Princeton, le 9 Septembre 2014

Cher Serre,

La question suivante, posée par P. Blass, m'a intrigué : “Soit k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Existe-t-il des surfaces projectives et lisses S sur k telles que, quelle que soit la surface projective et lisse S' sur k de corps de fonctions rationnelles $k(S')$ une extension purement inséparable de $k(S)$, S' ne se relève pas en caractéristique 0 ?”

Inspiré par ton article de 1961 où tu contruis des variétés qui ne se relèvent pas, mais en utilisant la cohomologie ℓ-adique, plutôt que la cohomologie cohérente, j'ai vérifié que oui.

Soient S et S' comme ci-dessus, et $f : S' \dashrightarrow S$ une application rationnelle faisant de $k(S')$ une extension purement inséparable de $k(S)$. Parce que f est défini en dehors de la codimension 2, un foncteur f^*, des revêtements étales de S vers ceux de S', est défini. Ce foncteur est une équivalence de catégories. En effet, pour N assez grand, on a une factorisation des Frobenius itérés :

$$S^{1/p^N} \dashrightarrow S' \dashrightarrow S$$
$$S'^{1/p^N} \dashrightarrow S^{1/p^N} \dashrightarrow S'$$

et pour ceux-ci, l'image inverse (par un homéomorphisme universel) est une équivalence.

J'utiliserai le critère de non-relèvement suivant. Comme il ne dépend que du π_1, le passage de S à S' sera automatique.

Proposition. *Supposons que la surface projective et lisse S sur k admette un revêtement étale galoisien $S^\sim$ de groupe de Galois G, tel que la représentation de G donnée par son action sur $H_1(S^\sim, \mathbb{Q}_\ell)$ ne soit pas réalisable sur $\mathbb{Q}$. Alors, S ne se relève pas en caractéristique zéro.*

Supposons qu'un groupe fini G admette une représentation irréductible (complexe) $V_\mathbb{C}$, de caractère rationnel, et d'obstruction à la réaliser sur $\mathbb{Q}$ la classe dans le groupe de Brauer de l'algèbre de quaternions D ramifiée en p et ∞. En d'autres termes, il existe une $\mathbb{Q}$-représentation W, irréductible sur $\mathbb{Q}$, avec $\mathrm{End}(W) = D$ et $W \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C} \sim V_\mathbb{C}^2$. Si en outre pour tout $g \neq e$ dans G, le sous-espace fixe $V_\mathbb{C}^g$ est de codimension ≥ 6 dans $V_\mathbb{C}$, on peut construire comme suit un S auquel s'applique le critère ci-dessus.

Soit $d = \dim_D(W) = \frac{1}{2}\dim(V_\mathbb{C})$. La représentation W nous donne

$$G \to \mathrm{GL}(d, D).$$

Soit E une courbe elliptique supersingulière sur k. On a $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \sim D$ et donc $\mathrm{End}(E^d) \otimes \mathbb{Q} \sim M_d(D)$. Pour A isogène à E^d convenable, $G \to \mathrm{GL}(d, D)$ se factorise par $\mathrm{End}(A)$. De ce que l'action de D sur $H_1(E, \mathbb{Q}_\ell)$ induit un isomorphisme de $D \otimes \mathbb{Q}_\ell$ avec $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell} H_1(E, \mathbb{Q}_\ell)$, on déduit facilement que le caractère de la représentation de G sur $H_1(A, \mathbb{Q}_\ell)$ est celui de $V_\mathbb{C}$.

Pour chaque g dans G, la composante neutre du sous-groupe de A fixé par g est une sous-variété abélienne B de A et $H_1(B, \mathbb{Q}_\ell) = H_1(A, \mathbb{Q}_\ell)^g$. On a donc $\dim A^g = \frac{1}{2} \dim H_1(A, \mathbb{Q}_\ell)^g$, et les hypothèses faites assurent que $\mathrm{codim}\, A^g \geq 3$. Il reste, comme dans ton article, à prendre pour S une intersection complète assez générale dans A/G, et pour $S^\sim$ son image inverse dans A. Celle-ci, en tant qu'intersection complète dans A, aura le même H_1.

Variante : on peut remplacer A par A^n, avec n impair. Le $H_1(A, \mathbb{Q}_\ell)^n$ est une représentation de G non réalisable sur $\mathbb{Q}$. Passer de A à A^n multiplie les codimensions des lieux fixes par $g \in G$ par n. Pour $n \geq 3$, on peut donc répéter l'argument sans plus devoir supposer que $\mathrm{codim}(V_\mathbb{C}^g) \geq 6$ si $g \neq e$: que la représentation soit fidèle suffit.

Il reste à exhiber des groupes et représentations du type voulu. Cela a été fait par B. Gross : *Group representations and lattices,* JAMS **3** 4 (1990) 929–960. Ses résultats ont comme cas particulier le suivant. Supposons que $p \neq 2$ et soit $q = p^f$. Soit $G := \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}_q)$. Sur $\mathbb{C}$, G a deux représentations de Weil, indexées par les deux classes de caractères non triviaux $\psi : (\mathbb{F}_q, +) \to \mathbb{C}^*$ modulo $\psi(x) \mapsto \psi(a^2 x)$. Chacune de ces représentations W est somme de deux représentations irréductibles W^+ et W^- (indexées par les caractères de $O(1)$) de dimension $(q^n \pm 1)/2$. Si q est un carré, les représentations W^- sont du type voulu : à caractère rationnel, non réalisables sur $\mathbb{Q}$, avec pour obstruction la classe de D dans $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$, (loc. cit. cor. 13.7(3) p. 953).

Si la représentation n'est pas fidèle, son noyau est ± 1 et il faut remplacer G par $G/\pm 1$. Pour $q \equiv 1 \pmod 4$, par exemple un carré, c'est le cas si et seulement si n est pair. J'imagine que l'hypothèse sur les codimensions est vérifiée sauf pour de très petites valeurs de q et n (si q est un carré : sauf pour $n = 1$, $q = 9$? ; pour $n = 1$, je l'ai vérifié à partir de la table des caractères). Pour $p = 2$ (ou 3), on peut prendre $G = \mathrm{Aut}(E)$, $A = E^n$, avec n impair ≥ 3.

Bien à toi,
Pierre Deligne