UN THÉORÈME DE FINITUDE POUR LA MONODROMIE

par P. Deligne

0. Introduction.

Soit S une variété algébrique complexe lisse (i.e. sans singularité) connexe et soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille algébrique, paramétrisée par S, de variétés projectives lisses $X_s \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Par définition, c'est la donnée d'un morphisme projectif et lisse $f : X \to S$, muni d'une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \times S \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle pr_2} & \\ & S & \end{array}$$

et les X_s sont les fibres de $f : X_s := f^{-1}(s)$. Quel que soit i, les groupes de cohomologie $H^i(X_s,\mathbb{Z})$ forment un système local sur S. Si on choisit un point base $o \in S$, le groupe fondamental $\pi_1(S,o)$ agit donc sur $H^i(X_o,\mathbb{Z})$. C'est la représentation de monodromie

$$\sigma_{\mathbb{Z}} : \pi_1(S,o) \to \mathrm{Aut}(H^i(X_o,\mathbb{Z})).$$

L'indice $\mathbb{Z}$ rappelle que $\pi_1(S,o)$ agit sur un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Nous considérerons surtout la représentation correspondante sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^i(X_o,\mathbb{Q}) = H^i(X_o,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$, encore dite de monodromie, et notée simplement

$$\sigma : \pi_1(S,o) \to GL(H^i(X_o,\mathbb{Q})).$$

On ignore à peu près tout de quels groupes peuvent être groupes fondamentaux de variétés algébriques, et de quelles représentations linéaires peuvent être obtenue comme monodromie. Par exemple, on ne connaît pas la réponse à la question de Serre: $\pi_1(S,o)$ peut-il être non-trivial, et n'avoir aucon quotient fini non-trivial? Une condition nécessaire pour qu'un groupe soit groupe fondamental de variété algébrique a été donnée par J. Morgan [8].

L'adhérence de Zariski $\bar{M}$ du groupe de monodromie $M := \mathrm{Im}(\sigma)$ dans le groupe linéaire $GL := GL(H^i(X_o,\mathbb{Q}))$ est souvent plus facile à calculer que $\mathrm{Im}(\sigma)$. On sait que c'est un groupe algébrique semi-simple ([2], 4.2.9a)). Par abus de notation, notons $\bar{M}(\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\bar{M}(\mathbb{Q})$ qui respecte le réseau entier $H^i(X_o,\mathbb{Z})/\text{torsion} \subset H^i(X_o,\mathbb{Q})$. On a $M \subset \bar{M}(\mathbb{Z})$. On connaît des exemples où M est d'indice infini dans $\bar{M}(\mathbb{Z})$ (Mostow-Deligne [3], M. Nori [9]). Dans l'exemple de Nori, le groupe M n'est pas de présentation finie. Que, initialement, les exemples qu'on avait pu calculer fournissaient tous des groupes M d'indice fini dans $\bar{M}(\mathbb{Z})$ provient peut-être de ce qu'on manque de critère pour reconnaître le contraire. On ignore si, pour $\gamma \in \bar{M}(\mathbb{Z})$, la question de savoir si $\gamma \in M$ est décidable.

Cet article expose quelques résultats de finitude sur les représentations de monodromie. Le plus frappant est le

Théorème 0.1. Fixons S, $o \in S$ et un entier N. Les représentations de monodromie σ de $\pi_1(S,o)$ (pour i et X variables) qui sont de dimension N ne forment qu'un nombre fini de classes d' isomorphie.

Nous prouverons aussi le résultat plus précis:

Variante 0.2. Fixons S, $o \in S$ et un entier N. Les représentations rationnelles de dimension N de $\pi_1(S,o)$, qui sont facteurs directs d'une représentation de monodromie ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie.

Ces énoncés sont pour les représentations rationnelles fournie par la monodromie. Les lemmes bien connus suivant permettent de traiter aussi de représentations sur les entiers.

Lemme 0.3. Soit $\sigma:\Gamma \to GL(V)$ une représentation semi-simple d'un groupe Γ sur un espace vectoriel rationnel de dimension finie V. Les représentations $\Gamma \to \mathrm{Aut}(L)$, pour $L \subset V$ un réseau entier stable par Γ, ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie.

La preuve est rappelée en 2.6.

Lemma 0.4. Soient H un $\mathbb{Z}$-module de type fini, T son sous-groupe de torsion, $L = H/T$ et $\sigma:\Gamma \to \mathrm{Aut}(L)$ une représentation d'un groupe Γ sur L. Si Γ est de type fini, il n'y a qu'un nombre fini de relèvements de σ en une action de Γ sur H.

Preuve. Le noyau de $\mathrm{Aut}\, H \to \mathrm{Aut}\, L$ est fini, car contenu dans

l'ensemble fini $1 + \mathrm{Hom}(H,T)$. Pour chaque générateur γ de Γ, $\sigma(\gamma)$ n'a donc qu'un nombre fini de relèvements dans Aut H.

Si $f : X \to S$ est un morphisme projectif et lisse, on dispose pour chaque X_s d'une décomposition de Hodge

$$H^i(X_s,\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = H^i(X_s,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}.$$

Le sous-espace $H^{p,q}$ de $H^i(X_s,\mathbb{C})$ est l'espace des classes de cohomologie c représentables par une forme fermée de type (p,q). Pour toute structure kahlérienne sur X, il revient au même d'exiger que le représentant harmonique de c soit de type (p,q). Quand s varie, les $H^i(X_s,\mathbb{C})$ forment un système local sur S, et la décomposition de Hodge varie de facon analytique réelle. P.A. Griffiths a dégagé des propriétés essentielles de comment la décomposition de Hodge varie avec s. Si on les prend comme axiomes, on obtient la notion de "variation polarisable de structures de Hodge de poids i": un système local de $\mathbb{Z}$-modules de type fini, de complexifiés munis d'une décomposition "de Hodge" variant continûment et satisfaisant à des axiomes convenables ([6], 12). Nous considérerons surtout le système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie déduit du système local de $\mathbb{Z}$-modules de type fini en tensorisant avec $\mathbb{Q}$. Nous dirons qu'il est sous-jacent à la variation.

Le théorème 0.1 et sa variante 0.2 résultent du

Théorème 0.5. Fixons S et un entier N. Les systèmes locaux sur S de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension N, facteurs directs d'un système local sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisable, ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie.

La preuve est donnée au paragraphe 2. Le lecteur intéressé seulement par 0.1, ou ne tenant pas dans 0.5 à pouvoir prendre des facteurs directs, peut omettre la fin du paragraphe 1, à partir de 1.11.

Le présent travail est le fruit d'un effort pour comprendre l'article [4] de G. Faltings. Au paragraphe 3 on explique brièvement comment, dans le cas où S est une courbe, où X est un schéma abélien sur S et où $i = 1$, le théorème 0.1 peut être obtenu par les méthodes de [4]. On obtient aussi un théorème "uniforme en S" pour S une courbe de type topologique donné (3.10). J'ignore si ce théorème vaut pour des variations de structures de Hodge polarisables de type plus général que $\{(0,1),(1,0)\}$.

1. Variations Complexes.

1.1. Soit S une variété analytique complexe lisse. Une variation complexe de poids 0 sur S est la donnée d'un système local complexe V sur S, de fibres V_s ($s \in S$) munies d'une décomposition $V_s = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} V_s^p$, satisfaisant aux axiomes suivants.

(V.C.1) Les sous-espaces $F^p := \bigoplus_{i\geq p} V_s^i$ (resp. les $\bar{F}^q := \bigoplus_{i\leq -q} V_s^i$) de V_s varient holomorphiquement (resp. antiholomorphiquement) avec s.

(V.C.2) Si une section locale différentiable v de V est en chaque point dans F^p (resp. $\bar{F}^q$), sa dérivée par rapport à un champ de vecteurs sur S est dans F^{p-1} (resp. $\bar{F}^{q-1}$).

Si $\mathcal{V}$ est le faisceau des sections C^∞ de V et que ∇ est la connexion, vue comme morphisme de faisceaux $\nabla : \mathcal{V} \to \Omega^1(\mathcal{V})$, les décompositions des V_s en les V_s^p fournissent une décomposition $\mathcal{V} = \bigoplus \mathcal{V}^p$ de $\mathcal{V}$, et (V.C.1), (V,C,2) équivalent à ce que ∇ envoie $\mathcal{V}^i$ dans $\Omega^{1,0}(\mathcal{V}^{i-1}) \oplus \Omega^1(\mathcal{V}^i) \oplus \Omega^{0,1}(\mathcal{V}^{i+1})$.

Dans la suite, nous ne considérerons que des variations complexes de poid 0 et omettrons de préciser "de poids 0".

Pour S connexe, les nombres de Hodge h^p sont les dimensions $h^p := \dim V_s^p$, indépendantes de $s \in S$. De même, la dimension de V est celle des V_s.

Une polarisation de la variation complexe V est une forme hermitienne horizontale ψ sur V telle qu'en chaque point $s \in S$ la décomposition $V = \bigoplus V_s^p$ soit orthogonale, et que la restriction de ψ à V_s^p soit définie positive pour p pair et définie négative pour p impair. On posera $\Phi = \Sigma(-1)^p \psi | V^p$, C'est une forme hermitienne définie positive sur le fibré vectoriel $\mathcal{V}$.

1.2. Exemple: Soient H une variation de structures de Hodge de poids w sur S et V le complexifié du système local d'espaces vectoriels rationnels $H_{\mathbb{Q}}$ sous-jacent à H. Par définition, il est muni de décompositions

$$V_s = \bigoplus_{p+q=w} V_s^{pq} \qquad (s \in S).$$

Si on pose $V_s^p := V_s^{p,w-p}$, V, muni de ces décompositions, est une variation complexe. Une polarisation ψ_o de H est une forme bilinéaire horizontale sur $H_{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans $(2\pi i)^{-w}\mathbb{Q}$ vérifiant des axiomes convenables. Si ψ est le prolongement sesquilinéaire de ψ_o à V, ces axiomes équivalent à ce que $(2\pi i)^w \psi$ soit une polarisation de la

variation complexe V.

1.3. Spécialisons 1.1 au cas où S est réduit à un point: une structure de Hodge complexe sur un espace vectoriel complexe H est une décomposition $H = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p$; ses nombres de Hodge sont les $h^p := \dim H^p$; une polarisation est une forme hermitienne ψ pour laquelle les H^p sont deux à deux orthogonaux et de restriction à H^p définie positive pour p pair, définie négative pour p impair.

Soient H un espace vectoriel complexe, ψ une forme hermitienne sur H et (h^p) une famille d'entiers ≥ 0. On suppose que $\dim H = \Sigma h^p$ et que $\mathrm{sgn}(\psi) = \Sigma(-1)^p h^p$. On notera $M(H,\psi,(h^p))$ ou simplement M l'espace des structures de Hodge complexes sur H, de nombres de Hodge h^p, polarisées par ψ. L'application qui à un point de M associe la filtration de Hodge de H par les $F^p := \bigoplus_{i\geq p} H^i$ est une injection de M dans une variété de drapeaux de H. En effet, $\bar{F}^q := \bigoplus_{i\leq -q} H^i$ est l'orthogonal de F^{1-q} et $H^p = F^p \cap \bar{F}^{-p}$. Cette injection identifie M à un ouvert de cette variété de drapeaux. On munit M de la structure complexe induite.

En chaque point de M, $\mathrm{End}(H)$ hérite d'une décomposition de Hodge, et d'une filtration de Hodge correspondante, avec

$$F^p \mathrm{End}\, H = \{f: H \to H \mid f(F^i) \subset F^{i+p}\}.$$

L'espace tangent à M (i.e. à la variété de drapeaux) s'identifie à $\mathrm{End}(H)/F^0\mathrm{End}(H)$, et hérite de la filtration image de F. C'est une filtration holomorphe F du fibré tangent, avec $F^0 = 0$.

Soit U le groupe unitaire $U(H,\psi)$. Il agit transitivement sur M. Si $m \in M$ correspond à une décomposition $H = \oplus H^p$ de H, le stabilisateur de m est le sous-groupe compact

$$K := \prod U(H^p, \psi|H^p) \subset U.$$

La compacité de K assure l'existence sur $M \simeq U/K$ de métriques riemanniennes (voire hermitiennes) U-invariantes.

1.4. Remarque: Si (H',ψ') est isomorphe à (H,ψ), une métrique U-invariante sur M en détermine une sur $M' := M(H',\psi',(h^p))$: transporter la métrique donnée par l'isomorphisme $M \to M'$ induit par un isomorphisme $u:(H,\psi) \to (H',\psi')$. La U-invariance assure que la métrique obtenue sur M' ne dépend pas du choix de u.

1.5. Remarque: Pour toute métrique riemannienne U-invariante d sur

M, la variété riemannienne (M,d) est homogène; elle est donc complète et ses boules fermées sont compactes. Si $o \in M$ et que C est une constante, l'ensemble des $g \in U$ tels que $d(go,o) \leq C$ est compact.

1.6 Soient (V,ψ) une variation complexe polarisée sur S, supposé connexe, et (h^p) ses nombres de Hodge. Choisissons un point base $o \in S$ et soit $(\tilde{S},o)$ le revêtement universel de (S,o). Notons V_o la fibre du système local V en o et ψ_o la forme hermitienne sur V_o induite par ψ. L'image inverse sur $\tilde{S}$ de la variation complexe V est une variation complexe sur $\tilde{S}$. Le système local sous-jacent est constant. Il s'identifie au système local constant de fibres V_o et cette identification permet de regarder la variation comme une famille, paramétrisée par $\tilde{S}$, de structures de Hodge complexes sur l'espace vectoriel fixe V_o. Elles sont polarisées par ψ_o et de nombres de Hodge (h^p). On attache ainsi à (V,ψ) une application

$$P : \tilde{S} \to M(V_o,\psi_o,(h^p)).$$

L'axiome (V.C.1) signifie que P est une application holomorphe, et (V.C.2) que dP prend ses valeurs dans le sous-fibré F^{-1}(tangent) du fibré tangent (cf. 1.3).

On dispose d'une action de $\pi_1(S,o)$ sur $\tilde{S}$ et sur V_o (monodromie) - donc sur $M := M(V_o,\psi_o,(h^p))$ - et l'application P est équivariante. L'application P détermine la variation complexe image inverse de (V,ψ) sur $\tilde{S}$, et la variation complexe (V,ψ) sur S s'en déduit par passage au quotient par $\pi_1(S,o)$.

Notre outil essentiel est le théorème suivant de P.A. Griffiths ([5], 10.1).

1.7. Théorème. (P.A. Griffiths). Supposons que S est le disque unité, et munissons-le de sa métrique de Poincaré (courbure constante -1). Alors, pour une métrique riemannienne U-invariante convenable sur M, ne dépendant que des nombres de Hodge h^p (cf. 1.4), l'application P décroît les distances.

Reprenons les hypothèses et notations de 1.6, et soit $\sigma:\pi_1(S,o) \to GL(V_o)$ la représentation de monodromie. Nous dirons qu'une base e de V_o est adaptée à la décomposition de Hodge $P(o) : V_o = \oplus V_o^p$ de V_o si elle est la réunion de bases orthonormées pour $(-1)^p\psi$ des V_o^p.

1.8. Corollaire. Fixons (S,o) et les nombres de Hodge (h^p). Pour chaque $\gamma \in \pi_1(S,o)$, il existe C tel que, pour toute variation polarisée V sur S, de nombres de Hodge (h^p), et pour toute base adaptée e de V_o, les coefficients de la matrice $\sigma(\gamma)$, dans la base e, sont bornés en valeur absolue par C.

Preuve. Soient $H := \oplus \mathbb{C}^{h^p}$, ψ la forme hermitienne sur H sommedes formes hermitiennes $(-1)^p \Sigma u_i \bar{v}_i$ sur les $\mathbb{C}^{h^p}$, $M := M(H,\psi,(h^p))$ et o le point de M correspondant à la décomposition de H en les $\mathbb{C}^{h^p}$. Pour toute variation V comme en 1.7, le choix d'une base adaptée de V_o identifie V_o à H et permet de regarder l'application P définie par V comme une application

$$P_V : \tilde{S} \to M$$

vérifiant $P_V(o) = o$.

Soit d_K la pseudo-métrique de Kobayashi sur $\tilde{S}$: la plus grande pseudo-métrique d telle que pour toute application holomorphe φ du disque unité dans $\tilde{S}$, $d(\varphi(x),\varphi(y))$ soit inférieur ou égal à la distance de Poincaré de x à y. Puisque $\tilde{S}$ est connexe, $d_K(x,y)$ est fini pour tout x et y. Pour M muni d'une métrique riemannienne U-invariante d_M convenable, indépendante de (S,o) et de V, il résulte de 1.7 que

$$d_M(\sigma(\gamma)o,o) = d_M(P_V(\gamma.o),P_V(o)) \leq d_K(\gamma.o,o).$$

D'après 1.5, $\sigma(\gamma)$ est donc dans un compact de U indépendant de V, ce qui prouve 1.8.

1.9. Corollaire. Fixons (S,o) et un entier N. Pour chaque $\gamma \in \pi_1(S,o)$, il existe C tel que, pour toute variation polarisée V sur S, de dimension N, et toute base adaptée e de V_o, les coefficients de la matrice $\sigma(\gamma)$, dans la base e, sont bornés en valeur absolue par C.

Preuve. Procédons par récurrence sur N. Le cas $N = 0$ est trivial. Si p est tel que $h^p = 0$, soit $V_{<p}$ (resp. $V_{>p}$) la somme des V^i pour $i < p$ (resp. $i > p$). Il résulte de (V.C.1)(V.C.2) que les sous-fibrés $V_{<p}$ et $V_{>p}$ sont horizontaux. S'il existe $i < p < j$ avec $h^i \neq 0$, $h^p = 0$, $h^j \neq 0$, on obtient ainsi une décomposition de la variation complexe V en la somme de deux variations complexes de dimensions strictement plus petites que celle de V. Une base adaptée de V_o est réunion de bases adaptées de $(V_{<p})_o$ et $(V_{>p})_o$, et on

conclut par récurrence.

Il reste à traiter le cas où les i tels que $h^i \neq o$ forment un intervalle. Soit $V(n)$ la variation complexe de même système local sous-jacent que V, déduite de V par la renumérotation: $(V(n)_s)^p := V_s^{p+n}$. Elle est polarisée par $(-1)^n\psi$, une base adaptée de V_o est encore une base adaptée de $V(n)_o$, et les coefficients de la matrice $\sigma(\gamma)$ sont les mêmes pour V et $V(n)$. On ne restréint donc par la généralité en ne traitant que des V tels que $\{p|h^p \neq 0\}$ soit un intervalle commencant en 0. Il n'y a alors qu'un nombre fini de possibilités pour le système des h^p, et on conclut par 1.8.

1.10 Corollaire. Fixons (S,o) et un entier N. Pour chaque $\gamma \in \pi_1(S,o)$, il existe C tel que, pour toute variation complexe polarisable V sur S, de dimension N, on ait

$$|Tr(\sigma(\gamma))| < C .$$

1.11. Dans la fin de ce paragraphe, on suppose que S est le complément, dans une variété analytiqne compacte $\bar{S}$, d'un sous-espace analytique. Cette hypothèse implique que sur S toute fonction plurisubharmonique bornée supérieurement est constante. Soit V une variation complexe polarisable de structures de Hodge sur S. Si U est un ouvert de S, et v une section horizontale de V sur U, W. Schmid [10] montre que $\phi(v,v)$ est borné sur la trace sur U de tout compact de $\bar{S}$. Mise en garde: le cadre dans lequel travaille W. Schmid est différent du nôtre, mais ses preuves s'adaptent sans difficulté: il travaille avec des "variations réelles"; chaque variation complexe définit une variation réelle de dimension double, et on applique [10] à cette dernière; il suppose les moncdromies locales quasi-unipotentes, mais ne se sert pas réellement de cette hypothèse. Ceci acquis, les arguments de [6], 7.1 (cf. [10], §7) montrent que si v est une section globale de V sur S, les composantes de v dans les V^p sont encore horizontales.

1.12. Soit V_o un système local complexe sur S. On suppose V_o semi-simple: il admet une décomposition

$$(1.12.1) \quad V_o = \bigoplus_{i\in I} S_i \otimes W_i$$

où les S_i sont des systèmes locaux irréductibles deux à deux non

isomorphes et où les W_i sont des espaces vectoriels complexes non nuls. L'hypothèse que V_o est semi-simple est automatiquement remplie si V_o est sous-jacent à une variation polarisable de structures de Hodge (par. 1.11, les arguments de [2], 4.2.6 s'appliquent). M. Nori (non publié) a montré qu'elle l'est aussi si V_o est sous-jacent à une variation complexe polarisable et que $\bar{S}$ est kahlérienne ou algébrique (ou plus généralement si chaque classe $a \in H^1(\bar{S},\mathbb{R})$ est représentable par une 1-forme $\alpha + \bar{\alpha}$ avec α holomorphe).

1.13. Proposition. Sous les hypothèses de 1.11 et 1.12, si V_o est sous-jacent à une variation complexe polarisable,

(i) Chaque S_i est sous-jacent a une variation complexe polarisable, unique à une renumérotation $p \mapsto p + n$ près.

(ii) Choisissons sur chaque S_i une variation complexe polarisable. Via (1.12.1), des structures de Hodge complexes sur les W_i fournissent alors une variation complexe polarisable sur V_o. Toute variation complexe polarisable sur V_o est ainsi obtenue.

Preuve. La décomposition (1.12.1) fournit un isomorphisme

(1.13.1) $\quad \mathrm{End}(V_o) = \prod \mathrm{End}(W_i)$.

L'espace vectoriel $\mathrm{End}(V_o)$ est l'espace des sections globales horizontales du système local $\underline{\mathrm{End}}(V_o)$. Pour V_o sous-jacent à une variation polarisable V, $\mathrm{End}(V_o)$ hérite de la décomposition de Hodge des $\underline{\mathrm{End}}(V_s)$ $(s \in S)$ (1.11):

$$\mathrm{End}(V_o) = \oplus\, \mathrm{End}(V_o)^p.$$

Lemma 1.14. Toute graduation de $\prod \mathrm{End}(W_i)$, compatible à la structure d'algèbre, provient de graduations des W_i.

Preuve. Regardons une graduation comme une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, $\lambda \in \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ agissant par multiplication par λ^n sur la composante de degré n (SGA3 I4.7.3). La composante neutre du groupe des automorphismes de l'algèbre $\prod \mathrm{End}(W_i)$ est le quotient du groupe $\prod \mathrm{GL}(W_i)$ par son centre $\mathbb{G}_m^I$. Tonte extension centrale de $\mathbb{G}_m$ par $\mathbb{G}_m^I$ étant triviale (SGA3IX8.2), un morphisme $\mathbb{G}_m \to \mathrm{Aut}(\prod \mathrm{End}(W_i))$ se relève en un morphisme de $\mathbb{G}_m$ dans $\prod \mathrm{GL}(W_i)$, i.e. en une graduation des W_i.

Preuve de 1.13 (suite). Pour V_o sous-jacent à une variation polari-

sable V, choisissons (1.14) des graduations des W_i telles que l'isomorphisme (1.13.1) soit compatible aux graduations. Si la droite $L_i \subset W_i$ est homogène, c'est l'image d'un projecteur $e \in \mathrm{End}(W)$ homogène de degré 0 et $S_i \otimes L_i \subset V_o$, isomorphe à S_i, est l'image d'un projecteur $e \subset \mathrm{End}(V) = \mathrm{End}(V_o)^o$. C'est donc une sous-variation complexe de V, un facteur direct en fait, et on en déduit l'existence d'une variation complexe polarisable à laquelle S_i soit sous-jacent.

Choisissons sur chaque S_i une variation complexe polarisable. Pour toute variation polarisable V sur V_o,

$$W_i = \mathrm{Hom}(S_i, V_o)$$

hérite de la variation polarisable $\underline{\mathrm{Hom}}(S_i, V)$ d'une décomposition de Hodge (1.11 appliqué à $\underline{\mathrm{Hom}}(S_i, V)$). L'isomorphisme

$$\oplus S_i \otimes \mathrm{Hom}(S_i, V_o) \to V_o$$

respecte les structures de Hodge, et (ii) en résulte. L'assertion d'unicité dans (i) est (ii) pour $V_o = S_i$.

1.15 Corollaire. *Soient S un ouvert de Zariski de $\bar{S}$ compact, $o \in S$ et un entier N. Pour tout $\gamma \in \pi_1(S,o)$ il existe C tel que, pour toute variation de structures de Hodge polarisable W sur S et tout facteur direct V du système local rationnel sous-jacent, si $\dim(V) = N$, la monodromie $\sigma(\gamma)$ vérifie $|\mathrm{Tr}(\sigma(\gamma))| < C$.*

Résulte de 1.10 et 1.13.

2. Preuve du théorème 0.5.

Nous nous appuierons sur le théorème classique suivant.

2.1. Théorème. *Soient Γ un groupe de génération finie et N un entier. Il existe une partie finie F de Γ telle que si deux représentations linéaires de dimension N de Γ sur un corps k de caractéristique 0, de caractères χ_1 et χ_2, vérifient $\chi_1(\gamma) = \chi_2(\gamma)$ pour $\gamma \in F$, alors $\chi_1 = \chi_2$.*

Preuve. Un groupe de génération finie est de génération finie en tant que monoïde. Il suffit donc de prouver 2.1 dans le cas plus général où Γ est un monoïde de génération finie et où les représentations sont à valeurs dans les matrices $N \times N$, non nécessairement inversible. Soit T une partie finie de Γ qui engendre Γ. On ne restreint pas la généralité en supposant que Γ est le monoïde libre

engendré par T. Dans ce cas, la donnée d'une représentation de Γ équivaut à celle d'une famille de matrices $N \times N$ indexée par T: à ρ, attacher la famille des $\rho(t)$ $(t \in T)$.

Soient $X^t_{i,j}$ $(i,j \in [1,N], t \in T)$ des indéterminées et A l'algèbre de polynômes à $N^2|T|$ variables $\mathbb{Q}[X^t_{i,j}]$. C'est l'algèbre des fonctions polynômes sur la variété algébrique (un espace affine) qui paramètre les familles indexées par T de matrices $N \times N$. Soit τ la représentation $\Gamma \to M_N(A)$ pour laquelle $\tau(t) = (X^t_{i,j})_{i,j\in[1,N]}$. L'action par $X \to g\,X\,g^{-1}$ du groupe linéaire GL_N sur les matrices $N \times N$ fournit une action sur la $\mathbb{Q}$-algèbre A du groupe algébrique GL_N (sur $\mathbb{Q}$). Soit A^{GL_N} l'algèbre des invariants. Pour tout espace vectoriel V de dimension N sur k, la k-algèbre $A^{GL_N} \otimes_{\mathbb{Q}} k$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômes $GL(V)$-invariantes de $|T|$ endomorphismes de V. Les éléments $\mathrm{Tr}(\tau(\gamma))$ $(\gamma \in \Gamma)$ de A sont invariants.

2.2 Lemme (C. Procesi [13]). *L'algèbre des invariants de GL_N dans A est engendrée par les $\mathrm{Tr}(\tau(\gamma))$ $(\gamma \in \Gamma)$.*

La preuve consiste à se ramener par polarisation à l'étude des invariants multilinéaires de n endomorphismes, à les interpréter comme invariants multilinéaires de n vecteurs et n covecteurs et à utiliser la description que H. Weyl donne de ceux-ci.

Preuve de 2.1 (fin). D'après Hilbert, l'algèbre des invariants de GL_N dans A est de type fini. Il existe donc une partie finie F de Γ telle que tout invariant soit un polynôme en les $\mathrm{Tr}(\tau(f))$ pour $f \in F$. En particulier, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un polynôme à coefficients rationnels P_γ en des indéterminées x_f $(f \in F)$, tel que

$$\mathrm{Tr}\,\tau(\gamma) = P_\gamma((\mathrm{Tr}\,\tau(f))_{f\in F}).$$

Pour tout corps k de caractéristique 0 et toute représentation de Γ dans $M_N(k)$, de caractère χ, on a par spécialisation,

$$\chi(\gamma) = P_\gamma((\chi(f))_{f\in F}).$$

Le théorème en résulte.

2.3 Remarque. Soit $s = s(N)$ le plus petit entier t tel que toute $\mathbb{Q}$-algèbre associative sans unité vérifiant l'identité $z^N = 0$ vérifie aussi l'identité $z_1 \cdots z_t = 0$. Dans [13], C. Procesi montre que l'algèbre A^{GL_N} de 2.2 est engendrée par les $\mathrm{Tr}(\tau(\gamma))$ pour γ de

longueur $\leq s$, et que cette borne est optimale: si $|T| \geq s$ et que $\pi \in \Gamma$ est un produit de s générateurs distincts, $Tr(\tau(\pi))$ n'est pas dans l'algèbre engendrée par les $Tr(\tau(\gamma))$ pour γ de longueur $< s$. Dans 2.1, on peut donc prendre pour F l'ensemble des mots de longueur $\leq s$ en les éléments d'un système générateur symétrique T. La restriction "symétrique" est en fait inutile cas un caractère sur un groupe Γ est déterminé par sa restriction à un sous-monoïde qui engendre Γ.

Highman a montré que $s \leq 2^N - 1$. Pour une preuve très courte, vois N. Jacobson, Structure of rings (2nd ed.), p. 274. Cette borne a été améliorée par Yu. P. Razmislov en $s \leq N^2$ (Izvestia A.N. 38 4 (1974), p. 756).

2.4 Preuve de 0.5. Fixons $o \in S$. Si V est une variation polarisable de structures de Hodge sur S, et que W est un facteur direct de dimension N de la représentation de monodromie σ correspondante, la représentation rationnelle σ_W de $\pi_1(S,o)$ sur W vérifie (A)(B) (C) ci-dessous.

(A) Pour tout $\gamma \in \pi_1(S,o)$, $Tr(\sigma_W(\gamma)) \in Z$.

Preuve. La représentation σ respecte par hypothèse un réseau entier. La sous-représentation σ_W aussi.

(B) Pour tout $\gamma \in \pi_1(S,o)$ il existe $C(\gamma,N)$ tel que

$$|Tr(\sigma_W(\gamma))| < C(\gamma,N).$$

C'est une application de 1.15.

(C) La représentation σ_W est semi-simple.

En effet, σ l'est (cf. [2] 4.2.6, dont la méthode s'applique par 1.11).

A N fixé, par (A)(B), il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour la valeur de chaque $Tr(\sigma_W(\gamma))$. D'après 2.1, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le caractère de σ_W, donc, d'après (C), pour sa classe d'isomorphie.

2.5 Remarque. Dans 0.5, on suppose que S est une variété algébrique. La preuve s'applique encore si S est un ouvert de Zariski d'une variété analytique compacte. Si on suppose seulement que S est une variété analytique dont le groupe fondamental est de génération finie, les mêmes arguments donnent encore que les variations de structures de Hodge polarisables de dimension N sur S ne donnent lieu qu'à un nombre fini de caractères de $\pi_1(S,o)$.

2.6. Preuve du Lemme 0.3. Il s'agit de prouver l'énoncé suivant.

Lemme: Soient $H = \mathbb{Z}^N$, Γ un groupe, σ une représentation $\Gamma \to \mathrm{Aut}(H)$ et supposons que l'action de Γ sur $H_{\mathbb{Q}} := H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ soit complètement réductible. Soit G le groupe des automorphismes de $H_{\mathbb{Q}}$ qui commutent à l'action de Γ. Alors, les réseaux $H' \subset H_{\mathbb{Q}}$ stables par Γ ne forment qu'un nombre fini de G-orbites.

Preuve. Soient $A \subset \mathrm{End}(H)$ la sous-algèbre engendrée par les $\sigma(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$), et $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. La complète réductibilité de $H_{\mathbb{Q}}$ équivaut à ce que $A_{\mathbb{Q}}$ soit une algèbre semi-simple. Soit $A_1 \subset A_{\mathbb{Q}}$ un ordre maximal contenant A. Pour tout nombre premier ℓ, une étude locale montre que $G(\mathbb{Q}_\ell)$ agit transitivement sur les $\mathbb{Z}_\ell$-réseaux de $H \otimes \mathbb{Q}_\ell$ stables par $A_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell$.

Soit $\mathbb{A}^f$ l'anneau des adèles finis, produit restreint des $\mathbb{Q}_\ell$. On sait que pour tout sous-groupe ouvert K de $G(\mathbb{A}^f)$, l'ensemble des doubles classes $K\backslash G(\mathbb{A}^f)/G(\mathbb{Q})$ est fini (A. Borel, Some finiteness properties of adèle groups over number fields. Publ. Math. IHES 16 (1963), p. 5-30 -théorème 5.1). Cette finitude implique que $G(\mathbb{Q})$ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans l'ensemble des réseaux $H' \subset H_{\mathbb{Q}}$ stables sous A_1. Tout réseau A-stable H' est contenu dans un réseau A_1-stable H'' avec un indice $[H'':H']$ qui divise $[A_1:A]^N$: prendre $H'' = AH'$, et on conclut en observant qu'un réseau n'a qu'un nombre fini de sous-réseaux d'indice donné.

3. Relation avec G. Faltings [4].

3.1. Le présent article a été inspiré par la lecture de G. Faltings [4].

On peut regarder [4] comme étant une autre preuve du théorème 0.1 dans le cas particulier où S est une courbe et où on ne considère que les schémas abéliens X sur S, d'une dimension relative fixe $n = N/2$, et la représentation de monodromie sur le H^1 des fibres. La restriction au cas des courbes est sans importance, car pour toute variété algébrique lisse S il existe une courbe lisse C tracée sur S telle que, pour $o \in C$, $\pi_1(C,o)$ s'envoie sur $\pi_1(S,o)$: pour U un ouvert dense de S, plongeable dans un espace projectif P, il suffit de prendre pour C l'intersection de U avec un sous-espace linéaire assez général de dimension $\dim P - \dim S + 1$; on aura $\pi_1(C) \twoheadrightarrow \pi_1(U)$ (Bertini) et $\pi_1(U) \twoheadrightarrow \pi_1(S)$.

Soient $\bar{S}$ une courbe projective et lisse, T un ensemble fini de points de $\bar{S}$ et $S := \bar{S} - T$. Soient X un schéma abélien sur S dont on suppose qu'il se prolonge en un schéma semi-abélien $\bar{X}$ sur $\bar{S}$ (réduction semi-stable). Soient n la dimension relative de X sur S, e la section nulle et posons $\omega := e^*\Omega^n_{\bar{X}/\bar{S}}$. C'est le faisceau inversible sur $\bar{S}$ dont la fibre en $s \in \bar{S}$ est la puissance extérieure maximale du dual de l'algèbre de Lie de la fibre $\bar{X}_s$ de $\bar{X}/\bar{S}$. Dans [4], G. Faltings commence par borner le degré de ω, indépendamment de X. Si on simplifie son argument par une référence à S. Zucker [11], on obtient l'estimation suivante.

Lemme 3.2. Avec les notations précédentes, si $-\chi(S) \geq 0$, on a

$$\deg \omega \leq \frac{1}{2} n \cdot (-\chi(S)).$$

Dans cette formule, $\chi(S)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique: pour $\bar{S}$ de genre g, $-\chi(S) = 2g - 2 + |T|$.

Preuve. Soit H la variation de structures de Hodge sur S de fibres les $H^1(X_s)$ $(s \in S)$. Elle donne lieu à un système local complexe $H_{\mathbb{C}}$, et à un fibré vectoriel complexe $\mathcal{H}$ muni d'une connection ∇, dont $H_{\mathbb{C}}$ est le système local des sections horizontales. Sur $\mathcal{H}$, on dispose de la filtration de Hodge F, réduite ici à un sous-fibré $F^1(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$. La fibre $H^0(X_s, \Omega^1)$ de $F^1(\mathcal{H})$ en s s'identifie au dual de l'algèbre de Lie de X_s.

L'hypothèse que X est à réduction semi-stable équivaut à l'unipotence de la monodromie locale de $H_{\mathbb{C}}$ en chaque $t \in T$. Soit H_{can} le prolongement canonique ([7], 5.2) du fibré vectoriel $\mathcal{H}$ à $\bar{S}$ et soit $F^i(H_{can})$ le sous-fibré localement facteur direct de H_{can} qui prolonge $F^i\mathcal{H}$. Toute polarisation de X (donc de H) induit une dualité parfaite entre $\mathcal{H}/F^1\mathcal{H}$ et $F^1\mathcal{H}$, et cette dualité se prolonge en une dualite parfaite entre H_{can}/F^1H_{can} et F^1H_{can}. Nous admettrons de la théorie des modèles de Néron que

$$e^*\Omega^1_{\bar{X}/\bar{S}} = F^1H_{can}.$$

Nous traiterons d'abord du cas où X/S est sans partie fixe. Ceci équivaut à $H^0(S, H_{\mathbb{C}}) = 0$ et implique que $H^i(S, H_{\mathbb{C}}) = 0$ pour $i \neq 1$, d'où.

$$(3.2.1) \quad \dim H^1(S, H_{\mathbb{C}}) = -\chi(S, H_{\mathbb{C}}) = -\mathrm{rang}(H_{\mathbb{C}}) \cdot \chi(S) = -2n\chi(S).$$

La cohomologie $H^*(S, H)$ peut se calculer comme l'hypercohomologie, sur $\bar{S}$, du complexe de De Rham

$$H_{can} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_S(T) \otimes H_{can}.$$

Ce complexe, noté K, est filtré par les sous-complexes

$$F^iK := (F^iH_{can} \to \Omega^1_S(T) \otimes F^{i-1}H_{can})$$

et, d'après S. Zucker [11], §13, la suite spectrale correspondante dégénère en E_1. En particulier,

(3.2.2) $\dim E_1^{0,1} + \dim E_1^{2,-1} \leq \dim H^1(S,H)$.

On a $E_1^{2,-1} = H^0(\Omega^1_S(T) \otimes F^1H_{can})$ et $E_1^{0,1} = H^1(H_{can}/F^1H_{can})$, de dual de Serre $H^0(\Omega^1_S \otimes F^1H_{can})$. Si F^1H_{can} est de degré d, i.e. si $d := \deg(w)$, on a donc

$$\begin{aligned}\dim E_1^{0,1} + \dim E_1^{2,1} &\geq \chi(\Omega^1_S \otimes F^1H_{can}) + \chi(\Omega^1_S(T) \otimes F^1H_{can}) \\ &= [n(g-1)+d] + [n(g-1)+|T|) + d] \\ &= -n\chi(S) + 2d.\end{aligned}$$

Combiné avec (3.2.1) et (3.2.2), ceci donne

$$-n\chi(S) + 2d \leq -2n\chi(S),$$

i.e. l'assertion de 3.2.

Un schéma abélien X sur S est isogène à la somme d'un schéma abélien constant $S \times B$ et d'un schéma abélien Y sans partie fixe. Si X est à réduction semi-stable, Y l'est aussi. On a

$$\omega \text{ pour } X = (\omega \text{ pour } S \times B) \oplus (\omega \text{ pour } Y),$$

et le premier facteur est trivial. Ceci ramène 3.2 pour X à 3.2 pour Y, et termine la preuve de 3.2.

Remarque 3.3. Si $-\chi(S) \leq 0$, le groupe fondamental de S est abélien et tout schéma abélien sur S devient constant sur un revêtement fini étale de S. S'il a réduction semi-stable, il a bonne réduction, devient constant sur un revêtement fini étale de S et on a $\deg(\omega) = 0$.

Remarque 3.4. Dans le cas où X est une famille de courbes elliptiques (n=1), on dispose d'un morphisme "de Kodaira-Spencer"

(3.3.1) $\omega^{\otimes 2} \to \Omega^1_S(T)$.

S'il est trivial, l'invariant modulaire j est constant et $\deg(\omega)=0$ (X est toujours supposé à réduction semi-stable-donc, en l'occurence, à bonne réduction). S'il est non trivial, son existence reprouve 3.2.:

elle implique que $2\deg(\omega) \leq \deg(\Omega^1_S(T))$ et on a

$$-\chi(S) = \deg \Omega^1_S(T).$$

Pour X une famille modulaire, (3.3.1) est un isomorphisme et on a égalité dans (3.2).

Remarque 3.5. Supposons que $\chi(S) < 0$, i.e. que le revêtement universel de S est le disque unité D. C'est le cas intéressant (cf. 3.3). Une polarisation du schéma abélien X/S définit une polarisation de la variation de structures de Hodge H (H^1 des fibres), et en particulier une métrique hermitienne sur le fibré vectoriel $F^1H = e^*\Omega^1_{X/S}$. La variation H donne lieu à une application de périodes $P : D \to M$ comme en 1.7. Le théorème de Griffiths 1.7 que P décroît les distances entraîne une majoration du tenseur de courbure du fibré métrisé $e^*\Omega^1_{X/S}$, et en particulier de sa 2-forme de Chern. Une étude locale à l'infini montre que l'intégrale de cette 2-forme est le degré de ω sur $\bar{S}$ (C. Peters [12]). Intégrant la majoration ci-dessus, on retrouve 3.2.

Remarque 3.6. Soient H une variation complexe de structures de Hodge polarisable sur une courbe $S = \bar{S} - T$, (H,∇) le fibré vectoriel à connection correspondant, H_{can} le prolongement canonique de H, et F la filtration de Hodge de H_{can}: F^iH_{can} est le sous-fibré localement facteur direct de H_{can} qui prolonge le sous-fibré F^iH de H. Le théorème de Griffiths 1.7 et une étude locale à l'infini ([12]) permettent encore de majorer les $|\deg \mathrm{Gr}^i_F H_{can}|$ en fonction du genre de S, de $|T|$ et des nombres de Hodge de la variation H.

3.7. Soient n un entier ≥ 3 et $M_{d,n}$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension d munies d'une structure de niveau n. C'est un espace fin de modules: la donnée d'un schéma abélien principalement polarisé X S, de dimension relative d, muni d'une structure de niveau n, équivaut à celle d'un morphisme $f : S \to M_{d,n}$. Pour $S = \bar{S} - T$ comme en 3.1, ce morphisme se prolonge en un morphisme $\bar{f}$ de $\bar{S}$ dans la compactification de Satake $\bar{M}_{d,n}$ de $M_{d,n}$. Faltings déduit de 3.2 que le graphe $\Gamma(\bar{f}) \subset \bar{S} \times \bar{M}_{d,n}$ de $\bar{f}$ est de degré borné indépendamment de X/S, pour un plongement projectif convenable de $\bar{S} \times \bar{M}_{d,n}$. De là résulte que les schémas abéliens du type considéré sont paramétrés par un schéma de type fini Y: il existe un schéma abélien X_Y sur $S \times Y$ tel que chaque schéma abélien du type dit sur S soit isomorphe à la restriction X_y de

X_Y à $S \times \{y\} \sim S$. La monodromie étant un invariant discret, la classe d'isomorphie de la représentation de monodromie de $\pi_1(S)$ définie par X_y ne dépend que de la composante connexe de Y où se trouve y. Ceci reprouve le théorème 0.1, restreint au cas particulier des schémas abéliens de dimension relative d, principalement polarisés et munis d'une structure de niveau n.

3.8. Soient Z un schéma connexe de type fini et $u : S_Z \to Z$ une famille de courbes paramétrisée par Z. On suppose que $S_Z = \bar{S}_Z - T_Z$ avec $\bar{S}_Z$ propre et lisse sur Z, de fibres des courbes de genre g, et avec T_Z fini étale sur Z, de fibres des ensembles de t points. Pour $z \in Z$, posons $S_z := u^{-1}(z)$. Pour $x \in S_Z$, les groupes fondamentaux $\pi_1(S_{u(x)},x)$ des fibres de u forment un système local sur S_Z. Un chemin de x à y définit donc un isomorphisme de $\pi_1(S_{u(x)},x)$ à $\pi_1(S_{u(y)},y)$. Si, pour $i = 1,2$, S_i est le complément dans une courbe $\bar{S}_i$ de genre g d'un ensemble T_i de t points, et que $x_i \in S_i$, un isomorphisme de $\pi_1(S_1,x_1)$ avec $\pi_1(S_2,x_2)$ sera dit <u>permis</u> s'il existe une famille comme ci-dessus, dont les S_i soient des fibres et pour laquelle l'isomorphisme soit déduit d'un chemin de x_1 à x_2. L'espace de modules des courbes de genre g étant connexe, il existe toujours un isomorphisme permis de $\pi_1(S_1,x_1)$ avec $\pi_1(S_2,x_2)$.

3.9. Les arguments 3.6 s'appliquent encore avec paramètres. Pour une famille $u : S_Z \to Z$ comme en 3.7 et $d \geq 0$, $n \geq 3$, il existe un schéma de type fini Y sur Z et un schéma abélien X sur $S_Y := S_Z \times_Z Y$ ayant la propriété suivante: pour tout $z \in Z$ et tout schéma abélien principalement polarisé de dimension d, A, sur S_z, muni d'une structure de niveau n, il existe $y \in Y$ au-dessus de z tel que A soit l'image inverse de X par $S_z \to S_Y : s \to (s,y)$. Prenant une famille universelle S_Z, on en déduit le résultat suivant.

<u>3.10. Proposition</u>. <u>Soit</u> Γ <u>le groupe fondamental d'une courbe de genre</u> g <u>avec</u> t <u>points ôtés. Fixons et</u> $n \geq 3$. <u>Pour toute courbe de genre</u> g <u>avec</u> t <u>points ôtés</u> S, <u>pour tout schéma abélien</u> A <u>sur</u> S, <u>principalement polarisé, de dimension</u> d, <u>muni d'une structure de niveau</u> n, <u>et pour tout isomorphisme permis</u> γ <u>de</u> Γ <u>avec</u> $\pi_1(S,o)$, <u>la représentation de monodromie</u> σ <u>de</u> $\pi_1(S,o)$ <u>sur</u> $H^1(A_o,\mathbb{Z})$ <u>fournit une représentation</u> $\sigma\gamma$ <u>de</u> Γ. <u>Les classes</u>

d'isomorphie de représentations de Γ ainsi obtenues ne forment qu'un nombre fini d'orbites sous les automorphismes permis de Γ.

3.11 Remarque. L'analogue de 3.9, sans structure de niveau imposée, est encore vrai. Tout schéma abélien de dimension d sur une courbe S acquiert une structure de niveau 3 sur un revêtement de S de degré $< 3^{4d^2}$, et on décrit un schéma abélien sur S par la donnée d'un revêtement S' de S, de degré $< 3^{4d^2}$, d'un schéma abélien avec structure de niveau 3 sur S', et d'une donnée de descente de S' à S pour ce schéma abélien.

3.12 Remarque. On en déduit que l'analogue de 3.10, sans structure de niveau imposée, est encore vrai. On peut aussi se passer des polarisations en utilisant le théorème de Zarhin que pour tout schéma abélien polarisable A, il existe une polarisation principale sur $(A \times A^{dual})^4$ (voir par exemple Astérisque 127 (séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, dirigé par L. Szpiro) VII 1.)

3.13 Question. Si on remplace "schéma abélien" par "variation de structures de Hodge", l'énoncé 3.10 reste-t-il valable?

Bibliographie

[1] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag 1970.

[2] P. Deligne, Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES 40 (1971), 5-58.

[3] P. Deligne and D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publ. Math. IHES, to appear (1986).

[4] G. Faltings, Arakelov's theorem for abelian varieties, Inv. Math. 73 (1983), 337-348.

[5] P.A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of main results and discussion of open problems, Bull. AMS 76 2 (1970), 228-296.

[6] P.A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds III, Publ. Math. IHES 38 (1970), 125-180.

[7] P.A. Griffiths and W. Schmid, Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results, In: discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli, TIFR 1973, Oxford University Press 1975.

[8] J. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic varieties, Publ. Math. IHES 48 (1978), 137-204.

[9] M. Nori, Non arithmetic monodromy, C.R. Acad. Sci. Paris, to appear (1986).

[10] W. Schmid, Variations of Hodge structures: the singularities of the period mapping, Inv. Math. 22 (1973), 211-319.

[11] S. Zucker, Hodge theory with degenerating coefficients, Ann. of Math. 109 (1979), 415-476.

[12] C. Peters, A criterion for flatness of Hodge bundles and geometric applications, Math. Ann. 268 (1984), 1-19.

[13] C. Procesi, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. in Math. 19 (1976), 306-381.

SCHOOL OF MATHEMATICS
THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
PRINCETON, NEW JERSEY 08540