Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Volume 55 (1994), Part 2

Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs

A. BEILINSON ET P. DELIGNE

Cet article est une version remaniée d'un preprint du même titre, dont les idées ont motivé certaines des constructions de l'article "motivic polylogarithm and Zagier conjecture", cité **[BD]**, à paraître. Nous espérons qu'il peut encore rester utile comme introduction à **[BD]**. Nous remercions D. Zagier de conversations où se sont dégagées les idées essentielles.

Au §1, après avoir énoncé la conjecture de D. Zagier, nous donnons un formalisme motivique qui l'implique. La preuve est donnée au §2. Son principe est expliqué plus concrètement au §3. Enfin, au §4, nous montrons que la conjecture de D. Zagier est la partie réelle d'une conjecture complexe, elle aussi impliquée par le formalisme motivique.

1. Enoncés

1.1. Rappelons quelques propriétés des fonctions polylogarithme, définies pour $|z| < 1$ par

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^k} \qquad (k \geqslant 1). \tag{1.1.1}$$

Ce sont des intégrales itérées de formes différentielles à pôles logarithmiques à l'infini sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$:

$$\begin{gathered} \mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t}, \\ \mathrm{Li}_{k+1}(z) = \int_0^z \frac{dt}{t}\, \mathrm{Li}_k(t) \qquad (k \geqslant 1). \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

Cette expression comme intégrale itérée montre que $\mathrm{Li}_k(z)$, défini par (1.1.1) pour $|z| < 1$, se prolonge comme une fonction multivaluée sur $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 19F27; Secondary 33E20, 14A20.
This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

Fixons $N \geqslant k$. Les propriétés de monodromie de Li_k [**BD**, (0.7.1)] s'expriment au mieux en considérant cette fonction comme un coefficient de la matrice $L(z)$ suivante, de lignes et colonnes indexées par l'ensemble $[0, N]$ des entier de 0 à N:

$$(1.1.3)\qquad L(z) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\mathrm{Li}_1(z) & 1 & & \bigcirc & \\ -\mathrm{Li}_2(z) & \log z & 1 & & \\ \vdots & \frac{(\log z)^2}{2!} & \log z & 1 & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Posons

(1.1.4)

$$e_0 := \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \bigcirc & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & \bigcirc & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_1 := \begin{pmatrix} 0 & & & \bigcirc \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie engendrée par e_0 et e_1 a pour base e_0 et les $(\mathrm{ad}\, e_0)^\ell(e_1)$ (1 en position $(\ell+1, 0)$, 0 ailleurs) $(0 \leqslant \ell < N)$. Les $(\mathrm{ad}\, e_0)^\ell(e_1)$ commutent entre eux et $\mathrm{ad}\,(e_0)^N(e_1) = 0$. L'algèbre de Lie engendrée par e_0 et e_1 est définie sur $\mathbb{Q}$ et correspond à un sous-groupe unipotent définie sur $\mathbb{Q}$ V de GL_{N+1}. La matrice $L(z)$ fait partie du sous-groupe $V(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{[0,N]})$. Le mineur $[1, N] \times [1, N]$ de $L(z)$ est $\exp(\log z \cdot e_0)$ et

$$(1.1.5)\qquad L(z) = \exp\left(\sum -\mathrm{Li}_{\ell+1}(z)(\mathrm{ad} e_0)^\ell(e_1)\right) \cdot \exp(\log z \cdot e_0)$$

Soit $\tau(\lambda)$ la matrice diagonale de diagonale $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^N)$. Elle normalise V. Nous poserons

$$A(z) := L(z)\tau(2\pi i).$$

Une détermination de $A(z)$ ou $L(z)$ dépend du choix d'un chemin γ, dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, d'un point de $]0, 1[$ à z. Si ce chemin est préfixé par un tour positif γ_0 (resp. γ_1) autour de 0 (resp. 1), la détermination $A_\gamma(z)$ est changée en

$$(1.1.6)\qquad A_{\gamma\gamma_0}(z) = A_\gamma(z)\exp(e_0),$$

$$(1.1.7)\qquad A_{\gamma\gamma_1}(z) = A_\gamma(z)\exp(e_1).$$

En conséquence, deux déterminations de $A(z)$ diffèrent par multiplication à droite par un élément de $V(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{Q})$ et le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel $A(z)\mathbb{Q}^{[0,N]} \subset \mathbb{C}^{[0,N]}$ ne dépend pas de la détermination choisie de $A(z)$. Il ne dépend pas non plus du choix de i : changer i en $-i$ remplace $\tau(2\pi i)$ par $\tau(-2\pi i) = \tau(2\pi i)\tau(-1)$ et $\tau(-1) \in \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{Q})$.

La matrice $L(z)$ vérifie

$$dL(z) = \left(\frac{dz}{z}e_0 + \frac{dz}{z-1}e_1\right) L(z). \tag{1.1.8}$$

1.2. Appelons $\mathbb{Q}$- (resp. $\mathbb{R}$-) *variation de Tate mixte* sur une variété analytique S une $\mathbb{Q}$- (resp. $\mathbb{R}$-) variation de structures de Hodge mixtes sur S, de seuls nombres de Hodge non nuls les h^{pp} ($p \in \mathbb{Z}$), et de gradué Gr^W constant sur chaque composante connexe de S. Une $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$) variation de Tate mixte sur S est simplement la donnée de (a), (b), (c):

(a) Un système local $H_{\mathbb{Q}}$ (resp. $H_{\mathbb{R}}$) de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$) espaces vectoriels de dimension finie;

(b) Une filtration finie croissante W de $H_{\mathbb{Q}}$ (resp. $H_{\mathbb{R}}$) par des sous-systèmes locaux, indexée par les entiers pairs, avec $\mathrm{Gr}^W(H_{\mathbb{Q}})$ (resp. $\mathrm{Gr}^W H_{\mathbb{R}}$) constant sur chaque composante connexe de S. On note encore W la filtration du système local complexifié $H_{\mathbb{C}}$ qui s'en déduit.

(c) Chaque fibre $(H_{\mathbb{C}})_s$ est munie d'une filtration finie décroissante F, opposée à W en ce sens que

$$\begin{aligned} (H_{\mathbb{C}})_s &= \bigoplus (H_{\mathbb{C}})_{s,k} \qquad \text{avec} \\ W_{-2k} &= \bigoplus_{\ell \geqslant k} (H_{\mathbb{C}})_{s,\ell}, \\ F^{-k} &= \bigoplus_{\ell \leqslant k} (H_{\mathbb{C}})_{s,\ell}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Cette filtration dépend holomorphiquement de s et vérifie l'axiome de transversalité: si $x(s) \in (H_{\mathbb{C}})_s$ dépend différentiablement de s, et est pour tout s dans F^k, sa dérivée par rapport à un champ de vecteurs est dans F^{k-1}.

Soit $H_{\mathscr{O}}$ le fibré vectoriel holomorphe défini par $H_{\mathbb{C}}$. Si on identifie $H_{\mathscr{O}}$ (resp. $H_{\mathbb{C}}$) au faisceau de ses sections holomorphes (resp. localement constantes), on a

$$H_{\mathscr{O}} = H_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}$$

et $H_{\mathbb{C}}$ est le faisceau des sections horizontales de $H_{\mathscr{O}}$ pour une connexion intégrable holomorphe ∇. On peut regarder W comme une filtration horizontale de $H_{\mathscr{O}}$, F comme une filtration holomorphe, et on a une décomposition

$$H_{\mathscr{O}} = \bigoplus_k (H_{\mathscr{O}})_k \tag{1.2.2}$$

comme en (c). L'axiome de transversalité équivaut à

$$\nabla H_{\mathscr{O}k} \subset \Omega^1 \otimes (H_{\mathscr{O},k} \oplus H_{\mathscr{O},k+1}). \tag{1.2.3}$$

Pour S réduit à un point, on parlera de structure (de Hodge mixte) de Tate mixte. On a alors $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_k (H_{\mathbb{C}})_k$.

1.3. Les propriétés (1.1.6) à (1.1.8) permettent d'attacher à la matrice A la $\mathbb{Q}$-variation de Tate mixte suivante $\mathscr{M}^{(N)}$ sur $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$:

- fibré vectoriel holomorphe sous-jacent: $\mathscr{M}_{\mathscr{O}}^{(N)} := \mathscr{O}^{[0, N]}$;
- filtrations par le poids et de Hodge: dans la décomposition (1.2.2) $(\mathscr{M}_{\mathscr{O}}^{(N)})_k$ est le facteur d'indice k de $\mathscr{O}^{[0, N]}$:

$$W_{-2k} = \mathscr{O}^{[k, N]} \qquad (k \geqslant 0),$$
$$F^{-k} = \mathscr{O}^{[0, k]} \qquad (k \leqslant N);$$

- réseau rationnel: $\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}^{(N)} := A(z)\mathbb{Q}^{[0, N]}$.

D'après 1.1.8, la connection pour laquelle le réseau rationnel est horizontal est

$$\nabla = \frac{d}{dz} - \left(\frac{dz}{z} e_0 + \frac{dz}{z-1} e_1\right).$$

L'axiome de transversalité (1.2.3) exprime que e_0 et e_1 envoient $\mathbb{C}^{[0, k]}$ dans $\mathbb{C}^{[0, k+1]}$.

La définition de $\mathscr{M}^{(N)}$ ne dépend pas du choix de $i \in \mathbb{C}$: elle garde un sens sur $\mathbb{P}^1(C) - \{0, 1, \infty\}$ pour C une clôture algébrique de $\mathbb{R}$, et est fonctorielle en C.

Les $\mathscr{M}^{(N)}$ forment un système projectif en N. Quand N est fixé, nous nous permettrons d'écrire $\mathscr{M}$ pour $\mathscr{M}^{(N)}$.

Notre philosophie est qu'il y a intérêt à exprimer les propriétés de la fonction Li_k en terme de la variation $\mathscr{M}^{(k)}$.

1.4. La variation $\mathscr{M}^{(N)}$ est la composante en théorie de Hodge d'un système de réalisations au sens de [D] H, qui admet une description géométrique en terme du groupoïde fondamental de la droite projective moins trois points.

Fixons un nombre premier ℓ et décrivons la composante ℓ-adique. Soit $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\} = \mathbb{G}_m - \{1\}$. Pour tout point base b, soit $\pi_1(X, b)_\ell$ le plus grand pro-ℓ quotient de $\pi_1(X, b)$. C'est la fibre en b d'un pro-système local sur la droite projective, privée de 0, 1, ∞, au-dessus de Spec $(\mathbb{Z}[1/\ell])$. Soit $\pi_1(X, b)_\ell^{(N)}$ le quotient de $\pi_1(X, b)_\ell$ par le sous-groupe d'indice $N+1$ de sa série centrale descendante. C'est un groupe de Lie ℓ-adique, d'algèbre de Lie le quotient d'une algèbre de Lie libre à 2 générateurs par la sous-algèbre d'indice $N+1$ de sa série centrale descendante.

Pour $N \geq 1$, $\pi_1(X, b)_\ell^{(N)}$ s'envoie sur $\pi_1(\mathbb{G}_m, b)_\ell = \mathbb{Z}_\ell(1)$. Soit $K^{(N)}(b)$ le noyau et soit $V(b)^{(N)}$ le plus grand quotient de $\pi_1(X, b)_\ell^{(N)}$ dans lequel l'image de $K^{(N)}(b)$ soit abélienne. C'est une extension

$$1 \to K^{(N)}(b)^{\mathrm{ab}} \to V(b)^{(N)} \to \mathbb{Z}_\ell(1) \to 1.$$

Soit $t(z)$ le vecteur tangent non nul z en 0. Prenons le comme point base [D, §15]. Dans $\mathbb{G}_m$, il existe une classe d'homotopie de chemins canonique du vecteur tangent $t(z)$ au point z de même coordonnée.

Pour $z \neq 1$, le $\pi_1(X, t(z))_\ell$-torseur des (classes d'homotopie de) chemins de $t(z)$ à z se trivialise donc en poussant à $\pi_1(\mathbb{G}_m, t(z))_\ell$, et fournit un torseur sous

$$\operatorname{Ker}(\pi_1(X, t(z))_\ell \to \pi_1(\mathbb{G}_m, t(z))_\ell):$$

le torseur des (classes de) chemins de projection sur $\mathbb{G}_m$ le chemin canonique. Le noyau ci-dessus s'envoie dans $K^{(N)}(t(z))$, d'où enfin un torseur $P^{(N)}$ sous $K^{(N)}(t(z))^{\text{ab}}$. A ce torseur correspond une extension $E^{(N)}$ de $\mathbb{Z}_\ell$ par $K^{(N)}(t(z))^{\text{ab}}$.

Parce que $t(z)$ est un vecteur tangent en 0, on dispose de la monodromie autour de 0:

$$\varphi_0 : \mathbb{Z}_\ell(1) \to \pi_1(X, t(z))_\ell .$$

Le $\mathbb{Z}_\ell(1)$ à la source est à voir comme le $\pi_{1\ell}$ de T_0^*, l'espace tangent épointé en 0. Faisons $z = 1$. Soit t_1 un vecteur tangent non nul en 1. Le chemin canonique, dans $\mathbb{G}_m$, de $t(1)$ à 1 fournit dans X une classe mod Ker $(\pi_1(X, t(1))_\ell \to \mathbb{Z}_\ell(1))$ de chemins de $t(1)$ à t_1, et une classe de conjugasion, sous ce noyau, de monodromie en 1:

$$\varphi_1 : \mathbb{Z}_\ell(1) \to \pi_1(X, t(z))_\ell .$$

Ces morphismes φ_1 sont à valeurs dans Ker $(\pi_1(X, t(1))_\ell \to \mathbb{Z}_\ell(1))$. Si on les compose avec la projection sur $K^{(N)}(t(1))^{\text{ab}}$, ils deviennent tous égaux: on a obtenu

$$\varphi_1 : \mathbb{Z}_\ell(1) \to K^{(N)}(t(1))^{\text{ab}} \subset V(t(1))^{\text{ab}}.$$

Via φ_0, $\mathbb{Z}_\ell(1)$ agit par conjugaison sur $K^{(N)}(t(1))^{\text{ab}}$. On vérifie l'existence et l'unicité d'une décomposition

$$K^{(N)}(t(1))^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \bigoplus_1^N \mathbb{Q}_\ell(i)$$

telle que (a) φ_1 est l'inclusion du facteur d'indice 1 et que (b) l'action de Lie de $\operatorname{Lie}(\mathbb{Z}_\ell(1)) = \mathbb{Q}_\ell(1)$ est la somme des multiplications $\mathbb{Q}_\ell(1) \otimes \mathbb{Q}_\ell(i) \to \mathbb{Q}_\ell(i+1)$.

Pour $t(z)$ un autre vecteur tangent non nul en $0 : t(z) \in T_0^*$, les chemins dans T_0^* de $t(1)$ à $t(z)$ formant un $\pi_1(T_0^*, t(1)) = \mathbb{Z}_\ell(1)$-torseur. C'est le torseur de Kummer $K(z)$. Le groupe fondamental $\pi_1(X, t(z))_\ell$ est déduit de $\pi_1(X, t(1))_\ell$ par torsion par ce torseur, $\mathbb{Z}_\ell(1)$ agissant sur $\pi_1(X, t(1))_\ell$ par automorphismes intérieurs, via φ_0. Il en résulte que $K^{(N)}(t(z))^{\text{ab}}$ est déduit de $K^{(N)}(t(1))^{\text{ab}}$ par torsion kummerienne, et

$$K^{(N)}(t(z))^{\text{ab}} \oplus \mathbb{Q}_\ell \simeq \left[\bigoplus_1^N \mathbb{Q}_\ell(i)\right]^{K(z)} .$$

Tensorisée avec $\mathbb{Q}_\ell$, l'extension $E^{(N)}$ est donc une extension de $\mathbb{Q}_\ell$ par $[\bigoplus_1^N \mathbb{Q}_\ell(i)]^{K(z)}$. C'est l'analogue ℓ-adique de la variation $\mathscr{M}^{(N)}$. Une fois acquis le formalisme motivique du groupe fondamental **[D**, §13**]**, la construction, présentée ci-dessus dans le cadre ℓ-adique, vaut uniformément dans les diverses théorie de cohomologie.

Que, en théorie de Hodge, on retrouve bien $\mathscr{M}^{(N)}$, peut soit se vérifier par un calcul direct, soit se déduire du résultat d'unicité **[BD]**.

1.5. La structure de Hodge mixte réelle sous-jacente à $\mathscr{M}_z$ ne dépend que de l'image de $A(z)$ dans $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{R})$ soit,ce qui revient au même, que de $A(z)\overline{A(z)}^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} A(z)\overline{A(z)}^{-1} &= \big(L(z)\tau(2\pi i)\big)\big(\tau(-2\pi i)^{-1}\overline{L(z)}^{-1}\big) \\ &= L(z)\cdot \operatorname{int}\tau(-1)\big(\overline{L(z)}^{-1}\big)\cdot\tau(-1) \end{aligned}$$

Posons

(1.5.1) $$B(z) = L(z) \operatorname{int} \tau(-1)\big(\overline{L(z)}\big)^{-1}.$$

Cette matrice appartient à $V \subset \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ et vérifie

(1.5.2) $$B(z) = \operatorname{int} \tau(-1)\big(\overline{B}(z)\big)^{-1}.$$

Elle est caractérisée par cette propriété et le fait que sa racine carrée $B^{1/2}$ dans V vérifie

(1.5.3) $$A(z)\tau(2\pi i) = B^{1/2}(z)\tau(2\pi i) \quad \text{dans } \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{R}).$$

Prenant le logarithme de (1.5.2), on trouve que le logarithme de $B(z)$ vérifie

$$\log B(z) = -\operatorname{ad}\tau(-1)\big(\log \overline{B}(z)\big):$$

le coefficient $(\log B(z))_{ij}$ est purement imaginaire pour $i-j$ pair et réel pour $i-j$ impair.

Parce que les $(\operatorname{ad} e_0)^\ell(e_1)$ commutent entre eux, on a (Bourbaki, Lie II, §5 $n^0 5$, Proposition 5)

$$\exp\left(\sum \lambda_{\ell+1}(\operatorname{ad} e_0)^\ell(e_1) + ae_0\right) = \exp\left(\sum \mu_{\ell+1}(\operatorname{ad} e_0)^\ell(e_1)\right)\exp(ae_0)$$

(1.5.4) $$\text{avec} \qquad \sum \mu_\ell T^\ell = \frac{e^{aT}-1}{aT}\sum \lambda_\ell T^\ell.$$

Le mineur $[1, N]\times[1, N]$ de $\log B(z)$ est $\log(z\bar z)\cdot e_0$. Soit $(0, D_1(z), \dots, D_N(z))$ la première colonne de $-\log(B(z))^{1/2}$. Utilisant (1.5.4), on vérifie facilement que

$$D_k(z) = \begin{cases} i\sum b_\ell \frac{\log(z\bar z)^\ell}{\ell!}\mathscr{I}m(\mathrm{Li}_{k-\ell}(z)) & \text{pour } k \text{ pair}, \\ \sum b_\ell \frac{\log(z\bar z)^\ell}{\ell!}\mathscr{R}e(\mathrm{Li}_{k-\ell}(z)) & \text{pour } k \text{ impair}, \end{cases}$$

où les b_ℓ sont les nombres de Bernouilli $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \dots$.

1.6. Rappelons que la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de Tate $\mathbb{Q}(k)$ est celle de type $(-k, -k)$, d'espace vectoriel complexe sous-jacent $\mathbb{C}$ et de réseau rationnel $(2\pi i)^k\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$. On a $\mathbb{Q}(k) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes k}$ et on note (k) un produit tensoriel avec $\mathbb{Q}(k)$.

Dans la catégorie abélienne des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes, on a pour $k \geqslant 1$

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)) = \mathbb{C}/(2\pi i)^k\mathbb{Q}.$$

Si E est une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$, la décomposition (1.2.1) de $E_{\mathbb{C}}$ est

$$E_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \text{ en degré } 0) \oplus (\mathbb{C} \text{ en degré } 1)$$

et $E_{\mathbb{Q}}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & (2\pi i)^k \end{pmatrix} \mathbb{Q}^2 ;$$

à E on attache a modulo $(2\pi i)^k\mathbb{Q}$.

Soit $\mathbb{R}(k)$ la $\mathbb{R}$-structure de Hodge sous-jacente à $\mathbb{Q}(k)$. Dans la catégorie abélienne des $\mathbb{R}$-structures de Hodge mixtes, on a de même pour $k \geqslant 1$

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(k)) = \mathbb{C}/(2\pi i)^k\mathbb{R}.$$

On identifiera le membre de droite à $i^{k-1}\mathbb{R}$ par l'inclusion de $i^{k-1}\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour S un schéma lisse sur $\mathbb{Q}$, notons $(K_n(S) \otimes \mathbb{Q})^{(m)}$ le facteur direct de $K_n(S) \otimes \mathbb{Q}$ sur lequel chaque opération d'Adams ψ_ℓ agit par ℓ^m. On dispose d'une application régulateur à valeur dans un Ext^1 dans la catégorie abélienne des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes sur $S(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{reg} : (K_{2k-1}(S) \otimes \mathbb{Q})^{(k)} \to \mathrm{Ext}^1_{S(\mathbb{C})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)).$$

Par exemple, pour $k = 1$, on attache à $f \in \mathcal{O}^*(S)$ l'extension $[f]$ de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$ donnée par:

- décomposition (1.2.2) du fibré holomorphe sous-jacent: $\mathcal{O}$ en degré $0 \oplus \mathcal{O}$ en degré 1;
- réseau rationnel : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \log f & 2\pi i \end{pmatrix} \mathbb{Q}^2$ (indépendant de la détermination choisie localement de $\log f$).

Pour S le spectre d'un corps de nombre F, $S(\mathbb{C})$ est l'ensemble des plongements complexes de F et le régulateur devient la donnée, pour chaque $\sigma \in S(\mathbb{C})$ de

$$\mathrm{reg}^\sigma : K_{2k-1}(F) \to \mathbb{C}/(2\pi i)^k\mathbb{Q}.$$

Ces constructions ne dépendent pas du choix de $i \in \mathbb{C}$ et on a donc $\mathrm{reg}^{\bar\sigma}(x) = \mathrm{reg}^\sigma(x)^-$.

Si on passe aux $\mathbb{R}$-structures de Hodge mixtes, on obtient

$$\mathrm{reg}_{\mathbb{R}} : (K_{2k-1}(S) \otimes \mathbb{Q})^{(k)} \to \mathrm{Ext}^1_{S(\mathbb{C})}(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(k))$$

qui, pour $S = \mathrm{Spec}\ F$, fournit, pour chaque plongement complexe σ de F,

$$\mathrm{reg}^{\sigma}_{\mathbb{R}} : K_{2k-1}(F) \to \mathbb{C}/(2\pi i)^k\mathbb{R} \xleftarrow{\sim} i^{k-1}\mathbb{R}.$$

Notre convention: $\mathrm{reg}^{\sigma}_{\mathbb{R}}$ à valeurs dans $i^{k-1}\mathbb{R}$, a l'avantage que

$$\mathrm{reg}^{\bar\sigma}_{\mathbb{R}}(x) = \mathrm{reg}_{\mathbb{R}}(x)^{-}.$$

On sait que les $\mathrm{reg}^{\sigma}_{\mathbb{R}}$ induisent un isomorphisme de $K_{2k-1}(F)\otimes\mathbb{R}$ avec le sous-espace de $i^{k-1}\mathbb{R}^{S(\mathbb{C})}$ formé des (x_σ) vérifiant $x_{\bar\sigma} = \bar{x}_\sigma$.

1.7. Nous pouvons maintenant énoncer la conjecture de D. Zagier. Soit F un corps de nombre (= une extension finie de $\mathbb{Q}$). Il y a une conjecture pour chaque entier k, et la $k^{\text{ième}}$ conjecture n'a de sens que si les précédentes sont vraies.

Dans la même induction, on énonce la $k^{\text{ième}}$ conjecture, on définit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^k$, une application

$$\{\}_k : F - \{0, 1\} \to \mathcal{L}^k,$$

un homomorphisme

$$d_k : \mathcal{L}^k \to \bigwedge^2\left(\bigoplus_1^{k-1}\mathcal{L}^\ell\right)$$

et

$$\varphi_k :\ \mathrm{Ker}\ (d_k) \hookrightarrow K_{2k-1}(F)\otimes\mathbb{Q}.$$

(A) Pour $k = 1$, $\mathcal{L}^1$ est $F^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, on note (x) l'image dans $\mathcal{L}^1$ de $x\in F^*$, $\{\ \}_1$ est

$$\{\}_1 : x \mapsto (1-x),$$

$d_1 = 0$ et φ_1 est l'application identique de $F^*\otimes\mathbb{Q}$.

(B) Pour $k \geqslant 2$, soit $\widetilde{\mathcal{L}}^k$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel librement engendré par des $\{x\}^{\sim}_k$, $x\in F-\{0, 1\}$. Définissons

$$\tilde{d}_k : \widetilde{\mathcal{L}}^k \to \mathcal{L}^{k-1}\otimes\mathcal{L}^1 \to \bigwedge^2\left(\bigotimes_1^{k-1}\mathcal{L}^\ell\right):$$

$$\{x\}^{\sim}_k \mapsto \{x\}_{k-1}\otimes(x) \to \{x\}_{k-1}\wedge(x).$$

Pour $k = 2$, $\tilde{d}_2$ est $\{x\}^{\sim}_2 \to (1-x)\wedge(x)$. Pour $k > 2$, le noyau de $\tilde{d}_k$ est celui de $\{x\}_k \mapsto \{x\}_{k-1}\otimes(x) : \widetilde{\mathcal{L}}^k \to \mathcal{L}^{k-1}\otimes F^*$.

D. Zagier conjecture l'existence d'une application

$$\varphi_k :\ \mathrm{Ker}\ \left(\tilde{d}_k : \widetilde{\mathcal{L}}^k \to \bigwedge^2\left(\bigotimes_1^{k-1}\mathcal{L}_\ell\right)\right) \to K_{2n-1}(F)\otimes\mathbb{Q}$$

tel que, pour tout plongement complexe σ de F et tout $x = \sum\lambda_\alpha\{x_\alpha\}^{\sim}_k$ dans le noyau de $\tilde{d}_k$,

$$D_k(\sigma x) := \sum\lambda_\alpha D_k(\sigma x_\alpha)$$

vérifie

$$D_k(x) = -\operatorname{reg}^\sigma_{\mathbf{R}}(\varphi_k(x)). \tag{1.7.1}$$

Noter que cette formule est vraie pour $k = 1$, où $D_k(x) = -\mathscr{R}\log(1-x)$. Noter aussi que φ_k est uniquement déterminé par (1.7.1).

Si la conjecture est vraie, on pose

$$\mathscr{L}^k := \widetilde{\mathscr{L}}^k / \operatorname{Ker}(\tilde{\varphi}^k)$$

et on définit $\{\}_k$, d_k, et φ_k par passage au quotient.

Si $\mathscr{L}$ est la somme des $\mathscr{L}_k$, $(\mathscr{L}, d)$ est une co-algèbre de Lie graduée. D. Zagier conjecture de plus que les φ_k sont surjectifs, i.e. que

$$(\operatorname{Ker} d)_k \tilde{\to} K_{2k-1}(F) \otimes \mathbf{Q}.$$

Sur cette conjecture additionnelle, nous n'avons rien à dire.

REMARQUE 1.8. Inductivement, la condition que $\sum \lambda_\alpha \{x_\alpha\}^\sim_k$ soit dans Ker $(\tilde{d}_k)$ est que

(1.8.1) Quel que soit l'homomorphisme $v : F^* \to \mathbf{Q}$, on a

$$\sum \lambda_\alpha v(x_\alpha)^{k-2}(1-x_\alpha) \wedge (x_\alpha) = 0 \qquad \text{dans } \overset{2}{\wedge} F^* \otimes \mathbf{Q}.$$

Forme polarisée: quels que soient $v_1, \ldots, v_{k-2} : F^* \to \mathbf{Q}$, on a

$$\sum \lambda_\alpha v_1(x_\alpha) \cdots v_{k-2}(x_\alpha)(1-x_\alpha) \wedge (x_\alpha) = 0.$$

(1.8.2) Pour $2 \leqslant \ell < k$ et pour chaque plongement complexe σ, quel que soit $v : F^* \to \mathbf{Q}$, on a

$$\sum \lambda_\alpha v(x_\alpha)^{k-\ell} D_\ell(\sigma x_\alpha) = 0.$$

Forme polarisée: pour $v_1, \ldots, v_{k-\ell} : F^* \to \mathbf{Q}$,

$$\sum \lambda_\alpha v_1(x_\alpha) \cdots v_{k-\ell}(x_\alpha) D_\ell(\sigma x_\alpha) = 0.$$

Dans (1.8.2), on peut aussi bien prendre v ou les v_i à valeurs complexes.

1.9. Avant de donner l'interprétation motivique de 1.7, quelques remarques sur le système projectif de variations $\mathscr{M}^{(N)}$ de 1.3.

On a

$$\mathscr{M}^{(N)} = \mathscr{M}^{(M)} / W_{-2N-2}\mathscr{M}^{(M)} \quad \text{pour } N \leqslant M, \tag{1.9.1}$$

$$\operatorname{Gr}^W_{-2k}\mathscr{M}^{(N)} = \mathbf{Q}(k) \quad \text{pour } k \leqslant N, \tag{1.9.2}$$

$$\mathscr{M}^{(1)} = \text{ extension } [1-z] \text{ de } \mathbf{Q}(0) \quad \text{par } \mathbf{Q}(1) \tag{1.9.3}$$

et $W_{-2}\mathscr{M}^{(N)}$ admet une description simple en terme de l'extension $[z]$. On a

$$W_{-2}\mathscr{M}^{(N)} = \operatorname{Sym}^{N-1}([z])(1),$$

avec des isomorphismes (1.9.2) donnés par

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}^W \operatorname{Sym}^{N-1}([z])(1) &= \operatorname{Sym}^{N-1}\mathrm{Gr}^W([z])(1) \\ &= \operatorname{Sym}^{N-1}\left(Q(0)\bigoplus Q(1)\right)(1) \\ &= \bigoplus_1^N \mathbb{Q}(k) \xrightarrow[(N-k)!\ \mathrm{sur}\ \mathbb{Q}(k)]{} \bigoplus_1^N \mathbb{Q}(k). \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Les morphismes de transition du système projectif des $W_{-2}\mathcal{M}^{(N)}$ sont donnés par la dérivation de degré -1 de $\operatorname{Sym}^*([z])$ qui sur Sym^1 est la projection $[z] \to \mathbb{Q}(0)$: $\operatorname{Sym}^1 \to \operatorname{Sym}^0$.

Dans le langage de [D], dont nous n'aurons pas besoin, la description est peut-être plus limpide: $[z]$ définit un $\mathbb{Q}(1)$-torseur, l'algèbre de Lie $\mathbb{Q}(1)$ agit de sur $\bigoplus Q(k)$ par les $\mathbb{Q}(1)\otimes\mathbb{Q}(k) \to Q(k+1)$ et on tord $\bigoplus \mathbb{Q}(k)$ par le $\mathbb{Q}(1)$-torseur définit par $[z]$.

1.10. Nous nous proposons de montrer que la conjecture de D. Zagier (surjectivité des φ_k exclue) résulte des conjectures suivantes.

(A) Pour S un schéma lisse et connexe sur $\mathbb{Q}$, on dispose d'une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}$ $\mathcal{T}(S)$. Pour S variable, elles forment un champ: on dispose de foncteurs image inverse, avec des propriétés convenables. On appellera $\mathcal{T}(S)$ la catégorie des *motifs de Tate mixtes* sur S.

(B) On dispose d'un objet de rang un $\mathbb{Q}(1)$ dans $\mathcal{T}(\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}))$, avec les propriétés (B1), (B2) ci-dessous.

Notations: Pour tout S, on note encore $\mathbb{Q}(1)$ l'image inverse de $\mathbb{Q}(1)$ dans $\mathcal{T}(S)$. On pose $\mathbb{Q}(k) := \mathbb{Q}(1)^{\otimes k} (k \in \mathbb{Z})$ et on note (k) une tensorisation par $\mathbb{Q}(k)$.

(B1) Etant tannakienne, la catégorie $\mathcal{T}(S)$ est en particulier une catégorie abélienne dont tous les objets sont de longueur finie. On suppose que ses objets simples sont les $\mathbb{Q}(n)$, que les $\mathbb{Q}(n)$ sont deux à deux non isomorphes, et que

$$\text{pour } n \leqslant 0,\ \operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0$$

$\left(\text{d'où } \operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(m)) = 0 \text{ pour } n \geqslant m\right)$.

Cette hypothèse équivaut à ce que chaque objet M de $\mathcal{T}(S)$ ait une unique filtration croissante finie W, qu'il est commode d'indexer par les entiers pairs, avec $\mathrm{Gr}^W_{-2k}(M)$ somme de copies de $\mathbb{Q}(k)$, et que tout morphisme $f : M_1 \to M_2$ soit strictement compatible à W: le foncteur $M \to \mathrm{Gr}^W(M)$ est exact.

(B2) Notons $(K_m(S)\otimes\mathbb{Q})^{(n)}$ le sous-espace de $K_m(S)\otimes\mathbb{Q}$ où les opérations d'Adams ψ_ℓ agissent par ℓ^n. Pour $k \geqslant 1$, on suppose que

$$\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)) = (K_{2k-1}(S)\otimes\mathbb{Q})^{(k)}$$

de façon compatible aux changements de base $S' \to S$. Pour $f \in \mathcal{O}^*(S)$, on notera $[f]$ l'extension correspondante de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$.

(C) On dispose d'un $\otimes$-foncteur "réalisation", compatible aux changements de base $S' \to S$, de $\mathcal{T}(S)$ dans les $\mathbb{Q}$-variations de structures de Hodge mixtes sur $S(\mathbb{C})$. Plus précisément, on veut une réalisation sur $S(C)$, pour C une clôture algébrique de $\mathbb{R}$, fonctorielle en C. On suppose donné un isomorphisme entre la réalisation de $\mathbb{Q}(1)$ et la structure de Hodge de Tate $\mathbb{Q}(1)$.

(D) On suppose la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (K_{2k-1}(S)\otimes\mathbb{Q})^{(k)} \arrow[rr, "\text{(B2)}"] \arrow[dr, "\text{reg}"'] & & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}(S)}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)) \arrow[dl, "\text{real}"] \\ & \mathrm{Ext}^1_{S(\mathbb{C})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)). & \end{tikzcd}$$

(E) Sur $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ identifions $\mathrm{Gr}^W \mathrm{Sym}^{N-1}([z])(1)$ à $\bigoplus_1^N \mathbb{Q}(k)$ par la formule (1.9.4). Les $\mathrm{Sym}^{N-1}([z])(1)$ forment un système projectif en N, comme en 1.9, et on demande l'existence d'un système projectif ${}_0\mathcal{M}^{(N)}$ d'extension de $\mathbb{Q}(0)$ par les $\mathrm{Sym}^{N-1}([z])(1)$, avec ${}_0\mathcal{M}^{(1)}$ l'extension $[1-z]$ de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$, de réalisation le système projectif d'extensions analogue $\mathcal{M}$ de 1.3, 1.9.

1.11. Nous n'avons pas besoin de toute la force de la conjecture ci-dessus. Le cas où $S = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ ou le spectre d'un corps de nombres nous suffit. Pour prouver la conjecture de Zagier pour un corps de nombres F, il suffirait même de disposer de:

($\mathrm{A_F}$) Une catégorie tannakienne $\mathcal{T}(F)$ sur $\mathbb{Q}$.

($\mathrm{B_F}$) Un objet $\mathbb{Q}(1)$ de $\mathcal{T}(F)$, de rang un, vérifiant (B1) de 1.10 et des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)) = K_{2k-1}(F)\otimes\mathbb{Q} \qquad \text{pour } k \geqslant 1.$$

($\mathrm{C_F}$) Pour chaque plongement complexe σ de F, un $\otimes$ foncteur exact: "réalisation" de $\mathcal{T}(F)$ dans les $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes. On suppose donné un isomorphisme real $(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}(1)$ et vérifiée une compatibilité (D) de 1.10.

($\mathrm{E_F}$) Enfin, pour $x \in \mathbb{P}^1(F) - \{0, 1, \infty\} = F - \{0, 1\}$ on suppose donné un système projectif ${}_0\mathcal{M}_x^{(N)}$ d'extensions de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathrm{Sym}^{N-1}([x])(1)$, avec ${}_0\mathcal{M}_x^{(1)} = [1-x]$, de réalisation rel σ le système projectif analogue $\mathcal{M}_{\sigma x}^{(N)}$ fibre de $\mathcal{M}^{(N)}$ en σx.

2. Preuve

Dans ce paragraphe, nous prouvons que la conjecture 1.11 implique la conjecture de D. Zagier 1.7 (surjectivité des φ_k exclue).

2.1. Supposons donnés une catégorie tannakienne $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{Q}$, et un objet de rang un $\mathbb{Q}(1)$, vérifiant la condition (B1) de 1.10. Dans la terminologie

de **[BD]**, c'est une “mixed Tate $\mathbb{Q}$-category”. Les $\mathbb{Q}(k) := \mathbb{Q}(1)^{\otimes k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ étant de rang un, on a $\mathrm{End}(\mathbb{Q}(k)) = \mathbb{Q}$.
Pour tout objet X d'une catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire, le produit tensoriel avec un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie V est défini par

$$\mathrm{Hom}\,(X \otimes V, Y) = \mathrm{Hom}\,(V, \mathrm{Hom}\,(X, Y)).$$

On a $X \otimes \mathbb{Q}^n = X^n$.

Pour tout M dans $\mathscr{T}$, $\mathrm{Gr}^W_{-2k}(M)$ est somme de copies de $\mathbb{Q}(k)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}^W_{-2k}(M) &= \mathbb{Q}(k) \otimes \omega(M)_k \qquad \text{avec} \\ \omega(M)_k &= \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Q}(k), \mathrm{Gr}^W_{-2k}(M)). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Soit $\omega(M)$ l'espace vectoriel gradué somme des $\omega(M)_k$, $\omega(M)_k$ en degré k. La filtration W est compatible au produit tensoriel, le foncteur $M \mapsto \mathrm{Gr}^W(M)$ est exact et compatible au produit tensoriel et $M \mapsto \omega(M)$ est donc un $\otimes$-functeur exact: c'est un foncteur fibre sur $\mathbb{Q}$ de la catégorie tannakienne $\mathscr{T}$.

Par la théorie générale des catégories tannakiennes, ce foncteur induit une équivalence de $\mathscr{T}$ avec la catégorie des représentations du schéma en groupes

$$G := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega). \tag{2.1.2}$$

Pour M dans $\mathscr{T}$, la graduation de $\omega(M)$ correspond à une action τ du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$: λ agit par multiplication par λ^k sur $\omega(M)_k$. Cette construction, compatible au produit tensoriel, définit

$$\tau : \mathbb{G}_m \to G.$$

Tout automorphisme du $\otimes$-foncteur ω respecte la filtration de $\omega(M)$ par les

$$\omega(W_{-2k}M) = \bigoplus_{\ell \geqslant k} \omega(M)_\ell .$$

Soit U le schéma en groupe prounipotent des $\otimes$-automorphismes de ω qui induisent l'identité sur le gradué pour cette filtration. Si g dans G agit sur $\omega\mathbb{Q}(1)$ par multiplication par λ, g agit sur $\omega\mathrm{Gr}^W M$ par $\tau(\lambda)$ et $g\tau(\lambda)^{-1}$ est dans U : G est un produit semi-direct

$$G = \mathbb{G}_m \ltimes U.$$

Le schéma en groupes G est limite projective de quotients

$$G_\alpha = \mathbb{G}_m \ltimes U_\alpha$$

avec U_α groupe algébrique unipotent. L'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(U_\alpha)$ est graduée, avec $\mathrm{int}\,\tau(\lambda) = \lambda^k$ sur $\mathrm{Lie}(U_\alpha)_k$. On a $\mathrm{Lie}(U_\alpha)_k = 0$ pour $k \leqslant 0$.

Les représentations de G_α s'identifient aux espaces vectoriels gradués V munis d'une action homogène de $\mathrm{Lie}\,(U_\alpha)$: la graduation définit l'action de $\mathbb{G}_m$, et l'action de $\mathrm{Lie}(U_\alpha)$ est automatiquement nilpotente.

En particulier, une extension E de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}(k)$, telle que la représentation $\omega(E)$ de G se factorise par G_α, s'identifie à une action homogène de $\operatorname{Lie}(U_\alpha)$ sur

$$\mathbb{Q} \text{ en degré } 0 \oplus \mathbb{Q} \text{ en degré } k,$$

i.e. à une forme linéaire e sur $\operatorname{Lie}(U_\alpha)_k$, nulle sur $[\operatorname{Lie} U_\alpha, \operatorname{Lie} U_\alpha]_k$.

Pour passer à la limite sur α, il est commode de se dualiser et de considérer plutôt $\operatorname{Lie}(U_\alpha)^\vee$, gradué par les $(\operatorname{Lie} U_\alpha)^{\vee k} := (\operatorname{Lie} U_{\alpha k})^\vee$ et l'opposé du transposé de [ ]:

$$d : (\operatorname{Lie} U_\alpha)^\vee \to \bigwedge^2 (\operatorname{Lie} U_\alpha)^\vee.$$

C'est la différentielle extérieure du complexe de de Rham des formes différentielles invariantes à gauche sur U_α.

Passant à la limite inductive, on obtient une coalgèbre de Lie graduée à degrés > 0

$$(\operatorname{Lie} U)^\vee := \varinjlim (\operatorname{Lie} U_\alpha)^\vee,$$

et une extension de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}(k)$ s'identifie à

$$e \in (\operatorname{Lie} U^\vee)^k \text{ tel que } de = 0.$$

Soient M dans $\mathcal{T}$, $x \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}(i), \operatorname{Gr}_{-2i}(M)) = \omega(M)_i$, $y \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Gr}_{-2j}(M), \mathbb{Q}(j)) = \omega(M)_j^\vee$ et $k = j - i$.

Si l'action de G sur $\omega(M)$ se factorise par $G_\alpha = \mathbb{G}_m \ltimes U_\alpha$, le coefficient

$$C_{y,x}(u) = \langle y, ux\rangle \quad (y \in U_\alpha)$$

et une fonction sur U_α, de différentielle à l'origine la forme linéaire

$$c_{y,x}(u) = \langle y, ux\rangle \quad (u \in \operatorname{Lie} U_\alpha).$$

Cette forme linéaire est dans $(\operatorname{Lie} U_{\alpha k})^\vee$ et définit

$$c_{y,x} \in (\operatorname{Lie} U^\vee)^k.$$

Notre idée essentielle est que si une combinaison linéaire de tels coefficients est annulée par d, elle fournit une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(k)$.

Admettons 1.11. Pour la conjecture de Zagier, les coefficients considérés sont ceux définis par les ${}_0\mathcal{M}_z^{(N)}$, l'isomorphisme $\operatorname{Gr}_0^W({}_0\mathcal{M}_z^{(N)}) = \mathbb{Q}(0)$ et l'isomorphisme $\operatorname{Gr}_{-2N}^W({}_0\mathcal{M}_z^{(N)}) = \mathbb{Q}(N)$ (comme en 1.9). L'action de Lie U sur $W_0^{-2}\mathcal{M}_z^{(N)} = \operatorname{Sym}^{N-1}([z])(1)$ se factorise par le quotient $(\operatorname{Lie} U)_1$. C'est ce qui permet d'étudier les coefficients considérés dans le formalisme des groupes de Bloch (cf. 3.4). Cela implique aussi que l'action de Lie U sur ${}_0\mathcal{M}_z^{(N)}$ est triviale sur $[\operatorname{Lie} U^{\geq 2}, \operatorname{Lie} U^{\geq 2}]$.

2.2. Soient F un corps de nombres, admettons 1.11 et faisons dans 2.1 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\operatorname{Spec} F)$. Pour $z \in F^*$, soit $[z]$ dans $\mathcal{T}(F) := \mathcal{T}(\operatorname{Spec}(F))$ l'extension de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}(1)$ de classe z (1.11 ($\mathrm{B_F}$)). On identifie $\operatorname{Gr}^W \operatorname{Sym}^{N-1}([z])(1)$ à $\bigoplus_1^N \mathbb{Q}(k)$ par la formule 1.9.4. Comme en 1.9, les

$\mathrm{Sym}^{N-1}([z])(1)$ forment un système projectif en N. Par l'hypothèse 1.11 (E) on dispose pour chaque $z \in F - \{0, 1\}$ d'un système projectif d'extensions ${}_0\mathscr{M}_z^{(N)}$ de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathrm{Sym}^{N-1}([z])(1)$, avec ${}_0\mathscr{M}_z^{(1)} = [1-z]$, de réalisation dans le plongement complexe σ le système projectif analogue d'extensions $\mathscr{M}_{\sigma z}^{(N)}$.

Soient $k \geqslant 1$ et $N \geqslant k$. Ecrivons simplement $\mathscr{M}_z$ pour ${}_0\mathscr{M}_z^{(N)}$. Soit x l'isomorphisme $\mathbb{Q}(0) \tilde{\to} \mathrm{Gr}_0^W(\mathscr{M}_z)$, y l'isomorphisme $\mathrm{Gr}_{-2k}^W(\mathscr{M}_z) \tilde{\to} \mathbb{Q}(k)$ et posons

$$\{z\}_k := c_{y,x} \in (\mathrm{Lie}\, U^\vee)^k$$

(indépendant de N).

Parce que Lie $U^\vee$ est à degré > 0, on a $d = 0$ sur $(\mathrm{Lie}\, U^\vee)^1$ et

$$(\mathrm{Lie}\, U^\vee)^1 = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = F^* \otimes \mathbb{Q}.$$

Puisque $\mathscr{M}_z^{(1)} = [1-z]$, on a

$$\{z\}_1 = (1-z).$$

Proposition 2.3. *Pour $k \geqslant 2$, on a*

$$d\{z\}_k = \{z\}_{k-1} \wedge (z) \quad \textit{dans } \bigwedge^2 \mathrm{Lie}\,(U)^\vee.$$

Preuve. On a

$$\omega(\mathscr{M}_z) = \bigoplus_0^N \omega(\mathbb{Q}(k)) = \mathbb{Q}^{[0,N]}.$$

L'action de U sur $\omega(W_{-2}(\mathscr{M}_z)) = \omega(\mathrm{Sym}^{N-1})[z])(11)$ est déduite de son action sur $\omega([z])$. Il en résulte que l'action φ de U sur $\omega(\mathscr{M}_z)$ se factorise par $V \subset \mathrm{GL}_{N+1}$ (1.1).

Les coefficients $c_{\ell,0}$ $(1 \leqslant \ell \leqslant N)$ et $c_{2,1}$ forment une base duale de la base $(\mathrm{ad}\, e_0)^{\ell-1}(e_0)$ et e_0 de Lie V. On a donc dans $\overset{2}{\wedge}$ Lie $(U)^\vee$

$$dc_{\ell,0} = c_{\ell-1,0} \wedge c_{2,1}.$$

On a $\varphi^* c_{\ell,0} = \{z\}_\ell$, $\varphi^* c_{2,1} = (z)$ et 2.3 en résulte.

2.4. Soit $\sum \lambda_\alpha \{x_\alpha\}$ une combinaison linéaire formelle, à coefficients rationnels, d'éléments de $F - \{0, 1\}$. Si

pour $k = 2$: $\quad \sum \lambda_\alpha (1 - z_\alpha) \wedge (z_\alpha) = 0$ dans $\bigwedge^2 F^* \otimes \mathbb{Q}$.

pour $k > 2$: $\quad \sum \lambda_a \{1 - z_\alpha\}_{k-1} \otimes (z_\alpha) = 0$ dans $(\mathrm{Lie}\, U^\vee)^{k-1} \otimes F^*$,

il résulte de 2.3 que $\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k$ est dans le noyau de d, donc correspond à une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(k)$. Par 1.11 $(\mathrm{B_F})$, cette extension correspond à un élément

$$r\left(\sum \lambda_\alpha \{x_\alpha\}_k\right) \in K_{2k-1}(F)^{(k)}.$$

Soit σ un plongement complexe de F. Nous nous proposons de calculer le régulateur $\mathrm{reg}_{\mathbf{R}}^\sigma$ de $r(\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k)$.

2.5. Soit $\mathscr{H}$ la catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$ des $\mathbb{R}$-structures de Hodge mixtes dont les seuls nombres de Hodge non nuls sont les $h^{p,p}$.

Par 1.2, la donnée de H dans $\mathscr{H}$ équivant à celle d'un espace vectoriel complexe gradué H_k :

$$H_{\mathbf{C}} = \bigoplus H_k ,$$
$$W_{-2k} = \bigoplus_{\ell \geqslant k} H_k ,$$
$$F^{-k} = \bigoplus_{\ell \geqslant k} H_k ,$$

plus une structure réelle $H_{\mathbf{R}}$ sur $\bigoplus H_k$ relativement à laquelle la filtration W soit réelle. La structure réelle $H_{\mathbf{R}}$ induit une structure réelle sur les $\mathrm{Gr}^W_{-2k} H_{\mathbf{C}} = H_k$. On dispose donc de deux structures réelles sur $H = \bigoplus H_k$: la structurale, $H_{\mathbf{R}}$, et sa graduée $\mathrm{Gr}^W H_{\mathbf{R}}$. Pour faciliter la comparaison avec les motifs de Tate mixte, il sera utile d'en considérer une troisième:

$$\omega(H) := \tau(1/2\pi i)\mathrm{Gr}^W H_{\mathbf{R}} = \bigoplus i^k H_{k\mathbf{R}} .$$

Le donnée de $H_{\mathbf{R}}$ équivant à celle la structure réelle $\bigoplus H_{k\mathbf{R}}$ de $\bigoplus H_k$, plus celle d'une donnée (a), (b), (c), ou (d) comme ci-dessous. Soit $X \subset \mathrm{GL}(H_{\mathbf{C}})$ le sous-groupe qui respecte W et induit l'identité sur le gradué. Soit $X(\mathbb{R})$ sa structure réelle rel. la structure $\oplus H_{k\mathbf{R}}$.
Donnée (a): une classe $n \in X/X(\mathbb{R})$: $(H_{\mathbf{R}})$ et n se déterminent mutuellement par

$$H_{\mathbf{R}} = n\left(\bigoplus H_{k\mathbf{R}}\right) .$$

Donnée (b): un élément $b \in X$ tel que $b\bar{b} = 1$: b et n se déterminent mutuellement par

$$b = n\bar{n}^{-1} .$$

En terme de la structure réelle de X définie par $\bigoplus i^k H_{k\mathbf{R}}$, ces formules se récrivent $b = n$ int $\tau(-1)(\bar{n})^{-1}$, et b int $\tau(-1)(\bar{b}) = 1$.
Donnée (c): un élément purement imaginaire N de Lie $X : N = \frac{1}{2}\log b$.
Donnée (d): des éléments purement imaginaire de degré k $N_k \in \mathrm{GL}(\bigoplus H_{\ell\mathbf{C}})$, $(k \geqslant 1)$:

$$N = \sum N_k .$$

En terme de la structure réelle $\omega(H) = \bigoplus i^k H_{k\mathbf{R}}$, N_k est réel pour k impair, purement imaginaire pour k pair.

La construction $H \mapsto \left(\omega(H)_{\mathbf{R}}, (N_k)\right)$ est une $\otimes$-équivalence de catégories de $\mathscr{H}$ avec la catégorie des espaces vectoriels réels gradués, munis de $N_k \in \mathrm{GL}\left(\omega(H)_{\mathbf{R}}\right) \otimes \mathbb{C}(k \geqslant 1)$, avec N_k de degré k, réel pour k impair et purement imaginaire pour k pair. Pour $\otimes$, l'action de N_k est à traiter comme une action de Lie.

2.6. Fixons un plongement complexe σ de F, donc une foncteur "réalisation" de $\mathcal{T}(\operatorname{Spec} F)$ dans les $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes. Le foncteur réalisation est automatiquement à valeurs dans les structures de Hodge mixtes dont les seuls nombres de Hodge non nuls sont les $h^{p,p}$. Si on passe à la $\mathbb{R}$-structure de Hodge mixte sous-jacente, on obtient $\mathrm{real}_{\mathbb{R}}$, à valeur dans la catégorie $\mathcal{H}$ de 2.5. Les définitions ont été ajustées pour que

$$\omega(M) \otimes \mathbb{R} = \omega\big(\mathrm{real}_{\mathbb{R}}(M)\big)$$

et chaque N_k fournit un élément de l'algèbre de Lie de U sur $\mathbb{C}$ (réel pour k impair, imaginaire pour k pair).

Si M est une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(k)$, d'où $\omega(M) = \mathbb{Q}^{\{0,k\}}$, le coefficient $c_{k,0}$ de N_k est par hypothèse le régulateur de $\mathrm{reg}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ l'élément correspondant de $K_{2k-1}(F)^{(k)} \otimes \mathbb{Q}$.

Soit M dans $\mathcal{T}(\operatorname{Spec} F)$. Sa réalisation $\mathrm{real}(M)$ a pour espace vectoriel complexe sous-jacent $\omega(M) \otimes \mathbb{C}$. Si $X \subset \mathrm{GL}\big(\omega(M)\big)$ est le sous-groupe qui respecte W et agit trivialement sur le gradué, le réseau rationnel de $\mathrm{real}(M)$ est de la forme

$$n\tau(2\pi i)\omega(M)$$

avec $n \in X(\mathbb{C})$. Soient $x \in \omega(M)_0$, y une forme linéaire sur $\omega(M)_k$ et $c_{x,y}$ le coefficient correspondant. Par définition, on a

$$\langle N_k\,,\, C_{x,y}\rangle = \text{ coefficient }_{x,y} \text{ de } \tfrac{1}{2}\log\big(n \text{ int } \tau(-1)(\bar{n})^{-1}\big).$$

Pour $M = \mathcal{M}_z$ $(z \in F - \{0,1\})$, cela donne:

PROPOSITION 2.7. *On a*

$$\langle N_k\,,\, \{z\}_k\rangle = -D_k(z)\,.$$

PROPOSITION 2.8. *Sous les hypothèses de* 1.11, *il existe un monomorphisme de coalgèbre de Lie* $\varphi : \mathcal{L} \hookrightarrow (\mathit{Lie}\ U)^{\vee}$, *compatible à* $\{\ \}_k$. *La conjecture de Zagier vaut pour* φ_k *le composé*

$$\operatorname{Ker}\left(\tilde{d}_k : \widetilde{\mathcal{L}}_k \to \bigwedge^2 \bigoplus_1^{k-1} \mathcal{L}^{\ell}\right) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ker}\Big(d : \text{ Lie } U^{\vee} \to \bigwedge^2 \text{Lie } U^{\vee}\Big)^k$$
$$= \mathit{Ext}^1\big(\mathbb{Q}(0)\,,\ \mathbb{Q}(k)\big) = K_{2k-1}(F)\,.$$

Définissons inductivement

$$\varphi_k : \mathcal{L}^k \hookrightarrow (\text{Lie } U^{\vee})^k$$

compatible à $\{\ \}_k$ et d. Pour $k = 1$, $\mathcal{L}^1 = F^* \otimes \mathbb{Q}$, $(\text{Lie } U^{\vee})^1 = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(1)) = F^* \otimes \mathbb{Q}$ et on prend pour φ_1 l'application identique de $F^* \otimes \mathbb{Q}$.

Supposons $k > 1$ et φ_ℓ défini pour $\ell < k$. Définissons $\widetilde{\varphi}_k : \widetilde{\mathscr{L}}^k \to \mathrm{Lie}\,(U^\vee)^k$ par

$$\widetilde{\varphi}_k : (\{x\}_k^\sim) = \{z\}_k .$$

D'après 2.3, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{L}}^k \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d}_k"] & (\mathrm{Lie}\, U^\vee)^k \arrow[d, "d"] \\ \bigwedge^2 \left(\bigoplus_1^{k-1} \mathscr{L}^\ell \right) \arrow[r, hook, "\varphi"] & \bigwedge^2 \bigoplus_1^{k-1} (\mathrm{Lie}\, U^\vee)^\ell \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'application φ envoie donc $\mathrm{Ker}(\widetilde{d}_k)$ dans $\mathrm{Ker}\,(d)^k = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)) = K_{2k-1}(F) \otimes \mathbb{Q}$. Pour une extension E de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(k)$, définissant $x : \mathbb{Q}(0) \to \mathrm{Gr}_0^W(E)$, i.e. $x \in \omega(E)_0$ et $y : \mathrm{Gr}_{-2k}^W(E) \to \mathbb{Q}(k)$, i.e. $y \in \omega(E)_k^\vee$, $\langle N_k, c_{x,y} \rangle$ est le régulateur $\mathrm{reg}_{\mathbf{R}}^\sigma$ de la classe correspondante dans $K_{2k-1}(F) \otimes \mathbb{Q}$, et que la formule proposée pour φ_k est correcte résulte de 2.7. On définit alors φ_k par passage au quotient à partir de $\widetilde{\varphi}_k$.

REMARQUE 2.9. Pour que le morphisme φ de 2.8 soit un isomorphisme en degrés $k \leqslant N$, il faut et il suffit que la sous-catégorie tannakienne de $\mathscr{T}(F)$ engendrée (par $\oplus$, $\otimes$, dual, sous-quotients) par les $\mathscr{M}_z^{(N)}$ $(z \in F - \{0, 1\})$ contienne tout les M dans $\mathscr{T}(F)$ tels que $M = W_0 M$ et $W_{-2N-2} M = 0$.

Pour $\mathscr{T}(F)$ la catégorie conjecturale de tous les motifs de Tate mixte sur F, ce devrait n'être vrai que pour $N = 1$ ou 2.

3. Extensions et coefficients

Le but de ce paragraphe est d'expliquer plus concrètement le sens de la construction 2.1 d'extensions comme combinaison linéaire de coefficients.

3.1. Comme en 2.1, on supposé donnée une catégorie tannakienne $\mathscr{T}$ et un objet de rang un $\mathbb{Q}(1)$, vérifiant la condition (B1) de 1.10 d'où, comme en 2.1, un foncteur fibre ω de groupe d'automorphismes $\mathbb{G}_m \ltimes U$.

L'algèbre affine $\Gamma(U, \mathscr{O})$ de U est une bigèbre commutative, de coproduit caractérisé par

$$\Delta f = \sum f_i \otimes g_i \Longleftrightarrow f(uv) = \sum f_i(u) g_i(v) .$$

L'action de $\mathbb{G}_m$ par automorphismes intérieurs fournit une graduation de $\Gamma(U, \mathscr{O})$, avec f de degré k si

$$f(\lambda^{-1} u \lambda) = \lambda^k f(u) .$$

Pour M dans $\mathscr{T}$, $x \in \omega(M)_i$, $y \in \omega(M)_j^\vee$, et $k = j - i$, le coefficient $C_{y,x}$ est de degré k. En particulier, une extension E de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(k)$

fournit un coefficient $C(E)$ de degré k. Cette construction est une bijection

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(k)) \xrightarrow{\sim} \{e \in \Gamma(U, \mathcal{O})_k | \Delta e = 1 \otimes e + e \otimes 1\}.$$

Comme en 2.1, ceci fournit un moyen pour construire une extension comme combinaison linéaire de coefficients. Prendre garde toutefois qu'il s'agit ici de coefficients au sens des représentations de groupes, plutôt qu'au sens des représentations d'algèbres de Lie. La relation entre les deux constructions sera donnée en 3.3.

3.2. Soient M, x, y comme en 3.1. Soit M_1 le plus petit sous-objet de M tel que $x \in \omega(M_1)_i$. L'espace vectoriel $\omega(M)$ est une représentation de U et $\omega(M_1)$ est la sous-représentation de $\omega(M)$ engendrée par x. Elle est automatiquement stable par $\mathbb{G}_m$ car x est homogène. Dualement, soit M_2 le plus petit quotient de M tel que $y \in \omega(M_2)^\vee_j \subset \omega(M)^\vee_j$: $\omega(M_2)^\vee$ est la sous-représentation de $\omega(M)^\vee$ engendrée par y. Soit $\bar{M}$ l'image de M_1 dans M_2, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les images de x et y dans $\omega(\bar{M})_i$ et $\omega(\bar{M})^\vee_j$. On a

$$C_{y,x} = C_{\bar{y},\bar{x}}.$$

Pour $i \leqslant k \leqslant j$, soient $e(k)_\alpha$ une base de $\omega(\bar{M})_\ell$ et $e(k)^\alpha$ la base duale de $\omega(\bar{M})^\vee_k$. Les $C_{e(k)^\alpha \bar{x}}$ sont linéairement indépendants, et les $C_{\bar{y}, e(k)_\alpha}$ sont linéairement indépendants. On a

$$\Delta C_{\bar{y},\bar{x}} = \sum C_{\bar{y}e(k)_\alpha} \otimes C_{e(k)^\alpha \bar{x}}.$$

Pour que $C_{\bar{y},\bar{x}}$ vérifie $\Delta C_{\bar{y},\bar{x}} = 1 \otimes C_{\bar{y},\bar{x}} + C_{\bar{y},\bar{x}} \otimes 1$, il faut et il suffit donc que soit $C_{\bar{y},\bar{x}} = 0$, auquel cas $M = 0$, soit que $\bar{M}$ soit une extension de $\mathbb{Q}(i)$ par $\mathbb{Q}(j)$.

Etant donnés des triples M_α, x_α, y_α, avec $x_\alpha \in \omega(M_\alpha)_i$, $y_\alpha \in \omega(M_\alpha)^\vee_j$, si $f = \sum \lambda_\alpha C_{y_\alpha x_\alpha}$ vérifie $\Delta f = 1 \otimes f + f \otimes 1$, l'extension correspondante est donc obtenue comme suit.

(a) Si $f = 0$, il existe dans $\bigoplus M_\alpha$ un sous objet M_1 tel que $\sum \lambda_\alpha x_\alpha \in M_1$ et que $\sum y_\alpha$ soit nul sur $\omega(M_1)_j$.

(b) Sinon, l'extension cherchée est le sous-quotient $(\bigoplus M_\alpha)^-$ de $\bigoplus M_\alpha$, muni de $\sum \lambda_\alpha x_\alpha$ et $\sum y_\alpha$; $\mathrm{Gr}_{-2i}((\bigoplus M_\alpha)^-)$ est identifié à $\mathbb{Q}(i)$ par $(\sum \lambda_\alpha x_\alpha)^-$ et $\mathrm{Gr}_{-2j}((\bigoplus M_\alpha)^-)$ est identifié à $\mathbb{Q}(j)$ par $(\sum y_\alpha)^-$.

Cette construction n'utilise guère le produit tensoriel de $\mathcal{T}$. Il joue par contre un rôle essentiel si on veut, comme en 2.1, utiliser plutôt des coefficients de Lie.

3.3. Pour toute fonction f sur un groupe unipotent U, posons $f^\natural(u) = \langle df, \log u \rangle$. Si f est un coefficient, on peut comme suit écrire $f^\natural$ comme un coefficient. Soit (V, φ) une représentation, et $e_1, \dots, e_n$ une base telle que le drapeau correspondant soit fixe par U. Pour le coefficient $C_{ji} =$

$\langle e^j, ue_i\rangle$ $(i < j)$, on a alors

$$C^{\natural}_{ji}(u) = \langle dC_{ji}, \log u\rangle = \left(\log \varphi(u)\right)_{ji} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\varphi(u) - 1\right)^n_{ji} :$$

$$C^{\natural}_{ji} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{i=k_0<\cdots<k_n=j} C_{k_n k_{n-1}} \cdots C_{k_1 k_0}.$$

De plus, un produit de coefficients s'interprète comme un coefficient d'un produit tensoriel de représentations.

Pour que $C_{y,x}$ vérifie $\Delta f = f \otimes 1 + 1 \otimes f$, il faut et il suffit que $C_{y,x} = C^{\natural}_{y,x}$ et que $c_{y,x} \in \mathrm{Lie}\,(U)^{\vee}$ vérifie $dc_{y,x} = 0$ dans le complexe $\wedge$ Lie $(U)^{\vee}$. Si des $(M_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ sont donnés, et que $\sum \lambda_\alpha c_{y_\alpha, x_\alpha}$ définit comme en 2.1 une extension de $\mathbb{Q}(i)$ par $\mathbb{Q}(j)$, alors $\sum \lambda_\alpha C^{\natural}_{y_\alpha, x_\alpha}$ définit la même extension, d'où finalement une description de l'extension $\sum \lambda_\alpha c_{y_\alpha x_\alpha}$ de 2.1 comme sous-quotient d'une somme de puissances tensorielles des M_α.

3.4. Dans la situation de 1.11, les coefficients associés (cf. fin de 2.1) aux ${}_0\mathscr{M}_z^{(N)}$ sont des fonctions f sur U, de degré N, ayant la propriété suivante.

(3.4.1). Pour u dans le sous-groupe $U^{\geq 2}$ de U d'algèbre de Lie Lie $U^{\geq 2}$, on a

$$f(ug) = f(u) + f(g).$$

Cela résulte de ce que ${}_0\mathscr{M}_z^{(N)}$ est extension de $\mathbb{Q}(0)$ par une représentation de U triviale sur $U^{\geq 2}$. En d'autres termes, f est dans le groupe de Bloch B_N de $\mathscr{T}(F)$ ([**BD**]). Dans [**BD**], on évite la problème de construire $\mathscr{T}(F)$ en construisant directement, en terme de K-théorie, ce qui devrait être ses groupes de Bloch, et les éléments qui devraient être les coefficients des ${}_0\mathscr{M}_z^{(N)}$.

4. Variante complexe

Au §2, nous avons vu que la conjecture 1.11 implique une expression comme somme de valeurs de D_k pour l'image par

$$\mathrm{reg}^{\sigma}_{\mathbb{R}} : K_{2k-1}(F) \to \mathbb{C}/(2\pi i)^k \mathbb{R}$$

des éléments de $K_{2k-1}(F)$ dans l'image de φ_k. Ici, nous montrerons que la conjecture 1.10 fournit aussi une formule pour l'image de ces classes par

$$\mathrm{reg}^{\sigma} : K_{2k-1}(F) \to \mathbb{C}/(2\pi i)^k \mathbb{Q}.$$

4.1. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Appelons *détermination généralisée* de $L(z)$ une matrice de la forme $L(z)\tau(2\pi i)v\tau(2\pi i)^{-1}$ avec $v \in V(\mathbb{Q})$, pour $L(z)$ une détermination de la matrice $L(z)$ de 1.1, et *détermination généralisée* de $\left(\log z, \mathrm{Li}_1(z), \ldots, \mathrm{Li}_N(z)\right)$ une suite de nombres $(\ell, L_1, \ldots, L_N)$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -L_1 & 1 & & \bigcirc \\ -L_2 & \ell & 1 & \\ \vdots & \frac{\ell^2}{2} & \ell & \ddots \\ & & & \vdots \end{pmatrix} = \exp\left(-\sum L_i (\mathrm{ad}\, e_0)^{i-1}(e_1)\right) \exp(\ell e_0)$$

soit une détermination généralisée de $L(z)$.

Si $(\ell\,,\ L_1\,,\ \dots\,,\ L_N)$ est une détermination généralisée, les autres déterminations généralisées peuvent s'obtenir par une suite d'opérations des types suivants, dans un ordre qu'on peut prescrire:

(a) remplacer ℓ par $\ell + a$, $a \in 2\pi i\mathbb{Q}$ et garder $L_1\,,\ \dots\,,\ L_N$:

(b)$_k$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$ garder $\ell\,,\ L_1\,,\ \dots\,,\ L_{k-1}$ et pour $i \geqslant 0$, remplacer L_{k+i} par $L_{k+i} + a\frac{\ell^i}{i!}$ $(a \in (2\pi i)^k\mathbb{Q})$.

Passons au logarithme. Soit $\Lambda(z) := \log L(z)$ et définissons les $\Lambda_i(z)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ par

$$\Lambda(z) = \log z e_0 - \sum \Lambda_i(z)(\mathrm{ad}\, e_0)^i(e_1).$$

Une détermination généralisée de $\Lambda(z)$ ou de $(\log z\,,\ \Lambda_1(z)\,,\ \dots\,,\ \Lambda_N(z))$ est définie de même, en terme d'une détermination géneralisée de $L(z)$. Utilisant 1.5.4, on vérifie que

$$\Lambda_i(z) = \sum_j b_j \frac{(\log z)^j}{j!} \operatorname{Li}_{i-j}(z).$$

En particulier

$$\begin{aligned} \Lambda_1(z) &= \operatorname{Li}_1(z) = -\log(1-z)\,, \\ \Lambda_2(z) &= \operatorname{Li}_2(z) + \tfrac{1}{2}\log(z)\log(1-z)\,. \end{aligned}$$

A nouveau, une détermination généralisée de $\log z\,,\ \Lambda_1(z)\,,\ \dots\,,\ \Lambda_{k-1}(z)$ définit celle de $\Lambda_k(z)$ à un multiple rationnel de $(2\pi i)^k$ près.

4.2. Soient F un corps de nombre, et σ un plongement complexe. Dans ce n^0, nous identifierons F à son image dans $\mathbb{C}$ par σ, σ à l'inclusion identique, et nous écrirons reg pour reg^σ. Supposons choisie une détermination généralisée de $\log z$ pour $z \in F^*$, qui soit un homomorphisme de F^* dans $\mathbb{C}$. Par exemple, pour $F \subset \mathbb{R}$, on peut prendre $\log|z|$. Toute autre détermination généralisée qui soit un homomorphisme est de la forme

$$z \to \log z + a(z)$$

pour a un homomorphisme $F^* \to 2\pi i\mathbb{Q}$.

Nous aurons à considérer des familles finies $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments de F^*. Une telle famille étant fixée, nous n'aurons à considérer que les $\log(z_\alpha)$ et les $\log(1-z_\alpha)$, mais il sera essentiel les déterminations généralisées choisies proviennent d'un homomorphisme $\log : F^* \to \mathbb{C}$, i.e. que chaque relation multiplicative entre les z_α et $(1-z_\alpha)$ en fournisse une, additive, entre les $\log(z_\alpha)$ et $\log(1-z_\alpha)$.

Une détermination généralisée $\log : F^* \to \mathbb{C}$ comme ci-dessus des $\log(z)$ $(z \in F^*)$ en fournit une des $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$, d'où une détermination généralisée des $\mathrm{Li}_2(z)$ modulo $(2\pi i)^2\mathbb{Q}$. Fixons $z \in F$, $z \neq 0, 1$ et choisissons une détermination généralisée de $L(z)$ adaptée à celles déjà choisie pour $\log z$ et $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$. Si on change la détermination choisie de log en log $+a$, et celle de $L(z)$ par

(4.2.1) $$L(z) \mapsto L(z)\exp\left(-a(1-z)e_1 + a(z)e_0\right),$$

$\Lambda(z)$ est remplacé par un polynôme de Lie en $\Lambda(z)$ et $\left(-a(1-z)e_1+a(z)e_0\right)$:

(4.2.2)
$$\Lambda(z) \mapsto \Lambda(z) + \left(-a(1-z)e_1 + a(z)e_0\right) + \tfrac{1}{2}[\Lambda(z), -a(1-z)e_1 + a(z)e_0] + \cdots$$

(loi de Hausdorff). Les termes écrits suffisent au calcul de la nouvelle détermination de Λ_2:

$$\Lambda_2(z) \mapsto \Lambda_2(z) + \tfrac{1}{2}\left(a(z)\log(1-z) - a(1-z)(\log z)\right).$$

Si une combinaison linéaire formelle $\sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_2^\sim$ d'éléments z_α de $F-\{0, 1\}$ vérifie dans $\overset{2}{\wedge} F^* \otimes \mathbb{Q}$

(4.2.3) $$\sum \lambda_\alpha(1-z_\alpha) \wedge z_\alpha = 0,$$

la somme $\sum \lambda_\alpha \Lambda_2(z_\alpha)$ est invariante par le changement (4.2.1) de déterminations: elle change par l'addition de l'image de $\frac{1}{2}\sum \lambda_\alpha(1-z_\alpha) \wedge (z_\alpha) = 0$ par l'application

$$\bigwedge^2(F^*) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{C} : (z_1) \wedge (z_2) \mapsto a(z_2)\log(1-z_1) - a(z_1)\log(1-z_2).$$

Ceci définit $\sum \lambda_\alpha \Lambda_2(z_\alpha)$ avec une ambiguité dans $(2\pi i)^2\mathbb{Q}$ (changements 4.1 (b_2)).

On verra que la conjecture 1.10 implique que si $\sum \lambda_\alpha(1-z_\alpha) \wedge (z_\alpha) = 0$, alors $\sum \lambda_\alpha \Lambda_2(z_\alpha) \in \mathbb{C}/(2\pi i)^2\mathbb{Q}$ ainsi défini est $\mathrm{reg}\,(\varphi_2 \sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_2^\sim)$ (notations de 1.8). En particulier elle implique que

(4.2.4)
si $\sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_2 = 0$ dans $\mathscr{L}^2$, i.e. si $\sum \lambda_\alpha(1-z_\alpha) \wedge (z_\alpha) = 0$

et que $\varphi_2 \sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_2 = 0$, alors $\sum \lambda_\alpha \Lambda_2(z_\alpha) \in (2\pi i)^2\mathbb{Q}$.

Sans charger la détermination généralisée de log, nous pouvons changer celle de $L(z_\alpha)$ par

(4.2.5) $$L(z_\alpha) \mapsto L(z_\alpha)\exp\left(-a_2(z_\alpha)\ \mathrm{ad}\ e_0(e_1)\right),$$
$$\Lambda_2(z_\alpha) \mapsto \Lambda_2(z_\alpha) + a_2(z_\alpha)$$

pour des $a_2(z_\alpha) \in (2\pi i)^2\mathbb{Q}$. Par (4.2.4), il existe donc une détermination généralisée des $L(z_\alpha)$, adaptée à celle choisie de log, telle que

$$\forall(\lambda_\alpha) \sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_2 = 0 \Rightarrow \sum \lambda_\alpha \Lambda_2(z_\alpha) = 0. \tag{4.2.6}$$

La condition (4.2.6) est stable par le changement de déterminations (4.2.1), qui change log. Elle est stable par le changement de déterminations (4.2.5) si (et seulement si) les $a_2(z_\alpha)$ vérifient

$$\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_2 = 0 \Rightarrow \sum \lambda_\alpha a_2(z_\alpha) = 0. \tag{4.2.7}$$

On verra que si

$$\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_2 \otimes (z_\alpha) = 0 \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2 \otimes F^*, \tag{4.2.8}$$

et que les déterminations choisies des $L(z_\alpha)$, compatibles à celle de log, vérifient (4.2.6), alors

$$\sum \lambda_\alpha \Lambda_3(z_\alpha) \tag{4.2.9}$$

est invariant par les changements de déterminations (4.2.1) et par les changements (4.2.5) vérifiant (4.2.7). La somme (4.2.9) est ainsi définie avec une ambiguité dans $(2\pi i)^3\mathbb{Q}$. On verra que la conjecture 1.10 implique que cette somme est $\operatorname{reg} \varphi_3 \sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}$, donc que

$$\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\} = 0 \text{ dans } \mathscr{L}^3 \Rightarrow \sum \lambda_\alpha \Lambda_3(z_\alpha) \in (2\pi i)^3\mathbb{Q}.$$

Il existe donc des déterminations vérifiant en outre

$$\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_3 = 0 \Rightarrow \sum \lambda_\alpha \Lambda_3(z_\alpha) = 0, \ldots .$$

4.3. Précisons l'argument qui fait passer de (4.2.6) à une ambiguité dans $(2\pi i)^3\mathbb{Q}$ pour (4.2.9), et les ... finaux de 4.2. Soit $k \geqslant 2$. Soit $\sum \lambda_\alpha \{z\}_k^\sim$ une combinaison linéaire formelle d'éléments de $F - \{0, 1\}$. Supposons que quel que soit $v : F^* \to \mathbb{Q}$, on ait

$$\sum \lambda_\alpha v(z_\alpha)^{k-2}((1 - z_\alpha) \wedge (z_\alpha)) \qquad \text{dans } \overset{2}{\wedge} F^* \otimes \mathbb{Q}. \tag*{$(4.3.1)_k$}$$

Forme polarisée: quels que soient $v_1, \ldots, v_{k-2} : F^* \to \mathbb{Q}$,

$$\sum \lambda_\alpha v_1(z_\alpha) \cdots v_{k-2}(z_\alpha)((1 - z_\alpha) \wedge (z_\alpha)) = 0. \tag*{$(4.3.2)_k$}$$

On notera que cette hypothèse implique que quels que soient $2 \leqslant \ell \leqslant k$ et $v_1, \ldots, v_{k-\ell} : F^* \to \mathbb{Q}$,

$$\sum \lambda_\alpha v_1(z_\alpha) \cdots v_{k-\ell}(z_\alpha) \{z_\alpha\}_\ell^\sim \text{ vérifie } (4.3.1)_\ell . \tag{4.3.3}$$

Supposons choisies des déterminationsgénéraliséesdes $L(z_\alpha)$, prolongeant une détermination de log comme en 4.2 et telles que pour $2 \leqslant \ell \leqslant k - 1$ on ait

$(4.3.4)_\ell$ pour toute forme linéaire $v : F^* \to \mathbb{Q}$,

$$\sum (\lambda_\alpha v(z_\alpha)^{k-\ell}) \Lambda_\ell(z_\alpha) = 0.$$

Forme polarisée: quels que soient $v_1, \ldots, v_{k-\ell} : F^* \to \mathbb{Q}$

$$\sum \lambda_\alpha v_1(z_\alpha) \cdots v_{k-\ell}(z_\alpha) \Lambda_\ell(z_\alpha) = 0. \tag*{$(4.3.5)_\ell$}$$

Proposition 4.4. *Soient* $\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k^\sim$ *et des détermination généralisées* $L(z_\alpha)$ *prolongeant une de log. Si* $(4.3.2)_k$ *et* $(4.3.4)_\ell$ $(2 \leqslant \ell \leqslant k-1)$ *sont vérifiés, alors les changements de déterminations suivant respectent ces conditions et ne modifient pas la valeur de* $\sum \lambda_\alpha \Lambda_k(z_\alpha)$:

(i) *changement* (4.2.1):

(ii)$_\ell$ $(2 \leqslant \ell \leqslant k-1)$

$$L(z_\alpha) \mapsto L(z_\alpha) \exp\left(a_\ell(z_\alpha)(\operatorname{ad} e_0)^{e-1}(e_1)\right)$$

où $a_\ell(z_\alpha) \in (2\pi i)^\ell \mathbb{Q}$ *et où quels que soient* $v_1, \dots, v_{k-\ell} : F^* \to \mathbb{Q}$,

$$\sum \lambda_\alpha v_1(z_\alpha) \cdots v_{k-\ell}(z_\alpha) a_\ell(z_\alpha) = 0 .$$

Preuve. Prouvons (i). Il s'agit de remplacer $\Lambda(z)$ par un polynome de Lie (4.2.2) en $\Lambda(z)$ et $\left(-a(1-z)e_1 + a(z)e_0\right)$. On a

(4.4.1)

$$[\Lambda(z), -a(1-z)e_1 + a(z)e_0] = -\left(a(z)\log(1-z) - a(1-z)\log z\right) \operatorname{ad} e_0(e_1) + \sum_{\ell=3}^{N} \Lambda_{\ell-1} a(z)(\operatorname{ad} e_0)^{\ell-1}(e_1) .$$

Le crochet de (4.4.1) avec $we_0 + \sum w_\ell ade_0^{\ell-1}(e_1)$ ne dépend que de w_0. Il en résulte que $\Lambda_\ell(z_\alpha)$ se modifie par l'addition d'une combinaison linéaire de termes de la forme suivante:

$$\left(a(z_\alpha)\log(1-z_\alpha) - a(1-z_\alpha)\log z_\alpha\right)(\log z_\alpha)^b (\log z_\alpha + a(z_\alpha))^c \quad \text{avec } b + c = \ell - 2 ;$$

$$\Lambda_b(z_\alpha) a(z_\alpha) \log(z_\alpha)^c (\log z_\alpha + a(z_\alpha))^d \quad \text{avec } b + 1 + c + d = \ell .$$

L'invariance du membre de gauche de $(4.3.5)_\ell$, $2 \leqslant \ell \leqslant k$, résulte alors de $(4.3.1)_k$ et $(4.3.5)_b$, $2 \leqslant b < \ell$, et (i) en résulte.

La preuve de (ii)$_\ell$ est analogue, mais plus simple: $\Lambda_m(z_\alpha)$ est inchangé pour $m < \ell$. Pour $m \geqslant \ell$, il se change par l'addition d'un multiple de

$$a_\ell(z_\alpha)(\log z)^{m-\ell} .$$

L'invariance du membre de gauche de $(4.3.5)_m$, $2 \leqslant m \leqslant k$, résulte alors de l'hypothèse faite sur $a_\ell(z_\alpha)$ et (ii)$_\ell$ en résulte.

4.5. Réciproquement, si $\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k^\sim$ vérifie $(4.3.2)_k$ et que deux systèmes de déterminations des $L(z_\alpha)$ (chacun prolongeant un de log) vérifient $(4.3.5)_\ell$ pour $2 \leqslant \ell \leqslant k-1$, on passe de l'un à l'autre par les opérations 4.4 (i), (ii)$_\ell$ $(2 \leqslant \ell \leqslant k-1)$, suivi d'opérations (ii)$_\ell$ pour $\ell \geqslant k$, sans contrainte sur les a_ℓ. Une opération (i) ramène au cas où les log utilisés sont les mêmes. On retourne ensuite l'argument de 4.4 (ii) pour montrer que les opérations (4.1) (b_k) $(k \geqslant 2)$ à effectuer pour passer d'un système à l'autre sont du type voulu.

Sous les hypothèses de 4.3, la somme

$$\sum \lambda_\alpha \Lambda_k(z_\alpha)$$

est donc définie avec une ambiguité dans $(2\pi i)^k\mathbb{Q}$.

4.6. PROPOSITION. *Admettons la conjecture* 1.10. *Si une combinaison linéaire formelle* $\sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_k^\sim$ *d'éléments de* $F-\{0, 1\}$ *vérifie* $d_k^\sim(\sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_k^\sim) = 0$, *alors*

(i) $(4.3.1)_k$ *est vérifié.*

(ii) *Il existe des déterminations* $L(z_\alpha)$ *prolongeant une de log vérifiant* $(4.3.5)_\ell$ *pour* $2 \leqslant \ell \leqslant k-1$. *Pour celles-ci, on a*

(iii) $\sum \lambda_\alpha \Lambda_k(z_\alpha) =$ *reg* $\varphi_k(\sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_k)$ *dans* $\mathbb{C}/(2\pi i)^k\mathbb{Q}$.

PREUVE. Sur la catégorie tannakienne $\mathscr{T}(S)$, on dispose des deux foncteurs fibres ω et $M \mapsto$ real $(M)_\mathbb{Q}$. Parce que $G = \mathbb{G}_m \ltimes U$, son H^1 est nul et, par la théorie générale des catégories tannakiennes, il existe un isomorphisme de foncteurs fibres $\alpha : \omega \xrightarrow{\sim}$ real $(\ )_\mathbb{Q}$.

On définit comme suit un isomorphisme entre les complexifiés de ces foncteurs fibres:

$$\text{real}\,(M)_\mathbb{C} = \bigoplus \text{real}\,(M)_i = \bigoplus \mathrm{Gr}^W_{-2i}\,\text{real}\,(M)_\mathbb{C} = \bigoplus \text{real}\,(\mathrm{Gr}^W_{-2i}M)_\mathbb{C}$$

$$(4.6.1) \qquad = \bigoplus \omega(M)_i \otimes \text{real}\,(\mathbb{Q}(i))_\mathbb{C} = \Big(\bigoplus \omega(M)_i\Big) \otimes \mathbb{C}.$$

Comparant ces isomorphismes, on obtient un automorphisme de $M \mapsto \omega(M)\otimes\mathbb{C}$, i.e., $g \in G(\mathbb{C})$, tel que real(M) (de complexifié identifié à $\omega(M)\otimes \mathbb{C}$ par 4.6.1) soit d'espace vectoriel complexe gradué sous-jacent (cf. 1.2) $\omega(M) \otimes \mathbb{C}$, et de réseau rationnel $g\omega(M)$. Cet élément g est unique à $g \mapsto g\gamma$ près, $\gamma \in G(\mathbb{Q})$. Prenant $M = \mathbb{Q}(1)$, on voit que g se projette dans le quotient $\mathbb{G}_m$ de G sur un multiple rationnel de $2\pi i$. Changeant g par $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, on peut supposer que g est de la forme

$$g = u\tau(2\pi i).$$

Le choix de u détermine une détermination généralisée de $\log z$ $(z \in F^*)$: la matrice de u agissant sur $\omega(E)$, pour E une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$, est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, avec a additif en E et on prend $\log z = a$ pour $E = [z]$.

De même, le choix de u détermine une détermination généralisée de $L(z)$, pour $z \in F - \{0, 1\}$: la matrice de u agissant sur $\omega(\mathscr{M}_z)$. Elle est compatible à la détermination de log. De plus, chaque relation $\sum \mu_\alpha\{z_\alpha\}_\ell = 0$ fournit une relation analogue entre les coefficients $(\ell, 0)$ de $\log u$ agissant sur les $\omega(\mathscr{M}_z)$.

Par hypothèse, on a

$$\sum \lambda_\alpha\{z_\alpha\}_{k-1} \otimes (z_\alpha) = 0 \qquad \text{dans } \mathscr{L}^{k-1} \otimes F^*$$

$$(\text{resp. } \sum \lambda_\alpha(1 - z_\alpha)\Lambda(z_\alpha) = 0 \qquad \text{dans } \textstyle\bigwedge^2 \mathscr{L}^1 \text{ si } k = 2),$$

et (cf. 1.7) les hypothèses 4.3 sont donc vérifiées. On a

$$\langle \log u\,, \sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k \rangle = \sum \lambda_\alpha \Lambda_k(z_\alpha)\ ;$$

$\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k$ est le coefficient de l'extension $\varphi_k(\sum \lambda_\alpha \{z_\alpha\}_k)$ de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(k)$, et 4.6 en résulte.

Bibliographie

[BD] A. Beilinson and P. Deligne, *Motivic polylogarithm and Zagier conjecture*, to appear.

[D] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in: Galois Groups over R, MSRI publications 16, Springer-Verlag, 1989, pp. 79–297.

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA

Institute for Advanced Study, Princeton, NJ