THÉORIE DES GROUPES. — *Le support du caractère d'une représentation supercuspidale.* Note (*) de M. **Pierre Deligne**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

Le caractère d'une représentation supercuspidale d'un groupe semi-simple sur un corps local est à support dans la réunion des sous-groupes compacts ouverts.

1. Rappels sur les groupes monogènes. — Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et $g \in \mathbf{GL}(V)$. Si k est parfait, l'adhérence de Zariski $\langle g \rangle$ du groupe engendré par g est produit d'un groupe multiplicatif $\langle g \rangle_m$ par un groupe unipotent $\langle g \rangle_{un}$. Si $g = su = us$ est la décomposition de Jordan de g en semi-simple et unipotent, on a $\langle g \rangle_m = \langle s \rangle$ et $\langle g \rangle_{un} = \langle u \rangle$. Sans hypothèse sur k, on définit le sous-groupe $\langle g \rangle_m$ de $\langle g \rangle$ comme l'adhérence de Zariski de la réunion des sous-groupes de $\langle g \rangle$ noyau de la multiplication par n, pour n premier à l'exposant caractéristique de k. Cette définition est compatible à l'extension des scalaires, et équivaut à la précédente pour k parfait. Le groupe des caractères de $\langle g \rangle_m$, sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, est le sous-groupe X de $\bar{k}^*$ engendré par les valeurs propres de g, et

$$s \in \langle g \rangle_m(\bar{k}) = \mathrm{Hom}(X, \bar{k}^*)$$

correspond à l'inclusion identique de X.

Supposons k valué complet, d'uniformisante π, soit v la valuation de $\bar{k}$ (à valeurs dans $\mathbf{Q}$) normalisée par $v(\pi) = 1$ et soit $n > 0$ un entier tel que $nv(X) \subset \mathbf{Z}$. L'homomorphisme $nv(x) : X \to \mathbf{Z}$ se transpose en $m_g : \mathbf{G}_m \to \langle g \rangle_m$.

Pour G un groupe algébrique linéaire sur k, et $g \in G(k)$, on peut répéter les constructions précédentes après avoir choisi un plongement $G \subset \mathbf{GL}(V)$. L'homomorphisme $m_g : \mathbf{G}_m \to \langle g \rangle_m \subset G$ ne dépend pas du plongement choisi (pour n fixé). Pour toute représentation linéaire W de G, il définit une action de $\mathbf{G}_m$ sur W, i. e. une graduation de W (SGA 3 I 4.7.3). La partie de degré d est la somme des sous-espaces propres généralisés de g correspondant aux valeurs propres $\alpha \in \bar{k}$ telles que $nv(\alpha) = d$.

Supposons G réductif. Tout homomorphisme m de $\mathbf{G}_m$ dans G définit alors deux paraboliques opposés de G, les paraboliques *contractés* et *dilatés* par m. On notera P_g^+ le parabolique contracté par m_g (on dira aussi : contracté par g). Il admet les caractérisations équivalentes suivantes :

(*a*) Un élément $x \in G(\bar{k})$ est dans P_g^+ (resp. son radical unipotent U_g^+) si et seulement si le morphisme $\lambda \mapsto m_g(\lambda)\, x m_g(\lambda)^{-1} : \mathbf{G}_m \to G$ se prolonge à $\mathbf{G}_a$ [resp. et que $\lim_{\lambda \to 0} m_g(\lambda)\, x m_g(\lambda)^{-1} = e$] — soit encore si et seulement si $\lim_{n \to \infty} g^n x g^{-n}$ existe (resp. $= e$).

(*b*) Lie P_g^+ (resp. Lie U_g^+) est la somme, dans Lie G, des sous-espaces propres généralisés de ad g correspondant aux valeurs propres de valuation $\geqq 0$ (resp. > 0).

On pose $P_g^- = P_{g^{-1}}^+$ [parabolique dilaté par g, contracté par $m_{g^{-1}} = (m_g)^{-1}$] et on note U_g^- son radical unipotent. Les paraboliques P_g^+ et P_g^- sont opposés, et on pose $M_g = P_g^+ \cap P_g^-$.

2. Énoncé et preuve du théorème. — On suppose k localement compact, et G réductif. On note τ la projection de G dans son groupe adjoint G^{ad}. Une représentation

admissible $(\mathscr{H}, \rho)$ de $G(k)$ est *supercuspidale* si ses coefficients sont à support dans des images inverses de compacts de $G^{ad}(k)$.

Si K est un sous-groupe compact de $G(k)$, on note dk la mesure de Haar normalisée sur K et [K] son image dans l'algèbre des distributions à support compact sur $G(k)$. L'endomorphisme $\rho(K) =_{dfn} \rho([K])$ est un projecteur de $\mathscr{H}$ sur le sous-espace $\mathscr{H}^K$ des invariants de K. Que ρ soit supercuspidale signifie encore que, pour tout K sous-groupe compact ouvert K, on a $\rho(K)\,\rho(g)\,\rho(K) = 0$ pour $\tau(g) \in G^{ad}$ hors d'un compact (dépendant de K) convenable. Notons G_c^{ad} la réunion des sous-groupes compacts (ou compacts ouverts, cela revient au même) de $G^{ad}(k)$.

THÉORÈME. — *Si* $(\mathscr{H}, \rho)$ *est une représentation admissible supercuspidale de* $G(k)$, *son caractère* ([1]) *est à support dans* $\tau^{-1}(G_c^{ad})$.

Choisissons un système de coordonnées locales près de e, i. e. un réseau $L \subset \mathrm{Lie}(G)$ et un isomorphisme analytique α de L avec un voisinage de e, tels que

(1) $\alpha(0) = e$ et $d\alpha$ en 0 est l'identité de Lie (G).

Soit $g \in G(k)$. On choisira L tel que

(2) $L = (L \cap \mathrm{Lie}\, U_g^+) \oplus (L \cap \mathrm{Lie}\, M_g) \oplus (L \cap \mathrm{Lie}\, U_g^-)$. Notons $L^+ \oplus L^0 \oplus L^-$ cette décomposition.

(3) $\mathrm{ad}\, g(L^+) \subset L^+$, $\mathrm{ad}\, g(L^0) = L^0$, $\mathrm{ad}\, g^{-1}(L^-) \subset L^-$.

Puisque P_g^+ et P_g^- sont stables par ad g, la condition (3) peut se récrire

(3′) $\mathrm{ad}\, g(L \cap \mathrm{Lie}\, P_g^+) \subset L$ et $\mathrm{ad}\, g^{-1}(L \cap \mathrm{Lie}\, P_g^-) \subset L$.

Notons par un indice i l'intersection avec $G_i = \alpha(\pi^i L)$. Sous les hypothèses (2) (3), il existe i_0 tel que

(4) Pour $i \geqq i_0$, G_i est un sous-groupe de $G(k)$, $G_i = U_{gi}^+ . M_{gi} . U_{gi}^-$ et

(5) $\mathrm{Int}\, g(U_{gi}^+) \subset U_{gi}^+$, $\mathrm{Int}\, g(M_{gi}) = M_{gi}$ et $\mathrm{Int}\, g^{-1}(U_{gi}^-) \subset U_{gi}^-$.

Ceci résulte de la décomposition $U_g^+ \times M_g \times U_g^- \hookrightarrow G : (u^+, m, u^-) \mapsto u^+ m u^-$ d'un voisinage de e.

De plus, pour i_0 assez grand, il existe un voisinage V de g tel que (2) à (5) restent pour g remplacé par $g' \in V$: pour (2) et (3′), on utilise que P_g^+ et ad g dépendent continûment de g; pour (4) (5) on utilise que m_g, donc $P_g^\pm$, dépend analytiquement de g, de sorte que dans la décomposition $x = u^+ m u^-$, les composantes u^+, m et u^- sont fonctions analytiques du couple (x, g).

LEMME. — *Si les conditions* (1) *à* (5) *sont remplies, que* $i \geqq i_0$, *et que* $\tau(g) \notin G_c^{ad}$, *alors* $\rho(G_i)\,\rho(g)\,\rho(G_i)$ *est nilpotent.*

Pour la décomposition $U_g^+ \times M_g \times U_g^- \to G$ de la grosse cellule de G, on a la relation $dg = \lambda(m)\, du^+\, dm\, du^-$ entre mesures de Haar, où λ est un caractère de M_g. Sur tout sous-groupe compact de M_g, $\lambda = 1$, de sorte que $[G_i] = [U_{gi}^+] \bigstar [M_{gi}] \bigstar [U_{gi}^-]$.

Prouvons par récurrence sur N que $([G_i]\, g\, [G_i])^N = [G_i]\, g^N\, [G_i]$ dans l'algèbre des distributions à support compact sur G (on écrit g pour δ_g). En effet,

$$
\begin{aligned}
([G_i]\, g^N [G_i])([G_i]\, g\, [G_i]) &= [G_i]\, g^N [G_i]\, g\, [G_i] \\
&= [G_i]\, g^N [U_{gi}^+][M_{gi}][U_{gi}^-]\, g\, [G_i] \\
&= [G_i][g^N U_{gi}^+ g^{-N}][g^N M_{gi} g^{-N}]\, g^N g\, [g^{-1} U_{gi}^- g][G_i] \\
&= [G_i]\, g^{N+1} [G_i].
\end{aligned}
$$

Si $\tau(g) \notin G^{ad}$, l'ensemble des $\tau(g^N)$ ($N \geqq 1$) n'est pas relativement compact. Puisque ρ est supercuspidale, il existe donc N tel que

$$(\rho(G_i)\rho(g)\rho(G_i))^N = \rho(G_i)\rho(g^N)\rho(G_i) = 0.$$

Preuve du théorème. — Pour $g \in G(k)$ tel que $\tau(g) \notin G_c^{ad}$, choisissons L, α, i_0 et V comme ci-dessus, et tels que $g\,G_{i_0} \subset V$. Notons Θ le caractère de ρ. Pour tout $g' \in g\,G_i$, et tout $i \geqq i_0$, on a alors

$$\Theta(g'[G_i]) = \Theta([G_i]\,g'[G_i]) = \mathrm{Tr}(\rho(G_i)\rho(g')\rho(G_i)) = 0$$

de par le lemme, et les sous-groupes G_i formant un système fondamental de voisinage de 0, Θ est nul sur $g\,G_i$, et son support ne contient pas g.

Remarque 1. — Le même théorème vaut, avec la même démonstration, pour un groupe analytique revêtement fini étale d'un sous-groupe ouvert de G. L'hypothèse devient « l'image dans G^{ad} du support des coefficients est relativement compacte »; la conclusion « l'image dans G^{ad} du support de Θ est dans G_c^{ad} ».

Remarque 2. — Soit p la caractéristique résiduelle de k. La démonstration ne fait un usage réel des mesures de Haar [K] que pour K petit, et en particulier un p-groupe. Le théorème, et sa démonstration, valent donc pour les représentations à coefficients dans un quelconque corps de caractéristique $\neq p$.

(*) Séance du 24 mai 1976.

(1) Une fois choisie une mesure de Haar dg sur G, le caractère Θ de ρ est la distribution sur G de valeur sur une fonction-test φ la trace $\mathrm{Tr}\left(\int \varphi(g)\rho(g)\,dg\right)$. Plus intrinsèquement, c'est la fonction généralisée [forme linéaire sur l'espace des mesures $\varphi(g)\,dg$ pour $\varphi(g)$ localement constante à support compact et dg une mesure de Haar] donnée par cette même formule.

Institut des Hautes Études scientifiques,
Le Bois-Marie,
91440 *Bures-sur-Yvette.*