{-2}$ et w central. Soit de plus un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_{m\mathbf{R}} \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & \underline{S} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{G}_{m\mathbf{R}} \arrow[d, equal] \\
\mathbf{G}_{m\mathbf{R}} \arrow[r, "w"] & G_{\mathbf{R}} \arrow[r, "t"] & \mathbf{G}_{m\mathbf{R}}.
\end{tikzcd}$$

Une représentation définie sur $\mathbf{Q}$ $V_{\mathbf{Q}}$ de G est dite *homogène* de *poids* n si $w(x)*v=x^n\cdot v$ $(v\in V)$. Toute représentation est somme de représentations homogènes. Soit $V_{\mathbf{Q}}$ une représentation de poids n. Alors, h munit $V_{\mathbf{Q}}$ d'une structure de Hodge rationnelle de poids n.

On regardera $\mathbf{Q}(n)_{\mathbf{Q}}$ comme une représentation de G, par la règle

$$g*x=t(g)^n\cdot x.$$

Cette convention est raisonnable, car $\underline{S}$ agit sur $\mathbf{Q}(n)_{\mathbf{R}}$ par la même formule. Une *polarisation* d'une représentation de poids n $V_{\mathbf{Q}}$ de G est une forme G-invariante

$$\psi: V_{\mathbf{Q}} \otimes V_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q}(n)$$

telle que $\psi(x, h(i)\, y)$ soit une forme symétrique et définie positive sur $V_{\mathbf{R}}$. Une polarisation ψ, étant G-invariante, est aussi $\underline{S}$-invariante, donc une polarisation de la structure de Hodge rationnelle $V_{\mathbf{Q}}$.

2.10. **Lemme.** *Pour que la représentation $V_{\mathbf{Q}}$ soit polarisable, il faut et il suffit que la représentation $V_{\mathbf{R}}$ soit $h(i)$-polarisable.*

Soit $P_{\mathbf{Q}}$ (resp. $P_{\mathbf{R}}$) l'espace des formes bilinéaires $(-1)^n$-symétriques G-invariantes sur $V_{\mathbf{Q}}$ (resp. $V_{\mathbf{R}}$). On a $P_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes P_{\mathbf{Q}}$. Les $h(i)$-polarisations forment un ouvert de $P_{\mathbf{R}}$, et les polarisations de $V_{\mathbf{Q}}$ forment la trace de cet ouvert sur $P_{\mathbf{Q}}$. Le lemme en résulte.

2.11. **Proposition.** a) *Que ψ soit une polarisation de V ne dépend que de la classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison de h.*

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) ad $h(i)$ *est une involution de Cartan de* $\mathrm{Ker}(t)_{\mathbf{R}}$*;*

(ii) *toute représentation homogène de G est polarisable;*

(iii) *G admet une famille fidèle de représentations homogènes polarisables.*

Si G est connexe, ces conditions équivalent à

(iii') *G admet une représentation polarisable ρ telle que* $\mathrm{Ker}(\rho) \cap \mathrm{Ker}(t)$ *soit fini.*

L'assertion a) résulte de 2.8.a). Si G est connexe, alors $\mathrm{Ker}(t)$ est connexe: sinon t serait de la forme t_0^n, avec $n > 1$. Puisque $t\, w\, x = x^{-2}$, on aurait $n = 2$, et $w(-1) \notin \mathrm{Ker}(t)^0$. Ceci est absurde, car

$$w(-1) \in h\big(\mathrm{Ker}(t: \underline{S} \to \mathbf{G}_{m_{\mathbf{R}}})\big),$$

qui est connexe. Ceci dit, b) résulte de 2.10 et 2.8.b).

3. Rappels sur le groupe spinoriel

Pour les rappels contenus dans ce n^0, on pourra consulter [3].

3.1. Soit V un module libre sur un anneau A, muni d'une forme quadratique Q. Le module V s'identifie à un sous-module de l'algèbre de Clifford $C(V)$; dans $C(V)$, on a

$$v \cdot v = Q(v).$$

On désignera par $C^+(V)$ la partie paire de $C(V)$.

Si V est un module libre sur A, muni d'une forme bilinéaire symétrique ψ, on désignera par $C(V)$ (ou par $C(V,\psi)$) l'algèbre de Clifford de V muni de la forme quadratique $\psi(x,x)$.

3.2. Supposons que A soit un corps de caractéristique 0, et que Q soit non dégénérée. On note $C\mathrm{Spin}(V)$ le *groupe de Clifford.* C'est le groupe algébrique des éléments inversibles g de $C^+(V)$ tels que $g\,V g^{-1}=V$. On définit un morphisme de $C\mathrm{Spin}(V)$ dans $SO(V)$ par

$$g \mapsto (v \mapsto g\,v\,g^{-1}).$$

Le noyau de ce morphisme est réduit aux scalaires: on dispose d'une suite exacte de groupes algébriques

$$0 \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{w} C\mathrm{Spin}(V) \to SO(V) \to 0.$$

Le groupe spinoriel $\mathrm{Spin}(V)$ est le sous-groupe algébrique de $C\mathrm{Spin}(V)$ noyau de la norme spinorielle

$$N\colon\ C\mathrm{Spin}(V) \to \mathbf{G}_m.$$

Désignons par t l'inverse de N; on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathrm{Spin}(V) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "t\mapsto t^{-2}"'] & C\mathrm{Spin}(V) \arrow[r] \arrow[d, "t"] & SO(V) \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathbf{G}_m \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

Par définition, on dispose aussi de

$$\alpha\colon\ C\mathrm{Spin}(V) \hookrightarrow C^+(V)^*. \tag{3.2.2}$$

3.3. On note $(C^+(V))_s$ la représentation de $C\mathrm{Spin}(V)$ sur $C^+(V)$ donnée par

$$g * x = \alpha(g)\cdot x. \tag{3.3.1}$$

On note $(C^+(V))_{\mathrm{ad}}$ la représentation de $C\mathrm{Spin}(V)$ sur $C^+(V)$ déduite de l'action de $SO(V)$ sur $C^+(V)$ par transport de structures. On a

$$g *_{\mathrm{ad}} x = \alpha(g) \cdot x \cdot \alpha(g)^{-1}. \tag{3.3.2}$$

L'action de $C\mathrm{Spin}(V)$ sur $(C^+(V))_s$ est compatible à la structure de $C^+(V)$-module à droite de $(C^+(V))_s$. On a un isomorphisme de représentations

$$\mathrm{End}_{C^+(V)}((C^+(V))_s) = (C^+(V))_{\mathrm{ad}}. \tag{3.3.3}$$

On a un isomorphisme de représentations

$$(C^+(V))_{\mathrm{ad}} = \bigoplus \overset{2i}{\wedge} V. \tag{3.3.4}$$

3.4. Supposons A algébriquement clos. Distinguons deux cas.

1) *dim(V) impair:* $C^+(V)$ est ici une algèbre de matrices. Soit W un $C^+(V)$-module simple; W est une *représentation spinorielle* de $C\mathrm{Spin}(V)$:

$$g * w = \alpha(g) \cdot w.$$

On a des isomorphismes de représentations

$$(C^+(V))_s = \text{somme de copies de } W, \tag{3.4.1}$$

$$(C^+(V))_{\mathrm{ad}} = \mathrm{End}_A(W). \tag{3.4.2}$$

2) *dim(V) pair:* $C^+(V)$ est ici produit de deux algèbres de matrices. Soient W_1 et W_2 deux $C^+(V)$-modules simples non-isomorphes et soit $W = W_1 + W_2$; W_1 et W_2 sont les *représentations semi-spinorielles.*

On a des isomorphismes de représentations

$$(C^+(V))_s = \text{somme de copies de } W, \tag{3.4.3}$$

$$(C^+(V))_{\mathrm{ad}} = \mathrm{End}_A(W_1) \times \mathrm{End}_A(W_2). \tag{3.4.4}$$

Dans les deux cas, $C^+(V)$ est le bicommutant de la représentation W.

3.5. **Proposition.** *Soient Γ un sous-groupe Zariski-dense de* $\mathrm{Spin}(V)$ *et a un automorphisme de la A-algèbre $C^+(V)$, qui commute à l'action de Γ donnée par $\gamma \mapsto \alpha(\gamma) \cdot x \cdot \alpha(\gamma)^{-1}$. Alors, a est l'identité.*

Il suffit de traiter le cas où A est un corps algébriquement clos et où Γ est le groupe Spin tout entier (en effet, commuter avec a est une condition Zariski-fermée).

Avec les notations de 3.4, identifions $C^+(V)$ à une sous-algèbre de $\mathrm{End}_A(W)$.

Il existe un automorphisme $\bar{a}$ de W tel que

$$a(x) = \bar{a}\, x\, \bar{a}^{-1} \qquad (x \in C^+(V)).$$

Pour $\gamma \in \mathrm{Spin}(V)$, on a par hypothèse

$$\alpha(\gamma)\,\bar{a}\,\alpha(\gamma)^{-1}\bar{a}^{-1}\cdot x\cdot \bar{a}\,\alpha(\gamma)\,\bar{a}^{-1}\alpha(\gamma)^{-1}=x \qquad (x\in C^+(V));$$

le commutateur $(\alpha(\gamma),\bar{a})=\alpha(\gamma)\,\bar{a}\,\alpha(\gamma)^{-1}\bar{a}^{-1}$ est donc dans le centre de $C^+(V)$.

1) *dim*(V) *impair*: ici, $C^+(V)=\mathrm{End}_A(W)$, et $\det_W((\alpha(\gamma),\bar{a}))=1$, de sorte que $\alpha(\gamma)\,\bar{a}\,\alpha(\gamma)^{-1}\bar{a}^{-1}$ est une racine de l'unité v. Puisque $\mathrm{Spin}(V)$ est connexe, et que, pour $\gamma=e$, on a $v=1$, on a même

$$(\alpha(\gamma),\bar{a})=1, \qquad \text{i.e. } \alpha(\gamma)\,\bar{a}=\bar{a}\,\alpha(\gamma).$$

2) *dim*(V) *pair*: ici, $C^+(V)=\mathrm{End}_A(W_1)\times\mathrm{End}_A(W_2)$ et soit $\bar{a}$ permute les W_i, soit il les respecte. Dans les deux cas, on déduit de ce que

$$\det_{W_i}(\alpha(\gamma))=1 \qquad (i=1,2)$$

que

$$\det_{W_i}((\alpha(\gamma),\bar{a}))=1 \qquad (i=1,2)$$

et on conclut comme plus haut que

$$\alpha(\gamma)\,\bar{a}=\bar{a}\,\alpha(\gamma).$$

Dans les deux cas, $\bar{a}$ est dans le commutant de la représentation, donc commute au bicommutant $C^+(V)$: a est l'identité.

4. Construction de variétés abéliennes

Dans ce paragraphe et une partie du suivant, nous exposons des résultats de [7].

4.1. Soit $V_{\mathbf{Z}}$ un $\mathbf{Z}$-module libre de rang $n+2$ muni d'une forme bilinéaire de discriminant $\neq 0$

$$B\colon\ V_{\mathbf{Z}}\otimes V_{\mathbf{Z}}\to\mathbf{Z}.$$

On suppose B d'indice $(n+,2-)$. On s'intéresse aux morphismes de poids 0 $h\colon \underline{S}\to SO(V_{\mathbf{R}})$ tels que

1) B est une polarisation de la représentation $V_{\mathbf{Q}}$ de $SO(V_{\mathbf{Q}})$;

2) les nombres de Hodge de $V_{\mathbf{C}}$ sont

$$h^{-1,1}=h^{1,-1}=1 \quad \text{et} \quad h^{0,0}=n.$$

4.2. Un morphisme h comme plus haut se relève de façon unique en $\tilde{h}\colon \underline{S}\to C\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{R}})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_{m\mathbf{R}} \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & \underline{S} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathbf{G}_{m\mathbf{R}} \arrow[d, equal] \\
\mathbf{G}_{m\mathbf{R}} \arrow[r] & C\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{R}}) \arrow[r, "t"] & \mathbf{G}_{m\mathbf{R}}.
\end{tikzcd}$$

4.3. **Lemme.** *Relativement à $\tilde{h}$, toute représentation de $C\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}})$ est polarisable* (2.9).

On applique le critère 2.11.b)(iii') à la représentation $V_{\mathbf{Q}}$ de $C\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}})$.

4.4. **Lemme.** *La structure de Hodge de $C^+(V_{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ad}}$ définie par $\tilde{h}$ est de type* $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$.

On a $C^+(V_{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ad}} \simeq \oplus \overset{2i}{\wedge} V_{\mathbf{Q}}$, et on conclut en utilisant que $h^{-1,1}(V_{\mathbf{Q}})=1$.

4.5. **Proposition.** *La structure de Hodge de $C^+(V_{\mathbf{Q}})_s$ définie par $\tilde{h}$ est de type* $\{(0,1),(1,0)\}$. *La structure de Hodge $C^+(V_{\mathbf{Q}})_s$, munie du réseau $C^+(V_{\mathbf{Z}})$, définit donc une variété abélienne.*

Supposons tout d'abord n impair. Après extension des scalaires à $\mathbf{C}$, $C^+(V_{\mathbf{Q}})$ devient une algèbre de matrices

$$C^+(V_{\mathbf{C}}) \simeq \mathrm{End}(W).$$

Sur W, $C\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}})_{\mathbf{C}}$ agit par $g\cdot w=\alpha(g)\cdot w$: c'est la représentation spinorielle. La représentation $C^+(V_{\mathbf{C}})_s$ est somme de $\dim(W)$ copies de W, de sorte qu'il suffit de prouver que la représentation de poids un W est purement de type $\{(0,1),(1,0)\}$. Sinon, la représentation $\mathrm{End}(W)\simeq C^+(V_{\mathbf{C}})_{\mathrm{ad}}$ ne pouvait pas être purement de type $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$.

Pour n impair, on a de même

$$C^+(V_{\mathbf{C}}) \simeq \mathrm{End}(W') \oplus \mathrm{End}(W''),$$

où W' et W'' sont les représentations semi-spinorielles. Comme plus haut, on prouve que W' et W'' sont de type $\{(0,1),(1,0)\}$, donc aussi $C^+(V_{\mathbf{C}})_s$.

La seconde assertion résulte de 2.3 et 3.3.

4.6. La construction donnée dans ce n^0 cache le fait (dont nous ne ferons pas usage) suivant, qui se lit sur le diagramme de Dynkin et est la vraie raison pour laquelle tout marche.

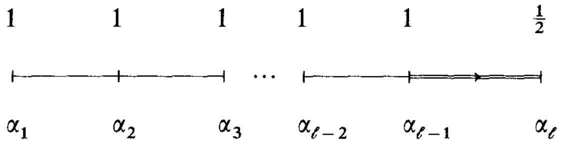
Soit $V_{\mathbf{Z}}$ une structure de Hodge polarisée de poids 0 et de type $\{(1,-1),(0,0),(-1,1)\}$, avec $h^{1,-1}=0$. Soit

$$r\colon \mathbf{G}_m \to SO(V_{\mathbf{C}})$$

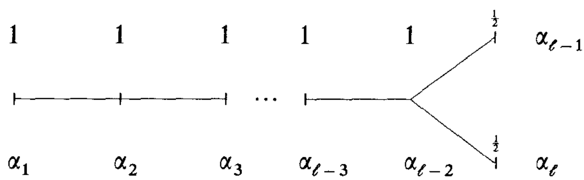
l'homomorphisme tel que $r(x)\cdot v^{pq}=x^p v^{pq}$ pour v^{pq} de type (p,q). Soient T un tore maximal de $SO(V_{\mathbf{C}})$, muni d'un système de racines simples Φ, $\tilde{T}$ l'image réciproque de T dans $\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{C}})$, et $(w_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ les poids fondamentaux de $\tilde{T}$. L'homomorphisme r admet un et un seul conjugé

$$r_0\colon \mathbf{G}_m \to T$$

tel que les nombres rationnels $\langle w_\alpha, r_0\rangle \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ soient tous positifs. On vérifie que r_0 est l'homomorphisme $H_{\alpha_1}\colon \mathbf{G}_m \to T$ relatif à la racine notée ci-dessous α_1. Les nombres $\langle w_\alpha, r_0\rangle$ sont les suivants



pour $SO(2, 2\ell-1)$,



pour $SO(2, 2\ell-2)$.

Soient w un poids dominant d'une représentation spinorielle ou semi-spinorielle et σ l'involution d'opposition. Le point est que

$$\langle w, r_0\rangle + \langle \sigma w, r_0\rangle = 1.$$

5. Construction de familles de variétés abéliennes

Nous ferons usage du théorème (à paraître) suivant de A. Borel.

5.1. **Théorème** (A. Borel). *Soit X/Γ le quotient d'un domaine hermitien symétrique par un groupe arithmétique sans torsion. On sait* [2] *que X/Γ est de façon naturelle une variété algébrique quasi-projective. Soient S un schéma réduit sur $\mathbf{C}$ et $f\colon S^{\mathrm{an}} \to X/\Gamma$ un morphisme d'espaces analytiques. Alors, f est algébrique.*

Soit S lisse sur $\mathbf{C}$. Pour la notion de *variation de structures de Hodge* $\underline{H}$ sur S, et celle de *polarisation* de $\underline{H}$, on renvoie à Griffiths [6]. On notera $\underline{H}_{\mathbf{Z}}$ le système local de $\mathbf{Z}$-modules libres sur S défini par $\underline{H}$, et par $\underline{H}_s$ la structure de Hodge fibre de $\underline{H}$ en $s \in S$.

Pour X le demi-espace de Siegel, le théorème 5.1 a le corollaire suivant, qui généralise 2.3.

5.2. **Scholie.** *Le foncteur $(a\colon A \to S) \mapsto R^1 a_* \mathbf{Z}$ identifie les schémas abéliens polarisés A sur S aux variations de structures de Hodge polarisées de type $\{(0,1),(1,0)\}$ sur S.*

5.3. Dans la catégorie des variations de structures de Hodge sur S, toutes les opérations tensorielles habituelles ont un sens. Ainsi

a) si $\underline{H}$ et $\underline{H}'$ sont des variations de structures de Hodge, on dispose de variations de structures de Hodge $\underline{H} \otimes \underline{H}'$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{H}, \underline{H}')$, $\overset{n}{\wedge}\underline{H}$, $\underline{H}^\vee$, $\underline{\mathrm{End}}(\underline{H})$, ...

b) si $\underline{H}$ est une variation de structures de Hodge de poids 0, et ψ une polarisation de $\underline{H}$ (ou un quelconque morphisme de structures de Hodge symétrique $\underline{H} \otimes \underline{H} \to \mathbf{Z}(0)$), on dispose de $C(\underline{H}, \psi)$ et $C^+(\underline{H}, \psi)$. En tout point $t \in S$, on a avec les notations de 3.4.

$$C^+(\underline{H}, \psi)_t = C^+(\underline{H}_t, \psi)_{\mathrm{ad}}.$$

5.4. Soit $(V_{\mathbf{Z}}, B)$ comme en 4.1, et soit X l'ensemble des $h: \underline{S} \to SO(V_{\mathbf{R}})$ du type considéré en 4.1. Se donner un tel h revient à se donne un sous-espace $V_{\mathbf{R}}^-$ de dimension 2 de $V_{\mathbf{R}}$, sur lequel B est défini négatif, et une orientation de $V_{\mathbf{R}}^-$: pour $z = \tau \cdot e^{i\theta} \in S(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^*$, $h(z)$ induit l'identité sur l'orthogonal de $V_{\mathbf{R}}^-$ et la rotation d'angle 2θ sur $V_{\mathbf{R}}^-$. Le groupe $O(V_{\mathbf{R}})$ agit sur X par transport de structure: $(g * h)(z) = g \cdot h(z) \cdot g^{-1}$, et la description ci-plus haut rend géométriquement évident que X est un espace homogène sous $SO(V_{\mathbf{R}})$. Le stabilisateur de $h \in X$ est un sous-groupe $SO(2) \times SO(n)$, composante neutre d'un sous-groupe compact *maximal.*

5.5. Pour $h \in X$, soit F_h la filtration de Hodge correspondante de $V_{\mathbf{C}}$. La fonction $h \mapsto F_h^1$ identifie X à un ouvert de l'espace des droites isotropes de $V_{\mathbf{C}}$. Cette construction munit X d'une structure complexe pour laquelle F_h est fonction holomorphe de h. On sait que, pour cette structure, les (deux) composantes connexes de X sont des domaines hermitiens symétriques.

5.6. Soit $W_{\mathbf{Q}}$ une représentation de poids n du groupe algébrique $C\,\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}})$: $w(x) * y = x^n \cdot y$. Soit $\underline{W}_{\mathbf{Q}}$ le système local constant sur X, de fibre $W_{\mathbf{Q}}$. Le groupe $C\,\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}})$ agit sur $(X, \underline{W}_{\mathbf{Q}})$ par

$$\gamma * (w \text{ en } h \in X) = (\gamma\, w \text{ en } \gamma\, h\, \gamma^{-1} \in X).$$

Chaque $h \in X$ définit $\tilde{h}$: $\underline{S} \to C\,\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{R}})$, d'où une $\mathbf{Q}$-structure de Hodge sur la fibre de $\underline{W}_{\mathbf{Q}}$ en $h \in X$. On obtient ainsi une variation de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge de poids n sur S, encore notée $\underline{W}_{\mathbf{Q}}$:

a) la filtration de Hodge est fonction holomorphe de h;

b) l'axiome de transversalité est vérifié (nous ne l'utiliserons que dans un cas trivial).

Cette construction est compatible au produit tensoriel. En particulier, une polarisation ψ: $W_{\mathbf{Q}} \otimes W_{\mathbf{Q}} \to \underline{\mathbf{Q}}(-n)$ de la représentation $W_{\mathbf{Q}}$ définit une polarisation de $\underline{W}_{\mathbf{Q}}$.

Soient $W_{\mathbf{Z}}$ un réseau entier dans $W_{\mathbf{Q}}$ et Γ un sous-groupe de $C\,\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}})$, discret dans $C\,\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{R}})$, agissant librement sur X et tel que $\Gamma W_{\mathbf{Z}} = W_{\mathbf{Z}}$. Alors, le système local constant $\underline{W}_{\mathbf{Z}}$ sur X, de fibre $W_{\mathbf{Z}}$ est sous-jacent à une variation de structure de Hodge Γ-équivariante $\underline{W}$ sur X, comme plus haut. Par passage au quotient, elle définit une variation de structures de Hodge $\underline{W}$ sur X/Γ.

Si $W_{\mathbf{Q}}$ est une représentation de $SO(V_{\mathbf{Q}})$, la même construction s'applique aux-sous-groupes discrets de $SO(V_{\mathbf{Q}})$.

5.7. **Proposition.** *Soit* $(\underline{H}, \psi)$ *une variation de structures de Hodge polarisée de type* $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$, *avec* $h^{1,-1}=1$, *sur un schéma lisse et connexe* S. *Il existe*

a) *un revêtement fini étale surjectif* $u\colon S_1 \to S$;

b) *un schéma abélien* A *sur* S_1;

c) *une* $\mathbf{Z}$-*algèbre* C, *et* $\mu\colon C \hookrightarrow \mathrm{End}_{S_1}(A)$;

d) *un isomorphisme de variations de structures de Hodge*

$$u\colon C^+(\underline{H}, \psi) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbf{Z})$$

qui induise un isomorphisme de systèmes locaux d'algèbres

$$u_{\mathbf{Z}}\colon C^+(\underline{H}_{\mathbf{Z}}, \psi) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbf{Z}).$$

Soit $(V_{\mathbf{Z}}, B)$ un $\mathbf{Z}$-module muni d'une forme bilinéaire symétrique, isomorphe aux $(H_{s_{\mathbf{Z}}}, \psi)$ et reprenons les notations de 5.4. Soient n un entier,

$$\Gamma = \{\gamma \in SO(V_{\mathbf{Z}}) \mid \gamma \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, n)\}$$

et

$$\tilde{\Gamma} = \{\gamma \in C\,\mathrm{Spin}(V_{\mathbf{Q}}) \mid \alpha(\gamma) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, n) \text{ dans } C^+(V_{\mathbf{Z}})\}.$$

On suppose n assez grand pour que Γ et $\tilde{\Gamma}$ soient sans torsion.

Il existe un revêtement fini étale $v\colon S_1' \to S$ tel que le système local $v^* \underline{H}_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ soit trivial. Choisissons un isomorphisme σ_n entre ce système local et le système local constant $\underline{V}_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$. Soient $s \in S_1'$ et $\sigma\colon V_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} H_{s\mathbf{Z}}$ une isométrie telle que $\sigma \equiv \sigma_n (\mathrm{mod}\, n)$ (on choisit σ_n de sorte que de tels σ existent). La structure de Hodge h_s de H_s définit $\sigma^{-1}(h_s) \in X$. L'image de $\sigma^{-1}(h_s)$ dans X/Γ ne dépend que de s. On définit ainsi

$$m\colon S_1' \to X/\Gamma$$

et un isomorphisme compatible aux polarisations

$$\underline{H} \simeq m^* \underline{V}.$$

Soit $S_1 = S_1' \times_{X/\Gamma} X/\tilde{\Gamma}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & S_1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
S & S_1' \arrow[l, "v"'] \arrow[dr, "m"'] & & X/\tilde{\Gamma}. \arrow[dl] \\
 & & X/\Gamma &
\end{tikzcd}$$

Sur S_1, on dispose de

a) un isomorphisme $(v p_1)^* H \simeq (m p_1)^* \underline{V}$;

b) une variation de structure de Hodge, image réciproque par p_2 de celle sur $X/\tilde{\Gamma}$ définie par la représentation $(C^+(V_{\mathbf{Q}}))_s$ et le réseau $C^+(V_{\mathbf{Z}})$.

D'après 5.2, 5.6 et 4.5, cette variation de structures de Hodge correspond à un schéma abélien $a: A \to S_1$.

c) Soit C l'algèbre $C^+(V_{\mathbf{Z}})$. Le schéma abélien construit en b) est à multiplication complexe par C, et la variation de structures de Hodge $\underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbf{Z})$ est $p_2^*((\underline{C}^+(V_{\mathbf{Z}}))_{\mathrm{ad}})$.

Combinant ceci avec a), on trouve un isomorphisme de système locaux d'algèbres et de variation de structures de Hodge

$$C^+(v p_1^* H) \simeq \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbf{Z}).$$

Ceci prouve 5.7.

6. Surfaces $K3$

6.1. Une surface $K3$ polarisée sur un corps de caractéristique $0\,K$ est une surface $K3$ sur K, soit Y, munie de $\eta \in NS(Y) = \mathrm{Pic}(Y)$ qui soit la classe d'un faisceau inversible ample. Pour $K = \mathbf{C}$, on identifiera $NS(Y)$ à une partie de $H^2(X, \mathbf{Z})$.

6.2. Une *famille de surfaces* $K3$ paramétrée par un schéma S de caractéristique 0, est un morphisme propre et plat f: $Y \to S$ dont les fibres sont des surfaces $K3$. Une *polarisation* de f: $Y \to S$ est une section η de $\mathrm{Pic}_S(Y)$, qui en chaque $s \in S$ est une polarisation de $Y_s = f^{-1}(s)$.

Pour tout nombre premier ℓ, on identifie η à une section de $R^2 f_* \mathbf{Z}_\ell$; on désigne par $P^2 f_* \mathbf{Z}_\ell$ l'orthogonal de η (pour le cup-produit); c'est un sous-$\mathbf{Z}_\ell$-faisceau de $R^2 f_* \mathbf{Z}_\ell$. Le cup-produit

$$R^2 f_* \mathbf{Z}_\ell \otimes R^2 f_* \mathbf{Z}_\ell \to R^4 f_* \mathbf{Z}_\ell$$

et le morphisme trace

$$R^4 f_* \mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{Z}}_\ell(-2)$$

induisent

(6.2.1) $$\psi_\ell: P^2 f_* \mathbf{Z}_\ell(1) \otimes P^2 f_* \mathbf{Z}_\ell(1) \to \underline{\mathbf{Z}}_\ell.$$

6.3. Prenons pour S un schéma de type fini sur $\mathbf{C}$. Alors, $R^2 f_* \mathbf{Z}$ est une variation de structures de Hodge sur $\mathbf{C}$; η est en tout point de type (1, 1) et son orthogonal $P^2 f_* \mathbf{Z}$ est encore une variation de structures de Hodge. Comme plus haut, le cup-produit définit

(6.3.1) $$\psi: P^2 f_* \mathbf{Z}(1) \otimes P^2 f_* \mathbf{Z}(1) \to \underline{\mathbf{Z}}.$$

Cette fois, l'opposé de ψ est une polarisation de la variation de structures de Hodge $P^2 f_* \mathbf{Z}(1)$. De plus, ψ_ℓ se déduit de ψ via l'isomorphisme $(P^2 f_* \mathbf{Z}(1)_{\mathbf{Z}}) \otimes \mathbf{Z}_\ell \simeq P^2 f_* \mathbf{Z}_\ell(1)$.

Pour tout $s \in S$, la fibre en s $(P^2 f_* \mathbf{Z}(1))_s$ est la partie primitive de la cohomologie de $H^2(Y_s, \mathbf{Z})$. La structure de Hodge de $(P^2 f_* \mathbf{Z}(1))_s$ est de type $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$, avec $h^{-1,1}=1$ ((1.1)(i)).

L'action de $\pi_1(S,s)$ sur $H^2(Y_s, \mathbf{Z})$ induit

$$\pi: \pi_1(S,s) \to O(P^2(Y_s, \mathbf{Z})(1)_{\mathbf{Z}}, \psi). \tag{6.3.2}$$

6.4. **Proposition.** *Pour toute surface $K3$ polarisée complexe Y_0, il existe une famille de surfaces $K3$ polarisées $f: Y \to S$ comme plus haut, avec $Y_s \simeq Y_0$ pour un $s \in S$, et telle que l'image de π* (6.3.2) *soit d'indice fini.*

Soit $f_T^\wedge: Y_T^\wedge \to T^\wedge$ la déformation formelle verselle de Y_0. Puisque $H^0(Y_0, T^1)=0$, $T^\wedge$ est même un schéma formel de modules pour Y_0, mais peu importe. Puisque $H^2(Y_0, T^1)=0$ ((1.1)(i)). $T^\wedge$ est le spectre d'un anneau de séries formelles sur $\mathbf{C}$. De $f^\wedge$, on déduit une variation de structures de Hodge (non polarisée) sur $T^\wedge$. D'après (1.1.1), celle-ci est la déformation universelle de {la structure de Hodge $H^2(Y_0, \mathbf{Z})$, munie du cup-produit}.

Soit $\bar{\eta}$ l'image de η par l'application composée

$$H^2(Y_0, \mathbf{Z}) \to H^2_{DR}(Y_T^\wedge / T^\wedge) \to R^2 f_{T*}^\wedge \mathcal{O}.$$

Soit $S^\wedge$ le sous-schéma formel de $T^\wedge$ d'équation $\bar{\eta}=0$ et soit $f^\wedge: Y^\wedge \to S^\wedge$ induit par $f_T^\wedge$. Puisque $h^{02}=1$, $S^\wedge \subset T^\wedge$ est défini par une équation; celle-ci fait partie d'un système régulier de paramètres, de sorte que $S^\wedge$ est un anneau de séries formelles. Sur $S^\wedge$, η provient d'un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ ample sur $X^\wedge$; $f^\wedge$ est donc algébrisable. En outre, sur $S^\wedge$, la variation de structure de Hodge polarisée $(P^2(Y^\wedge/S^\wedge, \mathbf{Z})(1), \psi)$ est une déformation universelle de $(P^2(Y_0, \mathbf{Z})(1), \psi)$.

Posons $S^\wedge = \operatorname{Spec}(A^\wedge)$, et exprimons $A^\wedge$ comme limite inductive d'anneaux de type fini sur $\mathbf{C}$. Puisque $Y^\wedge$ est algébrisable, il existe un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y^\wedge \arrow[r] \arrow[d, "f^\wedge"] & Y \arrow[d, "f"] \\ S^\wedge \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

avec S de type fini sur $\mathbf{C}$ et Y une famille de surfaces $K3$ polarisée sur S (on ne suppose pas que $S^\wedge$ soit un complété de S). On peut prendre S normal et connexe; soit $s \in S$ l'image du point fermé de $S^\wedge$.

En fait, grâce au théorème d'approximation d'Artin [1], on peut trouver S tel que $S^\wedge$ en soit un complété. S est alors lisse au voisinage de s. Les simplifications qui résultent d'un tel choix sont surtout psychologiques.

Montrons que $f\colon Y \to S$ vérifie 6.2. Quitte à remplacer S par un revêtement étale fini, on définit comme en 5.7 une application holomorphe

$$m\colon S \to X/\Gamma$$

de S dans un espace de module de structures de Hodge polarisées, telle que l'image réciproque de la famille de structures de Hodge universelle sur X/Γ soit $(P^2(Y/S, \mathbf{Z})(1), \psi)$.

D'après Borel (5.1), m est un morphisme de schémas. Le morphisme m est dominant, car le composé $m^\wedge\colon S^\wedge \to X/\Gamma$ l'est. Il en résulte (voir par exemple P. Deligne, Théorie de Hodge II. Publ. Math. IHES **40**, lemme 4.4.17) que $m(\pi_1(S, s))$ est d'indice fini dans $\pi_1(X/\Gamma, m(s)) = \Gamma$, lui-même d'indice fini dans le groupe orthogonal.

6.5. **Proposition.** *Soit Y_0 une surface* K3 *polarisée sur un corps K de caractéristique* 0. *Il existe:*

a) *un schéma S de type fini sur $\mathbf{Q}$, et une famille $f\colon Y \to S$ de surfaces $K3$ polarisées, paramétrée par S;*

b) *une extension finie K' de K et $v\colon$ $\mathrm{Spec}(K') \to S$ tel que $u^* Y$ soit isomorphe à $Y_0 \otimes_K K'$;*

c) *un schéma abélien $a\colon A \to S$ sur S;*

d) *une $\mathbf{Z}$-algèbre C et $\mu\colon C \to \mathrm{End}_S(A)$;*

e) *un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux d'algèbres sur S*

$$u\colon C^+(P^2 f_* \mathbf{Z}_\ell(1), \psi_\ell) \simeq \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbf{Z}_\ell).$$

On se ramène à supposer K de type fini sur $\mathbf{Q}$. Choisissons un plongement complexe $\sigma\colon K \to \mathbf{C}$ et appliquons 6.4 à $Y_0 \otimes_K \mathbf{C}$ pour obtenir une famille de surfaces K3 polarisées $f_1\colon Y_1 \to S_1$. Appliquons 5.7 à f_1; on obtient une famille $f_2\colon Y_2 \to S_2$, vérifiant encore la conclusion de 6.4, et, sur S_2, une schéma abélien $a_2\colon A_2 \to S_2$ à multiplication complexe $\mu_2\colon C \to \mathrm{End}_{S_2}(A_2)$ et un isomorphisme

$$u_2\colon C^+(P^2 f_{2*} \mathbf{Z}(1), \psi) \simeq \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_{2*} \mathbf{Z})$$

de système locaux d'algèbres. Le système de schémas complexes et de morphismes $\Xi_2 = (S_2, f_2, Y_2, a_2, A_2, \mu_2)$ sont définis par un nombre fini d'équations. Il existe donc une extension de type fini K_3 de K, avec $K \subset K_3 \subset \mathbf{C}$, et, sur K_3, un système $\Xi_3 = (S_3; f_3, Y_3, a_3, A_3, \mu_3)$ qui, par extension des scalaires de K_3 à $\mathbf{C}$, fournit Ξ_2.

6.5.1. **Lemme.** *Il existe un unique isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux d'algèbres*

$$u_3\colon C^+(P^2 f_{3*}\mathbf{Z}_\ell(1), \psi_\ell) \simeq \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_{3*}\mathbf{Z}_\ell).$$

Il suffit de vérifier qu'un tel isomorphisme existe et est *unique* après extension des scalaires à une clôture algébrique de K_3, par exemple $\mathbf{C}$. On a l'existence par construction, et l'unicité résulte de 3.5. En effet, pour $s \in S_2$, l'image de $\pi_1(S_2, s)$ dans $O(P^2(Y_{2s}, \mathbf{Z}), \psi)$ est d'indice fini, donc contient un sous-groupe Zariski-dense dans le groupe SO.

Soit T un schéma intègre de type fini sur $\mathbf{Q}$, de corps des fonctions K_3. Pour T convenable, Ξ_3 est la fibre générique d'un système $\Xi = (S, f, Y, a, A, \mu)$ sur T, et u_3 se prolonge en

$$u\colon C^+(P f_* \mathbf{Z}_\ell(1), \psi_\ell) \simeq \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbf{Z}_\ell).$$

On vérifie facilement l'existence de K' comme en b), et ceci achève la démonstration.

6.6. Prouvons le théorème 1.3. Soit donc $f_V\colon Y_V \to \mathrm{Spec}(V)$ comme en 1.2(i). Soit K le corps des fractions de V, et appliquons 6.5 à la surface $Y_K = Y \otimes_V K$ sur K, munie d'une quelconque polarisation. Quitte à remplacer V par son normalisé dans une extension finie de K, on peut supposer qu'il existe $\Xi = (S, f, Y, a, A, \mu, u)$ comme en 6.5, tel que Y_K soit l'image réciproque de Y par $v\colon \mathrm{Spec}(K) \to S$. Par image réciproque, on en déduit une variété abélienne à multiplication complexe (A_K, μ) sur K.

Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $\bar{k}$ la clôture algébrique correspondante de k (le corps résiduel du normalisé de V dans $\bar{K}$). De u, on tire un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-modules

(6.6.1) $$C^+(P^2(Y_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell)(1), \psi_\ell) \simeq \mathrm{End}_C(H^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell)).$$

Puisque Y_V est lisse sur V, le groupe d'inertie I agit trivialement sur $H^2(Y_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell) \simeq H^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)$. La polarisation définit un invariant η dans $H^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1)$, d'orthogonal $P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1)$, et I agit trivialement sur

$$C^+(P^2(Y_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell(1), \psi_\ell) \simeq C^+(P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1), \psi_\ell).$$

Puisque I agit trivialement sur $\mathrm{End}_C(H^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell))$, et commute à la multiplication complexe, il agit via le centre de $C \otimes \mathbf{Q}_\ell$. On sait par ailleurs qu'un sous-groupe d'indice fini de I agit sur $H^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$ de façon unipotente; il en résulte que I agit via un de ses quotients finis. Quitte à encore remplacer K par une extension finie, on peut donc supposer que A_K ait bonne réduction sur V.

Pour A_k la fibre spéciale de sa réduction, (6.6.1) se réduit à un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules

(6.6.2) $$C^+(P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1), \psi_\ell) \simeq \mathrm{End}_C(H^1(A_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)).$$

D'après la théorie de Weil pour A_k, les valeurs propres de Frobenius agissant sur $C^+(P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1), \psi_\ell)$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue 1. On a

$$\overset{2}{\wedge}(P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1) \subset C^+(P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1), \psi_\ell),$$

et, pour $\dim P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell) > 2$ (tel est le cas ici), on en tire que les valeurs propres de Frobenius agissant sur $P^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1)$, elles aussi, sont de valeur absolue complexe 1. Le même énoncé vaut pour $H^2(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell)(1)$, et le théorème en résulte.

7. Remarques

7.1. Soit H une structure de Hodge rationnelle. On appellera *groupe de Mumford-Tate* de H le plus petit sous-groupe algébrique G de $GL(H_{\mathbf{Q}})$, défini sur $\mathbf{Q}$, et tel que $G(\mathbf{R})$ contienne l'image de $h: \underline{S} \to GL(V_{\mathbf{R}})$. Pour H polarisable, G est réductif. Cette définition diffère de celle de Mumford: si H est de poids $n \neq 0$, notre G contient les homothéties. D'après 2.9, toute représentation homogène de G est munie d'une structure de Hodge naturelle.

Un des points-clef dans la démonstration de 1.3 a été que la structure de Hodge $H^2(X, \mathbf{Q})$, pour X une K3, «s'exprime» à l'aide de variétés abéliennes, au sens suivant.

7.2. **Définition.** Une structure de Hodge rationnelle H s'exprime à l'aide de variétés abéliennes si elle appartient à la plus petite catégorie de structures de Hodge rationnelles stable par facteur direct, sommes directes, produits tensoriels, et qui contient les $H^1(A, \mathbf{Q})$ pour A une variété abélienne, ainsi que les $\mathbf{Q}(n)$.

Dans ce numéro, on montre que cette propriété des K3 est exceptionnelle.

Considérons la propriété suivante d'une structure de Hodge rationnelle, de groupe de Mumford-Tate G.

(*) La structure de Hodge de la représentation adjointe $\mathrm{Lie}(G)$ de G est purement de type $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$.

7.3. **Proposition.** *Si une structure de Hodge rationnelle H s'exprime à l'aide de variétés abéliennes, alors la condition* (*) *est vérifiée.*

En effet,

(a) les structures de Hodge $H^1(A, \mathbf{Q})$ et $\mathbf{Q}(n)$ vérifient (*);

(b) la condition (*) est stable par facteurs directs, sommes directes et produits tensoriels.

7.4. Des arguments analogues permettent de montrer que si H s'exprime à l'aide de variétés abéliennes, alors le groupe réductif $G_{\mathbf{C}}$ n'a pas de «facteurs» de type exceptionnel.

7.5. **Proposition.** *Soit H une variation de structures de Hodge polarisée sur un schéma irréductible S. Pour $s \in S$ en dehors d'une partie maigre de S, il existe un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(S, s)$ dont l'image dans $GL(\underline{H}_{s\mathbf{Z}})$ soit contenue dans le groupe de Mumford-Tate de $\underline{H}_s$.*

En tout point de S, le groupe de Mumford-Tate G_s de H_s peut se décrire ainsi. C'est le sous-groupe algébrique de $GL(H_{s\mathbf{Q}})$ qui laisse fixes tous les tenseurs $t \in H_{s\mathbf{Q}}^{\otimes n} \otimes H_{s\mathbf{Q}}^{*\otimes n}$ $(n > 0)$ qui sont rationnels de type $(0, 0)$.

De cette description, on déduit aisément que, en dehors d'une partie maigre M de S, G_s est localement constant: pour $s \notin M$, le plus grand sous-espace de type $(0, 0)$ $V(n)_s \subset H_{s\mathbf{Q}}^{\otimes n} \otimes H_{s\mathbf{Q}}^{*\otimes n}$ est localement constant, et définit un système local $V(n)$ sur S. Ce système local est sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisée de type $(0, 0)$; il existe donc sur $V(n)_s$ une forme quadratique définie positive invariante par $\pi_1(S, s)$, et $\pi_1(S, s)$ agit sur $V(n)_s$ à travers un groupe fini. On conclut en notant qu'il existe une suite finie d'entiers n_i telle que G_s soit le sous-groupe algébrique de $GL(H_{s\mathbf{Q}})$ qui agit trivialement sur les $V(n_i)_s$.

7.6. Considérons un pinceau de Lefschetz d'hypersurfaces de degré d et de dimension impaire $2r-1$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{P}^{2r}(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \arrow[dl, "pr_2"] \\ \mathbf{P}^1(\mathbf{C}). & \end{tikzcd}$$

Soit $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ le complément de l'ensemble fini des $t \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tels que l'hypersurface $X_t = f^{-1}(t)$ soit singulière, et soit $s \in U$. Le cup-produit est une forme alternée ψ sur $H^{2r-1}(X_s, \mathbf{Z})$, respectée par la monodromie, d'où

$$m\colon\ \pi_1(U, s) \to Sp\big(H^{2r-1}(X_s, \mathbf{Z}), \psi\big).$$

D'après un théorème de Kajdan et Margulis, l'image de m est Zariski-dense dans le groupe symplectique. D'après 7.5, pour s en dehors d'une partie maigre (en fait, dénombrable) de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, le groupe de Mumford-Tate de la structure de Hodge rationnelle $H^{2r-1}(X_s, \mathbf{Q})$ est donc le groupe des similitudes symplectiques tout entier. Si cette structure de Hodge n'est pas de niveau de Hodge au plus un (i.e. si un h^{pq} avec $|q-p| \neq 1$ est non nul), on déduit de 7.3 qu'elle ne s'exprime pas à l'aide de variétés abéliennes.

Bibliographie

1. Artin, M.: Algebraisation of formal moduli I. Global analysis. Papers in honor of K. Kodaira. Princeton University Press.
2. Baily, W. L., Borel, A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Annals of Math. (2) **84**, 442–528 (1966). (MR **35**, 6870).
3. Bourbaki, N.: Algèbre – Chapitre 9. Paris: Hermann 1959. Act. Sci. et Ind. 1272.
4. Deligne, P.: Travaux de Griffiths – Séminaire Bourbaki 376 – mai 1970. Lecture Notes in mathematics **180**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.
5. Demazure, M.: Motifs des variétés algébriques – Séminaire Bourbaki 365 – mai 1970. Lecture Notes in mathematics **180**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.
6. Griffiths, P. A.: Periods of integrals on algebraic manifolds. (Summary of main results and discussions of open problems and conjectures.) Bull. Am. Math. Soc. **75**, 228–296 (1970).
7. Kuga, M., Satake, I.: Abelian varieties attached to polarized K3-surfaces. Math. Ann. **169**, 239–242 (1967). (MR **35** 1602).
8. Šafarevitch, Chafonevitch, I. R., Averbuch, B. C., Vaiünberg, Ju. R., Jujtchenko, A. B., Manin, Ju. I., Moishezon, B. C., Tjurina, C. I., Tjurin, A. I.: Algebraic surfaces. Trudi Mat. Inst. Steklov LXXV.
9. Weil, A.: Variétés abéliennes et courbes algébriques. Paris: Hermann 1948.

Pierre Deligne
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, Route de Chartres
F-91 Bures-sur-Yvette
France

(Reçu le 6 août 1971/1 octobre 1971)