Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Vol. 33 (1979), part 2, pp. 313–346

VALEURS DE FONCTIONS L ET PÉRIODES D'INTÉGRALES

P. DELIGNE

Dans cet article, j'énonce une conjecture (1.8, 2.8) reliant les valeurs de certaines fonctions L en certains points entiers à des périodes d'intégrales.

Les fonctions L considérées sont celles des motifs—un mot auquel on n'attachera pas un sens précis. Ceci inclut notamment les fonctions L d'Artin, les fonctions L attachées à des caractères de Hecke algébriques (= Grössencharakter de type A_0), et celles attachées aux formes modulaires holomorphes sur le demi-plan de Poincaré, supposées primitives (= new forms; on considère toutes les fonctions L, L_k, attachées aux puissances symétriques, Sym^k, de la représentation l-adique correspondante).

Cet article doit le jour à D. Zagier: pour son insistance à demander une conjecture, et pour la confirmation expérimentale qu'il en a donnée, sitôt émise, pour les fonctions L_3 et L_4 attachées à $\Delta = \sum \tau(n)q^n$ (voir [18]). C'est cette confirmation qui m'a donné la confiance nécessaire pour vérifier que la conjecture était compatible aux résultats de Shimura [13] sur les valeurs de fonctions L de caractères de Hecke algébriques.

0. Motifs. *Le lecteur est invité à ne consulter ce paragraphe qu'au fur et à mesure des besoins.* On y rappelle une partie du formalisme, dû à Grothendieck, des motifs. Pour les démonstrations, je renvoie à [8].

0.1. La définition de Grothendieck des *motifs sur un corps k* a la forme suivante.

(a) Soit $\mathscr{V}(k)$ la catégorie des variétés projectives et lisses sur k. On construit une catégorie additive $\mathscr{M}'(k)$, pour laquelles les groupes $\mathrm{Hom}(M, N)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$, munie de

α. Un produit tensoriel $\otimes$, associatif, commutatif et distributif par rapport à l'addition des objects ("associatif" et "commutatif" n'est pas une propriété du foncteur $\otimes$, mais une donnée, soumise à certaines compatibilités—cf. Saavedra [19]);

β. Un foncteur contravariant H^*, de $\mathscr{V}(k)$ dans $\mathscr{M}'(k)$, bijectif sur les objets et transformant sommes disjointes en sommes, et produits en produits tensoriels (donnée d'un isomorphisme de foncteurs $H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y)$, compatible à l'associativité et à la commutativité).

Il s'agit, pour l'essentiel, de définir $\mathrm{Hom}(H^*(X), H^*(Y))$. Pour la définition, uti-

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 10D25, 14K10.

lisée par Grothendieck, de ce groupe comme un groupe de classes de correspondances entre X et Y, voir 0.6.

(b) Rappelons (SGA 4 IV 7.5) qu'une catégorie additive est *karoubienne* si tout projecteur (= endomorphisme idempotent) est défini par une décomposition en somme directe, et que chaque catégorie additive a une *enveloppe karoubienne*, obtenue en lui adjoignant formellement les images des projecteurs. La catégorie $\mathscr{M}_{\mathrm{eff}}(k)$ des *motifs effectifs sur* k est l'enveloppe karoubienne de $\mathscr{M}'(k)$.

(c) On définit le *motif de Tate* $\boldsymbol{Z}(-1)$ comme un facteur direct $H^2(\boldsymbol{P}^1)$ convenable de $H^*(\boldsymbol{P}^1)$. On vérifie que la symétrie (déduite de la commutativité de $\otimes$): $\boldsymbol{Z}(-1) \otimes \boldsymbol{Z}(-1) \to \boldsymbol{Z}(-1) \otimes \boldsymbol{Z}(-1)$ est l'identité, et que le foncteur $M \to M \otimes \boldsymbol{Z}(-1)$ est pleinement fidèle.

(d) La catégorie $\mathscr{M}(k)$ des motifs sur k se déduit de $\mathscr{M}_{\mathrm{eff}}(k)$ en rendant inversible le foncteur $M \to M \otimes \boldsymbol{Z}(-1)$.

Notons (n) l'itéré $(-n)^{\text{ième}}$ de l'auto-équivalence $M \to M \otimes \boldsymbol{Z}(-1)$. La catégorie $\mathscr{M}(k)$ admet $\mathscr{M}_{\mathrm{eff}}(k)$ comme sous-catégorie pleine, et tout object de $\mathscr{M}(k)$ est de la forme $M(n)$ pour M dans $\mathscr{M}_{\mathrm{eff}}(k)$ et n un entier.

Par définition, si F est un foncteur additif de $\mathscr{M}'(k)$ dans une catégorie karoubienne $\mathscr{A}$, il se prolonge à $\mathscr{M}_{\mathrm{eff}}(k)$. Si $\mathscr{A}$ est munie d'une auto-équivalence $A \to A(-1)$, et le prolongement de F d'un isomorphisme de foncteurs $F(M(-1)) = F(M)(-1)$, il se prolonge à $\mathscr{M}(k)$.

EXEMPLE 0.1.1. Si k' est une extension de k, et F le foncteur $H^*(X) \to H^*(X \otimes_k k')$ de $\mathscr{M}'(k)$ dans $\mathscr{M}(k')$, on obtient le foncteur *extension des scalaires* de $\mathscr{M}(k)$ dans $\mathscr{M}(k')$. Si k' est une extension finie de k, on dispose du foncteur de restriction des scalaires à la Grothendieck

$$\amalg_{k'/k}: \mathscr{V}(k') \to \mathscr{V}(k): (X \to \mathrm{Spec}(k')) \mapsto (X \to \mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)).$$

On le prolonge en $F: H^*(X) \mapsto H^*(\amalg_{k'/k} X)$, d'où un foncteur de *restriction des scalaires* $R_{k'/k}: \mathscr{M}(k') \to \mathscr{M}(k)$.

EXEMPLE 0.1.2. Soit $\mathscr{H}$ une "théorie de cohomologie", à valeurs dans une catégorie karoubienne $\mathscr{A}$, fonctorielle pour les morphismes dans $\mathscr{M}'(k)$. Le foncteur $\mathscr{H}$ se prolonge à $\mathscr{M}_{\mathrm{eff}}(k)$. Si $\mathscr{A}$ est muni d'un produit tensoriel, que $\mathscr{H}$ vérifie une formule de Künneth et que la tensorisation avec $\mathscr{H}(\boldsymbol{Z}(-1))$ est une auto-équivalence de $\mathscr{A}$, il se prolonge à $\mathscr{M}(k)$. Ce prolongement est le foncteur "*réalisation d'un motif dans la théorie* $\mathscr{H}$".

Nous noterons (n) l'auto-équivalence de $\mathscr{A}$ itéré $(-n)^{\text{ième}}$ de la tensorisation avec $\mathscr{H}(\boldsymbol{Z}(-1))$. Pour la détermination de $\mathscr{H}(\boldsymbol{Z}(-1))$ dans diverses théories $\mathscr{H}$, voir 3.1.

0.2. Nous utiliserons les réalisations suivantes:

0.2.1. *Réalisation de Betti* H_B. Correspondant à $k = \boldsymbol{C}$, $\mathscr{A}$ = espaces vectoriels que $\boldsymbol{Q}$, $\mathscr{H}$ = cohomologie rationnelle: $X \mapsto H^*(X(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{Q})$;

0.2.2. *Réalisation de de Rham* H_{DR}. Correspondant à k de caractéristique 0, $\mathscr{A}$ = espaces vectoriels sur k, $\mathscr{H}$ = cohomologie de de Rham : $X \mapsto \boldsymbol{H}^*(X, \Omega_X^*)$;

0.2.3. *Réalisation l-adique* H_l. Correspondant à k algébriquement clos, de caractéristique $\neq l$, $\mathscr{A}$ = espaces vectoriels sur $\boldsymbol{Q}_l$, $\mathscr{H}$ = cohomologie l-adique: $X \mapsto H^*(X, \boldsymbol{Q}_l)$.

Et leurs variantes:

0.2.4. *Réalisation de Hodge*. k est ici une clôture algébrique de $\boldsymbol{R}$, et $\mathscr{A}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\boldsymbol{Q}$, de complexifié $V \otimes k$ muni d'une bigraduation

$V \otimes k = \bigoplus V^{p,q}$ telle que V^{qp} soit le complexe conjugué de V^{pq}. Pour théorie de cohomologie, on prend le foncteur $X \mapsto H^*(X(k), \mathbf{Q})$ muni de la bigraduation de son complexifié $H^*(X(k), k)$ fournie par la théorie de Hodge. La réalisation de Betti est sous-jacente à celle de Hodge.

0.2.5. Pour k quelconque, et σ un plongement complexe de k, on note $H_\sigma(M)$ la réalisation de Betti du motif sur $\mathbf{C}$ déduit de M par l'extension des scalaires $\sigma: k \to \mathbf{C}$. Notons c la conjugaison complexe. On obtient par transport de structure un isomorphisme $F_\infty: H_\sigma(M) \xrightarrow{\sim} H_{c\sigma}(M)$, et $F_\infty \otimes c$ envoie H_σ^{pq} sur $H_{c\sigma}^{pq}$. Pour σ réel, F_∞ est une involution de $H_\sigma(M)$, dont le complexifié échange $H_\sigma^{pq}(M)$ et $H_\sigma^{qp}(M)$.

La *σ-réalisation de Hodge* est $H_\sigma(M)$, muni de sa bigraduation de Hodge et, si σ est réel, de l'involution F_∞. Pour $k = \mathbf{Q}$, ou $k = \mathbf{R}$ et σ le plongement identique, on remplace l'indice σ par B. Pour $k = \mathbf{R}$, et $M = H^*(X)$, l'involution F_∞ de $H_B^*(M) = H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ est l'involution induite par la conjugaison complexe $F_\infty : X(\mathbf{C}) \to X(\mathbf{C})$.

0.2.6. *Réalisation de de Rham.* La cohomologie de de Rham est munie d'une filtration naturelle, la *filtration de Hodge*, aboutissement de la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega^p) \Rightarrow H_{DR}^{p+q}(X).$$

De là, une filtration F sur $H_{DR}(M)$.

0.2.7. *Réalisation l-adique.* Si X st une variété sur un corps k, de clôture algébrique $\bar{k}$, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit par transport de structure sur $H^*(X_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$. Si M est un motif sur k, et qu'on définit $H_l(M)$ comme la réalisation l-adique du motif sur $\bar{k}$ qui s'en déduit par extension des scalaires, ceci fournit une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $H_l(M)$.

0.2.8. *Réalisation adélique finie.* Pour k algébriquement clos, de caractéristique 0, on peut rassembler les cohomologies l-adiques en une cohomologie adélique

$$H^*(X, \mathbf{A}^f) = (\Pi H^*(X, \mathbf{Z}_l)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

On peut cumuler les variantes 0.2.7 et 0.2.8.

0.2.9. Dans les exemples 0.2.1, 0.2.2, 0.2.3, et leurs variantes, on peut remplacer la catégorie $\mathscr{A}$ par celle, $\mathscr{A}^*$, des objets gradués de $\mathscr{A}$: utiliser la graduation naturelle de H^*. Pour que la formule de Künneth fournisse un isomorphisme de foncteurs $\mathscr{H}(M \otimes N) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(M) \otimes \mathscr{H}(N)$, compatible à l'associativité et à la commutativité, il faut prendre pour donnée de commutativité dans $\mathscr{A}^*$ celle donnée par la règle de Koszul.

0.3. Pour $k = \mathbf{C}$, le théorème de comparaison entre cohomologie classique et cohomologie étale fournit un isomorphisme $H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_l \xrightarrow{\sim} H^*(X, \mathbf{Q}_l)$. Si X est défini sur $\mathbf{R}$, cet isomorphisme transforme F_∞ (0.2.5) en l'action (0.2.7) de la conjugaison complexe. Pour un motif, on a de même $H_B(M) \otimes \mathbf{Q}_l \xrightarrow{\sim} H_l(M)$.

0.4. Pour $k = \mathbf{C}$, le complexe de de Rham holomorphe sur X^{an} est une résolution du faisceau constant $\mathbf{C}$. Par GAGA, on a donc un isomorphisme

$$H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C} = H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^*(X^{\mathrm{an}}, \Omega^{*\mathrm{an}}) \xleftarrow{\sim} H^*(X, \Omega^*).$$

Pour un motif, on obtient un isomorphisme (compatible aux filtrations de Hodges 0.2.4 : $F^p = \bigoplus_{p' \geq p} V^{p'q'}$ et 0.2.6) $H_B(M) \otimes \mathbf{C} \to^{\sim} H_{DR}(M)$.

Soit plus généralement M un motif sur un corps k, et σ un plongement complexe de k. Appliquant ce qui précède au motif sur $\boldsymbol{C}$ déduit de M par extension des scalaires, on trouve un isomorphisme

$$(0.4.1) \qquad I: H_\sigma(M) \otimes \boldsymbol{C} \xrightarrow{\sim} H_{DR}(M) \otimes_{k,\sigma} \boldsymbol{C}.$$

Notons le cas particulier $k = \boldsymbol{Q}$, où on trouve deux $\boldsymbol{Q}$-structures naturelles sur la réalisation de M en cohomologie complexe : l'une, $H_B(M)$, liée à la description de la cohomologie en terme de cycles, l'autre, $H_{DR}(M)$, liée à sa description en terme de formes différentielles algébriques.

0.5. Ce qu'il advient de ces réalisations et compatibilités par extension du corps des scalaires est clair. Pour la restriction des scalaires, les résultats sont les suivants. Soient k' une extension finie de k, M' un motif sur k', et $M = R_{k'/k}(M')$

$$(0.5.1) \qquad H_\sigma(\mathrm{M}) = \bigoplus_\tau H_\tau(M'),$$

où la somme est étendue à l'ensemble $J(\sigma)$ des plongement complexes de k' qui prolongent σ. Cet isomorphisme est compatible aux bigraduations de Hodge, et à F_∞.

$$(0.5.2) \qquad H_{DR}(M) = H_{DR}(M') \quad \text{(restriction des scalaires de } k' \text{ à } k).$$

Cet isomorphisme est compatible à la filtration de Hodge.

$$(0.5.3) \qquad H_l(M) = \mathrm{Ind}\, H_l(M') \quad \text{(représentation induite de } \mathrm{Gal}(\bar{k}/k') \text{ à } \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)).$$

(0.5.4) Via l'isomorphisme $k' \otimes_{k,\sigma} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{J(\sigma)}$, et l'isomorphisme $H_{DR}(M') \otimes_{k,\sigma} \boldsymbol{C} = \bigoplus_{\tau \in J(\sigma)} H_{DR}(M') \otimes_{k',\tau} \boldsymbol{C}$ qui s'en déduit, (0.4.1) pour M et σ est la somme des isomorphismes (0.4.1) pour M' et τ $(\tau \in J(\sigma))$:

$$\begin{tikzcd}
H_\sigma(M) \otimes \boldsymbol{C} \arrow[r, "(0.4.1)", "\sim"'] \arrow[d, equal, "(0.5.1)"] & H_{DR}(M) \otimes_{k,\sigma} \boldsymbol{C} \arrow[d, equal, "(0.5.2)"] \\
\bigoplus_\tau H_\tau(M') \otimes \boldsymbol{C} \arrow[r, "(0.4.1)", "\sim"'] & \bigoplus_\tau H_{DR}(M') \otimes_{k',\tau} \boldsymbol{C}.
\end{tikzcd}$$

0.6. Pour X projectif et lisse sur k, notons $Z^d(X)$ l'espace vectoriel sur $\boldsymbol{Q}$ de base l'ensemble des sous-schémas fermés irréductibles de codimension d de X, et $Z^d_R(X)$ son quotient par une relation d'équivalence R. Pour k de caractéristique 0, une des définitions de Grothendieck des motifs s'obtient en faisant (pour X et Y connexes) $\mathrm{Hom}(H^*(Y), H^*(X)) = Z_R^{\dim(Y)}(X \times Y)$, R étant l'équivalence cohomologique. En ce qui concerne la caractéristique p, signalons seulement deux difficultés: on ignore si l'équivalence cohomologique—en cohomologie l-adique $(l \neq p)$—est indépendante de l, et la définition de la classe d'un cycle pose des problèmes en cohomologie cristalline.

0.7. Soit X une variété projective et lisse complexe. Nous appellerons *cycle de Hodge* de codimension d sur X un élément de $H^{2d}(X(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{Q})$ de type (d, d)—soit, ce qui revient au même, un élément de $H^{2d}(X(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{Q})(d)$ de type $(0, 0)$.

Soient k un corps algébriquement clos et X une variété projective et lisse sur k. Posons

$$H^{2d}(X, k \times A^f)(d) = H^{2d}_{DR}(X)(d) \times H^{2d}(X, A^f)(d).$$

Pour $k = C$, on appelle encore *cycle de Hodge* l'image dans

$$H^{2d}(X, k \times A^f)(d) = H^{2d}(X(C), Q)(d) \otimes (k \times A^f)$$

d'un cycle de Hodge. Pour k algébriquement clos, admettant des plongements complexes, un *cycle de Hodge absolu* de codimension d sur X est un élément de $H^{2d}(X, k \times A^f)(d)$, tel que, pour tout plongement complexe σ de k, son image dans $H^{2d}(X \otimes_k C, C \times A^f)(d)$ soit de Hodge. On vérifie que

PROPOSITION 0.8. (i) *L'espace vectoriel sur Q $Z^d_{\mathrm{ha}}(X)$ des cycles de Hodge absolu est invariant par extension des scalaires de k à un corps algébriquement clos k' (admettant encore un plongement complexe).*

(ii) *Pour k algébriquement clos de caractéristique 0, et X défini sur un sous-corps algébriquement clos k_0 de k, admettant un plongement complexe: $X = X_0 \otimes_{k_0} k$, on pose*

$$Z^d_{\mathrm{ha}}(X) = Z^d_{\mathrm{ha}}(X_0) \subset H^{2d}(X_0, k_0 \times A^f)(d) \subset H^{2d}(X, k \times A^f)(d).$$

D'après (i), *cette définition ne dépend pas des choix de X_0 et k_0.*

(iii) *Pour X défini sur un sous-corps k_0 de k: $X = X_0 \otimes_{k_0} k$, le groupe* $\mathrm{Aut}(k/k_0)$ *agissant sur $H^{2d}(X, k \times A^f)(d)$ stabilise $Z^d_{\mathrm{ha}}(X)$. Il agit sur $Z^d_{\mathrm{ha}}(X)$ à travers un groupe fini, correspondant à une extension finie k_0' de k_0. On pose $Z^d_{\mathrm{ha}}(X_0) = Z^d_{\mathrm{ha}}(X)^{\mathrm{Aut}(k/k_0)}$.*

0.9. Une notion utile de motif s'obtient en faisant (pour X et Y connexes)

$$\mathrm{Hom}(H^*(Y), H^*(X)) = Z^{\dim(Y)}_{\mathrm{ha}}(X \times Y).$$

Les composantes de Künneth de la diagonale de $X \times X$ sont absolument de Hodge. Ceci permet de décomposer $H^*(X)$ en une somme de motifs $H^i(X)$, de munir la catégorie des motifs d'une graduation (avec $H^i(X)$ de poids i) et de modifier la contrainte de commutativité pour $\otimes$ comme en [**19**, VI, 4.2.1.4]. On vérifie que, ceci fait, la $\otimes$-catégorie des motifs sur k est tannakienne, isomorphe à la catégorie des représentations d'un groupe proalgébrique réductif.

Pour $k = C$, la conjecture suivante, plus faible que celle de Hodge, équivaut à dire que le foncteur "réalisation de Hodge" est une équivalence de la catégorie des motifs 0.9 avec la catégorie des structures de Hodge facteur direct de la cohomologie de variété algébriques (ou déduites par twist à la Tate de tels facteurs directs).

Espoir 0.10. Tout cycle de Hodge l'est absolument.

Si X est une variété abélienne à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire K, avec $\mathrm{Lie}(X)$ libre sur $k \otimes K$, les méthodes de B. Gross [7] prouvent que certains cycles de Hodge non triviaux sont absolument de Hodge. Ajouté sur épreuves: partant de ce cas particulier, j'ai pu vérifier 0.10 pour les variétés abéliennes. J'ai vérifié aussi que la $\otimes$-catégorie de motifs (0.9) engendrée par les $H^\wedge(X)$, pour X une variété abélienne, contient les motifs $H^*(X)$, pour X une surface K3 ou une hypersurface de Fermat.

0.11. Le principal défaut de la définition 0.9 des motifs est qu'elle ne se prête pas à la réduction mod p. On ignore si un motif 0.9 sur un corps de nombres F fournit un système compatible de réprésentations l-adiques de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.

0.12. Nous utiliserons le mot "motif" de façon libre, sans nous préoccuper de faire rentrer les motifs considérés dans le cadre de Grothendieck. L'essentiel pour nous sera de disposer de réalisations $\mathscr{H}(M)$, pour les théories $\mathscr{H}$ considérées en 0.2, et d'avoir pour ces groupes le même formalisme que pour les $\mathscr{H}^*(X)$.

1. Enoncé de la conjecture (cas rationnel).

1.1. Soit M un motif sur $\boldsymbol{Q}$. Nous admettrons que les réalisations l-adiques $H_l(M)$ de M forment un système strictement compatible de représentations l-adiques, au sens de Serre [**11**, I.11]. A savoir : il existe un ensemble fini S de nombres premiers, tel que chaque $H_l(M)$ soit non ramifié en dehors de $S \cup \{l\}$, et que, notant par $F_p \in \mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ un élément de Frobenius géométrique en p (l'inverse d'une substitution de Frobenius φ_p), le polynôme $\det(1 - F_p t, H_l(M)) \in \boldsymbol{Q}_l[t]$ $(p \notin S \cup \{l\})$ soit à coefficients rationnels, et indépendant de l. Notons $Z_p(M, t)$ son inverse, et posons $L_p(M, s) = Z_p(M, p^{-s})$.

La série de Dirichlet à coefficients rationnels donnée par le produit eulérien $L_S(M, s) = \prod_{p \notin S} L_p(M, s)$ converge pour $\mathscr{R}s$ assez grand. Pour s quelconque, on définit $L_S(M, s)$ par un prolongement analytique (qu'on espère exister).

Notre but est d'énoncer une conjecture donnant la valeur de $L_S(M, s)$ en certains points entiers, au produit près par un nombre rationnel. Puisque, pour s entier, p^{-s} est rationnel, le choix de S est sans importance—à ceci près qu'aggrandir S peut introduire des zéros mal venus.

1.2. Pour écrire proprement l'équation fonctionnelle conjecturale des fonctions L, il y a lieu de compléter le produit eulérien $L_S(M, s)$ par des facteurs locaux en $p \in S$, et à l'infini. La définition des facteurs locaux en $p \in S$ requiert une hypothèse additionnelle, que nous supposerons vérifiée:

(1.2.1) Soient p un nombre premier, $D_p \subset \mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ un groupe de décomposition en p, $I_p \subset D_p$ son sous-groupe d'inertie et $F_p \in D_p$ un Frobenius géométrique. Le polynôme $\det(1 - F_p t, H_l(M)^{I_p}) \in \boldsymbol{Q}_l[t]$ $(l \neq p)$ est à coefficients rationnels, et est indépendant de l.

Posons $Z_p(M, t) = \det(1 - F_p t, H_l(M)^{I_p})^{-1} \in \boldsymbol{Q}(t)$, et $L_p(M, s) = Z_p(M, p^{-s})$. On définit

$$L(M, s) = \prod_p L_p(M, s). \tag{1.2.2}$$

Le facteur à l'infini $L_\infty(M, s)$ (essentiellement un produit de fonctions Γ) dépend de la réalisation de Hodge de M—en fait seulement de la classe d'isomorphie de l'espace vectoriel complexe $H_B(M) \otimes \boldsymbol{C}$, muni de sa décomposition de Hodge et de l'involution F_∞. Sa définition est rappelée en 5.2.

Posant $\Lambda(M, s) = L_\infty(M, s)L(M, s)$, l'équation fonctionnelle conjecturale des fonctions L s'écrit

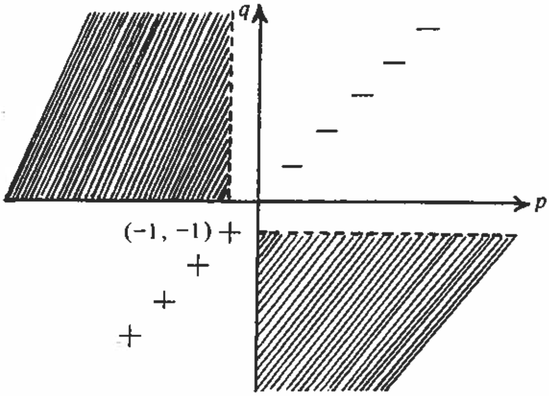
$$\Lambda(M, s) = \varepsilon(M, s)\Lambda(\check{M}, 1-s) \tag{1.2.3}$$

où $\check{M}$ est le dual de M (de réalisations les duales des réalisations de M) et où $\varepsilon(M, s)$, comme fonction de s, est le produit d'une constante par une exponentielle. Sa définition est rappelée en 5.2. Elle dépend d'une hypothèse additionnelle.

DÉFINITION 1.3. *Un entier n est* critique *pour M si ni $L_\infty(M, s)$, ni $L_\infty(\check{M}, 1-s)$ n'ont de pôle en $s = n$.*

Notre but est de conjecturer la valeur de $L(M, n)$ pour n critique, à multiplication par nombre rationnel près. On a $L(M(n), s) = L(M, n+s)$ (3.1.2), et de même pour L_∞. Ceci nous permet de ne considérer que les nombres $L(M) =_{\text{dfn}} L(M, 0)$. Nous dirons que M est *critique* si 0 est critique pour M. On vérifie que pour que M soit critique, il faut et il suffit que les nombres de Hodge $h^{pq} =_{\text{dfn}} \dim H^{pq}(M)$ de M, pour $p \neq q$, ne soient non nuls que pour (p, q) dans la partié hachurée du diagramme ci-dessous, et que F_∞ agisse sur $H^{p,p}$, par l'identité si $p < 0$, par -1 si $p \geqq 0$.

(1.3.1)



Supposons *M homogène de poids w*: $h^{pq} = 0$ pour $p + q \neq w$, et posons $\mathscr{R}(M) = -w/2$. Il résulte de la conjecture de Weil que, pour S assez grand, la série de Dirichlet $L_S(M, s)$ converge absolument pour $\mathscr{R}(M) + \mathscr{R}(s) > 1$. Pour $\mathscr{R}(M) + \mathscr{R}(s) = 1$, on est au bord du demi-plan de convergence, et on conjecture

(a) que $L_S(M, s)$ ne s'annule pas,

(b) que $L_S(M, s)$ est holomorphe, sauf si M est de poids pair $-2n$, et contient $Z(n)$ en facteur: on s'attend alors à un pôle en $s = 1 - n$ (une valeur non critique).

L'analogie avec le cas des corps de fonctions, et les cas connus, mènent à croire que les facteurs locaux $L_p(M, s)$ (p quelconque, y compris ∞) n'ont de pôle que pour $\mathscr{R}(M) + \mathscr{R}(s) \leqq 0$. Si tel est le cas, (a), (b) et l'équation fonctionnelle conjecturale (1.2.3) impliquent que $L(M) \neq 0, \infty$ pour M critique et $\mathscr{R}(M) \neq \frac{1}{2}$. Pour $\mathscr{R}(M) = \frac{1}{2}$, $L(M)$ s'annulle parfois. Notre conjecture (1.8) est alors vide.

PROPOSITION 1.4. *Soit M un motif sur $\mathbf{R}$. Via l'isomorphisme* (0.4.1)

$$H_B(M) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H_{DR}(M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C},$$

$H_{DR}(M)$ s'identifie au sous-espace de $H_B(M) \otimes \mathbf{C}$ fixe par $c \to F_\infty \bar{c}$.

Prenons $M = H^*(X)$. La conjugaison complexe sur $H_{DR}(M)_{\mathbf{C}} = H^*(X_{\mathbf{C}}, \Omega^*)$ se déduit par fonctorialité de l'automorphisme antilinéaire F_∞ du schéma $X_{\mathbf{C}}$. Remontant la flèche composée (0.4) qui définit I, on l'identifie à l'involution déduite de l'automorphisme $(F_\infty, \bar{F}_\infty^*)$ de $(X(\mathbf{C}), \Omega^{*\text{an}})$, puis au composé de F_∞^*: $H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{C}) \to H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ et de la conjugaison complexe sur les coefficients. Ceci vérifie 1.4.

1.5. Pour M un motif sur $\mathbf{R}$, nous noterons $H_B^+(M)$ (resp. $H_B^-(M)$) le sous-espace de $H_B(M)$ fixe par F_∞ (resp. où $F_\infty = -1$). Posons $d(M) = \dim H_B(M)$ et $d^\pm(M) = \dim H_B^\pm(M)$. Pour M un motif sur k, et σ un plongement complexe de k qui se factorise par $\mathbf{R}$, on note $H_\sigma^\pm(M)$, $d_\sigma^\pm(M)$ et $d(M)$ ces objets pour le motif sur $\mathbf{R}$ déduit de M par σ. Pour $k = \mathbf{Q}$, on omet la mention de σ.

Le corollaire suivant résulte aussitôt de 1.4, et de ce que tant F_∞ que la conjugaison complexe échangent H^{pq} et H^{qp}.

COROLLAIRE 1.6. *Soit M un motif sur $\mathbf{R}$. Pour la structure réelle $H_{DR}(M)$ de $H_B(M) \otimes \mathbf{C}$, les sous-espaces H^{pq} sont définis sur $\mathbf{R}$; le sous-espace $H_B^+(M) \otimes \mathbf{R}$ est réel, et $H_B^-(M) \otimes \mathbf{R}$ est purement imaginaire.*

1.7. Dans la fin de ce paragraphe, nous ne considérerons que des motifs sur $\mathbf{Q}$; sauf mention expresse du contraire, nous les supposons homogènes. Si leur poids w est pair, nous supposerons aussi que F_∞ agit sur $H^{pp}(M)$ ($w = 2p$) comme un scalaire: soit $+1$, soit -1. Cette hypothèse est vérifiée pour M critique. Puisque F_∞ échange H^{pq} et H^{qp}, elle assure que les dimensions $d^+(M)$ et $d^-(M)$ sont égales l'une à $\sum_{p>q} h^{pq}$, l'autre à $\sum_{p\geqq q} h^{pq}$. En particulier, ces dimensions sont égales à celles de sous-espaces F^+ et F^- figurant dans la filtration de Hodge. Posant $H_{DR}^\pm(M) = H_{DR}(M)/F^\mp$, on a encore $\dim H_{DR}^\pm(M) = d^\pm(M)$.

Il résulte de ce que F_∞ échange H^{pq} et H^{qp} que les applications composées

$$(1.7.1)\qquad I^\pm\colon H_B^\pm(M)_C \longrightarrow H_B(M)_C \xrightarrow[\sim]{I} H_{DR}(M)_C \longrightarrow H_{DR}^\pm(M)_C$$

sont des isomorphismes. On pose

$$(1.7.2)\qquad c^\pm(M) = \det(I^\pm),$$

$$(1.7.3)\qquad \delta(M) = \det(I),$$

le déterminant étant calculé dans des bases rationnelles de $H_B^\pm$ et $H_{DR}^\pm$ (resp. H_B et H_{DR}). La définition de $\delta(M)$ ne requiert pas les hypothèses faites sur M.

D'après 1.6, I^+ est réel, i.e. induit $I^+\colon H_B^+(M)_\mathbf{R} \to H_{DR}^+(M)_\mathbf{R}$, tandis que I^- est purement imaginaire. Les nombres $c^+(M)$, $i^{d^-(M)} c^-(M)$ et $i^{d^-(M)}\delta(M)$ sont donc réels non nuls. A multiplication par un nombre rationnel près, il ne dépendent que de M.

Les *périodes* de M sont classiquement les $\langle \omega, c\rangle$ pour $\omega \in H_{DR}(M)$ et $c \in H_B(M)^\vee$. Par exemple, si X est une variété algébrique sur $\mathbf{Q}$, ω une n-forme sur X, définie sur $\mathbf{Q}$ et que c est un n-cycle sur $X(\mathbf{C})$, $\langle \omega, c\rangle = \int_c \omega$ est une période de $H^n(X)$. Exprimons $c^\pm(M)$ en terme de périodes. Le dual de $H_{DR}^\pm(M)$ est le sous-espace $F^\pm$ de $H_{DR}(M^\vee)$, où $M^\vee$ est le motif dual de M. Si la base choisie de $H_{DR}^\pm(M)$ a pour duale la base (ω_i) de $F^\pm(H_{DR}(M^\vee))$, et que (c_j) est la base choisie de $H_B^\pm(M)$, la matrice de $I^\pm$ est $\langle \omega_i, c_j\rangle$, et $c^\pm(M) = \det(\langle \omega_i, c_j\rangle)$.

Conjecture 1.8. *Si M est critique, $L(M)$ est un multiple rationnel de $c^+(M)$.*

2. Enoncé de la conjecture (cas général).

2.1. Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des fonctions L données par des séries de Dirichlet à coefficients rationnels. Pour faire mieux, il nous faudra considérer des motifs à coefficient dans des corps de nombres.

Voici deux façons, équivalentes, pour construire la catégorie des motifs sur k, à coefficient dans un corps de nombres E, à partir de la catégorie des motifs sur k. Il s'agit d'une construction valable pour toute catégorie additive karoubienne (0.1(b)) dans laquelle les $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sont des expaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$.

A. Un motif sur k, à coefficient dans E, est un motif M sur k muni d'une structure de E-module: $E \to \mathrm{End}(M)$.

B. La catégorie $\mathcal{M}_{k,E}$, des motifs sur k, à coefficient dans E, est l'enveloppe karoubienne (cf. 0.1(b)) de la catégorie d'objets les motifs sur k—considéré comme objet de $\mathcal{M}_{k,E}$, un motif M se notera M_E—et de morphismes donnés par $\mathrm{Hom}(X_E, Y_E) = \mathrm{Hom}(X, Y) \otimes E$.

Passage de B *à* A. Pour X un motif, et V un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ de dimension finie, on note $X \otimes V$ le motif, isomorphe à une somme de $\dim(V)$ copies de X, caractérisé par $\mathrm{Hom}(Y, X \otimes V) = \mathrm{Hom}(Y, X) \otimes V$ (ou par $\mathrm{Hom}(X \otimes V, Y) = \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(X, Y))$). On passe de B à A en associant à M_E le motif $M \otimes E$, muni de sa structure de E-module naturelle.

Passage de A *à* B. Si M est muni d'une structure de E-module, on récupère sur M_E deux structures de E-module: celle déduite de celle de M, et celle qu'a tout objet de $\mathcal{M}_{k,E}$. L'objet de $\mathcal{M}_{k,E}$ correspondant à M est le plus grand facteur direct de M_E sur lequel ces structures coïncident. En détail: l'algèbre $E \otimes E$ est un produit de corps, parmi lesquels une copie de E dans laquelle $x \otimes 1$ et $1 \otimes x$ se projettent tous deux comme x. L'idempotent correspondant e agit sur M_E (qui est un $E \otimes E$-module) et son image est l'object de $\mathcal{M}_{k,E}$ qui correspond à M.

Les motifs à coefficient dans E sont le plus souvent donnés sous la forme A. La forme B à l'avantage de rester raisonnable pour E non de rang fini sur $\mathbf{Q}$. Elle est utile pour comprendre le formalisme tensoriel: on peut définir produit tensoriel et dual, pour les motifs à coefficient dans E, par leur fonctorialité et les formules $X_E \otimes_E Y_E = (X \otimes Y)_E$ et $(X_E)^\vee = (X^\vee)_E$. Dans le langage A, $X \otimes_E Y$ est le plus grand facteur direct de $X \otimes Y$ sur lequel coïncident les deux structures de E-module de $X \otimes Y$, et X est le dual usuel de $X^\vee$, muni de la structure de E-module transposée. Si on applique ces remarques à la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$, plutôt qu'à celle des motifs, on retrouve l'isomorphisme du F-dual d'un espace vectoriel sur E avec son $\mathbf{Q}$-dual, donné par

$$\omega \mapsto \text{la forme } \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}}(\langle \omega, v \rangle).$$

Nous avons défini en 0.1.1 des foncteurs de restriction et d'extension du corps k des scalaires. Ils transforment motifs à coefficient dans E en motifs à coefficient dans E. On dispose aussi de foncteurs de restriction et d'extension des coefficients: soit F une extension finie de E:

Extension des coefficients. Dans le langage A, c'est $X \mapsto X \otimes_E F$; dans le langage B, c'est $X_E \mapsto X_F$.

Restriction des coefficients. Dans le langage A, on restreint à E la structure de F-module.

Le lecteur prendra soin de ne pas confondre les rôles de k et E. Un exemple type qu'on peut retenir est celui du H_1 des variétés abéliennes sur k, à multiplication complexe par un ordre de E. En terme de la variété abélienne—prise à isogénie près—les foncteurs ci-dessus deviennent: extension du cops de base, restriction des scalaires à la Weil, construction $\otimes_E F$, qui multiplie la dimension par $[F{:}\, E]$, restriction à E de la structure de F-module.

2.2. Soit M un motif sur $\boldsymbol{Q}$, à coefficient dans un corps de nombres E. Pour chaque nombre premier l, la réalisation l-adique $H_l(M)$ de M est un module sur le complété l-adique E_l de E. Ce complété est le produit des complétés E_λ, pour λ idéal premier au-dessus de l, d'où une décomposition de $H_l(M)$ en un produit de E_λ-modules $H_\lambda(M)$.

On conjecture pour les $H_\lambda(M)$ une compatibilité analogue à 1.2.1; si elle est vérifiée, on peut pour chaque plongement complexe σ de E définir une série de Dirichlet à coefficients dans σE, convergente pour $\mathscr{R}s$ assez grand:

$$\begin{aligned} L(\sigma, M, s) &= \prod_p L_p(\sigma, M, s), \quad \text{où} \\ L_p(\sigma, M, s) &= \sigma Z_p(M, p^{-s}) \quad \text{avec } Z_p \in E(t) \subset E_\lambda(t) \text{ donné par} \\ Z_p(M, t) &= \det(1 - F_p t, H_\lambda(M)^{I_p})^{-1} \quad \text{pour } \lambda \nmid p. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Pour σ variable, ces séries de Dirichlet se déduisent les unes des autres par conjugaison des coefficients. Nous regarderons le système des $L(\sigma, M, s)$ comme une fonction $L^*(M, s)$ à valeurs dans la $\boldsymbol{C}$-algèbre $E \otimes \boldsymbol{C}$, identifiée à $\boldsymbol{C}^{\mathrm{Hom}(E,\boldsymbol{C})}$ par

$$E \otimes \boldsymbol{C} \xrightarrow{\ \sim\ } \boldsymbol{C}^{\mathrm{Hom}(E,\boldsymbol{C})} : e \otimes z \mapsto (z, \sigma(e))_\sigma. \tag{2.2.2}$$

Cette fonction peut aussi être définie directement par un produit eulérien. On espère comme en 1.1 qu'elle admet un prolongement analytique en s.

Il y a lieu de compléter le produit eulérien $L(\sigma, M, s)$ par un facteur à l'infini $L_\infty(\sigma, M, s)$ dépendant de la réalisation de Hodge de M. Posant $\Lambda(\sigma, M, s) = L_\infty(\sigma, M, s)L(\sigma, M, s)$, l'équation fonctionnelle conjecturale des fonctions L s'écrit

$$\Lambda(\sigma, M, s) = \varepsilon(\sigma, M, s)\Lambda(\sigma, \check{M}, 1 - s), \tag{2.2.3}$$

où $\varepsilon(\sigma, M, s)$, comme fonction de s, est le produit d'une constante par une exponentielle. Les définitions de L_∞ et ε sont rappelées en 5.2. Comme ci-dessus, on regardera le système des Λ et celui des ε, pour σ variable, comme des fonctions Λ^* et ε^* à valeurs dans $E \otimes \boldsymbol{C}$.

Il résulte de 2.5 ci-dessous que $L_\infty(\sigma, M, s)$ est indépendant de σ, et que la fonction L_∞, pour le motif $R_{E/\boldsymbol{Q}}\, M$ déduit de M par restriction du corps des coefficients (2.1) est la puissance $[E:\boldsymbol{Q}]^{\text{ième}}$ de $L_\infty(\sigma, M, s)$. Ceci justifie la

Proposition-Définition 2.3. *Soit M un motif sur $\boldsymbol{Q}$ à coefficient dans E. Un entier n est* critique *pour M si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées*

(i) *l'entier n est critique pour $R_{E/\boldsymbol{Q}}\, M$;*

(ii) *ni $L_\infty(\sigma, M, s)$, ni $L_\infty(\sigma, \check{M}(1), s)$ n'ont de pôle en $s = n$.*

On dit que M est critique *si* 0 *est critique pour M.*

Notre but est de conjecturer la valeur de $L^*(M) =_{\mathrm{dfn}} L^*(M, 0)$, pour M critique, à multiplication par un élément de E près. En d'autres termes, il s'agit de conjecturer simultanément les valeurs des $L(\sigma, M) =_{\mathrm{dfn}} L(\sigma, M, 0)$, à multiplication près par un système de nombres $\sigma(e)$, $e \in E$.

2.4. La réalisation $H_B(M)$ de M en cohomologie rationnelle est munie d'une structure de E-espace vectoriel. Sa dimension est le *rang* sur E de M. L'involution F_∞ est E-linéaire; les parties $+$ et $-$ sont donc des E-sous-espaces vectoriels. On note $d^+(M)$ et $d^-(M)$ leur dimension.

Le complexifié de $H_B(M)$ est un $E \otimes \boldsymbol{C}$-module libre. Identifiant $E \otimes \boldsymbol{C}$ à $\boldsymbol{C}^{\mathrm{Hom}(E,\boldsymbol{C})}$ (2.2.2), on en déduit une décomposition

$$H_B(M) \otimes \boldsymbol{C} = \bigoplus_\sigma H_B(\sigma, M),$$

avec

$$H_B(\sigma, M) = (H_B(M) \otimes \boldsymbol{C}) \otimes_{E \otimes \boldsymbol{C}, \sigma} \boldsymbol{C},$$

soit

$$H_B(\sigma, M) = H_B(M) \otimes_{E,\sigma} \boldsymbol{C}.$$

Les $H_B^{p,q}(M)$ de la décomposition de Hodge étant stables par E, chaque $H_B(\sigma, M)$ hérite d'une décomposition de Hodge $H_B(\sigma, M) = \bigoplus H_B^{p,q}(\sigma, M)$. L'involution F_∞ permute H^{pq} et H^{qp}, en particulier stabilise H^{pp}, qu'elle découpe en des parties $+$ et $-$. On note $h^{pq}(\sigma, M)$ la dimension de $H_B^{pq}(\sigma, M)$, et $h^{pp\pm}(\sigma, M)$ celle de $H_B^{pp\pm}(\sigma, M)$. La proposition suivante permet d'omettre σ de la notation.

Proposition 2.5. *Les nombres $h^{pq}(\sigma, M)$ et $h^{pp\pm}(\sigma, M)$ sont indépendant de σ.*

On peut supposer, et on suppose, que M est homogène. Dans ce cas, $H^{pq}(M)$ s'identifie au complexifié du E-espace vectoriel $\mathrm{Gr}_F^p(H_{DR}(M))$: c'est un $E \otimes \boldsymbol{C}$-module libre, et la première assertion en résulte. Pour la seconde, on observe que $h^{pp\pm}(\sigma, M)$ est l'excès de $d^\pm(M)$ sur $\sum_{p>q} h^{pq}(\sigma, M)$.

2.6. Soit M un motif sur $\boldsymbol{Q}$ à coefficient dans E. Dans la fin de ce paragraphe, sauf mention expresse du contraire, nous supposons que $R_{E/\boldsymbol{Q}} M$ vérifie les hypothèses de 1.7. Les espaces $F^\pm$ et $H_{DR}^\pm$ sont cette fois des espaces vectoriels sur E. Les isomorphismes (0.4.1) et (1.7.1)

$$I\colon H_B(M) \otimes \boldsymbol{C} \longrightarrow H_{DR}(M) \otimes \boldsymbol{C}, \tag{2.6.1}$$

$$I^\pm\colon H_B^\pm(M) \otimes \boldsymbol{C} \longrightarrow H_{DR}^\pm(M) \otimes \boldsymbol{C}, \tag{2.6.2}$$

sont des isomorphismes de $E \otimes \boldsymbol{C}$-modules entre complexifiés d'espaces vectoriels sur E. On pose

$$c^\pm(M) = \det(I^\pm) \in (E \otimes \boldsymbol{C})^*, \qquad \delta(M) = \det(I) \in (E \otimes \boldsymbol{C})^*,$$

le determinant étant calculé dans des bases E-rationnelles de $H_B^\pm(M)$ et $H_{DR}^\pm(M)$ (resp. $H_B(M)$ et $H_{DR}(M)$). La définition de $\delta(M)$ ne requiert pas les hypothèses faites sur M. A multiplication par un élément de E^* près, ces nombres ne dépendent que de M. Il résulte à nouveau de 1.6 que $c^+(M)$, $i^{d^-(M)} c^-(M)$ et $i^{d^-(M)} \delta(M)$ sont dans $(E \otimes \boldsymbol{R})^*$.

Conjecture 2.7. *Posons $\mathscr{R}(M) = -\frac{1}{2}w$. Si M est critique,*

(i) *$L(\sigma, M, s)$ n'a jamais de pôle en $s = 0$, et ne peut s'annuler en $s = 0$ que pour $\mathscr{R}(M) = \frac{1}{2}$.*

(ii) *La multiplicité du zéro de $L(\sigma, M, s)$ en $s = 0$ est indépendante de σ.*

Pour (i), je renvoie à la discussion à la fin de 1.3. Que (ii) soit raisonnable m'a été suggéré par B. Gross.

Conjecture 2.8. *Pour M critique et $L(\sigma, M) \neq 0$, $L^*(M)$ est le produit de $c^+(M)$ par un élément de E^*.*

REMARQUE 2.9. Un motif M sur un corps de nombres k, à coefficient dans E, définit aussi une fonction $L^*(M, s)$. Ces fonctions sont couvertes par notre conjecture, vu l'identité $L^*(M, s) = L^*(R_{k/Q} M, s)$, où $R_{k/Q}$ est la restriction des scalaires de k à Q (appliquer (0.5.3)).

Les fonctions $L(\sigma, M, s)$ sont des produits eulériens, indexés par les places finies de k. Il y a lieu de les compléter par les facteurs à l'infini $L_v(\sigma, M, s)$, indexés par les places à l'infini, dont la définition est rappelée en 5.2. Ils dépendent en général de σ. Seul $L_\infty(\sigma, R_{k/Q} M, s)$, produit sur v à l'infini des $L_v(\sigma, M, s)$, est indépendant de σ.

REMARQUE 2.10. Soient F une extension de E, ι le morphisme structural de E dans F et ι_C son complexifié: $E \otimes C \hookrightarrow F \otimes C$. On a $L^*(M \otimes_E F, s) = \iota_C L^*(M, s)$ et $c^\pm(M \otimes_E F) = \iota_C\, c^\pm(M)$. La conjecture est donc compatible à l'extension du corps des coefficients. Pour F une extension galoisienne de E, de groupe de Galois G, le Théorème 90 de Hilbert $H^1(G, F^*) = 0$ assure que $((F \otimes C)^*/F^*)^G = (E \otimes C)^*/E^*$: la conjecture est invariante par extension du corps des coefficients.

REMARQUE 2.11. Si E est une extension de F, on a $L^*(R_{E/F}M, s) = N_{E/F}\, L^*(M, s)$. Les périodes $c^\pm$ vérifiant la même identité, la conjecture est compatible à la restriction des coefficients.

REMARQUE 2.12. Soit D une algèbre à division de rang d^2 sur E. Un motif M sur Q, muni d'une structure de D-module, et de rang n sur D, définit une série de Dirichlet à coefficients dans E dont les facteurs eulériens sont presque tous de degré nd: pour λ une place finie de E, $H_\lambda(M)$ est un module libre sur le complété $D_\lambda = D \otimes_E E_\lambda$, et on reprend la définition (2.2.1) en posant

$$Z_p(M, t) = \det \mathrm{red}\, (1 - F_p t, H_\lambda(M)^{I_p})^{-1}$$

(si D_λ est une algèbre de matrices sur E_λ, et e un idémpotent indécomposable, le déterminant réduit d'un endomorphisme A d'un D_λ-module H est le déterminant, calculé sur E, de la restriction de A à eH; la définition dans le cas général procède par descente).

La liberté que nous donne 2.10 d'étendre le corps des coefficients met ces fonctions L elles aussi sous le chapeau 2.8: choisissant une extension $\iota: E \hookrightarrow F$ de E qui neutralise D, et un idempotent indécomposable e de $D \otimes_E F$, on a $\iota_C L^*(M, s) = L^*(e(M \otimes_E F), s)$.

On peut aussi définir $c^+(M)$ directement dans ce cadre. C'est ce qui est expliqué en 2.13 ci-dessous.

La fin de ce paragraphe est inutile pour la suite.

2.13. Soit D une algèbre simple sur un corps E (voire une algèbre d'Azumaya sur un anneau...). Pour le formalisme tensoriel, il est commode de regarder les D-modules comme de "faux E-espaces vectoriels":

(a) Se donner un espace vectoriel V sur E revient à se donner, pour toute extension étale F de E, un F-espace vectoriel V_F, et des isomorphismes compatibles $V_G = V_F \otimes_F G$ pour G une extension de F. On prend $V_F = V \otimes_E F$. Par descente, il suffit de ne se donner les V_F que pour F assez grand.

(b) Soit W un D-module. Pour toute extension étale F de E, et tout F-isomorphisme $D \otimes F \sim \mathrm{End}_F(L)$, avec L libre, posons $W_{F,L} = \mathrm{Hom}_{D \otimes F}(L, W \otimes F)$ (les produits tensoriels sont sur E). On a un isomorphsime de $D \otimes F$-module $W \otimes_E F = L \otimes_F W_{F,L}$.

Si F est assez grand pour neutraliser D, L est unique à isomorphisme non unique près; la non-unicité est due aux homothéties, qui agissent trivialement sur End(L). C'est pourquoi la donnée des $W_{F,L}$ n'est pas du type (a); c'est un "faux espace vectoriel sur E".

Soient (W^{α}) une famille de D-modules, et T une opération tensorielle. Si les homothéties de L agissent trivialement sur $T(W^{\alpha}_{F,L})$, le F-espace vectoriel $T(W^{\alpha}_{F,L})$ est indépendant du choix de L et on obtient un système du type (a), d'où un espace vectoriel $T(W^{\alpha})$ sur E.

EXAMPLE. Si W' et W'' sont deux D-modules de rang $n\cdot[D\colon E]^{1/2}$ sur E, on peut prendre $T = \mathbf{Hom}(\bigwedge^n W'_{F,L}, \bigwedge^n W''_{F,L})$; on obtient un espace vectoriel $\delta(W', W'')$ de rang 1 sur E, et tout homomorphisme $f\colon W' \to W''$ a un déterminant réduit $\det\operatorname{red}(f) \in \delta(W', W'')$.

Pour définir $c^+(M)$, on applique cette construction aux D-modules $H^+_B(M)$ et à $H^+_{DR}(M)$. Posons $\delta = \delta(H^+_B(M), H^+_{DR}(M))$. Le déterminant réduit de l'isomorphisme de $D \otimes \boldsymbol{C}$-modules $I^+\colon H^+_B(M)_{\boldsymbol{C}} \xrightarrow{\sim} H^+_{DR}(M)_{\boldsymbol{C}}$ est dans le $E \otimes \boldsymbol{C}$-module libre de rang 1 $\delta \otimes \boldsymbol{C}$. On pose $\det\operatorname{red}(I^+) = c^+(M)\cdot e$ pour e une base de δ.

3. Exemple: la fonction ζ.

3.1. Pour comprendre les diverses réalisations du motif de Tate $\boldsymbol{Z}(1)$, le plus simple est de l'écrire $\boldsymbol{Z}(1) = H_1(\boldsymbol{G}_m)$. Le groupe multiplicatif n'étant pas une variété projective, ceci ne rentre pas dans le cadre de Grothendieck, qui demande qu'on définisse plutôt $\boldsymbol{Z}(1)$ comme le dual du facteur direct $H^2(\boldsymbol{P}^1)$ de $H^*(\boldsymbol{P}^1)$.

La réalisation en $\boldsymbol{Z}_l$-cohomologie de $\boldsymbol{Z}(1)$ est le module de Tate $T_l(\boldsymbol{G}_m)$ de $\boldsymbol{G}_m$

$$\boldsymbol{Z}_l(1) = \operatorname{proj\,lim} \mu_{l^n}.$$

En réalisation de Hodge, on a $H_B(\boldsymbol{Z}(1)) = H_1(\boldsymbol{C}^*)$ isomorphe à $\boldsymbol{Z}$ (à $\boldsymbol{Q}$ plutôt, en homologie rationnelle). Ce groupe est purement de type $(-1, -1)$ et $F_\infty = -1$.

En réalisation de de Rham, $H_{DR}(\boldsymbol{Z}(1))$ est le dual de $H^1_{DR}(\boldsymbol{G}_m)$, isomorphe à $\boldsymbol{Q}$, de générateur la classe de dz/z. L'unique période de $H^1(\boldsymbol{G}_m)$ est

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i. \tag{3.1.1}$$

Sur $\boldsymbol{Z}_l(1)$, le Frobenius arithmétique φ_p $(p \neq l)$ agit par multiplication par p. Le Frobenius géométrique agit donc par multiplication par p^{-1}; ceci justifie l'identité citée en 1.3

$$L(M(n), s) = L(M, n + s). \tag{3.1.2}$$

Puisque F_∞ agit sur $(-1)^n$ sur $H_B(\boldsymbol{Z}(n))$, $H^\varepsilon_B(\boldsymbol{Z}(n))$ est nul pour $\varepsilon = -(-1)^n$, et $c^\varepsilon(\boldsymbol{Z}(n)) = 1$. Pour $\varepsilon = (-1)^n$, d'après (3.1.1), $c^\varepsilon(\boldsymbol{Z}(n)) = \delta(\boldsymbol{Z}(n)) = (2\pi i)^n$:

$$\begin{aligned} &c^\varepsilon(\boldsymbol{Z}(n)) = (2\pi i)^n && \text{pour } \varepsilon = (-1)^n, \\ &c^\varepsilon(\boldsymbol{Z}(n)) = 1, \quad \delta(\boldsymbol{Z}(n)) = (2\pi i)^n && \text{pour } \varepsilon = -(-1)^n. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

3.2. La fonction $\zeta(s)$ est la fonction L attachée au motif unité $\boldsymbol{Z}(0) = H^*(\text{Point})$. Les entiers critiques pour $\boldsymbol{Z}(0)$ sont les entiers pair > 0, et les entiers impairs $\leqq 0$. A cause du pôle de $\zeta(s)$ en $s = 1$, 0 n'est pas un zéro trivial et il serait raisonnable de définir les entiers critiques comme incluant 0. La équation (3.1.3) et les valeurs connues de $\zeta(n) = L(Z(n))$ pour n critique vérifient 1.8: $\zeta(n)$ est rationnel pour n impair $\leqq 0$, et un multiple rationnel de $(2\pi i)^n$ pour n pair $\geqq 0$.

4. Compatibilité à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

4.1. Soient A une variété abélienne sur $\boldsymbol{Q}$, et d sa dimension. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer [15] affirme notamment:

(a) $L(H^1(A), 1)$ est non nul si et seulement si $A(\boldsymbol{Q})$ est fini.

(b) Soit ω un générateur de $H^0(A, \Omega^d)$. Alors, $L(H^1(A), 1)$ est le produit de $\int_{A(\boldsymbol{R})}|\omega|$ par un nombre rationnel.

Le motif $H^1(A)(1)$ est isomorphe au dual $H_1(A)$ de $H^1(A)$: ceci traduit l'existence d'une polarization, autodualité de $H^1(A)$ à valueurs dans $\boldsymbol{Z}(-1)$. D'après 1.7, $c^+(H^1(A)(1))$ se calcule donc comme suit: si $\omega_1, \cdots, \omega_d$ est une base de $H^0(A, \Omega^1) = F^+H^1_{DR}(A)$, et $c_1, \cdots, c_d$ une base de $H_1(A(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{Q})^+$, on a

$$c^+(H^1(A)(1)) = \det\langle \omega_i, e_j\rangle. \tag{4.1.1}$$

Désignant encore par e_j un cycle représentatif, on a $\langle \omega_i, e_j\rangle = \int_{e_j} \omega_i$.

Prenons pour base (e_i) une base sur $\boldsymbol{Z}$ de $H_1(A(\boldsymbol{R})^\circ, \boldsymbol{Z}) \subset H_1(A(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{Z})$. Le produit de Pontryagin des e_i est represénté par le d-cycle $A(\boldsymbol{R})^\circ$ dans $A(\boldsymbol{C})$, pour une orientation convenable, et, si ω est le produit extérieur des ω_i, le déterminant (4.1.1) est l'intégrale $\int_{A(\boldsymbol{R})^\circ} \omega$. On a

$$\int_{A(\boldsymbol{R})} |\omega| = [A(\boldsymbol{R})\colon A(\boldsymbol{R})^\circ]\left|\int_{A(\boldsymbol{R})^\circ} \omega\right|,$$

et 1.8 pour $H^1(A)(1)$ équivaut donc à 4.1(b) ci-dessus.

4.2. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer donne la valeur exacte de $L(H^1(A), 1)$; la description du facteur rationnel en 4.1(b) à partir du motif $H^1(A)(1)$ a la forme suivante:

(a) La donnée de $M = H^1(A)(1)$ équivaut à celle de A à isogénie près. Il faut commencer par choisir A. Cela revient à choisir un réseau entier dans $H_B(M)$, dont les l-adifiés soient stables sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$.

(b) On choisit alors ω, par example comme produit extérieur des éléments d'une base d'un réseau entier dans $H_{DR}(M)$. Cet ω détermine la période, $c^+(M)$, et, pour chaque nombre premier p, un facteur rationnel $c_p(M)$. Les $c_p(M)$ sont presque tous égaux à 1, et la formule du produit assure que $c^+(M)\cdot \prod_p c_p(M)$ est indépendant de ω.

(c) Un autre nombre rationnel, $h(M)$, est défini en terme d'invariants cohomologiques de A; le nombre rationnel cherché est $h(M) \cdot \prod_p c_p(M)^{-1}$.

L'invariance de la conjecture par isogénie est par ailleurs un théorème non trivial.

4.3. Pour généraliser 4.1(a) à un motif de poids -1 M quelconque, il faudrait disposer d'un analogue de $A(\boldsymbol{Q})$. Le groupe $A(\boldsymbol{Q})$ peut s'interpréter comme le groupe des extensions de $\boldsymbol{Z}(0)$ par $H_1(A)$, dans la catégorie des 1-motifs [6, §10] sur $\boldsymbol{Q}$. Ceci suggère de considérer le groupe des extensions de $\boldsymbol{Z}(0)$ par M, dans une catégorie de motifs mixtes, parallèles aux structures de Hodge mixtes, mais on ne dispose même pas d'une définition conjecturale d'une telle catégorie!

J'observerai seulement que, dans toutes les théories cohomologiques usuelles, un cycle Y de dimension d, cohomologue à zéro, sur une variété algébrique propre et lisse X détermine un torseur sous $H^{2d-1}(X)(d)$: on dispose d'une suite exacte de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^{2d-1}(X)(d) \longrightarrow H^{2d-1}(X-Y)(d) \xrightarrow{\partial} H_Y^{2d}(X)(d) \longrightarrow H^{2d}(X)(d),$$

Y définit une classe de cohomologie $\mathrm{cl}(Y) \in H_Y^{2d}(X)(d)$, d'image nulle dans $H^{2d}(X)(d)$, et on prend $\partial^{-1}\mathrm{cl}(Y)$. Cette construction correspond à celle qui à un diviseur de degré 0 sur une courbe associe un point de sa jacobienne.

5. Compatibilité à l'équation fonctionnelle. Soit E un corps de nombres. Dans $(E \otimes \mathbf{C})^*$, nous noterons $\sim$ la relation d'équivalence définie par le sous-groupe E^*.

PROPOSITION 5.1. *Soit M un motif sur $\mathbf{Q}$, à coefficient dans E. On suppose vérifiées les hypothèses de* 1.7. *On a alors*

$$c^+(M) \sim (2\pi i)^{-d^-(M)} \cdot \delta(M) \cdot c^+(\check{M}(1)).$$

Pour L un module libre de rang n sur un anneau commutatif A (A sera E, ou $E \otimes \mathbf{C}$), posons $\det L = \bigwedge^n L$. On étend par localisation cette définition au cas où L est seulement projectif de type fini (cette généralisation n'est pas indispensable à la preuve de 5.1). On a des isomorphismes canoniques

$$\det(L^\vee) = \det(L)^{-1} \tag{5.1.1}$$

et, pour tout facteur direct P et L,

$$\det(L) = \det(P) \cdot \det(L/P) \tag{5.1.2}$$

(on a désigné par $\cdot$ un produit tensoriel, et par $^{-1}$ un dual). Il y a ici des problèmes de signe, qu'on résoud au mieux en considérant $\det(L)$ comme un module gradué inversible, placé en degré le rang de L. Nos résultats finaux étant modulo $\sim$, nous ne nous inquiéterons pas.

Pour X et Y de même rang, posons $\delta(X, Y) = \mathrm{Hom}(\det X, \det Y) = \det(X)^{-1} \cdot \det(Y)$. Le *déterminant* de $f: X \to Y$ est dans $\delta(X, Y)$. On déduit de (5.1.1) et (5.1.2) des isomorphismes

$$\delta(X, Y) = \delta(Y^\vee, X^\vee) \tag{5.1.3}$$

et, pour $F \subset X$ et $G \subset Y$,

$$\delta(X,Y) = \delta(F, Y/G) \cdot \delta(G, X/F)^{-1}. \tag{5.1.4}$$

LEMME 5.1.5. *Via l'isomorphisme* (5.1.3), *on a* $\det(u) = \det({}^tu)$.

LEMME 5.1.6. *Soient F et G des facteurs directs de X et Y. On suppose que l'isomorphisme $f: X \to Y$ induit des isomorphismes $f_F: F \to Y/G$ et $f_G^{-1}: G \to X/F$. Via l'isomorphisme* (5.1.4), *on a* $\det(f) = \det(f_F)\det(f_G^{-1})^{-1}$.

La vérification de ces lemmes est laissée au lecteur. Pour 5.1.6, notons seulement que, pour $G^1 = f^{-1}(G)$ et $F^1 = f(F)$, on a $X = F \oplus G^1$, $Y = G \oplus F^1$, et que f échange F et F^1, G et G^1.

Appliquons le Lemme 5.1.6 aux complexifiés de $H_B^\pm(M) \subset H_B(M)$ et de $F^- \subset H_{DR}(M)$. On trouve que, via l'isomorphisme (5.1.4), le déterminant de I : $H_B(M) \otimes \mathbf{C} \to H_{DR}(M) \otimes \mathbf{C}$ est le produit du déterminant de I^+: $H_B^\pm(M) \otimes \mathbf{C} \to$

$(H_{DR}(M)/F^-) \otimes \mathbf{C}$ et de l'inverse du déterminant du morphisme induit par l'inverse de I:

$$J^-: F^- \otimes \mathbf{C} \longrightarrow (H_B(M) / H_B^+(M)) \otimes \mathbf{C}.$$

Le morphisme J^- est le transposé du morphisme I^- pour le motif $\check{M}$ dual de M. Appliquant 5.1.5, et prenant des bases sur E des espaces $\delta(X, Y)$ en jeu, on obtient finalement que

$$\delta(M) \sim c^+(M) \cdot c^-(\check{M})^{-1}. \tag{5.1.7}$$

On en déduit 5.1 en appliquant au motif $\check{M}$ la formule suivante, conséquence de 3.1:

$$c^\pm(M) = (2\pi i)^{-d^\pm(M)\cdot n}\, c^{\pm(-1)^n}(M(n)). \tag{5.1.8}$$

Notons aussi, pour usage ultérieur, la formule analogue

$$\delta(M) = (2\pi i)^{-d(M)\cdot n}\, \delta(M(n)), \tag{5.1.9}$$

5.2. Rappelons la forme exacte de l'équation fonctionnelle conjecturale des fonctions L des motifs ([12], [4]). Nous nous placerons dans le cas général d'un motif sur un corps de nombres k, à coefficient dans un corps E muni d'un plongement complexe σ (cf. 2.9). La forme générale d'abord:

(a) Pour chaque place v de k, on définit un facteur local $L_v(\sigma, M, s)$. Pour v fini, la définition de $L_v(\sigma, M, s) = \sigma Z_v(M, Nv^{-s})$ $(Z_v(M, t) \in E(t))$ dépend d'une hypothèse de compatibilité analogue à (1.2.1). On a $Z_v(M, t) = \det(1 - F_v t, H_\lambda(M)^{I_v})^{-1}$. Pour v infini, induit par un plongement complexe τ, on obtient $L_v(\sigma, M, s)$ en décomposant $H_\tau(M) \otimes_{E,\sigma} \mathbf{C}$ en somme directe de sous-espaces minimaux stables par les projecteurs qui donnent la décomposition de Hodge, et par F_∞ pour v réel, en associant à chacun le "facteur Γ" de la Table (5.3), et en prenant leur produit. Pour v complexe, les sous-espaces minimaux sont de dimension un, d'un type (p, q). Pour v réel, il sont soit de dimension 2, de type $\{(p, q), (q, p)\}$, $p \neq q$, soit de dimension 1, de type (p, p), avec $F_\infty = \pm 1$. On note $\Lambda(\sigma, M, s)$ le produit des $L_v(\sigma, M, s)$.

(b) Soient Ψ un caractère non trivial du groupe $\mathbf{A} \otimes k/k$ des classes d'adèles de k, et Ψ_v ses composantes. Soient aussi, pour chaque place v de k, une mesure de Haar dx_v sur k_v. On suppose que, pour presque tout v, dx_v donne aux entiers de k_v la masse 1, et que le produit $\bigotimes dx_v$ des dx_v est la mesure de Tamagawa, donnant la masse 1 au groupe des classes d'adèles.

On définit des constantes locales $\varepsilon_v(\sigma, M, s, \Psi_v, dx_v)$, presque toutes égales à 1 et toutes, comme fonction de s, produit d'une constante par une exponentielle. Soit $\varepsilon(\sigma, M, s)$ leur produit (indépendant de Ψ et des dx_v).

(c) L'équation fonctionnelle conjecturale est

$$\Lambda(\sigma, M, s) = \varepsilon(\sigma, M, s)\Lambda(\sigma, \check{M}, 1 - s).$$

Pour définir les ε_v, une hypothèse additionnelle de compatibilité entre les $H_\lambda(M)$ est requise. Elle permet d'associer à v, σ, M une classe d'isomorphie de représentations complexes du groupe de Weil $W(\bar{k}_v/k_v)$ pour v infini, du groupe de Weil épaissi $'W(\bar{k}_v/k_v)$ pour v fini, et on prend le ε de [4, 8.12.4], avec $t = p^{-s}$.

Pour v infini, ceci revient à décomposer $H_\tau(M) \otimes_{E,\sigma} \mathbf{C}$ comme en (a), à associer à chaque sous-espace de la décomposition un facteur ε'_v, et à prendre leur produit. La table des ε'_v, pour un choix particulier de Ψ_v et de dx_v, est donnée en 5.3.

Pour v fini, on commence par restreindre les représentations $H_\lambda(M)$ à un groupe de décomposition $\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v) \subset \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, puis au groupe de Weil $W(\bar{k}_v/k_v)$. Appliquant [4, 8.3, 8.4], on déduit de $H_\lambda(M)$ une classe d'isomorphie ρ_λ de représentations de $'W(\bar{k}_v/k_v)$ sur E_λ. Il est loisible ici, et utile, de la remplacer par sa F-semi-simplifiée [4, 8.6]. On demande que ces représentations, pour λ variable, soient compatibles, i.e., que si on étend les scalaires de E_λ à $\mathbf{C}$, par $\tilde{\sigma}: E_\lambda \to \mathbf{C}$ prolongeant σ, la classe d'isomorphie de la représentation obtenue soit indépendante de λ et de σ. C'est la classe d'isomorphie cherchée.

Remontons pour le lecteur les renvois internes de [4]. Une représentation de $'W$ est donnée par une représentation ρ du groupe de Weil dans $\mathrm{GL}(V)$, et par un endomorphisme nilpotent N de V. En terme de la constante locale [4, 4.1], de ρ, celle de (ρ, N) est donnée par

$$\varepsilon((\rho, N), s, \Psi, dx) = \varepsilon(\rho \otimes \omega_s, \Psi\, dx) \cdot \det(-FNv^{-s}, V^{\rho(I)}/\mathrm{Ker}(N)^{\rho(I)}).$$

REMARQUE 5.2.1. La fonction de s

$$\varepsilon((\rho, N), s, \Psi, dx)L((\rho, N)^\vee, 1 - s)L((\rho, N), s)^{-1}$$

est la même pour (ρ, N) et pour $(\rho, 0)$. Ceci permet d'énoncer l'équation fonctionnelle conjecturale des fonctions L en supposant seulement une compatibilité entre les semi-simplifiées des restrictions des $H_\lambda(M)$ à un groupe de décomposition.

5.3. Dans la table ci-dessous, on donne les facteurs locaux, et les constantes, associées aux divers types de sous-espaces minimaux de la réalisation de Hodge. Pour les constantes, on a supposé Ψ_v et la mesure dx_v choisis comme suit:

v réel: $\Psi_v(x) = \exp(2\pi i x)$, mesure dx,

v complexe: $\Psi_v(z) = \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(z))$, mesure $|\, dz \wedge d\bar{z}\, |$,

soit pour $z = x + iy$, $\exp(4\pi i x)$ et $2dxdy$.

On utilise les notations $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\, \Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2 \cdot (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)$.

place	type	facteur Γ	constante (pour Ψ, dx ci-dessus)
complexe	(p, q) ou (q, p), $p \leqq q$	$\Gamma_{\mathbf{C}}(s-p)$	i^{q-p}
réelle	$\{(p, q), (q, p)\}$, $p < q$	$\Gamma_{\mathbf{C}}(s - p)$	i^{q-p+1}
	(p, p), $F_\infty = (-1)^{p+\varepsilon}$, $\varepsilon = 0$ ou 1	$\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\varepsilon-p)$	i^ε

Le cas qui nous intéresse est celui où $k = \mathbf{Q}$. On peut dans ce cas prendre $\Psi_\infty(x) = \exp(2\pi i x)$, $\Psi_p(x) = \exp(-2\pi i x)$ (via l'isomorphisme $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ = partie p-primaire de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), dx_∞ = mesure de Lebesgue dx, dx_p = la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$ donnant à $\mathbf{Z}_p$ la masse 1.

PROPOSITION 5.4. *Si M est critique de poids w, on a, modulo un nombre rationnel indépendant de σ,*

$$L_\infty(\sigma, \check{M}(1))L_\infty(\sigma, M)^{-1} \sim (2\pi)^{-d^-(M)} \cdot (2\pi)^{-wd(M)/2}.$$

D'après 2.5, les $L_\infty(\sigma, \ )$ sont indépendant de σ. Ceci nous permet de ne vérifier 5.4 que pour σ fixé. La formule est compatible à la substitution $M \mapsto \check{M}(1)$: $\check{M}(1)$ est de poids $-2-w$, son d^- est $d^+(M)$ et abrégeant $d(M)$ et $d^\pm(M)$ en d et $d^\pm$, on a $d = d^+ + d^-$ et

$$\left(-d^- - \frac{wd}{2}\right) + \left(-d^+ - \frac{(-2-w)d}{2}\right) = 0.$$

Ceci permet de ne vérifier 5.4 que pour $w \geqq -1$.

Pour s entier, on a, modulo $\boldsymbol{Q}^*$,

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\boldsymbol{R}}(s) \sim (2\pi)^{-s/2} && \text{pour } s \text{ pair} > 0, \\ (5.4.1) \qquad &\Gamma_{\boldsymbol{R}}(s) \sim (2\pi)^{(1-s)/2} && \text{pour } s \text{ impair}, \\ &\Gamma_{\boldsymbol{C}}(s) \sim (2\pi)^{-s} && \text{pour } s > 0. \end{aligned}$$

Pour $w \geqq -1$, la puissance de 2π dans la contribution de chaque sous-espace de $H_B(M) \otimes \boldsymbol{C}$, comme en 5.2 (a), est donc donnée par

	$L_\infty(M)$	$L_\infty(\check{M}(1))$	$L_\infty(\check{M}(1))L_\infty(M)^{-1}$
$\{(pq), (qp)\}, p \leqq q$	p	$-1-p$	$-1-w$
(pp), p pair $\geqq 0$, $F_\infty = -1$	$\frac{p}{2}$	$-1-\frac{p}{2}$	$-1-\frac{w}{2}$
(pp), p impair $\geqq 0$, $F_\infty = -1$	$\frac{1+p}{2}$	$\frac{-1-p}{2}$	$-1-\frac{w}{2}$

La proposition en résulte aussitôt.

Posons $\det M = \bigwedge^{d(M)} M$ (puissance extérieure sur E).

PROPOSITION 5.5. $\varepsilon^*(M) \sim \varepsilon^*(\det M)$.

Pour des dx_v choisis comme suggéré en 5.4, nous prouverons plus précisément des équivalences

$$(5.5.1) \qquad \varepsilon_v^*(M, \Psi_v, dx_v) \sim \varepsilon_v^*(\det M, \Psi_v, dx_v).$$

Posant $\eta_v(\sigma, M, \Psi_v) = \varepsilon_v(\sigma, M, \Psi_v, dx_v)\, \varepsilon_v^{-1}(\sigma, \det M, \Psi_v, dx_v)$, ceci équivaut à

$$(5.5.2) \qquad \tau\eta_v(\sigma, M, \Psi_v) = \eta_v(\tau\sigma, M, \Psi_v)$$

pour tout automorphisme τ de $\boldsymbol{C}$.

Il résulte de [4, 5.4] que, si $a \in \boldsymbol{Q}_v^*$ est de valeur absolue 1, et qu'on pose $(\Psi_v \cdot a)(x) = \Psi_v(ax)$, on a

$$(5.5.3) \qquad \eta_v(\sigma, M, \Psi_v) = \eta_v(\sigma, M, \Psi_v \cdot a) \quad (\text{pour } \|a\|_v = 1).$$

Pour τ un automorphisme de $\boldsymbol{C}$, et v fini, $\tau\Psi_v$ est de cette forme $\Psi_v \cdot a$ avec $\|a\|_v = 1$; de même, $\bar{\Psi}_\infty = \Psi_\infty \cdot (-1)$.

Pour v fini, la définition de ε_v est purement algébrique, d'où $\tau\eta_v(\sigma, M, \Psi_v) = \eta_v(\tau\sigma, M, \tau\Psi_v)$ et (5.5.2) résulte de (5.5.3).

Pour $v = \infty$, on a encore $\bar{\eta}_\infty(\sigma, M, \bar{\Psi}_\infty) = \eta_\infty(\bar{\sigma}, M, \bar{\Psi}_\infty) = \eta_\infty(\bar{\sigma}, M, \Psi_\infty)$; si on prend Ψ_∞ comme suggéré en 5.3, η_∞ est une puissance de i indépendante de σ, d'où $\eta_\infty(\sigma, M, \Psi_\infty) = \pm 1$, indépendant de σ, ce qui vérifie (5.5.2).

THÉORÈME 5.6. *Modulo la Conjecture* 6.6 *sur la nature des motifs de rang* 1, *la Conjecture* 2.8 *est compatible à l'équation fonctionnelle conjecturale des fonctions L: on a*

$$L_\infty^*(M)\, c^+(M) \sim \varepsilon^*(M) L_\infty^*(\check{M}(1))\, c^+(\check{M}(1)).$$

D'après 5.1, 5.3 et 5.5, cette formule équivaut à

$$(2\pi i)^{-d^-(M)} \cdot \delta(M) \sim (2\pi)^{-d^-(M)} \cdot (2\pi)^{-wd(M)/2} \cdot \varepsilon^*(\det M).$$

Posons $D = \det M$ et $\varepsilon = d^-(D)$. On a $\delta(M) = \delta(D)$, $d^-(M) \equiv \varepsilon \pmod 2$, et $wd(M)$ est le poids $w(D)$ de D, de sorte que la formule équivaut encore à

$$\varepsilon^*(D) \sim (2\pi)^{w(D)/2} \cdot i^\varepsilon \cdot \delta(D). \tag{5.6.1}$$

Nous prouverons en 6.5 que (5.6.1) vaut pour une classe de motifs de rang 1 qui, conjecturalement (6.6), les englobe tous.

6. Exemple: les fonctions L d'Artin.

DÉFINITION 6.1. *La* catégorie des motifs d'Artin *est l'enveloppe karoubienne de la duale de la catégorie d'objets les variétés sur Q de dimension* 0, *de morphismes les correspondances définies sur Q.*

Par définition, chaque variété de dimension 0, X, définit un motif d'Artin $H(X)$, le foncteur H est un foncteur contravariant pleinement fidèle,

$$H\colon (\text{variétés de dim } 0, \text{correspondances}) \longrightarrow (\text{motifs d'Artin})$$

et tout motif d'Artin est facteur direct d'un $H(X)$.

6.2. Explicitons cette définition. Soient $\bar{Q}$ une clôture algébrique de Q, et G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$. Une variété de dimension 0 est le spectre d'un produit fini A de corps de nombres, et la théorie de Galois (sous la forme que lui a donnée Grothendieck) dit que le foncteur

$$X = \mathrm{spec}(A) \mapsto X(\bar{Q}) = \mathrm{Hom}(A, \bar{Q}):$$

(catégorie des variétés de dimension 0, sur Q, et des morphismes de schémas) $\to$ (catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de G) est une équivalence de catégorie. Le foncteur inverse est $I \mapsto$ spectre de l'anneau des fonctions G-invariantes de I dans $\bar{Q}$.

Une *correspondance* d'une variété de dimension 0, X dans une autre, Y, est une combinaisons linéaire formelle à coefficients dans Q de composantes connexes de $X \times Y$. L'application

$$\sum a_i Z_i \mapsto \sum a_i(\text{fonction caractéristique de } Z_i(\bar{Q}) \subset (X \times Y)(\bar{Q}))$$

identifie correspondances et fonctions G-invariantes, à valeurs rationnelles, sur $(X \times Y)(\bar{Q}) = X(\bar{Q}) \times Y(\bar{Q})$, et la composition des correspondances au produit matriciel.

Notons H le foncteur contravariant $X \mapsto$ espace vectoriel $Q^{X(\bar{Q})}$, muni de l'action naturelle de G; (correspondance $F\colon X \to Y) \mapsto$ le morphisme $F^*\colon Q^{Y(\bar{Q})} \to Q^{X(\bar{Q})}$ de matrice ${}^tF$. Il est pleinement fidèle, et identifie la catégorie des motifs d'Artin à celle des représentations rationnelles de G.

6.3. Dans ce modèle, si $\bar{Q}$ est la clôture algébrique de Q dans C, le foncteur "réalisation de Betti" H_B est le foncteur "espace vectoriel sous-jacent". La structure de Hodge est purement de type (0, 0), et l'involution F_∞ est l'action de la conjugaison complexe $F_\infty \in G$. On a en effet un isomorphisme, fonctoriel pour les correspondances,

$$H^*(X(C), Q) = Q^{X(C)} = Q^{X(\bar{Q})} = H(X).$$

Le foncteur "réalisation l-adique" H_l est le foncteur $H_l(V) = V \otimes Q_l$. On a en effet un isomorphisme, fonctoriel pour les correspondances,

$$H^*(X(\bar{Q}), Q_l) = Q_l^{X(\bar{Q})} = Q^{X(\bar{Q})} \otimes Q_l.$$

Calculons de même la réalisation de de Rham. Pour $X = \mathrm{Spec}(A)$, on a $H^*_{DR}(X) = A$. Ecrivant que $A = \mathrm{Hom}_G(X(\bar{Q}), \bar{Q}) = (Q^{X(\bar{Q})} \otimes \bar{Q})^G$, on obtient que

$$H_{DR}(V) = (V \otimes \bar{Q})^G. \tag{6.3.1}$$

La formule (6.3.1) réalise $H_{DR}(V)$ comme un sous-espace de $V \otimes \bar{Q}$. Ce sous-espace est une Q-structure: on a $(V \otimes \bar{Q})^G \otimes \bar{Q} \xrightarrow{\sim} V \otimes \bar{Q}$. Après extension des scalaires à $\bar{Q}$, $H_B(V)$ et $H_{DR}(V)$ sont donc canoniquement isomorphes. Etendant les scalaires jusqu'à C, on trouve l'isomorphisme (0.4.1) (le vérifier pour $V = H(X)$).

6.4. Soit E une extension finie de Q. La *catégorie des motifs d'Artin à coefficient dans E* est la catégorie déduite de celle des motifs d'Artin comme en 2.1. Nous l'identifierons à la catégorie des E-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action de G.

Les motifs d'Artin à coefficient dans E, de rang 1 sur E, correspondent aux caractères $\varepsilon\colon G \to E^*$. Nous allons calculer leurs périodes. Soient donc $\varepsilon\colon G \to E^*$ et f le conducteur de ε: ε se factorise par un caractère, encore noté ε, du quotient $(Z/fZ)^* = \mathrm{Gal}(Q(\exp(2\pi i/f))/Q)$ de G. Notons $[\varepsilon]$ l'espace vectoriel E_ε, de dimension 1 sur E, sur lequel G agit par ε. La somme de Gauss

$$g = \sum \varepsilon(u) \otimes \exp(2\pi iu/f) \in [\varepsilon] \otimes \bar{Q}$$

est non nulle, et invariante par G: c'est une base, sur E, de $H_{DR}([\varepsilon])$. Le déterminant de I: $H_B([\varepsilon]) \otimes C \xrightarrow{\sim} H_{DR}([\varepsilon]) \otimes C$, calculé dans les bases 1 et g, vaut g^{-1}. On sait que, pour tout plongement complexe σ de E, on a $\sigma g \cdot \bar{\sigma} g = f$, nombre rationnel indépendant de σ, d'où

$$\delta([\varepsilon]) \sim \sum \varepsilon^{-1}(u) \otimes \exp(-2\pi iu/f) \in (E \otimes C)^*. \tag{6.4.1}$$

PROPOSITION 6.5. *Soit D le motif* $[\varepsilon](n)$. *C'est un motif sur Q, à coefficients dans E, de rang* 1 *et de poids* $-2n$. *Posant* $\varepsilon(-1) = (-1)^\eta$, *avec* $\eta = 0$ *ou* 1, *on a*

$$\varepsilon^*(D) \sim (2\pi)^{-n}\, i^{\eta-n}\, \delta(D).$$

On sait que la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L de Dirichlet $L(\sigma, [\varepsilon], s) = \sum \sigma\varepsilon^{-1}(n) \cdot n^{-s}$ (σ plongement complexe de E) est donnée par

$$\varepsilon(\sigma, [\varepsilon], s) = i^\eta \cdot f^s \cdot \sum \sigma\varepsilon(u)^{-1} \exp(-2\pi iu/f).$$

D'après (5.1.9), on a par ailleurs $\delta(D) = (2\pi i)^n \delta([\varepsilon])$. On conclut en appliquant (6.4.1) et en notant que pour s entier ($s = n$), f^n est rationnel indépendant de σ.

Cette proposition vérifie (5.6.1) pour les motifs $[\varepsilon](n)$. Pour achever la preuve de 5.6, il ne reste qu'à énoncer la

Conjecture 6.6. *Tout motif sur Q, à coefficient dans E et de rang* 1 *est de la forme* $[\varepsilon](n)$, *pour ε un caractère de* $G = \mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$ *à valeurs dans les racines de l'unité de E et n un entier.*

PROPOSITION 6.7. *La Conjecture* 2.8 *est vraie pour les fonctions L d'Artin.*

Pour les motifs d'Artin, on dispose de l'équation fonctionnelle des fonctions L. De plus, le déterminant d'un motif d'Artin, tordu à la Tate, est du type prédit en 6.6. Les arguments des paragraphes 5, 6 montrent donc la compatibilité de 2.8 à l'équation fonctionnelle, et il suffit de prouver 2.8 pour les motifs $V(n)$, pour V un motif d'Artin et n un entier $\leqq 0$. Si $V(n)$ est critique, F_∞ agit alors sur V par multiplication par $-(-1)^n$, et $c^+ = 1$ (cf. 3.1), et il s'agit de prouver que, pour tout plongement σ de E dans C et tout automorphisme de C, on a $\tau L(\sigma, V(n)) = L(\tau\sigma, V(n))$.

On le déduit des résultats de Siegel [**14**]. Voir [**2**, 1.2].

7. Fonctions L attachées aux formes modulaires.

7.1. Posons $q = e^{2\pi iz}$, et soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire holomorphe cuspidale primitive (new form) de poids $k \geqq 2$, conducteur N et caractère ε. La série de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$ admet un développement en produit eulérien, de facteur local en $p \nmid N$ égal à $(1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1} p^{-2s})^{-1}$.

Soit E le sous-corps de C engendré par les a_n. La forme f doit donner lieu à un motif $M(f)$ de rang 2 à coefficient dans E, de type de Hodge $\{(k - 1, 0), (0, k - 1)\}$, de déterminant $[\varepsilon^{-1}](1 - k)$ (notations de 6.4) et de fonction L la série de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$.

Je n'ai pas essayé de définir $M(f)$ comme étant un motif au sens de Grothendieck. Une difficulté est que $M(f)$ apparait de façon naturelle comme facteur direct dans la cohomologie d'une variété non compacte, ou encore comme facteur direct dans la cohomologie d'une courbe modulaire complète, à coefficient dans l'image directe d'un faisceau localement constant (plutôt, un système local de motifs!) sur la partie à distance finie de cette courbe modulaire. Ceci échappe au formalisme de Grothendieck, mais permet de définir les réalisations du motif $M(f)$.

7.2. Supposons tout d'abord que $k = 2$, et que ε est trivial. Soient X le demi-plan de Poincaré, N le conducteur de f, $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de SL(2, Z) formé des matrices dont la réduction mod N est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, et posons $\omega_f = \sum a_n q^n \cdot dq/q = \sum a_n q^n \cdot 2\pi i dz$. La forme ω_f est une forme différentielle holomorphe sur la courbe complétée $\bar{M}(\Gamma_0(N))$ de $M(\Gamma_0(N)) = X/\Gamma_0(N)$. Elle est vecteur propre des correspondances de Hecke:

$$T_n^* \omega_f = a_n \omega_f \quad \text{(pour } n \text{ premier à } N) \tag{7.2.1}$$

et est caractérisée à un facteur près par (7.2.1). Ce fait résulte du théorème fort de multiplicité 1 et de la théorie des formes primitives; le lecteur peut, s'il le préfère compléter (7.2.1) par une condition analogue pour n non premier à N, et faire de même ci-dessous; l'assertion devient alors élémentaire, car la condition (7.2.1) ainsi complétée détermine (à un facteur près) le développement de Taylor de ω_f en la pointe $i\infty$.

Abrégeons $M(\Gamma_0(N))$ en M et $\bar{M}(\Gamma_0(N))$ en $\bar{M}$. Ces courbes ont une Q-structure naturelle, pour laquelle les correspondances de Hecke sont définies sur Q. La forme ω_f est définie sur E, et sa conjuguée par un automorphisme σ de C est $\omega_{\sigma f}$ (appliquer σ aux coefficients).

Définissons le motif $M(f)$ come étant, dans le langage 2.1(B), le sous-motif de $H^1(\bar{M})_E$ noyau des endomorphismes $T_n^* - a_n$—si on veut ne considérer que des noyaux de projecteurs, remplacer $T_n^* - a_n$ par $P(T_n - a_n\Delta)^*$ pour P un polynôme convenable. On sait que $M(f)$ a les propriétés énoncées en 7.1.

Dans chacune des théories cohomologiques $\mathscr{H}$ qui nous intéressent, l'application

$$\mathscr{H}_c^1(M) \longrightarrow \mathscr{H}^1(\bar{M}) \tag{7.2.2}$$

est surjective, et les systèmes de valeurs propres des T_n^* sur le noyau n'apparaissent pas dans $\mathscr{H}^1(\bar{M})$. La $\mathscr{H}$-réalisation de $M(f)$ est donc encore le noyau commun, dans $\mathscr{H}_c^1(M) \otimes E$, des $T_n^* - a_n$.

Le groupe de cohomologie $H_c^1(M, \boldsymbol{Q})$ est muni d'une structure de Hodge mixte, de type $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$, dont $H^1(\bar{M}, \boldsymbol{Q})$ est le quotient de type $\{(0, 1), (1, 0)\}$. En particulier, (7.2.2) induit un isomorphisme sur les sous-espaces F^1 de la filtration de Hodge; toute forme différentielle holomorphe ω sur $\bar{M}$ définit ainsi une classe de cohomologie à support propre sur M. Ceci peut se voir directement: si $\mathscr{T} \subset \mathcal{O}$ est l'idéal des pointes, $\boldsymbol{H}_c^*(M)$, en cohomologie de de Rham, est l'hypercohomologie sur $\bar{M}$ du complexe $\mathscr{T} \to \Omega^1$ (analytiquement, ce complexe est une résolution du faisceau constant $\boldsymbol{C}$ sur M, prolongé par 0 sur $\bar{M}$), et le $\boldsymbol{H}^1$ reçoit $H^\circ(\bar{M}, \Omega^1)$.

Supposons pour simplifier que $E = \boldsymbol{Q}$, et calculons $c^+(M(f)(1))$. Le motif $M(f)(1)$ est le dual de $M(f)$ et c^+ est donc une période de $M(f)$ (1.7): il faut intégrer ω_f contre une classe d'homologie rationnelle de $\bar{M}$, fixe par F_∞. Relevant $M(f)$ dans $\mathscr{H}_c^1(M)$, on voit qu'on peut plutôt intégrer ω_f contre une classe d'homologie sans support de M, fixe par F_∞. Toutes les intégrales non nulles de ce type seront commensurables.

Pour calculer F_∞, il est utile d'écrire M comme quotient de $X^\pm = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{R}$ par le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{Z})$ formé des matrices ayant pour réduction mod N une matrice $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$. La conjugaison complexe est alors induite par $z \to \bar{z}$, et l'image dans $M(\boldsymbol{C})$ de $i\boldsymbol{R}^+$ est un cycle sans support fixe par F_∞. La formule $L(M(f), 1) = -\int_0^{i\infty} \omega_f$ justifie 1.8 pour $M(f)(1)$: le second membre est, ou bien nul, ou bien $\sim c^+(M(f)(1))$.

REMARQUE 7.3. On a aussi

$$c^\pm(M(f)(1)) \sim \int_{a/b}^{i\infty} \omega_f \pm \int_{-a/b}^{i\infty} \omega_f \,.$$

7.4. Pour ε (et E) quelconque, il faut remplacer $\Gamma_0(N)$ par $\Gamma_1(N)$: le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ formé des matrices de réduction mod N de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme ci-dessus, pour calculer F_∞, il est plus commode de travailler avec $X^\pm$ et le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{Z})$ forme des matrices de réduction mod N de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$. Par ailleurs, une dualisation apparait, cachée en 7.2 par la symétrie de la correspondance T_n. Pour une définition convenable de T_n, on a

(a) $M(f)$ est le noyau commun des $T_n^* - a_n$ dans $H^1(\bar{M})$, $\bar{M} = X/\Gamma_1(N)$.

(b) On a ${}^tT_n^*\omega_f = a_n\omega_f$, et $T_n^*\omega_f = \bar{a}_n\omega_f$ (noter la formule $\bar{a}_n = \varepsilon(n)^{-1}a_n$), de sorte que ω_f est dans la réalisation de de Rham de $M(\bar{f}) = M(f)^\vee(-1)$.

On trouve que $c^+(M(f)(1)) \in (E \otimes \boldsymbol{C})^*/E^* \in \boldsymbol{C}^{*\mathrm{Hom}(E, \boldsymbol{C})}/E^*$ est donné par le système de périodes

$$c^+(M(f)(1)) \sim \left(\int_0^{i\infty} \omega_{\sigma f}\right)_\sigma,$$

si ce dernier est non nul. Noter que si l'une de ces intégrales s'annule, elles s'annulent toutes. Tel est le cas si et seulement si, dans la partie de l'homologie sans support tendue par le cycle $i\boldsymbol{R}^+$ et ses transformés par les T_n, le système de valeurs propres a_n pour les T_n n'apparait pas. Ceci justifie 2.8, et, partiellement 2.7, pour $M(f)(1)$.

REMARQUE 7.5. Les systèmes de valeurs propres des T_n dans $\operatorname{Ker}(\mathscr{H}^1_c(M) \to \mathscr{H}^1(\bar{M}))$ sont liés aux séries d'Eisenstein, alors que ceux qui apparaissent dans $\mathscr{H}^1(\bar{M})$ sont liés aux formes paraboliques. C'est pourquoi ces ensembles sont disjoints. Il en résulte que la structure de Hodge mixte de $H^1_c(M, \boldsymbol{Q})$ est somme de structures de Hodge: l'extension de $H^1(\bar{M}, \boldsymbol{Q})$ par $\operatorname{Ker}(H^1_c(M, \boldsymbol{Q}) \to H^1(\bar{M}, \boldsymbol{Q}))$ splitte. Ceci, généralisé au cas de n'importe quel sous-groupe de congruence de $SL(2, \boldsymbol{Z})$, équivaut au théorème de Manin [9] selon lequel la différence entre deux pointes est toujours d'ordre fini dans la jacobienne (cf. [6, 10.3.4, 10.3.8 et 10.1.3]). La démonstration donnée ne diffère d'ailleurs pas en substance de celle de Manin.

7.6. En poids k quelconque, il faut remplacer la cohomologie de $\bar{M}$ par la cohomologie de $\bar{M}$ à coefficient dans un faisceau convenable. Pour décrire ce qui se passe, je remplacerai M et $\bar{M}$ par M_n et $\bar{M}_n$, relatifs au groupe de congruence $\Gamma(n)$, avec n multiple de N et $\geqq 3$. On redescend ensuite à M et $\bar{M}$ en prenant les invariants par un groupe fini convenable. Soient $g\colon E \to M_n$ la courbe elliptique universelle et j l'inclusion de M_n dans $\bar{M}_n$. La cohomologie à considérer est $H^1(\bar{M}_n, j_*\mathrm{Sym}^{k-2}(R^1g_*\boldsymbol{Q}))$. Les réalisations de $M(f)$ sont facteur direct de ce groupe, calculé dans la théorie de cohomologie correspondante. On peut comme précédemment les relever dans $H^1_c(M_n, \mathrm{Sym}^{k-2}(R^1g_*\boldsymbol{Q}))$. Pour calculer $c^\pm$ du dual de $M(f)$. il faut alors intégrer la classe dans H^1_c définie par f contre des classes d'homologie sans support de M_n à coefficient dans le système local dual de $\mathrm{Sym}^{k-2}(R^1g_*\boldsymbol{Q})$. Si on prend le cycle image de $i\boldsymbol{R}^+$, muni de diverses sections du dual (une base), on trouve les intégrales d'Eichler

$$\int_0^{i\infty} f(q)\cdot\frac{dq}{q}\cdot(2\pi iz)^l \qquad (0 \leqq l \leqq k-2)$$

(périodes paires pour l pair, impaires pour l impair)—et on sait comment écrire $L(M(f), n)$ pour n critique en terme de ces périodes.

PROPOSITION 7.7. *Soit M un motif de rang 2, à coefficient dans E, de type de Hodge $\{(a, b), (b, a)\}$ avec $a \neq b$. Alors, $d^\pm\mathrm{Sym}^n(M)$ et $c^\pm\mathrm{Sym}^n M$ sont donnés par les formules suivantes*:

(1) *si* $n = 2l+1$: $d^\pm = l+1$, *et*

$$c^\pm\mathrm{Sym}^n M = c^\pm(M)^{(l+1)(l+2)/2}\, c^\mp(M)^{l(l+1)/2}\, \delta(M)^{l(l+1)/2};$$

(2) *si* $n = 2l$: $d^+ = l+1$, $d^- = l$, *et*

$$c^+\mathrm{Sym}^n M = (c^+(M)\, c^-(M))^{l(l+1)/2}\, \delta(M)^{l(l+1)/2},$$
$$c^-\mathrm{Sym}^n M = (c^+(M)\, c^-(M))^{l(l+1)/2}\, \delta(M)^{l(l-1)/2}.$$

C'est une question de simple algèbre linéaire, que nous traiterons par "analyse dimensionnelle".

(a) $H_B(M)$ est un espace vectoriel de rang 2 sur E, muni d'une involution F_∞, de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ dans une base e^+, e^- convenable. Les $d^\pm\mathrm{Sym}^n M$ sont les dimensions des parties + et − de la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$, de bases respectives $\{e^{+^n}, e^{+^{(n-2)}}e^{-^2}, \cdots\}$ et $\{e^{+^{(n-1)}}e^-, e^{+^{(n-3)}}e^{-^3}, \cdots\}$ —d'où les valeurs annoncées.

(b) Soit ω, η une base du dual de $H_{DR}(M)$, telle que ω annule $F^+H_{DR}(M)$. Le sous-espace $F^\pm$ de $H_{DR}(\mathrm{Sym}^n M)^\vee \sim \mathrm{Sym}^n H_{DR}(M)^\vee$ admet pour base les ω^n, $\omega^{n-1}\eta, \cdots, \omega^{n-d^\pm+1}\eta^{d^\pm-1}$, et

$$(7.7.1)^+ \qquad c^+\mathrm{Sym}^n M = \langle \omega^n \wedge (\omega^{n-1}\eta) \wedge \cdots, e^{+n} \wedge (e^{+(n-2)}e^{-2}) \wedge \cdots \rangle,$$

$$(7.7.1)^- \qquad c^-\mathrm{Sym}^n M = \langle \omega^n \wedge (\omega^{n-1}\eta) \wedge \cdots, (e^{+(n-1)}e^-) \wedge (e^{+(n-3)}e^{-3}) \wedge \cdots \rangle.$$

(c) Posons $V = H_B(M) \otimes \boldsymbol{C} \sim H_{DR}(M) \otimes \boldsymbol{C}$; c'est un $E \otimes \boldsymbol{C}$-module. Les formules ci-dessus montrent que $c^\pm\mathrm{Sym}^n M$ ne dépend que du $E \otimes \boldsymbol{C}$-module V, de sa base e^+, e^-, de $\omega \in V^*$, et de l'image $\bar{\eta}$ de η dans $V^*/\langle\omega\rangle$: le $d^\pm$-vecteur à gauche du produit scalaire (7.7.1) ne change pas si on remplace η par $\eta + \lambda\omega$. Par ailleurs, $\langle\omega, e^+\rangle$ et $\langle\omega, e^-\rangle$ sont inversibles, et $\bar{\eta}$ est une base de $V^*/\langle\omega\rangle$. Le système $(V, e^+, e^-, \omega, \bar{\eta})$ est donc décrit à isomorphisme près par les quantités $c^+ = \langle\omega, e^+\rangle$, $c^- = \langle\omega, e^-\rangle$ et $\delta = \langle\omega \wedge \eta, e^+ \wedge e^-\rangle$, dans $(E \otimes \boldsymbol{C})^*$. Remplacer e^+, e^-, ω, $\bar{\eta}$ par λe^+, μe^-, ω, $\nu\bar{\eta}/\lambda\mu$ remplace c^+, c^- et δ par λc^+, μc^- et $\nu\delta$. Pour $c^+ = c^- = \delta = 1$, le second membre de $(7.7.1)^\pm$ est dans $\boldsymbol{Q}^*$. Dans le cas général $c^\pm\mathrm{Sym}^n M$ est donc un multiple rationnel du produit de $c^+(M)$, $c^-(M)$ et $\delta(M)/c^+(M)c^-(M)$ aux puissances respectives les degrés auxquels figurent e^+, e^- et η dans (7.7.1). On s'épargne la moitié du calcul en notant que remplacer F_∞ par $-F_\infty$ échange e^+ et e^-, donc c^+ et c^-, respecte δ, et échange les $(7.7.1)^\pm$ pour n impair, les conserve pour n pair.

$n = 2l + 1 : d^+ = d^- = l + 1,$

$$\begin{aligned}
\deg\ \eta \text{ dans } (7.7.1)^\pm &= 0 + 1 + \cdots + l = l(l+1)/2,\\
\deg e^+ \text{ dans } (7.7.1)^+ &= (2l+1) + (2l-1) + \cdots + 1 = (l+1)^2\\
&= \deg e^- \text{ dans } (7.7.1)^-,\\
\deg e^+ \text{ dans } (7.7.1)^- &= 2l + (2l-2) + \cdots + 0 = l(l+1)\\
&= \deg e^- \text{ dans } (7.7.1)^+;
\end{aligned}$$

$n = 2l$: $d^+ = l + 1$, $d^- = l$,

$$\begin{aligned}
\deg\ \eta \text{ dans } (7.7.1)^+ &= 0 + 1 + \cdots + l = l(l+1)/2,\\
\deg\ \eta \text{ dans } (7.7.1)^- &= 0 + l + \cdots + (l-1) = l(l-1)/2,\\
\deg e^\pm \text{ dans } (7.7.1)^+ &= 2l + (2l-2) + \cdots + 0 = l(l+1),\\
\deg e^\pm \text{ dans } (7.7.1)^- &= (2l-1) + (2l-3) + \cdots + 1 = l^2.
\end{aligned}$$

7.8. Cette proposition nous fournit une conjecture pour les valeurs aux entiers critiques de $L(\mathrm{Sym}^n M(f), s)$. Voici les formules:

$$(7.8.1) \qquad L(\sigma, M(f), s) = \sum \sigma a_n n^{-s} = \prod_p L_p(\sigma, M(f), s)$$

où pour presque tout p

$$L_p(M(f), s) = (1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p)p^{k-1-2s})^{-1} = ((1-\alpha'_p p^{-s})(1-\alpha''_p p^{-s}))^{-1},$$

avec ε un caractère de Dirichlet. On a $\bigwedge^2 M(f) = [\varepsilon^{-1}](1-k)$, d'où

$$(7.8.2) \qquad \delta(M(f)) \sim (2\pi i)^{1-k} \cdot \sum \varepsilon(u) \otimes \exp(-2\pi i u/F),$$

si ε est de conducteur F, et

$$(7.8.3) \qquad L^*(M(f), m) \sim (2\pi i)^m c^\pm(M(f)), \quad \pm = (-1)^m, \text{ pour } 1 \leqq m \leqq k-1.$$

(7.8.4) $$L(\sigma, \mathrm{Sym}^n M(f), s) = \prod_p L_p(\sigma, \mathrm{Sym}^n M(f), s)$$

où pour presque tout p

$$L_p(\mathrm{Sym}^n M(f), s)^{-1} = \prod_{i=0}^{n} (1 - \alpha'^{i}_p \alpha''^{n-i}_p p^{-s});$$

conjecturalement, pour m critique, on a

$$L^*(\mathrm{Sym}^n M(f), m) \sim (2\pi i)^{md^\pm \mathrm{Sym}^n M(f)} \cdot c^\pm \mathrm{Sym}^n M(f), \qquad \pm = (-1)^m,$$

où $c^\pm$ et $d^\pm$ sont donnés en terme de $c^\pm(M)$ et $\delta(M)$ (caractérisés par (7.8.2), (7.8.3)) par les formules 7.7.

Pour l'évidence numérique en faveur de cette conjecture, voir **[18]**.

8. Caractères de Hecke algébriques. Le lecteur trouvera dans [**3**, paragraphe 5], dont nous utiliserons les notations, les définitions essentielles relatives aux caractères de Hecke algébriques (= grössencharaktere de type A_0).

Conjecture 8.1. *Soient k et E deux extensions finies de $\mathbf{Q}$, et χ un caractère de Hecke algébrique de k à valeurs dans E.*

(i) *Il existe un motif $M(\chi)$ de rang un sur k, à coefficients dans E, tel que, pour toute place λ de E, la représentation λ-adique $H_\lambda M(\chi)$ soit celle définie par χ: le Frobenius géométrique en $\mathscr{P}$ premier au conducteur de χ et à la caractéristique résiduelle l de λ agit par multiplication par $\chi(\mathscr{P})$.*

(ii) *Ce motif est caractérisé à isomorphisme près par cette propriété.*

(iii) *Tout motif de rang 1 est de la forme $M(\chi)$.*

(iv) *Décomposons $k \otimes E$ en produit de corps: $k \otimes E = \prod K_i$, et écrivons la partie algébrique $\chi_{\mathrm{alg}}: k^* \to E^*$ de χ sous la forme $\chi_{\mathrm{alg}}(x) = \prod N_{K_i/E}(x)^{n_i}$. La décomposition de $k \otimes E$ induit une décomposition de $H_{DR}(M(\chi))$ en les $H_{DR}(M(\chi))_i = H_{DR}(M(\chi)) \otimes_{k\otimes E} K_i$; avec cette notation, la filtration de Hodge est la filtration par les $\bigoplus_{n_i \geq p} H_{DR}(M(\chi))_i$.*

L'unicité 8.1(ii) impose aux $M(\chi)$ le formalisme suivant

(8.1.1) $$M(\chi'\chi'') \sim M(\chi') \otimes M(\chi').$$

(8.1.2) Si $\iota: E \longrightarrow E'$ est une extension finie de E, $M(\iota\chi)$ se déduit de $M(\chi)$ par extension des coefficients de E à E'.

(8.1.3) Si k' est une extension finie de k, $M(\chi \circ N_{k'/k})$ se déduit de $M(\chi)$ par extension des scalaires de k à k'.

REMARQUE 8.2. Posons les notations:

c = la conjugaison complexe, $\bar{\mathbf{Q}}$ = la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$, $S = \mathrm{Hom}(k, \bar{\mathbf{Q}}) = \mathrm{Hom}(k, \mathbf{C})$, $J = \mathrm{Hom}(E, \bar{\mathbf{Q}}) = \mathrm{Hom}(E, \mathbf{C})$. La décomposition de $k \otimes E$ en les K_i correspond à la partition de $S \times J$ en les orbites de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

Tout homomorphisme algébrique $\eta: k^* \to E^*$ s'écrit sous la forme $\prod N_{K_i/E}(x)^{n_i}$. Si l'orbite sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ de $(\sigma, \tau) \in S \times I$ correspond à K_i, i.e., si $\sigma \otimes \tau: k \otimes E \to \mathbf{C}$ se factorise par K_i, nous noterons $n(\eta; \sigma, \tau)$, ou simplement $n(\sigma, \tau)$, l'entier n_i. La fonction $n(\sigma, \tau)$ est constante sur les orbites de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Si η est la partie algébrique d'un caractère de Hecke χ, on a de plus

(8.2.1) L'entier $w = n(\eta; \sigma, \tau) + n(\eta; c\sigma, \tau)$ est indépendant de σ et τ.

C'est le *poids* de χ (et de $M(\chi)$). On écrira parfois $n(\chi; \sigma, \tau)$ pour $n(\chi_{\text{alg}}; \sigma, \tau)$.

Réciproquement, un homorphisme η vérifiant (8.2.1) est presque de la forme χ_{alg}, pour χ un caractère de Hecke convenable:

(a) une de ses puissances l'est;

(b) il existe une extension finie $\iota: E \to E'$ de E telle que $\iota\eta$ le soit;

(c) il existe une extension finie k' de k telle que $\eta \circ N_{k'/k}$ le soit.

La règle 8.1(iv) permet de déduire la bigraduation de Hodge de $H_\sigma M(\chi)$ de sa structure de E-module : le facteur direct $H_\sigma M(\chi) \otimes_{E,\tau} \boldsymbol{C}$ de $H_\sigma M(\chi) \otimes \boldsymbol{C}$ est de type de Hodge (p, q), avec $p = n(\chi; \sigma, \tau)$ et $q = w - p = n(\chi; \sigma, c\tau)$.

Exemple 8.3. Soit A une variété abélienne sur k, à multiplication complexe par E. On suppose $H_1(A)$ de rang 1 sur E (type CM). Il résulte de la théorie de Shimura et Tanayama que $H_1(A)$ vérifie la condition de 8.1(i), pour un caractère de Hecke algébrique χ de k à valeurs dans E, et que la partie algébrique χ_{alg} de χ se lit sur le $k \otimes E$-module $\text{Lie}(A)$:

$$\chi_{\text{alg}}(x) = \det_E(x \otimes 1, \text{Lie}(A))^{-1}.$$

Exemple 8.4. Prenons pour k le corps des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, soit V l'hypersurface de Fermat d'équation projective $\sum_{i=0}^m X_i^n = 0$ et soit M le motif "cohomologie primitive de dimension moitié de V". Soit G le quotient de μ_n^{m+1} par son sous-groupe diagonal. Ce groupe agit sur V par $(\alpha_i) * (X_i) = (\alpha_i X_i)$, et sur M par transport de structure. Décomposant M à l'aide de la décomposition de l'algèbre de groupe $\boldsymbol{Q}[G]$ en produit de corps, on obtient des motifs vérifiant 8.1(i) pour des caractères de Hecke algébriques convenables: ceux introduits par Weil dans son étude des sommes de Jacobi.

Exemple 8.5. Le motif $\boldsymbol{Z}(-1)$ vérifie 8.1(i) pour χ = la norme. Pour χ d'ordre fini, un motif d'Artin convenable vérifie 8.1(i).

8.6. Pour chaque $\sigma \in S$, $H_\sigma(M(\chi))$ est de rang 1 sur E. Choisissons une base e_σ de chaque $H_\sigma(M(\chi))$. Outre sa structure de E-module, la somme des $H_\sigma(M(\chi)) \otimes \boldsymbol{C}$ a une structure naturelle de $k \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^S$-module —au total, une structure de $k \otimes E \otimes \boldsymbol{C}$-module libre de rang 1, pour laquelle $e = \sum e_\sigma$ est une base.

8.7. La réalisation de de Rham $H_{DR}(M(\chi))$ est un $k \otimes E$-module libre de rang 1. Choisissons en une base ω. La somme des I_σ: $H_\sigma(M(\chi)) \otimes \boldsymbol{C} \to^{\sim} H_{DR}(M(\chi)) \otimes_{k,\sigma} \boldsymbol{C}$ est l'isomorphisme (0.4) de $k \otimes E \otimes \boldsymbol{C}$-module

$$I: \bigoplus_\sigma H_\sigma(M(\chi)) \otimes \boldsymbol{C} \xrightarrow{\sim} H_{DR}(M(\chi)) \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{C}.$$

Soit ω une base du $k \otimes E$-module $H_{DR}(M(\chi))$, et posons $p'(\chi) = \omega/I(e) \in (k \otimes E \otimes \boldsymbol{C})^*$. Cette *période* dépend de χ, ω et e. Prise modulo $(E \otimes F)^*$ et E^{*S}, elle ne dépend que de χ. Nous noterons $p'(\chi; \sigma, \tau)$—ou simplement $p'(\sigma, \tau)$—la composante d'indice (σ, τ) de son image par l'isomorphisme $E \otimes F \otimes \boldsymbol{C} \to^{\sim} \boldsymbol{C}^{S \times J}$.

8.8. Soit A comme en 8.3 et calculons les périodes $p'(\sigma, \tau)$, modulo $\bar{\boldsymbol{Q}}^*$, pour le motif $H^1(A)$. On commence par étendre les scalaires de k à $\bar{\boldsymbol{Q}}^*$, à l'aide de σ. Si $n(\sigma, \tau) = 1$, il existe alors une 1-forme holomorphe ω définie sur $\bar{\boldsymbol{Q}}$ telle que $u^*\omega = \tau(u)\omega$ pour $u \in E$, et, pour $Z \in H_1(A(\boldsymbol{C}))$, on a $p'(\sigma, \tau) \sim \int_Z \omega$. On peut passer de là au cas général à l'aide de la formule $p'(\sigma, \tau) \cdot p'(\sigma, c\tau) \sim 2\pi i$.

8.9. La conjecture 8.1(ii) affirme en particulier que si deux motifs vérifient la condition de 8.1(i), ils ont même période p. Pour les motifs 8.4, les périodes s'expriment en terme de valeurs de la fonction Γ et, si on travaille mod $\bar{Q}^*$, 8.1 suggère la conjecture de B. Gross [7] reliant certaine périodes à des produits de valeurs de la fonction Γ.

La comparaison de 8.4 et 8.5 mène à la Conjecture 8.11, 8.13 suivante. Le résultat annoncé après 0.10 permet de la démontrer.

8.10. Soient N un entier, $k = Q(\exp(2\pi i/N))$, $\mathscr{P}$ un idéal premier de k, premier à N, $k_{\mathscr{P}}$ le corps résiduel et $q = N\mathscr{P} = |k_{\mathscr{P}}|$. On notera t l'inverse de la réduction mod $\mathscr{P}$, des racines $N^{\text{ième}}$ de 1 dans $k_{\mathscr{P}}$ à celles de k.

Pour $a \in N^{-1}\, Z/Z$, $a \neq 0$, considérons la somme de Gauss $g(\mathscr{P}, a, \Psi) = -\sum t(x^{-a(q-1)})\Psi(x)$. La somme est étendue à $k_{\mathscr{P}}^*$ et $\Psi: k_{\mathscr{P}} \to C^*$ est un caractère additif non trivial.

Soit $\boldsymbol{a} = \sum n(a)\delta_a$ dans le groupe abélien libre de base $N^{-1}Z/Z - \{0\}$. Si $\sum n(a)a = 0$, le produit des $g(\mathscr{P}, a, \Psi)^{n(a)}$ est indépendant de Ψ et on pose $g(\mathscr{P}, \boldsymbol{a}) = g(\mathscr{P}, a, \Psi)^{n(a)}$. Weil [16] a montré que, comme fonction de $\mathscr{P}$, $g(\mathscr{P}, \boldsymbol{a})$ est un caractère de Hecke algébrique $\chi_{\boldsymbol{a}}$ de k à valeurs dans k. Notons $\langle a\rangle$ le représentant entre 0 et 1 de a dans Z/N. Si $\boldsymbol{a} = \sum n(a)\delta_a$ verifie

(*) Pout tout $u \in (Z/N)^*$, on a $\sum n(a)\,\langle ua\rangle = 0$,

il résulte la détermination par Weil de la partie algébrique de $\chi_{\boldsymbol{a}}$ que $\chi_{\boldsymbol{a}}$ est d'ordre fini; on note encore $\chi_{\boldsymbol{a}}$ le caractère de $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/k)$ valant $\chi_{\boldsymbol{a}}(\mathscr{P})$ sur le Frobenius géométrique en $\mathscr{P}$.

Posons $\Gamma(\boldsymbol{a}) = \Gamma(\langle a\rangle)^{n(a)}$. Une première partie de la conjecture: algébraicité de $\Gamma(\boldsymbol{a})$ lorsque $\boldsymbol{a}$ vérifie (*), a été prouvée par Koblitz et Ogus: voir l'appendice. On désire avoir, plus précisément:

Conjecture 8.11. *Si* $\boldsymbol{a}$ *vérifie* (*), *on a* $\sigma\Gamma(\boldsymbol{a}) = \chi_{\boldsymbol{a}}(\sigma)\cdot\Gamma(\boldsymbol{a})$ *pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{Q}/k)$.

Si $\boldsymbol{a}$ est invariant par un sous-groupe H de $(Z/N)^*$, on peut préciser 8.11 en remplaçant $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/k)$ par $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/k^H)$, et en utilisant SGA $4^{1/2}$ 6.5 pour définir un caractère de ce groupe, à valeur dans les racines de l'unité de k^H. C'est ce que nous faisons ci-dessous.

8.12. Soient H un sous-groupe de $(Z/N)^*$, $\mathscr{P}$ un idéal premier de k^H, premier à N, κ son corps résiduel et $\Psi: \kappa \to C^*$ un caractère additif non trivial. Pour $a \in N^{-1}\, Z/Z - \{0\}$, soient $\mathscr{P}_{a,i}$ les idéaux premiers de $k^H(\exp(2\pi i a))$ au-dessus de $\mathscr{P}$. Si κ' est le corps résiduel en $\mathscr{P}_{a,i}$, et que $|\kappa'| = q'$, on note $g(\mathscr{P}_{a,i}, a, \Psi)$ la somme de Gauss $-\sum t(x^{-a(q'-1)})\Psi(\mathrm{Tr}_{\kappa'/\kappa}x)$ (somme étendue à κ'^*). Le produit $g(\mathscr{P}, a, \Psi) = \prod_i g(\mathscr{P}_{a,i}, a, \Psi)$ ne dépend que de l'orbite de a sous H.

Soit $\boldsymbol{a} = \sum n(a)\delta_a$, invariant par H, et vérifiant $\sum n(a)a = 0$. Pour chaque orbite 0 de H dans $N^{-1}\, Z/Z - \{0\}$, on note $n(0)$ la valeur constante de $n(a)$ sur 0. On pose

$$g(\mathscr{P}, \boldsymbol{a}) = \prod_{a \bmod H} g(\mathscr{P}, a, \Psi)^{n(a)}.$$

Comme fonction de $\mathscr{P}$, $g(\mathscr{P}, \boldsymbol{a})$ est un caractère de Hecke algébrique $\chi_{\boldsymbol{a}}$ de k^H à valeurs dans k^H. Pour le prouver, on se ramène par additivité à supposer les $n(a) \geqq 0$. On applique alors [3, 6.5] pour $F = k^H$, $\bar{F} = \bar{Q}$, $k =$ notre k, et $I =$ une somme disjointes de copies d'orbites H: $n(0)$ copies de 0; pour $i \in I$, d'image a/N dans $N^{-1}Z/Z$, on prend pour λ_i le composé $\hat{Z}(1)_{\bar{F}} \to (Z/N)(1)_{\bar{F}} = \mu_N(k) \xrightarrow{x^a} k^*$; le caractère de Hecke obtenu est le produit de $\chi_{\boldsymbol{a}}$ par le caractère "signature de la représentation de permutation de H sur I''. Un cas particulier de ce résultat figure déjà dans Weil [17]. Le caractère χ_a de 8.10 est le composé de χ_a ci-dessus avec la norme N_{k/k^H}.

Conjecture 8.13. *Soient $\mathscr{P}$ un idéal premier de k^H, premier à N et $F_{\mathscr{P}}$ un Frobenius géométrique en $\mathscr{P}$. Si a invariant sous H vérifie* (*), *on a*

$$F_{\mathscr{P}}\Gamma(a) = g(\mathscr{P}, a) \cdot \Gamma(a).$$

En particulier, si le groupe des racines de l'unité de k^H est d'ordre N', on a $\Gamma(a)^{N'} \in k^H$.

On peut de 8.13 déduire la variante suivante, apparemment plus générale. On remplace la condition (*) par

(*') $\quad \sum n(a)\langle ua\rangle = k \quad$ est un entier indépendant de $u \in (Z/N)^*$.

Le caractère de Hecke $N\mathscr{P}^{-k} \cdot g(\mathscr{P}, a)$ est alors d'ordre fini. On l'identifie à un caractère χ de $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/k^H)$, et on espère avoir

$$\sigma((2\pi i)^{-k}\,\Gamma(a)) = \chi(\sigma)\cdot((2\pi i)^{-k}\,\Gamma(a)).$$

8.14. Si k est un corps extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel, soit, comme nous dirons, un corps de type CM, Shimura [13] a déterminé les valeurs critiques des fonctions L des caractères de Hecke algébriques de k, au produit près par un nombre algébrique. Il les exprime en terme de périodes de variétés abéliennes de type CM, à multiplication complexe *par* k. Dans la fin du paragraphe, nous montrons que son théorème est compatible à la Conjecture 2.8, qui les exprime en terme de périodes de motifs *sur* k, de rang 1.

8.15. Soient χ et $M(\chi)$ comme en 8.1. Excluons le cas 8.5, et supposons que $R_{k/Q}\,M(\chi)$ vérifie 1.7. Le corps k est alors totalement imaginaire, et les nombres de Hodge h^{pp} sont nuls: avec les notations de 8.1 et 8.2, aucun n_i n'est égal à $w/2$. Notre première tâche est de calculer $c^+R_{k/Q}M(\chi)$ en terme des périodes $p'(\chi; \sigma, \tau)$. Rappelons que c'est le déterminant de l'isomorphisme de $E \otimes C$-module

$$I^+\colon H_B^+R_{k/Q}M(\chi) \otimes C \xrightarrow{\sim} H_{DR}^+R_{k/Q}M(\chi) \otimes C,$$

calculé dans des bases définies sur E.

Choisissons les e_σ de 8.6 de sorte que $F_\infty e_\sigma = e_{c\sigma}$. Les $e_\sigma \pm e_{c\sigma}$ forment alors une base de $H_B^\pm R_{k/Q}M(\chi) \subset H_BR_{k/Q}\,M_\chi = \bigoplus_{\sigma\in S}H_\sigma M(\chi)$. Notons au passage que $d^+ = d^- = \frac{1}{2}[k\colon Q]$. Soit $\bar{S}$ le quotient de S par $\mathrm{Gal}(C/R)$. Pour calculer $c^+ = \det(I^+)$, nous utiliserons la base $(e_\sigma + e_{c\sigma})$ de H_B^+. Elle est indexée par $\bar{S}$.

D'après 8.1(iv), la filtration de Hodge de $H_{DR}R_{k/Q}M(\chi) = H_{DR}M(\chi)$ se lit sur sa structure de $k \otimes E$-module: si on note $(k \otimes E)^+$ le facteur direct de $k \otimes E$ produit des K_i tels que $n_i < w/2$, le quotient $H_{DR}^+R_{k/Q}M(\chi)$ de $H_{DR}R_{k/Q}M(\chi)$ est le facteur direct correspondant:

$$H_{DR}^+R_{k/Q}M(\chi) = H_{DR}M(\chi) \otimes_{k\otimes E} (k \otimes E)^+.$$

Soit ω comme en 8.7, et utilisons la structure de $k \otimes E \otimes C = C^{S\times J}$-module de $H_{DR}M(\chi)$ pour décomposer ω: $\omega = \sum\omega_{\sigma,\tau}$. On a par définition $I(e_\sigma) = \sum_\tau p'(\sigma,\tau)^{-1}\omega_{\sigma,\tau}$, et donc

$$I^+(e_\sigma + e_{c\sigma}) = \sum_{n(\sigma,\tau)<w/2} p'(\sigma,\tau)^{-1}\omega_{\sigma,\tau} + \sum_{n(\sigma,\tau)<w/2} p'(c\sigma,\tau)^{-1}\omega_{c\sigma,\tau};$$

c'est la somme, indexée par $\tau \in J$, de termes égaux à $p'(\sigma, \tau)^{-1}\omega_{\sigma,\tau}$ pour $n(\sigma, \tau) < w/2$, et à $p'(c\sigma, \tau)^{-1}\omega_{c\sigma,\tau}$ pour $n(\sigma, \tau) > w/2$. Pour $\bar{\sigma} \in \bar{S}$, de représentant σ, posons

$$\omega_{\bar{\sigma}} = \sum_{n(\sigma,\tau)<w/2} \omega_{\sigma,\tau} + \sum_{n(c\sigma,\tau)<w/2} \omega_{c\sigma,\tau}.$$

Les $I^+(e_\sigma + e_{c\sigma})$ sont des multiples des $\omega_{\bar{\sigma}}$ par des éléments de $E \otimes C$; les $\omega_{\bar{\sigma}}$ forment donc une base de H^+_{DR}. Dans les bases $e_\sigma + e_{c\sigma}$ et $\omega_{\bar{\sigma}}$, la matrice de I^+ est diagonale; son déterminant $\det'(I^+) \in (E \times C)^* = C^{*J}$ a pour coordonnées

$$\det{}'(I^+)_\tau = \prod_{n(\sigma,\tau)<w/2} p'(\sigma, \tau)^{-1}.$$

Soient les applications $E^{\bar{S}} \to E^S$: $1_{\bar{\sigma}} \to 1_\sigma + 1_{c\sigma}$, pour $\bar{\sigma}$ image de σ, $E^S \otimes C \xrightarrow{\sim} k \otimes E \otimes C$, déduit de l'isomorphisme de $k \otimes C$ avec C^S, et la projection de $k \otimes E$ sur $(k \otimes E)^+$. Par composition, on obtient un isomorphisme de $E \otimes C$-modules:

$$E^{\bar{S}} \otimes C \xrightarrow{\sim} (k \otimes E)^+ \otimes C.$$

Nous noterons $D(\chi)$ son déterminant, calculé dans des bases définies sur E des deux membres. Identifiant H_{DR} à $k \otimes E$ à l'aide de la base ω, on voit que c'est le déterminant de l'application identique de $H^+_{DR} \otimes C$, calculé dans la base $\omega_{\bar{\sigma}}$, à la source, et une base définie sur E, au but. Notant $D_\tau(\chi)$ ses composantes dans C^J, on trouve pour $c^+ = \det'(I^+) \cdot D(\chi)$ la formule suivante.

PROPOSITION 8.16. *On a*

$$c^+ R_{k/Q} M(\chi) = \Big(\prod_{n(\sigma,\tau)<w/2} p'(\sigma, \tau)^{-1} \cdot D_\tau(\chi) \Big)_{\tau \in J}.$$

REMARQUE 8.17. Supposons k de type CM, extension quadratique de k_0 totalement réel. Le quotient $\bar{S}$ de S s'identifie alors à l'ensemble des plongements complexes de k_0, et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E^{\bar{S}} \otimes C & \xrightarrow{\sim} & k_0 \otimes E \otimes C & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ E^S \otimes C & \longrightarrow & k \otimes E \otimes C & \longrightarrow & (k \otimes E)^+ \otimes C \end{array}$$

est commutatif. L'application composée $k_0 \otimes E \to (k \otimes E)^+$ est donc un isomorphisme, et $D(\chi)$ est encore le déterminant de $E^{\bar{S}} \otimes C \xrightarrow{\sim} k_0 \otimes E \otimes C$, déduit par extension des scalaires de Q à E de l'isomorphisme $C^{\bar{S}} \xrightarrow{\sim} k_0 \otimes C$. Ceci fournit pour $D(\chi)$, bien défini mod E^*, un représentant dans $(Q \otimes C)^* = C^* \subset (E \otimes C)^*$, à savoir le déterminant de l'inverse de la matrice (σa), pour $\sigma \in \bar{S}$ et a parcourant une base de k_0 sur Q. L'isomorphisme $C^{\bar{S}} \xrightarrow{\sim} k_0 \otimes C$ transforme la forme quadratique $\sum x_i^2$ en la forme $\mathrm{Tr}(xy)$. Ceci permet d'identifier $(\det(\sigma a))^2$ au discriminant de k_0 :

$$D(\chi) \sim \text{racine carrée du discriminant de } k_0.$$

8.18. Notons $p''(\chi; \sigma, \tau)$ l'image de $p'(\chi; \sigma, \tau)$ dans $C^*/\bar{Q}^*$. Elle ne dépend que de χ, σ et τ. Si un homomorphisme algébrique $\eta: k^* \to E^*$ vérifie (8.2.1), une de ses puissance est la partie algébrique d'un caractère de Hecke: $\eta^N = \chi_{\mathrm{alg}}$. De plus, si $\chi'_{\mathrm{alg}} = \chi''_{\mathrm{alg}}$, χ' et χ'' ne diffèrent que par un caractère d'ordre fini et $\chi'^M = \chi''^M$ pour M convenable. On déduit de (8.1.1) que $p''(\chi^M; \sigma, \tau) = p''(\chi; \sigma, \tau)^M$, et ceci permet de poser sans ambiguité

$$p(\eta; \sigma, \tau) = p(\chi; \sigma, \tau)^{1/N}, \quad \text{pour } \eta^N = \chi_{\text{alg}}.$$

Ces périodes obéissent au formalisme suivant:

(8.18.1) $p(\eta' \eta''; \sigma, \tau) = p(\eta'; \sigma, \tau)\, p(\eta''; \sigma, \tau)$.

(8.18.2) $p(\eta; \sigma, \tau)$ ne change pas quand on remplace E par une extension E' de E, et τ par un de ses prolongements à E'.

(8.18.3) $p(\eta; \sigma, \tau)$ ne change pas quand on remplace k par une extension k' de k, σ par un de ses prolongements à k', et χ par $\chi \circ N_{k'/k}$.

(8.18.4) Si α est un automorphisme de k, et β un automorphisme de E, on a $p(\eta; \sigma, \tau) = p(\beta\eta\alpha^{-1}, \sigma\alpha^{-1}, \tau\beta^{-1})$.

(8.18.5) Le complexe conjugué de $p(\eta; \sigma, \tau)$ est $p(\eta; \bar{\sigma}, \bar{\tau})$.

(8.18.6) Pour $k = F = \mathbf{Q}$, $p(\mathrm{Id}; \mathrm{Id}, \mathrm{Id}) = 2\pi i$.

Les formules (8.15.1) à (8.15.3) résultent de (8.1.1) à (8.1.3), (8.18.4) et (8.18.5) se voient par transport de structure, et (8.18.6) résulte de (8.5).

8.19. Soit $\eta : k^* \to E^*$ un homomorphisme vérifiant (8.2.1). On suppose aussi que $n(\eta; \sigma, \tau)$ ne vaut jamais $w/2$, ce qui permet de définir $(k \otimes E)^+$ comme en 8.15. Définissons $\eta^* : E^* \to k^*$ par

$$\eta^*(y) = \det_k(1 \otimes y, (k \otimes E)^+).$$

Cet homomorphisme vérifie encore (8.2.1), et

$$\begin{aligned} n(\eta^*; \sigma, \tau) &= 1 \quad \text{si } n(\eta; \sigma, \tau) < w/2, \\ &= 0 \quad \text{si } n(\eta; \sigma, \tau) > w/2. \end{aligned}$$

Si η^* est la partie algébrique d'un caractère de Hecke χ^*, $M(\chi^*)$ est le H^1 d'une variété abélienne sur E, à multiplication complexe par k, dont l'algèbre de Lie, comme $k \otimes E$-module, est isomorphe à $(k \otimes E)^+$.

PROPOSITION 8.20. *Avec les hypothèses et notations de* 8.19, *prenons pour E un sous corps de $\mathbf{C}$, et notons* 1 *l'inclusion identique de E dans $\mathbf{C}$. On a*

$$\prod_{n(\sigma,1)<w/2} p(\eta; \sigma, 1) = \prod_{\sigma} p(\eta^*; 1, \sigma)^{n(\eta;\sigma,1)}.$$

Si $\iota : E \to E' \subset \mathbf{C}$ est une extension finie de E, le membre de gauche ne change pas quand on remplace η par $\iota\eta$ (8.18.2). On a $(\iota\eta)^* = \eta^* \circ N_{E'/E}$ et, par (8.18.3), le membre de droite ne change pas non plus.

Si $\iota : k \to k'$ est une extension finie de degré d de k, le membre de gauche est élevé à la puissance d quand on remplace k par k', et η par $\eta \circ N_{k'/k}$: un plongement complexe de k est induit par d plongements de k', et on applique (8.18.3). De même pour le membre de droite, par (8.18.2) et l'égalité $(\eta \circ N_{k'/k})^* = \iota\eta^*$.

Ces compatibilités nous ramènent à supposer que E est galoisien et que k est isomorphe à E. Pour chaque isomorphisme ω de k dans E, posons $n(\omega) = n(\eta; 1 \circ \omega, \omega)$. Notant additivement le groupe des homomorphismes de k^* dans E^*, on a $\eta = \sum n(\omega)\, \omega$. Puisque $p(\eta; 1 \circ \omega, 1) = p(\eta \circ \omega^{-1}; 1, 1)$ (8.15.4), on a

$$(8.20.1) \quad \prod_{n(\sigma,1)<w/2} p(\eta; \sigma, 1) = \prod_{n(\omega)<w/2} p(\eta \circ \omega^{-1}; 1, 1) = p\Big(\sum_{n(\omega)<w/2} \eta \circ \omega^{-1}; 1, 1\Big).$$

Par ailleurs,

$$\sum_{n(\omega)<w/2} \eta \circ \omega^{-1} = \sum_{n(\omega_1)<w/2;\ \omega_2} n(\omega_2)\omega_2 \circ \omega_1^{-1} = \sum_{\omega_2} n(\omega_2) \sum_{n(\omega_1)<w/2} \omega_2 \circ \omega_1^{-1}$$
$$= \sum_{\omega_2} n(\omega_2)\, \omega_2 \circ \eta^*.$$

Ceci permet de continuer (8.20.1) par

$$= \prod_{\omega} p(\omega \circ \eta^*; 1, 1)^{n(\omega)} = \prod_{\omega} p(\eta^*; 1, 1 \circ \omega)^{n(\omega)} = \prod_{\sigma} p(\eta^*; 1, \sigma)^{n(\eta;\sigma, 1)},$$

(nouvelle application de 8.15.4), et prouve 8.20.

8.21. Combinant 8.16 et 8.20, on trouve pour la composante d'indice 1 de $c^+ R_{k/Q}\, M(\chi) \in (E \otimes C)^*/E^* = C^{*J}/E^*$, l'expression suivante, mod $\bar{Q}^*$

$$c_1^+ R_{k/Q}\, M(\chi) \sim \prod_{\sigma} p(\chi_{\text{alg}}^*; 1, \sigma)^{-n(\chi;\sigma, 1)}.$$

Si χ (i.e., $M(\chi)$) est critique, la Conjecture 2.8 affirme donc que

$$L(1 \circ \chi, 0) \sim \prod_{\sigma} p(\chi_{\text{alg}}^*; 1, \sigma)^{-n(\chi;\sigma, 1)} \quad (\text{mod } \bar{Q}^*).$$

Pour E assez grand, χ_{alg}^* est la partie algébrique d'un caractère de Hecke χ^*, et les périodes s'interprètent comme périodes d'intégrales abéliennes (8.19), (8.3). L'énoncé obtenu est celui que Shimura a prouvé pour k de type CM, ou abélien sur un corps de type CM (avec une restriction sur le poids).

REMARQUE 8.22. Si $\eta : k^* \to E^*$ vérifie (8.2.1), il existe des sous-corps k' de k et $\iota : E' \to E$ de E, soit de type CM, soit égaux à Q, et une factorisation $\eta = \iota\eta' N_{k/k'}$. On a alors $p(\eta; \sigma, \tau) = p(\eta'; \sigma \mid k', \tau \mid k')$.

Si maintenant k et E sont de type CM (ou Q), et qu'on note encore c leur conjugaison complexe, on a $c\sigma = \sigma c$, $c\tau = \tau c$, et $\eta c = c\eta$, d'où

$$p(\eta; \sigma, \tau)^- = p(\eta; c\sigma, c\tau) = p(\eta; \sigma c, \tau c) = p(c\eta c^{-1}; \sigma, \tau) = p(\eta; \sigma, \tau):$$

les périodes, a priori dans $C^*/\bar{Q}^*$, sont réelles, i.e., dans $R^*/(\bar{Q}^* \cap R^*)$.

REMARQUE 8.23. Soient G le groupe de Galois de la réunion des extensions de type CM de Q dans $\bar{Q} \subset C$, et $c \in G$ la conjugaison complexe. C'est un élément central de G. Si φ est une fonction localement constante à valeurs entières sur G, nous poserons $\varphi^*(x) = \varphi(xc)$. Supposons que $\varphi + \varphi^*$ est constante. Soient G_1 un quotient fini de G tel que φ se factorise par une fonction φ_1 sur G_1, et k le corps correspondant. L'hypothèse faite signifie que l'endomorphisme $\Sigma\varphi_1(\sigma)\sigma$ de k^* vérifie (8.2.1). La période $p(\Sigma\varphi_1(\sigma)\sigma; 1,1)$ ne dépend pas du choix de G_1; on pose $P(\varphi) = p(\Sigma\varphi_1(\sigma)\, \sigma; 1,1)$. La fonctionnelle P est un homomorphisme dans $C^*/\bar{Q}^*$ du groupe des fonctions localement constante à valeurs entières sur G qui vérifient $\varphi + \varphi^* =$ constante.

Appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Algebraicity of some products of values of the Γ function. Let $A_N = N^{-1} Z/Z - \{0\}$, and let $U_N = (Z/NZ)^*$ operate on A_N in the obvious way. If $f: A_N \to C$, define $\langle f \rangle : U_N \to C$ by $\langle f \rangle(u) = \sum_{a \in A_N} \langle a \rangle f(ua)$, where $\langle a \rangle$ denotes the representative of a between 0 and 1.

We first compute $H_Q = \{f: A_N \to Q: \langle f \rangle \text{ is constant}\}$.

EXAMPLE. If n is a divisor of N and $a \in A_N$, consider the set $S_{n,a} = [\{a + k/n: k = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{-na\}] \cap A_N$. It is easy to see that its characteristic function $\varepsilon_{n,a}$ is in H_Q. Note that $S_{1,a} = \{a, -a\}$.

PROPOSITION. *H_Q is generated by $\{\varepsilon_{n,a}: n = 1$ or n is prime and $na \neq 0\}$.*

PROOF. The orbits of A_N under the action of U_N correspond to the divisors d of N with $1 < d \leqq N$: each orbit can be written uniquely in the form $U_N(1/d)$. The stabilizer subgroup I_d of $1/d$ is $\{u \in U_N: u \equiv 1 \bmod d\}$ and the orbit of $1/d$ is canonically isomorphic to U_d. Thus, a function f on A_N is determined by the collection of functions $f_d: U_d \to Q$ defined by $f_d(v) = f(v/d)$.

To prove the proposition, we first complexify, so as to be able to work with characters of U_N.

LEMMA. *If $f: A_N \to C$ and if χ is a character of U_N, then the inner product of $\langle f\rangle$ and χ is given by:*

$$(\langle f\rangle \mid \chi) = -\sum_d L(0, \chi_d) \mid I_d \mid \cdot (f_d \mid \chi_d),$$

where the sum is taken over those divisors d of N such that χ is pulled back from a character χ_d of U_d.

PROOF. We have

$$\begin{aligned}(\langle f\rangle \mid \chi) &= \sum_{u \in U_N} \langle f\rangle(u)\,\bar\chi(u) = \sum_{a \in A_N}\sum_{u \in U_N} \langle a\rangle f(ua)\,\bar\chi(u)\\ &= \sum_{d \mid N}\sum_{v \in U_d}\sum_{u \in U_N} \langle v/d\rangle f_d(u_d v)\,\bar\chi(u),\end{aligned}$$

where $u_d \in U_d$ is the image of u.

Now if we choose a set $U'_d \subseteq U_N$ of coset representatives for $U_N \to U_d$, we can write:

$$\sum_{u \in U_N} f_d(u_d v)\bar\chi(u) = \sum_{u' \in U'_d}\sum_{u \in I_d} f_d(u'_d v)\bar\chi(u')\bar\chi(u) = \sum_{u' \in U'_d} f_d(u'_d v)\bar\chi(u')\sum_{u \in I_d}\bar\chi(u).$$

Of course, this sum is zero unless χ is trivial on I_d, i.e., unless χ is pulled back from a character χ_d of U_d, in which case it is

$$\sum_{u' \in U_d} f_d(u'v)\bar\chi_d(u')|I_d| = \sum_{w \in U_d} f_d(w)\bar\chi_d(w)\chi_d(v)|I_d| = \chi_d(v)|I_d|(f_d|\chi_d).$$

If we substitute this into the above expression for $(\langle f\rangle|\chi)$ and note that $\langle v/d\rangle = |v|/d$, where $|v|$ is the smallest positive representative of $v \in U_d$, we find:

$$\begin{aligned}(\langle f\rangle|\chi) &= \sum_d \sum_{v \in U_d} |v|\chi_d(v)|I_d|d^{-1}(f_d|\chi_d)\\ &= -\sum_d L(0, \chi_d)|I_d|(f_d|\chi_d) \quad \text{as claimed.} \quad \Box\end{aligned}$$

To prove the proposition, we let d_f be the largest divisor of N such that $f_d \neq 0$; it suffices to prove that any f in H can be written as $g + f'$, with g a linear combination of the ε's and $d_{f'} < d_f$. Let $d = d_f$; we shall show below that f_d is a linear combination of functions h_1 which factor through $U_d \to U_d/\{\pm 1\}$, and functions h_p which factor through $U_d \to U_{d/p}$ for some prime divisor p of d, $p \neq d$. Any function of the first type is invariant under ± 1, and hence the corresponding function on the orbit $U_N(1/d)$ is a linear combination of $\varepsilon_{1,a}$'s. A function of the second type is invariant under the kernel K of $U_d \to U_{d/p}$, which has order p if p divides d/p and order $p - 1$ otherwise. In the first case, $K = \{1 + kd/p: k = 0,\ldots,p-1\}$, and in the second, it is this same set with one element deleted, namely, the value of $1 + kd/p$ which is divisible by p. Thus, the set $S_{p,w/d} = (Kw)/d$, with the addition of one or two elements in the orbit $U_N(p/d)$. Hence it is clear that the corresponding function on the orbit $U_N(1/d)$ can be written as a linear combination of $\varepsilon_{p,a}$'s and functions supported on the orbit of p/d, and we have obtained our desired decomposition $f = g + f'$.

It remains for us to prove the claim about f_d. If d is twice an odd number the map $U_d \to U_{d/2}$ is an isomorphism, and the claim is trivial. In the other cases, choose a primitive odd character χ_d of U_d, and let χ be the pull-back of χ_d to U_N. Since χ is nontrivial and $\langle f \rangle$ is constant, $(\langle f \rangle | \chi) = 0$. Let us look at the expression for this inner product provided by the lemma; the only nonzero terms come from those f_e such that $f_e \neq 0$ and $I_e \subseteq \mathrm{Ker}(\chi)$. But then $\mathrm{Ker}(\chi)$ contains I_e and I_d, hence also $I_d I_e = I_m$, where $m = \text{g.c.d.}(d, e)$. Since χ is primitive, $m = d$ and d divides e, and since $f_e = 0$ for $e > d$, $0 = (\langle f \rangle | \chi) = -L(0, \chi_d)|I_d|(f_d|\chi_d)$. Since χ_d is odd and primitive, we conclude that $(f_d|\chi_d) = 0$, i.e., f_d is orthogonal to every odd primitive character of U_d. It follows that f_d can be written as a linear combination of characters which are even (factor through $U_d/\{\pm 1\}$) or imprimitive (factor through some $U_{d/p}$). When $d = p$, we should also remark that the constant functions on U_p are also invariant under ± 1, and hence are already covered by the first case. □

THEOREM. *Suppose that* $f: A_N \to \boldsymbol{Q}$ *is such that* $\langle f \rangle$ *is constant* : $\sum_a \langle a \rangle f(ua) = k$ *for all* $u \in U_N$. *Then*

$$\Gamma(f) =_{\text{def}} \pi^{-k} \prod_a \Gamma(\langle a \rangle)^{f(a)}$$

is an algebraic number.

PROOF. The map $\langle\ \rangle: H_{\boldsymbol{Q}} \to \boldsymbol{Q}$ sending any f to $\sum_a \langle a \rangle f(a)$ is evidently linear, and hence $\Gamma(f + g) = \Gamma(f)\Gamma(g)$, for f and g in $H_{\boldsymbol{Q}}$. By the proposition, any f in $H_{\boldsymbol{Q}}$ is a $\boldsymbol{Q}$-linear combination of the ε's; hence nf is a sum of ε's for some n. Since $\Gamma(f)^n = \Gamma(nf)$, we are reduced to checking the theorem for the ε's described in the proposition. Noting that $\langle \varepsilon_{1,a} \rangle = 1$ and that $\langle \varepsilon_{p,a} \rangle = (p + 1)/2$ if $pa \neq 0$, one has only to appeal to the identities:

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \pi(\sin \pi x)^{-1}, \qquad \sum_{k=1}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{p}\right) = p^{1/2-x}(2\pi)^{(p-1)/2}\,\Gamma(px). \quad □$$

REMARK. Kubert has recently obtained a much more precise result expressed in a different terminology from which it follows that, if $H_{\boldsymbol{Q}}$ is $\boldsymbol{Z}$-valued, then $2f$ is a $\boldsymbol{Z}$-linear combination of the ε's (to appear).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. V. Borovoi, *Sur l'action du groupe de Galois sur les classes de cohomologie rationnelles de type* (p, p) *des variétés abéliennes*, Mat. Sb. **94** (1974), 649–652. (Russian)

2. J. Coates and S. Lichtenbaum, *On l-adic zeta functions*, Ann. of Math (2) **98** (1973), 498–550.

3. P. Deligne, *Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques*, dans SGA $4^{1/2}$, 168–232.

4. ———, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular Functions of One Variable. II, Lecture Notes in Math., vol. 349, Springer-Verlag, New York, 1973, pp. 501–595.

5. ———, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaire Bourbaki 355 (Février 1969), Lecture Notes in Math., vol. 179, Springer-Verlag, New York, 139–172.

6. P. Deligne, *Théorie de Hodge*. III, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **44** (1974), 5–77.

7. B. Gross, *On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg*, Invent. Math. **45** (1978), 193–211.

8. Ju. I. Manin, *Correspondences, motifs and monoidal transformations*.

9. ———, *Points paraboliques et fonction zeta des courbes modulaires*, Izv. **36** (1972), 19–66. (Russian)

10. I. I. Piateckii-Shapiro, *Relations entre les conjectures de Tate et de Hodge pour les variétés abéliennes*, Mat. Sb. **85**(4) (1971), 610–620 = Math. USSR-Sb. **14** (1971), 615–625.

11. J. P. Serre, *Abelian l-adic representations and elliptic curves* (Mc Gill), Benjamin, New York, 1968.

12. ———, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques* (*définitions et conjectures*), Sém. Delange-Pisot-Poitou 1969/70, exposé 19.

13. G. Shimura, *On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables*, Ann. of Math. (2) **102** (1975), 491–515.

14. C. L. Siegel, *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II **10** (1969), 87–102.

15. J. Tate, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analogue*, Séminaire Bourbaki 306 (1965/66), Benjamin, New York; reproduit dans 10 *exposés sur la théorie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

16. A. Weil, *Jacobi sums as grössencharaktere*, Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 487–495.

17. ———, *Sommes de Jacobi et caractères de Hecke*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II **1** (1974), 1–14.

18. D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta functions of quadratic fields*, Modular Forms of One Variable. VI, Lecture Notes in Math., vol. 627, Springer-Verlag, New York, 1977, pp. 105–169.

19. N. Saavedra, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Math., vol. 265, Springer-Verlag, New York, 1972.

SGA. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*.

SGA 4. par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math., vols. 259, 270, 305, Springer-Verlag, New York.

SGA $4^{1/2}$. par P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math., vol. 569, Springer-Verlag, New York, 1977.

INSTITUT DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES, BURES SUR YVETTE, FRANCE