



---

Groupe de Heisenberg et Realite

Author(s): P. Deligne

Reviewed work(s):

Source: *Journal of the American Mathematical Society*, Vol. 4, No. 1 (Jan., 1991), pp. 197-206

Published by: [American Mathematical Society](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/2939259>

Accessed: 13/04/2012 10:43

---

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at

<http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



American Mathematical Society is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Journal of the American Mathematical Society*.

<http://www.jstor.org>

## GROUPE DE HEISENBERG ET RÉALITÉ

P. DELIGNE

1. Soit  $H$  le groupe de Heisenberg complexe, extension de  $\mathbb{C}^2$  par  $\mathbb{C}^*$ . Il admet des coordonnées  $(x, y, \lambda)$ , la loi de groupe étant donnée par

$$(1.1) \quad (x, y, \lambda)(x', y', \lambda') = (x + x', y + y', \lambda\lambda' \exp(\pi i(xy' - x'y))).$$

L'involution

$$(1.2) \quad \tau: (x, y, \lambda) \mapsto (-x, -y, \lambda).$$

est un automorphisme de  $H$ .

Le système de coordonnées  $x, y, \lambda: H \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$  met en évidence la section  $\mathbb{C}^2 \times \{1\}$  de la projection de  $H$  sur  $\mathbb{C}^2$ . Sur cette section  $\mathbb{C}^2 \times \{1\}$ ,  $\tau(g) = g^{-1}$ . Chaque droite  $D \subset \mathbb{C}^2$  a pour relèvement par cette section un sous-groupe à un paramètre de  $H$ , qu'on notera encore  $D$ . Le commutateur  $(u, v) = uvu^{-1}v^{-1}$  de deux éléments  $u = (u_1, u_2)$  et  $v = (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{C}^2$  est  $\exp(2\pi i \langle u, v \rangle) \in \mathbb{C}^*$  avec

$$(1.3) \quad \langle u, v \rangle = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Soit  $H_{\mathbb{R}}$  la forme réelle:  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| = 1$ . Le groupe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  agit sur  $H$  et  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  agit sur  $H_{\mathbb{R}}$ , identifié ensemblistement à  $\mathbb{R}^2 \times U^1$ .

On sait (théorème de Stone-von Neumann [2]) que  $H_{\mathbb{R}}$  admet une unique représentation unitaire irréductible  $V$  pour laquelle  $\lambda \in U^1$  agit par multiplication par  $\lambda$ . Dans le modèle de Schrödinger de  $V$ , on a  $V = L^2(\mathbb{R})$  et l'action de  $H_{\mathbb{R}}$  est:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (x, 0, 1): f(z) &\mapsto f(z + x) \\ (0, y, 1): f(z) &\mapsto e^{2\pi i y z} f(z). \end{aligned}$$

De l'unicité de  $V$  on déduit une action projective unitaire de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  sur  $V$ , compatible à l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  sur  $H_{\mathbb{R}}$  (A. Weil [3], D. Shale [1]).

Pour l'action de  $H_{\mathbb{R}}$  sur  $V \simeq L^2(\mathbb{R})$ , les vecteurs  $C^\infty$  i.e. les  $v \in V$  tels que  $h \mapsto hv$  soit  $C^\infty$  en  $h \in H_{\mathbb{R}}$ , forment l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}$  des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}$ . Les vecteurs holomorphes, i.e. les  $v \in V$  tels que  $h \mapsto hv$  se prolonge en une application holomorphe de  $H$  dans  $V$ ,

Received by the editors August 3, 1990.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 22E45.

sont les fonctions  $L^2$  sur  $\mathbb{R}$  se prolongeant en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  telle que, dans toute bande horizontale  $|\operatorname{Im} z| < A_1$  on ait pour tout  $A_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(z)| \leq O(\exp(-A_2|z|)).$$

Le groupe complexe  $H$  agit sur l'espace  $V^{\text{hol}}$  des vecteurs holomorphes par les formules (1.4).

On ne dispose pas pour l'action holomorphe de  $H$  sur  $V^{\text{hol}}$  de la même unicité que pour l'action unitaire de  $H_{\mathbb{R}}$  sur  $V$ . Sinon, l'action projective de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$  sur  $V$  se prolongerait en une action projective de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  sur  $V^{\text{hol}}$ , cette action se relèverait en une vraie action de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$ , car  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  est simplement connexe, et l'action projective de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$  se relèverait en une vraie action. Ce n'est pas le cas: seul le revêtement double de  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$  agit.

Notre but est d'expliciter ce qui se passe.

2. Soit  $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  l'espace des droites de  $\mathbb{C}^2$ . Pour  $D \in S$ , relevé dans  $H$  comme au  $n^0 1$ , soit  $W_D$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $H$  vérifiant

$$\varphi(\lambda dh) = \lambda \varphi(h)$$

pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $d \in D$ , muni de l'action de  $H: g: \varphi(h) \mapsto \varphi(hg)$ . Pour  $E \neq D$ , la restriction à  $E$  est une bijection

$$(2.1) \quad r_E: W_D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(E),$$

$\mathcal{O}(E)$  étant l'espace des fonctions holomorphes sur  $E$ .

Si  $R$  est une représentation holomorphe de  $H$ , sur laquelle chaque  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  agit par  $\lambda$ , et  $\omega$  une forme linéaire  $D$ -invariante sur  $R$ ,

$$(2.2) \quad w \mapsto \omega(hw)$$

est un morphisme de  $R$  dans  $W_D$ .

3. **Exemple.** Soient comme aux  $n^0 1, 2$   $V$  la représentation unitaire irréductible de  $H_{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{S} \subset V$  l'espace de ses vecteurs  $C^\infty$  et soit  $\mathcal{S}' \supset V$  le dual de l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation duale (dans le modèle de Schrödinger: l'espace des distributions tempérées).

Soit  $D_t \in S$  la droite engendrée par  $(-t, 1)$ . Si  $\operatorname{Im} t > 0$ , la forme linéaire, écrite dans le modèle de Schrödinger,

$$\omega_t: f \mapsto \frac{1}{\sqrt{t/i}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-\pi i x^2/t) dx$$

est définie sur  $V$ , et même sur  $\mathcal{S}'$ . La forme  $\omega_t$  est un vecteur holomorphe du dual de  $V$ , fixe par  $D_t$ . En terme du générateur infinitésimal  $-t\partial_x + 2\pi i x$  de  $D_t$ , l'invariance s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} [(-t\partial_x + 2\pi i x)f(x)] \cdot \exp(-\pi i x^2/t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot (t\partial_x + 2\pi i x) \exp(-\pi i x^2/t) dx = 0. \end{aligned}$$

Par (2.2),  $\omega_t$  définit

$$\Omega_t: V^{\text{hol}} \rightarrow W_{D_t}$$

qui se prolonge à  $V$  et même à  $\mathcal{S}'$ . Soit  $E$  l'axe des  $x$ . L'application  $r_E \Omega_t: V \rightarrow \mathcal{O}(E)$  envoie  $f \in V$  sur

$$f(x, t) = r_E \Omega_t(f) \quad (\text{Im } t > 0)$$

solution de l'équation de la chaleur

$$\left( \partial_t - \frac{1}{4\pi i} \partial_x^2 \right) f(x, t) = 0.$$

Pour  $t$  réel, la forme  $\omega_t$  reste définie sur  $\mathcal{S} \subset V$ . Pour  $t = 0$ , c'est  $f \mapsto f(0)$ . Pour  $t = \infty$ , c'est  $\int f(x) dx$ . L'homomorphisme  $\Omega_t$  reste défini sur  $V^{\text{hol}}$ . Pour  $t = 0$ ,  $r_E \Omega_0$  est, dans le modèle de Schrödinger, l'identité.

Supposons  $\text{Im}(t) > 0$ . Soit  $\bar{D}_t$  la complexe conjuguée de  $D_t$ . Dans la droite affine  $S - \{\bar{D}_t\}$ , le "demi-plan"  $\{D_u | \text{Im } u > 0\}$  est un disque de centre  $D_t$ . L'application  $r_{D_t} \circ \Omega_t: V \rightarrow W_{D_t} \rightarrow \mathcal{O}(\bar{D}_t)$  fournit le modèle holomorphe de  $V$ : l'action de  $H$  est donnée par

$$\begin{aligned} d \in \bar{D}_t: f(x) &\mapsto f(x + d) \\ e \in D_t: f(x) &\mapsto \exp(-2\pi i \langle e, x \rangle) f(x), \end{aligned}$$

la structure hilbertienne où  $\langle f, f \rangle$  est l'intégrale de

$$f(d) f(d)^{-} \exp(2\pi i \langle d, \bar{d} \rangle)$$

est invariante par  $H_{\mathbb{R}}$  et  $r_{D_t} \circ \Omega_t$  identifie  $V$  à l'espace des  $f$  de norme finie.

Pour  $d = (-\bar{t}z, z)$ , le facteur  $\exp(2\pi i \langle d, \bar{d} \rangle) =$  commutateur de  $d$  et  $\bar{d}$  est

$$\exp(2\pi i \langle d, \bar{d} \rangle) = \exp(2\pi i (t - \bar{t}) |z|^2).$$

4. Fixons  $E$ . Les isomorphismes  $r_E$  (2.1) permettent de considérer les  $W_D$  ( $D \neq E$ ) comme formant une famille de représentations de  $H$  opérant dans l'espace fixe  $\mathcal{O}(E)$ , l'action de  $H$  dépendant holomorphiquement de  $D$ . Explicitons la dépendance en  $E$  de  $r_E$ . Prenons des coordonnées comme au  $n^0 1$  où  $E$  soit l'axe des  $x$ . Soient  $E'$  engendré par  $(1, u)$ ,  $D$  engendré par  $(-t, 1)$ . On prend  $x$  comme coordonnée sur  $E$  et  $E'$ . On a

$$(x', ux', 1) = (-tux', ux', 1)(x, 0, 1)(0, 0, \lambda)$$

pour  $(1+tu)x' = x$  et  $\lambda = \exp(\pi i u x x')$ , de sorte que  $r_{E'} r_E^{-1}$  envoie  $f_E \in \mathcal{O}(E)$  sur  $f_{E'} \in \mathcal{O}(E')$  avec  $f_{E'}(x') = \lambda f_E(x)$ :

$$(4.1) \quad f_{E'} \left( \frac{x}{1+tu} \right) = \exp \left( \frac{\pi i u}{1+tu} x^2 \right) f_E(x).$$

Cette formule est holomorphe en  $t$ : les  $W_D$  forment un fibré holomorphe  $\mathcal{W}$  (de dimension infinie) sur  $S$ , sur lequel  $H$  agit.

Pour comprendre (4.1), on peut noter que le point de  $E$  de coordonnée  $x$  a même image dans  $\mathbb{C}^2/D$  que le point de  $E'$  de coordonnée  $x/1 + tu$ .

De (4.1) on déduit que la condition de croissance suivante sur  $v \in W_D$  est indépendante des choix de  $E \neq D$  et de la coordonnée  $z$  sur  $E$

$$(4.2) \quad \text{pour } f = r_E(v), \exists A \quad |f(z)| \leq 0(\exp(A|z|^2)).$$

Soit  $W_D^0 \subset W_D$  défini par cette condition. Les  $W_D^0$  forment un sous-fibré holomorphe  $\mathscr{W}^0$  en représentations holomorphes de  $H$  du fibré  $\mathscr{W}$ .

**5. Proposition.** *Soit  $T > 0$  et considérons les conditions suivantes sur une fonction entière  $f$  :*

(i) <sub>$T$</sub>  *Il existe une fonction holomorphe  $g(z, t)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ,  $|t| < T$ ) vérifiant l'équation de la chaleur  $(\partial_t - \partial_z^2)g = 0$ , avec la condition initiale  $g(z, 0) = f(z)$ ;*

$$(ii)_T \quad |f(z)| \leq 0(\exp(|z|^2/4T));$$

$$(iii)_T \quad \int f(z)f(\bar{z}) \exp(-|z|^2/2T) |dz \wedge d\bar{z}| < \infty.$$

*Alors, si  $T < T_1$ , chacune de (i) <sub>$T_1$</sub> , (ii) <sub>$T_1$</sub> , (iii) <sub>$T_1$</sub>  implique chacune de (i) <sub>$T$</sub> , (ii) <sub>$T$</sub> , (iii) <sub>$T$</sub> .*

*Preuve.* (i) <sub>$T_1$</sub>   $\Rightarrow$  (ii) <sub>$T$</sub> . L'équation de la chaleur reste vérifiée par les dérivées de  $g$  et on a donc

$$\begin{aligned} \partial_z^{2n} g &= \partial_t^n g, \\ \partial_z^{2n+1} g &= \partial_t^n (\partial_z g). \end{aligned}$$

Puisque  $g(0, t)$  est holomorphe pour  $|t| < T_1$ , si  $T < T_2 < T_1$ , on a en  $(0, 0)$

$$|\partial_t^n g/n!| \leq 0(1/T_2^n), \text{ d'où}$$

$$|\partial_z^{2n} g| \leq 0(n!/T_2^n)$$

et une estimation analogue pour  $\partial_z^{2n+1} g$ . La série de Taylor de  $f$  donne alors

$$|f(z)| \leq 0\left(\sum \frac{n!}{(2n)!} \frac{1}{T_2^n} |z|^{2n}\right).$$

On a

$$\frac{1}{2n+1} 2^{2n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 2^{2n}$$

d'où

$$|f(z)| \leq 0\left(\sum 2^{-2n} \frac{1}{T^n} \frac{|z|^{2n}}{n!}\right)$$

et cette somme est  $\exp(|z|^2/4T)$ .

(ii) <sub>$T_1$</sub>   $\Rightarrow$  (i) <sub>$T$</sub> . Il suffit de prendre  $g$  donné par le noyau de l'équation de la chaleur:

$$g(z, t) = \int_{\sqrt{t}\mathbb{R}} f(z+x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-x^2/4t) dx.$$

Changer  $\sqrt{t}$  en  $-\sqrt{t}$  change l'orientation du cycle  $\sqrt{t}\mathbb{R}$  et le signe de l'intégrand, de sorte que l'intégrale ne change pas. La condition (ii) assure la convergence pour  $|t| < T$ .

La relation entre (ii) et (iii) est claire: (ii) $_{T_1} \Rightarrow$  (iii) $_T$  et que (iii) $_{T_1} \Rightarrow$  (ii) $_T$  se vérifie en écrivant  $f(z)$  comme moyenne de ses valeurs sur un disque de centre  $z$  et de rayon  $1/|z|$ , et en évaluant cette moyenne par Cauchy-Schwartz.

6. En hommage au théorème de Stone-von Neumann, le fibré  $\mathscr{W}$  sur  $S$  est, projectivement, muni d'une connexion holomorphe pour laquelle l'action de  $H$  est horizontale.

Précisons: "projectivement." Sur la droite projective  $S$ , on dispose du faisceau inversible ample  $\mathcal{O}(1)$ . Soit  $\mathcal{O}(-1)$  son dual. Une racine carrée  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$  de  $\mathcal{O}(-1)$  est un faisceau inversible  $L$  muni d'un isomorphisme  $L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(-1)$ . Localement, une telle racine carrée existe et, localement, deux racines carrées sont isomorphes, mais l'isomorphisme n'est pas unique: ambiguïté  $\pm 1$ . Cette ambiguïté obstrue l'existence globale de  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$ . Ce n'est pas sur  $\mathscr{W}$ , mais sur  $\mathscr{W}(-\frac{1}{2}) := \mathscr{W} \otimes \mathcal{O}(-\frac{1}{2})$  qu'on a une connexion:

$$(6.1) \quad \nabla: \mathscr{W}(-\frac{1}{2}) \rightarrow \mathscr{W}(-\frac{1}{2}) \otimes \Omega^1.$$

Noter que si  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})'$  et  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})''$  sont deux racines carrées de  $\mathcal{O}(-1)$ , et  $\nabla$  une connexion sur  $\mathscr{W} \otimes \mathcal{O}(-\frac{1}{2})'$ , son transporté sur  $\mathscr{W} \otimes \mathcal{O}(-\frac{1}{2})''$  par  $\alpha: \mathcal{O}(-\frac{1}{2})' \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(-\frac{1}{2})''$  (un isomorphisme de racines carrées de  $\mathcal{O}(-1)$ ) ne dépend pas du choix de  $\alpha$ , qu'on ne peut changer localement que par une constante  $\pm 1$ . La notion de "connexion sur  $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$ " est donc bien définie, indépendamment de l'existence globale ou du choix de  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$ .

Soit  $D \in S$  et  $t$  un vecteur tangent en  $D$ . Pour  $s$  une section locale de  $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$ , il s'agit de définir  $\nabla_t s$  dans la fibre de  $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$  en  $D$ . On procédera comme suit: après avoir fait un choix auxiliaire  $u$ , on définira  $\nabla_u s$  pour  $s$  une section locale de  $\mathscr{W}$ , ou de  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$ . Cette dérivation  $\nabla_u$  dépend de  $u$ , avec une dépendance en  $u$  de la forme

$$\nabla_{u'}(s) = \nabla_u(s) + as(D),$$

$a$  prenant des valeurs opposées pour  $\mathscr{W}$  et pour  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$ : pour  $s = s_1 s_2$ ,  $s_1$  section locale de  $\mathscr{W}$  et  $s_2$  de  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$ ,

$$\nabla_t(s) := \nabla_u(s_1)s_2(D) + s_1(D)\nabla_u(s_2)$$

est indépendant du choix de  $u$ .

Soit  $D \in S$ :  $D$  est une droite de  $\mathbb{C}^2$ . Un vecteur tangent  $t$  en  $D \in S$  s'identifie à une application linéaire  $t: D \rightarrow \mathbb{C}^2/D$ , i.e. à un élément de  $(\mathbb{C}^2/D)^{\otimes 2}$ : à  $u' \otimes v' \in (\mathbb{C}^2/D)^{\otimes 2}$  attacher  $t(d) = \langle u, d \rangle v'$  pour  $u$  un quelconque représentant de  $u'$ . Notre donnée auxiliaire sera celle de  $\tilde{t}: D \rightarrow \mathbb{C}^2$  relevant  $t$ , i.e. d'un relèvement de  $t$  à  $\mathbb{C}^2/D \otimes \mathbb{C}^2$ . Nous l'écrivons  $\tilde{t} = u' \otimes u$ , avec  $u \in \mathbb{C}^2$  d'image  $u'$  dans  $\mathbb{C}^2/D$ .

L'espace tangent à l'origine de  $H$  est  $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ . Pour  $z$  dans cet espace tangent, soit  $\delta_z$  le champ de vecteurs invariant à droite correspondant. On a

$$[\delta_x, \delta_y] = -\delta_{[x, y]},$$

où figure à droite le crochet dans l'algèbre de Lie de  $H$ . Pour  $x, y \in \mathbb{C}^2$ , calculant  $[x, y]$  comme un commutateur infinitésimal, on en déduit que

$$(6.2) \quad [\delta_x, \delta_y] = -2\pi i \langle x, y \rangle \delta_{(0,0,1)}.$$

Soit  $\mathcal{U}_1$  le quotient de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite par la relation  $\delta_{(0,0,1)} = 1$ . Dans  $\mathcal{U}_1$ , on déduit de (6.2) que, pour  $d \in D$ ,

$$(6.3) \quad \left[ \frac{-\delta_u^2}{4\pi i}, \delta_d \right] = \frac{1}{4\pi i} \cdot 2 \cdot 2\pi i \langle u, d \rangle \delta_u = \langle u, d \rangle \delta_u = \delta_{i(d)}.$$

Calculons au premier ordre autour de  $D$ . Pour  $\varepsilon^2 = 0$ , et  $\varphi(g)$  dans  $W_D$  :  $\delta_d \varphi = 0$ , on a

$$\delta_{d+\varepsilon i(d)} \left[ \varphi(g) + \varepsilon \frac{-\delta_u^2}{4\pi i} \varphi(g) \right] = \varepsilon \left[ \delta_{i(d)} \varphi(g) + \delta_d \frac{-\delta_u^2}{4\pi i} \right] \varphi(g) = 0$$

car  $\delta_d(-\delta_u^2/4\pi i)\varphi = -[-\delta_u^2/4\pi i, \delta_d]\varphi$ : appliquer (6.3). Au premier ordre autour de  $D$ , la fonction de  $g$  et  $D'$  définie par  $\varphi(g, D + \varepsilon t) = \varphi(g) + \varepsilon(-\delta_u^2/4\pi i)\varphi(g)$  est donc une section du fibré  $\mathcal{W}$ . Si  $\varphi(g, D')$  est une section locale de  $\mathcal{W}$ , ceci permet de définir la dérivée  $\nabla_u \varphi$  dans  $\mathcal{W}_D$  par

$$(6.5) \quad \nabla_u \varphi = \delta_i \varphi(g, D') + (\delta_u^2/4\pi i) \varphi(g, D).$$

Calculons la dépendance de (6.5) en  $u$ . Si  $u$  est remplacé par  $u+x$  ( $x \in D$ ), on a dans  $\mathcal{U}_1$

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \delta_{u+x}^2 &= (\delta_u + \delta_x)^2 = \delta_u^2 + 2\delta_u \delta_x + [\delta_x, \delta_u] \\ &= \delta_u^2 + 2\delta_u \delta_x + 2\pi i \langle u, x \rangle. \end{aligned}$$

Pour  $\varphi \in V_D$ , on a  $\delta_x \varphi = 0$  et (6.6) se simplifie en

$$(6.7) \quad \delta_{u+x}^2 \varphi = \delta_u^2 \varphi + 2\pi i \langle u, x \rangle \varphi,$$

d'où

$$(6.8) \quad 1/4\pi i \delta_{u+x}^2 \varphi = 1/4\pi i \delta_u^2 \varphi + \frac{1}{2} \langle u, x \rangle \varphi.$$

Le choix de  $u$  permet aussi de définir la dérivée  $\nabla_u$  par rapport à  $t$  d'une section locale de  $\mathcal{O}(1)$ . Une section de  $\mathcal{O}(1)$  sur  $U \subset S$  est une fonction homogène de degré 1 sur l'image inverse de  $U$  dans  $\mathbb{C}^2$ , et on dérive par rapport à  $\langle u, d \rangle u$  pour obtenir une fonction homogène de degré 1 sur  $D$ . Quand on change  $u$  en  $u+x$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_{u+x}(s) &= \langle u+x, d \rangle \delta_{u+x} s \\ &= \nabla_u(s) + \langle u, x \rangle s. \end{aligned}$$

Cette dérivation en induit une sur  $\mathcal{O}(-1/2)$ , avec

$$\nabla_u(s^{-1/2}) = -1/2 \nabla_u(s) \cdot s^{-3/2}$$

et pour dépendance en  $u, s$  étant cette fois une section locale de  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$

$$(6.9) \quad \nabla_{u+x}(s) = \nabla_u(s) - \frac{1}{2}(u, x)s.$$

Les dépendances en  $u$  de (6.8) et (6.9) se neutralisent pour fournir une dérivation  $\nabla_t$  pour  $\mathcal{W}(-\frac{1}{2})$ .

La connexion  $\nabla$  étant définie en terme de champs de vecteurs invariants à droite sur  $H$ , elle commute à l'action de  $H$ .

**7. Explicitons la connexion du  $n^\circ 6$  en coordonnées.** Choisissons des coordonnées comme au  $n^\circ 1$  et soit  $E$  l'axe des  $x$ . Sur  $S$ ,  $\mathcal{O}(1)$  admet une section  $s$  ayant un zéro simple en  $E$ . Elle est unique à un facteur près et trivialisé  $\mathcal{O}(1)$  sur  $S-E$ . Il existe donc une racine carrée  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})$  sur  $S-E$ , trivialisée par une racine carrée  $s^{-1/2}$  de  $s^{-1}$ . Par une telle trivialisement, la connexion cherchée se transporte en une connexion sur le fibré  $\mathcal{W}$ . Nous allons la calculer.

Soit  $D_t$  la droite engendrée par  $(-t, 1)$ . Par  $r_E$  (1.2), une section locale de  $\mathcal{W}$  s'identifie à une fonction  $f(z, t)$  holomorphe en  $z$  et  $t$ . Calculons sa dérivée par rapport à  $t$ . Dans le  $n^\circ 6$ , on peut prendre pour

$$\tilde{i}: D_t \rightarrow \mathbb{C}^2: (-tz, z) \mapsto (-1, 0)z; \text{ this is } d \mapsto -\langle (1, 0), d \rangle \cdot (1, 0).$$

La dérivation correspondante de  $\mathcal{O}(1)$  annule  $s$ , de sorte qu'on a simplement

$$(7.1) \quad \nabla_t f = (\partial_t - \partial_z^2 / 4\pi i) f$$

et les sections locales horizontales sont les solutions de l'équation de la chaleur

$$(7.2) \quad (\partial_t - \partial_z^2 / 4\pi i) f = 0.$$

Du  $n^\circ 5$ , on déduit que par  $s \in W_D^0(-\frac{1}{2})$  il passe une section locale horizontale de  $\mathcal{W}(-\frac{1}{2})$ . C'est automatiquement une section de  $\mathcal{W}^0(-\frac{1}{2})$ . Elle existe dans un voisinage de  $D$  d'autant plus grand que  $s$  est à croissance plus lente. Noter qu'en dimension infinie une connexion ne définit pas nécessairement une trivialisement locale, même si par chaque point passe une section horizontale locale.

La connexion  $\nabla$  sur  $\mathcal{W}^0(-\frac{1}{2})$  en définit une sur le fibré en espaces projectifs correspondant  $\mathbb{P}(\mathcal{W}^0) = \mathbb{P}(\mathcal{W}^0(-\frac{1}{2}))$ . Les sections locales horizontales sont les images des sections horizontales non nulles de  $\mathcal{W}^0(-\frac{1}{2})$ . Bien que la sphère  $S$  soit simplement connexe, on a:

**8. Surprise.** *Le fibré en espaces projectifs  $\mathbb{P}(\mathcal{W}^0)$  sur  $S$  n'a aucune section horizontale globale.*

L'argument du  $n^\circ 1$ , permettrait de le prévoir: l'appliquer à la représentation projective de  $SL(2, \mathbb{C})$  donnée par l'action de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur l'espace projectif des sections horizontales globales de  $\mathbb{P}(\mathcal{W}^0)$ .



1<sup>ère</sup> preuve. Divisons  $S$  en deux hémisphères  $S_1$  et  $S_2$  et choisissons  $\mathcal{O}(-\frac{1}{2})_i$  sur  $S_i$ . Sur  $S_1 \cap S_2$ , on dispose localement de  $\alpha: \mathcal{O}(-\frac{1}{2})_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\frac{1}{2})_2$ , défini au signe près, mais  $\alpha$  ne peut être défini globalement que sur le revêtement double du cercle  $S_1 \cap S_2$ : monodromie  $-1$ . S'il existait des sections projectives globales horizontales de  $\mathbb{P}(V^\circ)$ , il existerait des sections horizontales  $f_1, f_2$  de  $\mathcal{W}^0(-\frac{1}{2})$  sur  $S_1$  et  $S_2$  qui, sur  $S_1 \cap S_2$  coïncideraient au signe près. Sur  $S_1 \cap S_2$ , ceci permettrait de normaliser  $\alpha: \mathcal{O}(\frac{1}{2})_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(-\frac{1}{2})_2$  par  $\alpha(f_1) = f_2$ , contredisant l'inexistence de  $\alpha$  sur  $S_1 \cap S_2$ .

2<sup>ème</sup> preuve. Choisissons des coordonnées comme au  $n^\circ 1$ . Soit  $E$  l'axe des  $x$  et  $D$  celui des  $y$ . Comme en  $n^\circ 2$ , identifions  $W_D$  à l'espace des fonctions entières  $f(z)$ . Soit  $f \neq 0$  dans  $W_D$ . Par la proposition, pour qu'il existe sur  $S - E$  une section horizontale de  $P(\mathcal{W}^0)$  passant par  $f$ , il faut et il suffit que  $f$  vérifie la condition de croissance

$$(8.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |f(z)| \leq O(\exp(\varepsilon|z|^2)).$$

Si  $E'$  est une autre droite, d'après (4.1), l'existence d'une section horizontale sur  $S - E'$  passant par  $f$  se traduit par une condition de croissance

$$(8.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |f(z) \exp(az^2)| \leq O(\exp(\varepsilon|z|^2))$$

avec  $a \neq 0$  convenable.

Posons  $g(z) = f(z) \exp(az^2/2)$ . Par (8.1) et (8.2),  $|g(z)|$  est dominé par un multiple tant de  $|\exp(\varepsilon|z|^2 + az^2/2)|$  que de  $|\exp(\varepsilon|z|^2 - az^2/2)|$  de sorte que dans toutes les directions, sauf celles pour lesquelles  $az^2$  est purement imaginaire,  $g$  est à décroissance exponentielle quadratique. Dans toutes les directions, on a uniformément une croissance au plus exponentielle quadratique. Par Phragmen-Lindelöf,  $g$  est à décroissance exponentielle quadratique dans toutes les directions, donc est nulle, et  $f = 0$ .

9. Dans les coordonnées du  $n^\circ 1$ , soit  $D_t$  la droite engendrée par  $(-t, 1)$ . Soit  $\bar{d} = (-tz, z)$ . On a pour le commutateur de  $d$  et  $\bar{d}$

$$(d, \bar{d}) = \exp(-2\pi i(t - \bar{t})|z|^2) \in \mathbb{C}^* \quad :$$

le commutateur est réel positif et

$$(d, \bar{d}) > 1 \iff \text{Im}(t) > 0.$$

Les droites  $D$  avec pour  $d$  engendrant  $D$   $(d, \bar{d}) > 1$  forment donc un disque dans  $S$ , dit attaché à la structure réelle  $H_{\mathbb{R}}$ .

Les structures réelles  $L \subset \mathbb{C}^2$  pour lesquelles  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est réel sur  $L$  forment un espace homogène sous  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , avec  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  le stabilisateur de  $\mathbb{R}^2$ . Chacune définit une structure réelle  $H_L := L \cdot U^1$  sur  $H$ , donc une conjugaison complexe  $\sigma_L$  de points fixes  $LU^1$ .

Les disques dans  $S$  forment de même un espace homogène sous  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , le stabilisateur de celui associé à  $H_{\mathbb{R}}$  étant  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . La correspondance

$$L \mapsto X(L) := \{D | (d, \sigma_L(d)) > 1 \text{ pour } d \text{ un générateur de } D\}$$

est donc une bijection de l'espace des structures réelles considérées avec l'espace des disques de  $S$ .

Le passage d'un disque au disque complémentaire se traduit sur les structures réelles en  $L \mapsto iL$ .

10. **Les calculs du  $n^\circ 3$  admettent l'interprétation suivante.** Soit  $X$  un disque (ouvert) de  $S$ , correspond à une structure réelle  $L$ , d'où des formes réelles  $H_L$  de  $H$  et  $SL(L)$  de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Alors  $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})$  admet une structure pré-hilbertienne  $H_L$ -invariante, le complété  $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})^\wedge$  étant la représentation unitaire irréductible de  $H_L$ . On a

$$\Gamma\left(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0}\right) \subset \Gamma\left(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0}\right)^\wedge \subset \Gamma\left(X, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0}\right).$$

Le revêtement double  $SL(L)^\sim$  de  $SL(L)$  agit sur  $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})|X$ , de façon compatible à son action sur  $\mathscr{O}(-1)$ , d'où une action de  $SL(L)^\sim$  sur  $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})^\wedge$ . C'est celle qui normalise l'action de  $H_L$ , et induit l'action naturelle de  $SL(L)$  sur  $H_W$ .

La sous-représentation  $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})$  peut s'interpréter comme l'espace des vecteurs analytiques réels pour l'action de  $SL(L)^\sim$ .

Cette description montre que la représentation projective de  $SL(L)$  se prolonge au monoïde des  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  tels que  $gX \supset X$ .

11. Tout ce qui précède se généralise de  $SL(2, \mathbb{C})$  à  $Sp(2n, \mathbb{C})$ : remplacer  $\mathbb{C}^2$  par  $\mathbb{C}^{2n}$ , muni d'une forme alternée non dégénérée  $\langle , \rangle$  réelle sur  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $H$  par  $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^*$  avec la loi de groupe

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (x + y, \lambda\mu \exp(\pi i \langle x, y \rangle)),$$

$S$  par l'espace des sous-espaces lagrangiens (= isotropes maximaux)  $D$  de  $\mathbb{C}^{2n}$ . Le disque attaché à une structure réelle devient l'espace de Siegel des  $D$  avec  $|(d, \bar{d})| > 1$  pour  $d \neq 0$  dans  $D$ . Le faisceau inversible  $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$  est à remplacer par  $\det(D)^{1/2}$ .

12. *Remarque.* A côté de représentations de  $H$  où  $\mathbb{C}^*$  agit par multiplication par  $\lambda$ , considérons de même des représentations où l'action est par  $\lambda^{-1}$ . On définit un fibré holomorphe  $\mathscr{W}_-^0$  de telles représentations sur  $S$ , comme au  $n^\circ 2$  et sur  $\mathscr{W}_-^0(-\frac{1}{2})$ , on dispose à nouveau d'une connexion, donnée par une équation de la chaleur.

Sur un ouvert connexe et simplement connexe  $U$  de  $S$ , considérons  $W = \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})$ , sa connexion et l'action de  $H$ . Dans  $\Gamma(U, W)^{\nabla=0}$ , on dispose pour chaque  $x \in U$  d'une forme linéaire fixe par la droite correspondante, définie à un facteur près :  $f \mapsto f(e)$  pour  $f \in \mathscr{W}_x^0$ . Pour chaque  $x \notin U$ , il existe un vecteur  $v(x)$  fixe par  $D_x$  (dans le modèle de Schrödinger et pour  $x$  correspondant à  $E =$  axe de  $x$ , c'est la constante 1). Il est unique à un facteur près.

Fixons la structure réelle  $H_{\mathbb{R}}$ , d'où une structure réelle  $S_{\mathbb{R}} \subset S$  (un cercle) et une décomposition de  $S - S_{\mathbb{R}}$  en deux disques  $U_1, U_2$ . Alors.

(a) Le complexe conjugué de  $\Gamma(\tilde{U}_1, W)^{\nabla=0}$  est  $\Gamma(\tilde{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$ .

(b) La forme hermitienne sur  $\Gamma(\tilde{U}_1, W)^{\nabla=0}$ , invariante par  $H_{\mathbb{R}}$ , se réinterprète comme un accouplement bilinéaire entre  $\Gamma(\tilde{U}_1, W)^{\nabla=0}$  et  $\Gamma(\tilde{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$ , invariant par  $H$ .

**Question.** Soit  $C$  une courbe de Jordan dans  $S$ , séparent  $S - C$  en deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$ . Existe-t-il une unique forme bilinéaire séparante  $H$ -invariante accouplant  $\Gamma(\tilde{U}_1, W)^{\nabla=0}$  et  $\Gamma(\tilde{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$ , induite par une dualité parfaite entre  $\Gamma(\tilde{U}_1, W)^{\nabla=0}$  et  $\Gamma(\tilde{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$  ?

#### BIBLIOGRAPHIE

1. D. Shale, *Linear symmetries of free Boson fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 149-167.
2. J. von Neumann, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen operatoren*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **104** (1931), 570-578.
3. A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. **111** (1964), 143-211.

SCHOOL OF MATHEMATICS, INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, NEW JERSEY 08540