Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Volume 55 (1994), Part 1

A quoi servent les motifs?

PIERRE DELIGNE

La première des "conjectures standard" (Grothendieck [19], Kleiman [20]), celle de type Lefschetz, demande que certaines classes de cohomologie soient algébriques. De toute façon, si les motifs sont les "facteurs directs" de variétés algébriques X définis par des projecteurs, cycles algébriques sur $X \times X$, leur définition n'est raisonnable que si on dispose d'assez de cycles algébriques. Sur ce problème: la construction de cycles algébriques intéressants, les progrès ont été maigres.

Grothendieck a tenté de dresser un catalogue de constructions projectives de cycles (contours apparents ...), cf. [19, p. 197]. Pour ceux dont on a calculé la classe de cohomologie, cette classe s'exprime en terme de classes de Chern de fibrés vectoriels évidents. Bien que je ne connaisse pas de contre-exemple, il me semble peu probable que l'anneau des classes de cycles sur $X \times X$ engendré par la diagonale, les diviseurs et les images inverses des classes de Chern de X par les pr_i $(i = 1, 2)$ contienne toujours les cycles requis par la première conjecture standard, par exemple les composantes de Künneth de la diagonale.

Plutôt que de chercher à construire des cycles, on peut chercher à construire des fibrés vectoriels, pour ensuite prendre leurs classes de Chern. C'est ainsi en fait que K. Kodaira et D. C. Spencer (1953) prouvent la conjecture de Hodge pour les diviseurs (un théorème de Lefschetz), le groupe $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathscr{O}^*)$ étant accessible, sur $\mathbb{C}$, par la suite exacte exponentielle

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}^* \to 0.$$

De même, sur une variété abélienne, il est plus facile d'écrire l'équation fonctionnelle des fonctions Θ (un cocycle pour un fibré en droites) que de définir une fonction Θ, elle-même fournissant le diviseur $\Theta = 0$.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14A20.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

©1994 American Mathematical Society
0082-0717/94 $1.00 + $.25 per page

Malheureusement, en rang supérieur, on ne sait pas plus construire des fibrés vectoriels dont les classes de Chern soient intéressantes qu'on ne sait construire des cycles intéressants.

Sur $\mathbb{C}$, la conjecture de Hodge fournirait les cycles voulus. En direction de cette conjecture, deux difficultés ont été découvertes. La première: Atiyah et Hirzebruch ont montré qu'elle ne pouvait être vraie que rationnellement (cf. Atiyah-Hirzebruch [1]).

La seconde: du point de vue de la théorie de Hodge, la classe d'un cycle Z de codimension d sur X projectif et lisse vit naturellement non dans $H_{\mathbb{Z}}^{d,d} := H^{d,d} \cap H_{\mathbb{Z}}$, mais dans une extension E_d de ce groupe par la jacobienne intermédiaire

$$J^d(X) := H^{2d-1}(X, \mathbb{C})/F^d + H^{2d-1}(X, \mathbb{Z}),$$

où F^d désigne le d-ième terme de la filtration de Hodge de $H^{2d-1}(X, \mathbb{C})$. Dans la catégorie des structures de Hodge mixtes, il s'agit respectivement de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(d), H^{2d}(X))$ et de $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}(d), H^{2d-1}(X))$. La conjecture de Hodge demande que le groupe des classes de cycles s'envoie sur un sous-groupe d'indice fini du quotient $H_{\mathbb{Z}}^{d,d}$. Par contre, on n'a aucune idée de ce que devrait être l'image dans E_d. Outre l'inconfort esthétique que cause cette ignorance, elle rend généralement inapplicable la méthode de P. A. Griffiths pour prouver la conjecture de Hodge par récurrence sur la dimension de la variété X. Cette méthode est inspirée de celle que Lefschetz utilise pour les surfaces, Lefschetz [24]. L'idée est que, si $(H_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ est un pinceau de sections hyperplanes, construire le cycle Z sur X revient à construire les cycles $Z_t = Z \cap H_t$. Dans des bons cas (a) la classe de cohomologie $c \in H_{\mathbb{Z}}^{d,d}(X)$ qu'on veut être celle d'un cycle Z a une restriction nulle sur les H_t, (b) si Z existe, sa classe de cohomologie c détermine la classe des Z_t dans les jacobiennes intermédiaires $J^d(H_t)$, et (c) la construction de Z revient à celle de cycles Z_t de classes définissant une section donnée de la famille des $J^d(H_t)$. On peut alors conclure si tout élément de $J^d(H_t)$ est la classe d'un cycle de codimension d cohomologue à zéro. Par cette méthode, Zucker [32] prouve la conjecture de Hodge pour les hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{P}^5$. Noter toutefois que, si tout élément de $J^d(H_t)$ est la classe d'un cycle cohomologue à zéro, alors $H^{2d-1}(H_t)$ est de type de Hodge $\{(d, d-1)(d-1, d)\}$ (voir §1.6), la réciproque étant une conséquence de la conjecture de Hodge appliquée au produit de H_t par une variété abélienne convenable. De plus, cette surjectivité implique l'existence d'une courbe C_t et d'un cycle algébrique W_t sur $H_t \times C_t$ envoyant $H^1(C_t)$ sur $H^{2d-1}(H_t)$. On peut alors s'attendre à ce que $H^{2d}(X)$ soit contrôlé par le H^2 de la surface fibrée sur $\mathbb{P}^1$ de fibres les C_t, et pour un H^2 la conjecture de Hodge est de toute façon disponible.

Le but de ces notes est de montrer que, malgré cette absence de progrès sur le problème de la construction de cycles, la philosophie des motifs est un outil puissant.

Je remercie S. Bloch de ses commentaires sur une première version de ces notes.

1. Motifs

Selon ce qu'on peut et veut faire, on dispose de plusieurs définitions des motifs—ou d'aucune. Il y a lieu de distinguer les motifs purs, typiquement fournis par la cohomologie de variétés projectives non singulières, et les motifs mixtes, où des variétés ouvertes et singulières sont permises. La notion de motif sur S (famille de motifs paramétrée par S) pose d'autres problèmes encore.

1.1. Pour k un corps, on voudrait dans tous les cas que la catégorie des motifs sur k soit une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathscr{M}(k)$ avec des groupes Hom de dimension finie. Dans le cas pur, on la voudrait semi-simple et graduée (par le poids). Dans le cas mixte, chaque motif M devrait admettre une filtration finie croissante W, avec $\mathrm{Gr}_n^W(M)$ pur de poids n. Autres structures essentielles:

(a) Chaque variété algébrique X sur k doit avoir des groupes de cohomologie motiviques $H^i_{\mathrm{mot}}(X)$, objets de $\mathscr{M}(k)$. Dans le cas pur, on se limite aux variétés X projectives non singulières, et $H^i_{\mathrm{mot}}(X)$ est un motif pur de poids i.

(b) Pour chacune des théories de cohomologie usuelles H, on doit disposer d'un foncteur "réalisation" real et d'isomorphismes

$$H^i(X) = \mathrm{real}\, H^i_{\mathrm{mot}}(X).$$

(c) Un produit tensoriel $\otimes$, auquels les foncteurs de réalisation sont compatibles.

1.2. La structure (c) permet d'appliquer la théorie des catégories tannakiennes, inventée par Grothendieck pour étudier le formalisme des motifs. Références: Saavedra [28], Deligne–Milne [12], Deligne [15].

Pour k de caractéristique 0, cette théorie dit que la catégorie des motifs sur k, avec son produit tensoriel, doit être équivalente à celle des représentations linéaires d'un schéma en groupes affine G sur $\mathbb{Q}$. Noter que deux groupes G_1 et G_2 formes intérieures l'un de l'autre ont mêmes catégories de représentations. Le *groupe de Galois motivique* G n'est donc pas uniquement déterminé par $\mathscr{M}(k)$. La théorie indique que le choix de G et d'une équivalence $\mathscr{M}(k) \simeq \mathrm{Rep}(G)$ équivaut à celui d'un foncteur exact compatible au produit tensoriel de $\mathscr{M}(k)$ dans les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels: un *foncteur fibre* ω. A ω correspond $G := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$, le schéma en groupes des $\otimes$-automorphismes de ω. On peut voir ω, ou plutôt $\omega \circ H_{\mathrm{mot}}$, comme une théorie de cohomologie à valeurs dans les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.

Pour k muni d'un plongement dans $\mathbb{C}$, une théorie de cohomologie possible est: "cohomologie singulière de l'espace topologique des points complexes". Pour $k = \mathbb{Q}$, un autre choix possible est: "cohomologie de de Rham".

En caractéristique p, un exemple de Serre montre qu'il ne peut pas y avoir de théorie de cohomologie raisonnable à valeurs dans les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels: si E est une courbe elliptique supersingulière, l'algèbre $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de quaternions, donc n'a pas de représentation linéaire de dimension deux sur $\mathbb{Q}$. De l'existence d'une théorie de cohomologie à valeurs dans les espaces vectoriels sur une extension de $\mathbb{Q}$ résulte que $\mathscr{M}(k)$ doit toutefois être la catégorie des représentations d'une gerbe convenable.

La théorie tannakienne est un analogue *linéaire* d'une théorie *ensembliste*, celle du π_1-profini, également due à Grothendieck (SGA1). Analogie: si $\mathscr{R}$ est la catégorie des revêtements étales finis d'un schéma connexe S (resp. une catégorie tannakienne sur K) et ω un foncteur fibre, à valeurs dans les ensembles finis (resp. dans les K-espaces vectoriels de dimension finie), $\mathscr{R}$ est naturellement équivalente à la catégorie des G-ensembles finis (resp. des représentations de G), pour G le groupe profini $\mathrm{Aut}(\omega)$ (resp. le schéma en groupes affine $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$). De là la terminologie "groupe de Galois motivique", la théorie du π_1 devenant dans le cas des spectres de corps celle de Galois.

1.3. En général, le groupe de Galois motivique G est énorme. Sauf pour k algébrique sur un corps fini, on s'attend par exemple à ce qu'il admette comme quotient $\mathrm{PGL}(2)^{\mathrm{card}(k)}$. Il ne "sait pas" que des motifs M_t peuvent former une famille dépendant algébriquement d'un paramètre t.

Bien que G soit énorme, son existence facilite le maniement d'objets "motiviques".

EXEMPLE. La catégorie $\mathrm{ind}\,\mathscr{M}(k)$ des ind-objets de la catégorie $\mathscr{M}(k)$ des motifs sur k hérite du produit tensoriel de $\mathscr{M}(k)$. Ceci permet de définir une algèbre de Hopf commutative dans $\mathrm{ind}\,\mathscr{M}(k)$ comme étant un objet H muni d'un produit et coproduit: $H \otimes H \to H$ et $H \to H \otimes H$, ainsi que d'unité, counité et antipode: $1 \to H$, $H \to 1$, $H \to H$ vérifiant des axiomes convenables. On définit la catégorie des *schémas en groupes affines motiviques* comme étant l'opposée de la catégorie des algèbres de Hopf commutatives de $\mathrm{ind}\,\mathscr{M}(k)$. Si ω est un foncteur fibre, à valeurs dans les espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois motivique $G := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$, le foncteur ω induit une équivalence de $\mathrm{ind}\,\mathscr{M}(k)$ avec la catégorie des représentations linéaires—non nécessairement de dimension finie—de G, et $H \mapsto \mathrm{Spec}\,\omega(H)$ est une équivalence de la catégorie des schémas en groupes affines motiviques avec celle des schémas en groupes affines sur $\mathbb{Q}$, munis d'une action de G.

Voici trois exemples de tels objets.

1.3.1. La version motivique de $\pi_1(X, x)$ rendu unipotent, cf. Deligne **[14]**, spécialement les §§5,7, et 10 à 13.

1.3.2. Le groupe de Galois motivique: il admet une version motivique G_{mot} telle que pour tout foncteur fibre ω, le groupe de Galois motivique correspondant soit déduit de G_{mot} par application de ω. Il s'agit d'une construction valable dans toute catégorie tannakienne, cf. Deligne [15, §8]. Dans l'analogie avec la théorie du π_1 profini, son analogue est le suivant: pour x variable, les $\pi_1(X, x)$ forment un système local sur X, ou plus précisément un objet en groupes dans la catégorie des pro-objets de celle des revêtements étales de X. Le π_1 en x s'obtient en en prenant la fibre en x.

1.3.3. Soit $\mathscr{M}$ une sous-catégorie pleine de celle des motifs mixtes sur k, stable par $\otimes$, dual et sous-quotients, et soit $\mathscr{M}_{\text{pur}}$ la sous-catégorie pleine des sommes directes de motifs purs dans $\mathscr{M}$. On dispose du foncteur exact et compatible au produit tensoriel: $M \mapsto \mathrm{Gr}^W(M)$, de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}_{\text{pur}}$. Il existe dans $\mathscr{M}_{\text{pur}}$ un schéma en groupes pro-unipotent motivique U, agissant fonctoriellement sur $\mathrm{Gr}^W(M)$ pour M dans $\mathscr{M}$, et tel que $M \mapsto \mathrm{Gr}^W(M)$ soit une équivalence de $\mathscr{M}$ avec la catégorie des représentations (dans $\mathscr{M}_{\text{pur}}$) de U. C'est une conséquence de Deligne [15, 8.17].

On peut de même définir et manier schémas, torseurs,... motiviques.

1.4. Le groupe de Galois motivique rendu abélien G^{ab} a une taille plus raisonnable. Il est indépendant du foncteur réalisation choisi (et de son existence). Conjecturalement, si $k_1 \subset k_2$ sont deux corps algébriquement clos, G^{ab} est le même pour k_1 et k_2 et la sous-catégorie correspondante de motifs est engendrée par les H^1_{mot} de variétés abéliennes de type CM.

En caractéristique 0, si on prend les motifs au sens des cycles de Hodge absolus et qu'on se limite à la sous-catégorie engendrée par les H^1 de variétés abéliennes, on sait calculer G^{ab}. Pour $\mathscr{M}(\mathbb{Q})$, on sait même calculer le quotient de G par le groupe dérivé de $\mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$. Voir Deligne [13] ou l'exposé de Schappacher à cette conférence.

Pour $\mathscr{M}(\mathbb{F}_q)$, tout motif devrait être somme directe de motifs purs et le groupe de Galois motivique G devrait contenir un élément F, le Frobenius, dont les puissances soient denses dans G. En particulier, G devrait être commutatif. Le calcul conjectural de $\mathscr{M}(\mathbb{F}_q)$ a été fait par Grothendieck (non publié). Voir Langlands–Rapoport [23] et l'exposé de Milne à cette conférence.

1.5. Une source de 1.1.(a), (b) est l'exemple suivant. Une courbe projective et lisse X définit sa jacobienne $J(X) = \mathrm{Pic}^0(X)$. Les variétés abéliennes à isogénie près sur k forment une catégorie abélienne semi-simple avec des $\mathrm{Hom}(A, B)$ de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ et pour chaque théorie de cohomologie usuelle H, le dual $H_1(X)$ de $H^1(X)$, se déduit de $J(X)$ par application d'un foncteur "réalisation". Noter que $H_1(X)$ est aussi le twist à la Tate $H^1(X)(1)$ de $H^1(X)$. Pour la cohomologie ℓ-adique, $\mathrm{real}_\ell(A)$ est le module de Tate $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Pour k de caractéristique 0 et la théorie de

de Rham, $\mathrm{real}_{\mathrm{DR}}(A)$ est l'algèbre de Lie de l'extension additive universelle de A.

On veut donc pouvoir identifier les variétés abéliennes à des motifs de poids -1 particuliers. Pour certaines applications (par exemple l'étude des variétés de Shimura), on serait déjà content de disposer d'une catégorie de motifs contenant les variétés abéliennes et stable par $\otimes$. En caractéristique 0, la théorie des cycles de Hodge absolus fournit une telle théorie (Deligne–Brylinski [11], Deligne–Milne [12], ou l'exposé de Panchishkin à cette conférence). Si on ne se limite pas aux motifs pur, un autre exemple clé est celui des courbes lisses non nécessairement complètes. Plus généralement, on peut considérer une courbe connexe projective et lisse $\overline{X}$, S et T disjoints dans $\overline{X}$ et la cohomologie $H^1(\overline{X}-S, \mathrm{rel}\, T)$. Un 1-*motif* $K^\bullet$ est un complexe de schémas en groupes réduit aux degrés -1 et 0, avec, sur la clôture algébrique, K^{-1} un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et K^0 une extension d'une variété abélienne par un tore. Supposons pour simplifier k algébriquement clos. Pour chaque théorie de cohomologie usuelle, le H^1 considéré, ou plutôt son twist à la Tate $H^1(\overline{X}-S, \mathrm{rel}\, T)(1)$, se déduit alors du 1-motif suivant par application d'un foncteur réalisation.

Soit $J_T(\overline{X})$ la jacobienne généralisée classifiant les faisceaux inversibles de degré 0 sur $\overline{X}$ trivialisés sur T. C'est une extension de la variété abélienne $\mathrm{Pic}^0(\overline{X})$ par le tore de groupe de caractères $\mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^T \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z})$. Chaque $s \in S$ définit le faisceau inversible $\mathscr{O}(s)$, trivialisé sur T et de degré 1, d'où

$$\mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z}) \to J_T(\overline{X}). \tag{1.5.1}$$

C'est le 1-motif promis. Voir Deligne [9, §10].

Remarque. Pour $S, T \neq \varnothing$, le 1-motif (1.5.1) détermine aussi la catégorie des faisceaux inversibles sur $\overline{X}-S$, trivialisés sur T: un point $x \in J_T(\overline{X})$ définit un tel faisceau inversible $\mathscr{L}_x$, et un isomorphisme de $\mathscr{L}_x$ avec $\mathscr{L}_y$ qui soit l'identité sur T s'identifie à $k \in \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z})$, avec $y - x = \delta k$.

A nouveau, on veut pouvoir identifier les 1-motifs à des motifs (mixtes) particuliers. Pour certaines applications (l'étude à l'infini des variétés de Shimura) on serait déjà content de disposer d'une catégorie de motifs contenant les 1-motifs et stable par $\otimes$. En caractéristique 0, on sait le faire (Brylinski [7]).

1.6. Les variétés abéliennes ont des espaces de modules et ceux-ci permettent d'interpréter algébriquement certains quotients d'espaces hermitiens symétriques par des groupes arithmétiques. Le cas des motifs est plus compliqué. Si S est un schéma sur $\mathbb{C}$ et M une famille de motifs purs paramétrée par S, M fournit en réalisation de Hodge une variation de structures de Hodge M_h sur $S(\mathbb{C})$, polarisée si M l'est. De là, une application φ de $S(\mathbb{C})$ dans l'espace $\mathscr{C}$ classifiant les structures de Hodge polarisées de nombres de Hodge ceux de M.

La variation M_h fournit en particulier un système local d'espaces vectoriels complexes $M_{\mathbb{C}}$ muni d'une filtration de Hodge F variant continûment.

L'holomorphie de F et la condition de "transversalité" découvertes par Griffiths [17] (voir aussi Griffiths [18]) peuvent s'exprimer comme suit. Soit T le fibré tangent de S, S étant vue comme une variété C^∞. La structure complexe de S fournit une structure complexe sur T. Soit $\varphi: T \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to T$ le prolongement $\mathbf{C}$-linéaire de l'identité de T et soit $T'' \subset T \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ le noyau de φ. Définissons le filtration de Hodge de $T \otimes \mathbf{C}$ par

$$F^{-1} = T \otimes \mathbf{C}, \qquad F^0 = T'', \qquad F^1 = 0.$$

Pour t et m des sections C^∞ de $T \otimes \mathbf{C}$ et de $M_{\mathbf{C}}$, la structure plate de $M_{\mathbf{C}}$ permet de définir $\nabla_t m$. La condition est que $t, m \mapsto \nabla_t m$ est compatible aux filtrations de Hodge:

$$\begin{array}{llll} t \text{ dans } T'', & m \text{ dans } F^i, & \nabla_t m \text{ dans } F^i: & \text{holomorphie}; \\ t \text{ dans } T, & m \text{ dans } F^i, & \nabla_t m \text{ dans } F^{i-1}: & \text{transversalité}. \end{array}$$

Sur l'espace classifiant $\mathscr{C}$ il existe une structure complexe et une distribution holomorphe $\tau \subset T$ telles que holomorphie et transversalité se traduisent comme holomorphie de l'application classifiante $\varphi: S(\mathbf{C}) \to \mathscr{C}$ et tangence de $\varphi(S)$ à τ.

La distribution τ est en général non intégrable. L'ensemble des points de $\mathscr{C}$ qui correspondent à un facteur direct d'un $H^i(X)$, X projectif non singulier, est la réunion dénombrable de sous-variétés tangentes à τ. Pour τ différent du fibré tangent tout entier, on n'en a aucune description, même conjecturale.

Un argument analogue, également dû à Griffiths, explique pourquoi les points de la jacobienne intermédiaire $J^d(X)$ ne peuvent pas tous être classes de cycles algébriques, sauf lorsque $H^{2d-1}(X)$ est de type $\{(d-1, d), (d, d-1)\}$. Soit $f: X \to S$ une famille de variétés projectives non singulières. On pose $X_s = f^{-1}(s)$. Les jacobiennes intermédiaires $J^d(X_s) = H^{2d-1}(X_s, \mathbf{C})/H^{2d-1}(X_s, \mathbf{Z}) + F^d$ forment un fibré holomorphe J^d en tores complexes et l'axiome de transversalité assure que la connexion de Gauss–Manin (exprimant que les $H^{2d-1}(X_s, \mathbf{C})$ forment un système local) passe au quotient pour définir un opérateur différentiel D, défini sur le faisceau de sections de J^d et à valeur dans celui des 1-formes à valeur dans le fibré holomorphe des $H^{2d-1}(X_s, \mathbf{C})/F^{d-1}$. Une famille algébrique $(Z_s)_{s \in S}$ de cycles algébriques cohomologues à zéro sur les X_s définit une section holomorphe z de J^d. Le résultat de Griffiths est que $Dz = 0$. La section z définit une famille holomorphe de structures de Hodge mixtes extension de $\mathbf{Z}$ (type $(0, 0)$) par $H^{2d-1}(X)(d)$, et $Dz = 0$ équivaut à ce que cette famille vérifie l'axiome de transversalité.

1.7. Quand la distribution τ est le fibré tangent tout entier, $\mathscr{C}$ est un quotient arithmétique d'un domaine hermitien symétrique. Cette description des points complexes des variétés de Shimura comme modules de structures de Hodge suggère que ces variétés sont des espaces de modules de motifs.

Soit S le $\mathbb{R}$-groupe algébrique $\mathbb{C}^*$: $S = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$. Se donner une action de S sur l'espace vectoriel réel V revient à se donner une décomposition de $V \otimes \mathbb{C}$ en somme directe de $V^{p,q}$ avec $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$, $z \in S(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$ agissant sur $V^{p,q}$ par multiplication par $z^{-p}\bar{z}^{-q}$. On définit $w: \mathbb{G}_m \to S$ (resp. $\mu: \mathbb{G}_m \to S$, défini sur $\mathbb{C}$) par la condition que pour tout V, $w(\lambda)$ (resp. $\mu(\lambda)$) agisse sur $V^{p,q}$ par multiplication par λ^{p+q} (resp. λ^p).

Les données définissant une variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ sont un groupe réductif G sur $\mathbb{Q}$, une $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de morphismes $h: S \to G_{\mathbb{R}}$, avec $w_X := h \circ w$ central (donc indépendant de h) et un sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{A}^f)$. Plaçons-nous dans le cas où w_X est défini sur $\mathbb{Q}$ et où $\operatorname{int} h(i)$ est une involution de Cartan du quotient $G/w_X(\mathbb{G}_m)$. Le *corps dual* $E(G, X)$ est le corps de définition de la classe de conjugaison de $h\mu$ (h quelconque dans X). C'est un sous-corps de $\mathbb{C}$. La variété de Shimura est définie sur $E(G, X)$, avec pour points complexes $K\backslash X \times G(\mathbb{A}^f)/G(\mathbb{Q})$. Sa construction dans le cas général est due à Borovoï [6].

Un point de la variété de Shimura sur un corps F contenant $E(G, X)$ devrait correspondre à

(a) un $\otimes$-foncteur exact x de la catégorie $\mathrm{Rep}(G)$ des représentations de G dans celle des motifs purs sur F;

(b) une structure entière. En terme de la réalisation adélique finie, produit restreint des réalisations ℓ-adiques, on peut la décrire comme un isomorphisme de $\otimes$-foncteurs

$$x(V)_{\mathbb{A}^f} \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbb{A}^f,$$

donné à composition près avec un élément de K.

La condition suivante doit être vérifiée. On y suppose pour simplifier F plongeable dans $\mathbb{C}$.

(c) Soit ι un plongement de F dans $\mathbb{C}$, prolongeant le plongement identique de $E(G, X)$ dans $\mathbb{C}$. Il doit exister $h \in X$ tel que les $\otimes$-foncteurs suivants de $\mathrm{Rep}(G)$ dans les structures de Hodge soient isomorphes:

(1) $(V, \rho) \mapsto V$ muni de la structure de Hodge définie par $\rho \circ h$,

(2) $(V, \rho) \mapsto$ réalisation de Hodge de $x(V)$, après extension de corps de base à $\mathbb{C}$ par ι.

Que cette condition (c) soit indépendante du plongement complexe ι choisi—supposé prolonger l'inclusion de $E(G, X)$ dans $\mathbb{C}$—n'est pas évident. Parfois elle résulte toutefois de (b) et des conditions (d), (e) plus algébriques, conséquence de (c), qui suivent.

(d) La réalisation de de Rham définit un foncteur fibre sur $\mathrm{Rep}(G)$: $V \mapsto x(V)_{\mathrm{DR}}$, correspondant à un G-torseur P sur F. La filtration de Hodge des $X(V)_{\mathrm{DR}}$ est exacte et compatible au produit tensoriel,

donc provient d'un parabolique Q de G^P et de $\mu_{\mathrm{DR}}: \mathbb{G}_m \to$ centre de $Q/\mathscr{R}_u Q$, se relevant en une classe de conjugaison de morphismes de $\mathbb{G}_m$ dans Q, Saavedra [**28**, IV, 2.4, p. 229]. Parce que F contient $E(G, X)$, il a un sens de demander que la classe de conjugaison correspondante d'applications de $\mathbb{G}_m$ dans G coincide avec celle des $h \circ \mu$ $(h \in X)$. La condition (c) l'implique. Ceci explique l'apparition du corps dual.

(e) Pour (V, ρ) une représentation de poids 0: $\rho \circ w$ trivial et $V \otimes V \to \mathbb{Q}$ une forme bilinéaire invariante symétrique telle que sur $V_{\mathbf{R}}$, $B(v, h(i)w)$ soit symétrique défini positif, on demande que $x(V) \otimes x(V) \to 1$ soit positive, pour la polarisation (loc. cit. V, 2.4, p. 276) espérée de la catégorie des motifs.

1.8. Cette interprétation motivique des variétés de Shimura a été un guide pour l'élaboration des axiomes qui les caractérisent, ainsi que pour la détermination de leur conjuguées (Borovoĭ, [**6**]).

Soit p un nombre premier tel que $G_{\mathbf{Q}_p}$ se prolonge en un groupe réductif sur $\mathbb{Z}_p$, avec K produit de $G(\mathbb{Z}_p)$ par un sous-groupe du produit restreint des $G(\mathbb{Q}_\ell)$, $\ell \neq p$. Le corps dual $E(G, X)$ est alors non ramifié en p. On espère que la variété de Shimura a une réduction mod p naturelle, et on peut essayer de paraphraser la description conjecturale motivique qui précède pour conjecturer la structure de l'ensemble de ses points sur un corps fini de caractéristique p. Il y a des difficultés: comment interpréter (c) et la p-partie de (b), à traiter conjointement avec (d)? Voir dans cette direction, Langlands–Rapoport [**23**].

2. Théories de cohomologie

2.1. Principle. Une construction géométrique, possible dans l'une des théories de cohomologie usuelles, doit avoir un sens motivique et donc avoir un analogue dans les autres théories usuelles.

Ce principe a été crucial pour développer la théorie de Hodge mixte. Grothendieck a vu que chaque $H^i(X)$ doit se dévisser en terme de sous-quotients de cohomologie de variétés projectives non singulières. Le motif mixte $H^i_{\mathrm{mot}}(X)$ doit donc avoir une classe dans le groupe de Grothendieck des motifs purs. En caractéristique 0, le nombre de Hodge h^{pq} de la réalisation de Hodge d'un motif pur défini un homomorphisme de ce groupe de Grothendieck dans $\mathbb{Z}$. Des nombres de Hodge $h^{pq}(H^i_{\mathrm{mot}}(X))$ doivent donc avoir un sens.

Pour aller plus loin, il fallait se convaincre que tout motif a une filtration par le poids W, croissante, avec $\mathrm{Gr}_i^W(M)$ pur de poids i (= facteur direct de $H^i_{\mathrm{mot}}(X)$ pour X projectif non singulier). C'est sur le H^1 des courbes, i.e., sur les 1-motifs, que je m'en suis convaincu, et le premier test qu'a dû passer la définition des structures de Hodge mixtes est qu'elles redonnent comme cas particulier les 1-motifs sur $\mathbb{C}$ (Deligne [**9**, §10]).

Le même principe de transfert a permis de conjecturer le comportement asymptotique d'une variation de structures de Hodge sur un disque épointé, ou un produit de disques épointés.

Mise en garde. Soit (S, η, s) un trait, avec S spectre d'un anneau de valuation discrète complet. D'après Raynaud, une variété abélienne sur le point générique η, à réduction semi-stable, admet une description rigide analytique comme conoyau d'une flèche définissant un 1-motif. Parallèlement, en théorie de Hodge, si $\mathscr{H}$ est une variation de structures de Hodge polarisée de type $\{(1, 0), (0, 1)\}$ sur un disque épointé D^*, la monodromie fournit sur $\mathscr{H}_Q$ une filtration par le poids W qui, jointe à la filtration de Hodge originelle, fait de $\mathscr{H}$ une variation de structures de Hodge mixtes au voisinage épointé de 0.

Il ne faut pas s'attendre à un comportement analogue pour les motifs, lorsque la condition de transversalité est non triviale en théorie de Hodge. En général, un objet décrivant le comportement asymptotique doit exister seulement sur l'espace tangent de Zariski épointé (on suppose réduction semi-stable), et il ne doit pas suffire à reconstruire l'objet de départ. Par exemple, pour $\mathscr{H}$ une variation de structures de Hodge polarisées sur $D^* = D - \{0\}$, l'orbite nilpotente asymptotique de W. Schmid est une variation de structures de Hodge mixtes sur l'espace tangent épointé en 0 et, pour $\mathscr{H}$ se prolongeant sur D, c'est la variation constante de valeur la fibre en 0 du prolongement.

La théorie de Morihiko Saito (Saito [29]) qui fournit les six opérations (et les cycles évanescents) en théorie de Hodge mixte est en partie inspirée par la théorie ℓ-adique et le point de vue motivique. Inversement, elle suggère que si on veut considérer des motifs sur une base S, plutôt que de vouloir disposer de motifs M de réalisations ℓ-adiques des faisceaux ℓ-adiques sur S, il peut être préférable de disposer de motifs de réalisations des faisceaux pervers. En tout cas, ce n'est que dans un tel cadre qu'on peut espérer une filtration par le poids.

C'est encore la philosophie des motifs qui a amené Grothendieck à conjecturer l'existence du foncteur "mystérieux" reliant la cohomologie étale p-adique d'une variété définie sur $\mathbb{Q}_p$, supposée à bonne réduction, et sa cohomologie de de Rham: existant pour le H^1, i.e., pour les motifs que sont les variétés abéliennes, il devait exister toujours, de façon compatible au produit tensoriel.

2.2. Soit X_0 une variété algébrique sur k et X déduit de X_0 par extension des scalaires à une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Pour $x \in X_0(k)$, le groupe fondamental profini $\pi_1(X, x)$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Supposons pour simplifier X normal. Le foncteur "fibre en x" est alors une équivalence de catégories: ($\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux lisses sur X_0) $\to$ (représentations ℓ-adiques de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, munies d'une action équivariante de $\pi_1(X, x)$).

Je ne connais pas de sens en lequel $\pi_1(X, x)$ soit motivique. La situation change pour son pro-ℓ-complété $\pi_1(X, x)_\ell^\wedge$. Ce groupe rendu abélien est $H_1(X, \mathbb{Z}_\ell)$, et son H_2 est contenu dans celui de X. Il devrait exister un schéma en groupes motiviques $\pi_1(X, x)_{\mathrm{un}}$ sur k tel que

(a) Pour chaque théorie de cohomologie usuelle H, la réalisation correspondante de $\pi_1(X, x)_{\mathrm{un}}$ sur $\overline{k}$ a pour représentations linéaires les "systèmes locaux" (au sens de H) sur X, qui sont unipotents.
(b) Le foncteur "fibre en x" est une équivalence de catégories: (motifs lisses sur X_0, extensions itérées d'images universes de motifs sur k) $\to$ (motifs sur k, munis d'une action de $\pi_1(X, x)_{\mathrm{un}}$).

Dans (a), les systèmes locaux considérés ne sont pas supposés motiviques. D'après (b), ceux qui le sont forment toutefois un système fidèle de représentations.

Cette philosophie a inspiré la théorie de Hodge du π_1 : voir Steenbrink–Zucker [30].

Plus généralement, supposons donné un ensemble A de motifs purs sur X_0. Ce qui précède correspond à $A = \varnothing$ ou, ce qui revient au même, A réduit au motif unité. Il devrait exister sur k un schéma en groupes motivique $\pi_1(X, x)_A$, le π_1 motivique relatif à A, tel que

(a′) Sur $\overline{k}$, sa réalisation relative à la théorie H a pour représentations les "systèmes locaux" sur X qui sont extensions itérées de sous-quotients de produits tensoriels de réalisations d'objets de A et de leurs duaux.
(b′) Le foncteur "fibre en x" est une équivalence: (motifs lisses sur X_0, extensions itérées de sous-quotients (motiviques) de produits tensoriels d'objets de A, de leurs duaux et d'images inverses de motifs sur k) $\to$ (motifs sur k, munis d'une action de $\pi_1(X, x)_A$).

Dans (a′), les sous-quotients sont à prendre sur X et ne sont pas supposés motiviques.

En théorie de Hodge, ceci suggère la question suivante. Soit X lisse et connexe sur $\mathbb{C}$ et $x \in X$. Soit A un ensemble de variations de structures de Hodge polarisables sur X. Soit $\mathscr{A}$ la catégorie tannakienne de $\mathbb{Q}$-systèmes locaux sur X engendrée (par $\otimes$, dual, sous-quotients et extensions), par les systèmes locaux sous-jacents aux objets de A. Soit $\mathscr{A}_H$ la catégorie tannakienne des variations de structures de Hodge mixtes sur X, admissibles au sens de Steenbrink–Zucker [30], engendrée (par $\otimes$, dual, sous-quotients et extensions) par A et les variations constantes de gradué par le poids polarisable.

Sur $\mathscr{A}$, on dispose du foncteur fibre "fibre en x" ω_x. Soit $G = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_x)$. C'est l'adhérence de Zariski de $\pi_1(X, x)$ dans le produit des $\mathrm{GL}(H_x)$, H objet de $\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{H}(G)$ l'algèbre de Hopf dont G est le spectre.

Pour M dans $\mathscr{A}_H$, le système local sous-jacent $M_{\mathbf{Q}}$ est dans $\mathscr{A}$, de sorte que G agit sur sa fibre $(M_Q)_x$ en x: cette fibre est un $\mathscr{H}(G)$-comodule:

$$(M_Q)_x \to (M_Q)_x \otimes \mathscr{H}(G). \tag{2.2.21}$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{H}(G)$ devrait admettre une structure de ind-structure de Hodge mixte, i.e., G devrait être un schéma en groupes affine dans la catégorie tannakienne des structures de Hodge mixtes, de sorte que (a) les flèches (2.2.1) sont des morphismes de Hodge mixte, (b) le foncteur $M \mapsto M_x$ est une équivalence de $\mathscr{A}$ avec la catégorie des structures de Hodge mixtes H à gradué polarisable, munies d'une structure de comodule $H \to H \otimes \mathscr{H}(G)$ qui soit un morphisme de Hodge mixte.

3. Cohomologie absolue

3.1. Dans chacune des théories de cohomologie usuelles, les foncteurs $H^i(X)$ proviennent d'un foncteur $R\Gamma(X)$ à valeurs dans une catégorie triangulée $\mathscr{D}$. Celle-ci est munie d'une t-structure (la donnée de sous-catégories $\mathscr{D}^{\leq 0}$ et $\mathscr{D}^{\geq 0}$, vérifiant des axiomes convenables: Beilinson–Bernstein–Deligne [3, 1.3]), de coeur (la sous-catégorie abélienne intersection de $\mathscr{D}^{\leq 0}$ et $\mathscr{D}^{\geq 0}$) la catégorie dans laquelle H^* prend ses valeurs, et

$$H^i(X) = H^i R\Gamma(X)$$

au sens de cette t-structure.

On peut espérer que ces foncteurs $R\Gamma$ soient les "réalisations" d'un foncteur $R\Gamma$ motivique: on espère l'existence d'une catégorie triangulée $\mathscr{D}(k)$, avec t-structure, de coeur la catégorie $\mathscr{M}(k)$ des motifs mixtes sur k, et celle d'un foncteur $R\Gamma_{\text{mot}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}(k)$, dont les $R\Gamma$ dans les diverses théories se déduisent par application de foncteurs réalisations.

Une catégorie triangulée $\mathscr{D}$ avec t-structure n'est pas toujours la catégorie dérivée de son coeur $\mathscr{C}$. Exemple: soient X un CW-complexe fini connexe et $\mathscr{D} \subset D^b(X, \mathbf{Q})$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée formée des complexes à faisceaux de cohomologie localement constants. Son coeur est la catégorie abélienne des faisceaux localement constants de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels sur X. On dispose d'un foncteur naturel $D^b(\mathscr{C}) \to \mathscr{D}$, mais ce foncteur n'est une équivalence que si X est un $K(\pi, 1)$.

Dans ce paragraphe, nous supposerons l'existence de $\mathscr{D}(k)$ et celle de foncteurs "réalisations". Nous supposerons aussi l'existence dans $\mathscr{D}(k)$ d'un "twist à la Tate" qui soit une auto-équivalence de catégorie, et corresponde par les foncteurs réalisations au twist à la Tate usuel. Nous supposerons enfin que la catégorie $\mathscr{M}(k)$ est tannakienne et que la cohomologie ℓ-adique est un foncteur fibre. Ceci implique que si $\varphi: M_1 \to M_2$ est un morphisme de motifs dont la réalisation ℓ-adique est un isomorphisme, alors φ est un isomorphisme.

Pour M_1, M_2 dans $\mathscr{M}(k)$, posons

$$\operatorname{Ext}^i(M_1, M_2) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}(k)}(M_1, M_2[i]).$$

Ce sont les Hom et Ext^1 usuels pour $i = 0, 1$ mais pour $i > 1$, ils pourraient différer des Ext de Yoneda, qui sont les $\mathrm{Hom}(M_1, M_2[i])$ dans $D^b(\mathscr{M}(k))$.

Pour chacune des théories de cohomologie usuelles, ces Ext^i motiviques doivent s'envoyer dans les Ext^i entre les réalisations correspondantes de M_1 et M_2.

3.2. Pour X une variété algébrique sur k, appelons groupes de cohomologie absolue de X les

$$H^i_{\mathrm{abs}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(k)}(1, R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X)[i]),$$

où 1 est le motif unité. Nous aurons aussi à considérer les

$$H^i_{\mathrm{abs}}(X, \mathbb{Q}(j)) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(k)}(1, R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X)(j)[i]).$$

Ces groupes sont souvent appelés groupes de cohomologie motiviques. Ce sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$. On veillera à ne pas les confondre avec les $H^i_{\mathrm{mot}}(X)$, qui sont des motifs sur k. Les deux sont liés par une suite spectrale

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p(1, H^q_{\mathrm{mot}}(X)) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{abs}}(X). \tag{3.2.1}$$

Pour M un motif, on écrira encore $H^p_{\mathrm{abs}}(M)$ pour $\mathrm{Ext}^p(1, M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(k)}(1, M[p])$. Avec cette notation, la suite spectrale (3.2.1) se récrit

$$E_2^{pq} = H^p_{\mathrm{abs}}(H^q_{\mathrm{mot}}(X)) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{abs}}(X). \tag{3.2.2}$$

L'analogue ℓ-adique est le suivant: une variété X sur k, de clôture algébrique $\overline{k}$, définit des groupes de cohomologie ℓ-adique $H^i(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)$, qu'on espère réalisations de motifs $H^i_{\mathrm{mot}}(X)$. La variété X a aussi une cohomologie étale absolue $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, qui est l'aboutissement d'une suite spectrale

$$H^p(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), H^q(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)) \Rightarrow H^i(X, \mathbb{Q}_\ell).$$

Pour X projectif et lisse sur k, on espère que $R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X)$ est (non canoniquement) isomorphe à la somme directe dans $\mathscr{D}(X)$ des $H^i_{\mathrm{mot}}(X)[-i]$. Cela résulterait de l'hypothèse suivante:

(*) Pour $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, on dispose de $c_1(\mathscr{L})$: $R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X) \to R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X)(1)[2]$ qui, en réalisation ℓ-adique, fournit le cup-produit avec la classe de Chern $c_1(\mathscr{L})$ de $\mathscr{L}: H^i(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{i+2}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell(1))$.

Prenons en effet $\mathscr{L}$ ample. Le foncteur réalisation ℓ-adique étant un foncteur fibre, il résulte de (*) et du théorème de Lefschetz difficile que pour X purement de dimension N, les

$$c_1(\mathscr{L})^i : H^{N-i}_{\mathrm{mot}}(X) \to H^{N+i}_{\mathrm{mot}}(X)(i)$$

sont des isomorphismes. On peut alors appliquer Deligne [8].

Analysant la démonstration, on peut en déduire, pour chaque faisceau inversible ample $\mathscr{L}$, une décomposition canonique (et même plusieurs)

$$\varphi_{\mathscr{L}}: R\Gamma_{\text{mot}}(X) \leftrightarrow \bigoplus H^i_{\text{mot}}(X)[-i].$$

Voir Deligne, "Décompositions dans la catégorie dérivée", dans ce volume.

Mise en garde. Dépendant du théorème de Lefschetz difficile, ces arguments sont essentiellement rationnels. Si on disposait d'une variante entière de $\mathscr{D}(X)$, on devrait s'attendre à ce que dans ce cadre $R\Gamma(X)$ ne soit pas toujours somme des $H^i(X)[-i]$.

3.3. Soit X lisse sur k. Les diverses "classes" d'un cycle algébrique Z de codimension d doivent provenir d'une classe motivique

$$cl(Z) \in \operatorname{Hom}(1, R\Gamma_{\text{mot}}(X)[2d](d)) =: H^{2d}_{\text{abs}}(X, \mathbb{Q}(d)). \tag{3.3.1}$$

La classe (3.3.1) ne doit dépendre que de la classe d'équivalence linéaire de Z.

Si X est projectif et lisse et qu'on a choisi une décomposition

$$R\Gamma_{\text{mot}}(X) \simeq \bigoplus H^i_{\text{mot}}(X)[-i]$$

(cf. 3.2), la classe (3.3.1) équivaut à une série de classes

$$cl_n(Z) \in \operatorname{Ext}^n(1, H^{2d-n}_{\text{mot}}(X)(d)) = H^n_{\text{abs}}(H^{2d-n}_{\text{mot}}(X)(d)). \tag{3.3.2}$$

La première de ces classes qui est non nulle ne dépend pas de la décomposition choisie.

Exemple 3.4. En théorie de Hodge, Z définit tout d'abord une classe de cohomologie entière de type (d, d), i.e., un morphisme de structures de Hodge

$$\mathbb{Z} \to H^{2d}(X)(d).$$

Si cette classe est nulle, Z a une classe dans la jacobienne intermédiaire

$$J_d(X) = H^{2d-1}(X, \mathbb{C})/F^d \oplus H^{2d-1}(X, \mathbb{Z}),$$

groupe qui n'est autre que

$$\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}, H^{2d-1}(X)(d))$$

dans la catégorie des structures de Hodge mixte. Là s'arrête l'histoire car la catégorie abélienne des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes est de dimension cohomologique 1.

Exemple 3.5. Soient X projectif et lisse purement de dimension N sur k algébriquement clos, $\mathscr{O}(1)$ un faisceau inversible ample et montrons comment on peut attacher à un diviseur D une classe $cl(D)$ dans $\operatorname{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{Q}$, groupe que la théorie des motifs interprète comme étant $H^1_{\text{abs}}(X)(1))$.

D'après un théorème de A. Weil [**31**, Théorème 7], l'application des classes d'équivalence linéaire de diviseurs dans les classes d'équivalences linéaires de 0-cycles:

$$E \to E \cdot c_1(\mathscr{O}(1))^{N-1}$$

induit une isogénie

$$\varphi\colon \mathrm{Pic}^0(X) \to J(X),$$

donc une bijection de $\mathrm{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{Q}$ avec $J(X) \otimes \mathbb{Q}$. On prend

$$cl_1(D) = \varphi^{-1} cl\left(D \cdot c_1(\mathscr{O}(1))^{N-1} - \frac{\deg(D \cdot c_1(\mathscr{O}(1))^{N-1})}{\deg(c_1(\mathscr{O}(1))^N)} \cdot c_1(\mathscr{O}(1))^N\right)$$

EXEMPLE 3.6. Plaçons-nous non plus sur le spectre d'un corps mais sur une base S, lisse sur un corps algébriquement clos k. Soit $f\colon X \to S$ projectif et lisse sur S et Z un cycle de codimension d. Travaillons en cohomologie ℓ-adique, ℓ inversible sur S. Le cycle Z a une classe dans

$$H^{2d}(X, \mathbb{Z}_\ell(d)) = \mathrm{Hom}_{D(S)}(\mathbb{Z}_\ell, Rf_*\mathbb{Z}_\ell[2d](d)).$$

Si on choisit une décomposition

$$Rf_*\mathbb{Q}_\ell \simeq \sum R^i f_*\mathbb{Q}_\ell[-i], \tag{3.6.1}$$

cette classe donne lieu comme une série de classes

$$cl_n(Z) \in \mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}, R^{2d-n} f_*\mathbb{Q}_\ell(d)) = H^n(S, R^{2d-n} f_*\mathbb{Q}_\ell(d)). \tag{3.6.2}$$

Lorsque X est de la forme $X_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} S$, et que la décomposition (3.6.1) provient de l'unique décomposition analogue de la cohomologie de X_0, ces classes s'identifient aux composantes de Künneth de la classe de cohomologie de Z.

3.7. Supposons X lisse sur un corps. Décomposons le groupe de K-théorie $K_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ par les valeurs propres des opérations d'Adams:

$$K_n(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus K_n(X)^{(j)}$$

où sur $K_n(X)^{(j)}$, l'opération d'Adams Ψ_k agit par multiplication par k^j. Rappelons que $K_0(X)^{(j)}$ est le groupe de Chow des cycles de codimension j, modulo équivalence rationnelle, tensorisé avec $\mathbb{Q}$.

L'exemple des théories de cohomologie usuelles incite à espérer des classes de Chern

$$ch^j\colon K_n(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2j-n}_{\mathrm{abs}}(X, \mathbb{Q}(j))$$

se factorisant par $K_n(X)^{(j)}$.

Une conjecture optimiste est que les morphismes "classe de Chern" soient des isomorphismes

$$ch^j\colon K_n(x)^{(j)} \xrightarrow{\sim} H^{2j-n}_{\mathrm{abs}}(X, \mathbb{Q}(j)) := \mathrm{Hom}(1, R\Gamma(X)(j)[2j-n]). \tag{3.7.1}$$

Cette conjecture sous-tend la terminologie "groupe de cohomologie motivique absolue" pour les $K_n(X)^{(j)}$, et la notation

$$H_{\mathscr{M}}^{2j-n}(X, \mathbb{Q}(j)) := K_n(X)^{(j)}.$$

Bloch [4] a proposé une interprétation des $K_n(X)^{(j)}$ comme "groupes de Chow supérieurs" $\mathrm{Ch}^j(X; n)$. Son argument à un trou (moving lemma insuffisant) qu'il promet de réparer. Cette interprétation rend plus naturelle la définition de ch^j, mais l'interprétation en terme de K-théorie reste nécessaire pour le calcul explicite dans le cas des corps de nombres. Les groupes de Chow supérieurs ont l'avantage d'avoir une structure entière naturelle.

3.8. D'après Beilinson, la conjecture (3.7.1) peut se déduire d'hypothèses dont les essentielles sont que (a) le foncteur $X \mapsto K.(X)$ se factorise par $R\Gamma_{\mathrm{mot}}$, (b) la catégorie $\mathscr{D}(k)$ est la catégorie dérivée de celle des motifs. La conjecture a des conséquences frappantes pour les deux membres de (3.7.1). Ils s'annulent pour des raisons triviales dans des régions différentes du plan (n, j):

(a) Pour M un motif, $\mathrm{Ext}^i(1, M) = 0$ pour $i < 0$, et $\mathrm{Ext}^0(1, M) = \mathrm{Hom}(1, M)$. De là, $\mathrm{Hom}(1, R\Gamma(X)(j)[N]) = 0$ pour $N < 0$ ou pour $N = 0$ et $j \neq 0$. En K-théorie cela donne la conjecture de Beilinson et Soulé que $K_n(X)^{(j)} = 0$ pour $2j < n$ ainsi que pour $2j \leq n$ si $j \neq 0$.

(b) Le groupe de Chow $\mathrm{Ch}^j(X)$ des cycles algébriques de codimension j est nul pour $j > \dim X$ et, de même, $\mathrm{Ch}^j(X; n)$ est nul pour $j > \dim(X) + n$. De plus, $\mathrm{Ch}^j(X; n) = 0$ pour $n < 0$.

Appliquant (3.7.1), on en déduirait les

NULLITÉS 3.8.1.

(i) *Pour M un motif pur de poids w,* $\mathrm{Hom}^i(1, M) = 0$ *pour* $i > -w$.

(ii) *Pour M effectif de poids w, et $b > 0$,* $\mathrm{Hom}^i(1, M(w+b)) = 0$ *pour* $i > w + b$.

Pour (i), on suppose M facteur direct de $H^a_{\mathrm{mot}}(X)(c)$, avec $c \geq 0$, X une variété projective et lisse. Le $\mathrm{Ext}^i(1, M)$ est alors facteur direct de $\mathrm{Ch}^c(X; 2c - i - a)$, et, s'il est non nul, on a $2c - i - a \geq 0$, i.e., $i \leq 2c - a = -w$.

Pour (ii), on utilise de plus le théorème de Lefschetz faible (ℓ-adique, donc motivique si la cohomologie ℓ-adique est un foncteur fibre) pour supposer que $\dim(X) \leq a$. On suppose $c \geq a$ et il faut prouver la nullité de $\mathrm{Ext}^i(1, H^a_{\mathrm{mot}}(X)(c))$ pour $i > (c - a) + a = c$. Cette inégalité équivaut à $c > a + (2c - i - a) \geq \dim(X) + (2c - i - a)$.

Que 3.7.1 soit un isomoprhisme impliquerait aussi des théorèmes de Lefschetz faibles pour les groupes de Chow, et les conjectures sur les groupes de Chow présentées à cette conférence par J. P. Murre.

3.9. Pour M le motif unité, (3.8.1) (ii) demande que

$$H^n_{\text{abs}}(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}(j)) = 0 \quad \text{pour } n > j. \tag{3.9.1}$$

Il n'est pas clair pour moi si on doit espérer un analgoue sur $\mathbb{Z}$ à (3.9.1). Si on définit les $H^n_{\text{abs}}(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}(j))$ comme étant des groupes de Chow supérieurs, (3.9.1) est trivialement vrai.

Une question plus concrète : supposons qu'on ait pu définir de façon "indépendante de ℓ", des classes de cohomologie galoisienne dans les $H^n(\text{Gal}(\overline{k}/k), \mathbb{Z}_\ell(j))$. Si $n > j$, (3.9.1) demande que ces classes soient de torsion. Doit-on même les espérer nulles?

Exemple 3.10. Soit G un groupe algébrique absolument simple et simplement connexe sur un corps k. Sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, les relations entre cohomologie de G, BG, et BT, pour T un tore maximal, montrent dans chacune des théories de cohomologie usuelles que $H^i(G_{\overline{k}}) = 0$ pour $i = 1, 2$ et que $H^3(G_{\overline{k}})(2)$ a un générateur naturel a. Plaçons-nous en cohomologie ℓ-adique. Sur k, la cohomologie ℓ-adique absolue de G est somme directe de celle du point et d'une cohomologie réduite $\widetilde{H}$, liée à celle de $G_{\overline{k}}$ par une suite exacte d'Hochschild–Serre. On a donc $\widetilde{H}^i(G, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour $i \leq 2$ et $\widetilde{H}^3(G, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, avec un générateur naturel a. Ce générateur est primitif, donc définit un homomorphisme

$$G(k) \to H^3(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

On peut vérifier que, comme prévu par 3.9, cette flèche est nulle: par Mercurev-Suslin [27] le H^3 est sans torsion, et un argument de trace montre que l'image est de torsion: G se déploie sur une extension finie k' de k et $G(k')$ est éqal à son groupe dérivé, du moins si $|k'| \geq 4$.

Le même cercle d'idée permet de construire une extension centrale canonique de $G(k)$ par $H^2(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}/n(2))$, égal à $K_2(k)/nK_2(k)$ par Mercurjev-Suslin [27]. Rappelons que pour G déployé, une extension centrale canonique de $G(k)$ par $K_2(k)$ a été construite par Matsumoto [25, 5.11].

3.11. Pour M un motif sur $\mathbb{Q}$, $H^1_{\text{abs}}(M)$ apparaît dans la conjecture de Beilinson sur le comportement en $s = 0$ de la fonction L de M: Beilinson [2] et les exposés de Soulé, Nekovar et Scholl à cette conférence. Je renvoie à ces exposés pour une description de la conjecture et de ce qui en est connu.

3.12. Si F est un corps de nombres, (3.7.1) prédit que dans la catégorie des motifs sur F, on a

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(j)) = K_{2j-1}(F) \otimes \mathbb{Q}, \tag{3.12.1}$$

avec nullité des Ext^n, $n \geq 2$. L'assertion (3.12.1) impose des restrictions sévères à la catégorie des motifs extensions itérées de motifs de Tate, et pour les systèmes de réalisations attachés à un objet de cette catégorie. Voir Deligne [14] où un exemple considéré en détail est celui de l'algèbre de Lie du π_1 rendu unipotent de la droite projective moins trois points.

Voici un programme pour prouver des conséquences de (3.12.1) pour de tels systèmes de réalisations.

(A) Définir une catégorie tannakienne $\mathcal{T}$, avec pour objets simples les puissances tensorielles $\mathbb{Q}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, d'un objet de rang un $\mathbb{Q}(1)$, pour laquelle (3.12.1) soit vrai "par définition".

L'idée est que les groupes de Chow supérieurs de Bloch $\mathrm{Ch}^n(\mathrm{Spec}(F), i)$ sont donnés par un complexe simplicial gradué par la codimension n des cycles et que le produit est presque donné par une structure d'algèbre commutative simpliciale graduée. "Presque" car l'intersection de deux cycles n'est pas toujours définie, seulement "en général". Rationnellement, il devrait être possible de remplacer cette presque algèbre par une vraie algèbre différentielle bigraduée commutative, avec d de degré $(1, 0)$, et

$$A^{*,m} = 0 \text{ si } m < 0,$$

$$A^{*,0} \text{ réduit à } \mathbb{Q} \text{ en degré } 0,$$

$$H^*(A^{*,n}) \text{ réduit à } K_{2n-1}(F) \otimes \mathbb{Q} \text{ en degré } 1.$$

On peut alors définir $\mathcal{T}$ comme une catégorie convenable de modules différentiels bigradués et de morphismes à homotopie près.

Cette partie du programme a été essentiellement réalisée par May, **[26]**. Pour une variante cubique, voir l'exposé de Bloch dans ce volume.

(B) Définir, pour chacune des théories cohomologiques usuelles, un foncteur fibre "réalisation" sur la catégorie tannakienne $\mathcal{T}$ de (A),

(C) Montrer que les motifs de Tate mixtes auxquels on s'intéresse, par exemple, Lie $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$—ou plutôt les systèmes de leurs réalisations—proviennent d'un objet de $\mathcal{T}$.

Bibliographie

1. M. Atiyah and F. Hirzebruch, *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology **1** (1962), 25–85.
2. A. A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, Current Problems in Mathematics **24** (1984), 191–238.
3. A. A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers, Astérisque **100** (1982).
4. S. Bloch, *Algebraic cycles and higher K-theory*, Adv. in Math. **61** (1986), 267–304.
5. ——, *Algebraic cycles and higher K-theory, A correction*, preprint (1989).
6. M. Borovoĭ, *Langlands conjecture concerning conjugation of connected Shimura varieties*, Selecta Math. Soviet. **31** (1983–84), 3–59.
7. J. L. Brylinski, *1-motifs et formes automorphes*, Journées SMF de Dijon (1981), Publ. Math. de l'Univ. de Paris VII **15**, 43–106.
8. P. Deligne, *Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 107–126.
9. ——, *Théorie de Hodge* III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **44** (1974), 5–77.
10. ——, *Variétés de Shimura: Interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques*, Proc. Sympos. Pure Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 247–290.
11. ——(rédigé par J. L. Brylinski), *Cycles de Hodge absolus et périodes des intégrales des variétés abéliennes*, Mémoires de la Soc. Math. France **2**, 1980, pp. 23–33.

12. ——(notes by J. Milne), *Hodge cycles on abelian varieties*, SLN **900** (1982), 9–100.
13. ——, *Motifs et groupe de Taniyama*, SLN **900** (1982), 261–279.
14. ——, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over $\mathbf{Q}$, MSRI publications no. 16, Springer-Verlag, 1989, pp. 79–297.
15. ——, *Catégories tannakiennes*, Grothendieck Festschrift, vol. 2, Birkhaüser, 1990, pp. 111–195.
16. P. Deligne and J. Milne, *Tannakian categories*, SLN **900** (1982), 101–228.
17. P. A. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds.* II, Amer. J. Math. **90** 3 (1968), 805–865.
18. ——, *Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** 2 (1970), 228–296.
19. A. Grothendieck, *Standard conjectures on algebraic cycles*, Bombay Coll. on Algebraic Geometry (1968), Oxford, 1969, pp. 193–199.
20. S. L. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Dix Exposés sur la Théorie des Schémas, 359–386, Adv. Stud. Pure Math. **3**, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1968.
21. K. Kodaira and D. C. Spencer, *Divisor classes on algebraic varieties*, Proc. Nat. Acad. Sci. **39** (1953), 872–877.
22. I. Kriz and P. May, *An addendum to "Notes toward Bloch—Deligne motives"*, preprint, 1991.
23. R. P. Langlands and M. Rapoport, *Shimura Varietäten und Gerben*, Crelle **378** (1987), 113–220.
24. S. Lefschetz, *L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique*, Gauthier-Villars—reproduit dans Selected Papers, Chelsea, Paris, 1924.
25. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.
26. P. May, *Notes toward Block—Deligne motives*, preprint, 1991.
27. A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphisms*, Izv. Akad. Sci. URSS **46** 5 (1968), 1011–1046. (Traduction Anglaise: Math. USSR Izv. **21** (1983), 307–340)
28. N. Saavedra, *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Math., vol. 265, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972.
29. Morihiko Saito, *Mixed Hodge Modules*, Res. Inst. Math. Sci. (July 1987).
30. J. Steenbrink and S. Zucker, *Variations of Mixed Hodge Structures.* I, II, Invent. Math. **80** (1985), 489–542, 543–565.
31. A. Weil, *Critères d'équivalence en géométrie algébrique*, Math. Ann. **128** (1954), 95–127, Oeuvres Vol. II.
32. S. Zucker, *The Hodge conjecture for cubic fourfolds*, Comp. Math. **34** (1977), 199–209.

[SGA] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, dirigé par A. Grothendieck.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lectures Notes in Math., vol. 224, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, NEW JERSEY