Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 23. Dezember 1955
Bunsenstraße 3/5

Herrn Professor Dr. A. Selberg
Institute for Advanced Study

P r i n c e t o n

Sehr verehrter Herr Professor!

Leider komme ich erst heute dazu, Ihnen das Manuskript des ersten Teiles Ihrer Vorlesung zu senden. Ich habe diesen Teil noch einmal geschrieben; er ist wesentlich kürzer als meine erste Fassung. Ich hoffe jedoch, dass ich nichts Wesentliches ausgelassen habe. Allerdings habe ich einige Lücken nicht ausfüllen können und habe die fraglichen Stellen daher im Manuskript mit Bleistift angemerkt. Würden Sie bitte einige kleine Hinweise an den Rand schreiben?

Den 2. Teil der Vorlesung, den Sie mir sandten, habe ich erhalten. Herr Professor Siegel schlug nun vor, diesen 2. Teil in englischer Sprache abzudrucken, falls Sie damit einverstanden sind; Ihr Manuskript würde damit unverändert bleiben.

Mit den besten Wünschen für das neue Jahr und Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin

Ihr sehr ergebener

Siegfried Berg

§ 1. Die allgemeine Problemstellung.

In diesem ersten Kapitel wollen wir die Methode unserer späteren speziellen Untersuchungen andeuten. Diese Untersuchungen gehen in die Richtung der Arbeiten von H. Maaß über die Übertragung der Heckeschen Theorie der Modulfunktionen auf nicht-analytische Funktionen; jedoch nehmen wir zu Beginn einen allgemeinen Standpunkt ein.

Es sei S^{n} ein Riemannscher Raum mit den Lokalkoordinaten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und der Metrik $ds^2 = \sum g_{\nu\mu}\, dx_\nu\, dx_\mu$. Wir setzen voraus, daß die Lokalkoordinaten und die Metrik unendlich oft differenzierbar sind. Eine Funktion auf S soll stets eine komplexwertige Funktion sein, deren Real= und Imaginärteile der Einfachheit halber beliebig oft differenzierbar sein sollen. Für spezielle Räume S kann man natürlich die Funktionenklasse erweitern, doch ist das für uns hier weniger von Bedeutung; es sollen nur alle folgenden Umformungen erlaubt sein.

Der Raum S sei ferner so beschaffen, daß eine Gruppe G von Isometrieen existiert mit den Eigenschaften:

1.) Es gibt eine (nicht notwendig zu G gehörende) Isometrie μ mit
$$\mu G \mu^{-1} = G$$

2.) Für jedes Punktepaar $x, y \in S$ gibt es ein $m \in G$, so daß

$$mx = \mu y \text{ und } my = \mu x \text{ ist.}$$

Für die Menge der Funktionen auf S wollen wir einen Operatorenbereich Ω festlegen; und zwar soll ein Operator A genau dann zu Ω gehören, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

a.) A ist ein linearer Operator

b.) Es gibt eine natürliche Zahl k, die von A abhängen darf, so daß gilt: Strebt eine Folge f_i von Funktionen samt allen Ableitungen bis zur Ordnung k gleichmäßig gegen Null, dann soll auch Af_i gleichmäßig gegen Null streben

In diesem Operatorenbereich betrachten wir jetzt Operatoren L, die man durch ein Integral darstellen kann:

$$(1.1) \quad Lf(x) = \int_S k(x,y) f(y)\, dy$$

dabei ist dy das Volumelement von S. Wann ist nun solch ein Integraloperator invariant bezüglich G? Bezeichnen wir für den Augenblick den Integraloperator (1.1) mit L_x, so ist mit $m \in G$

$$L_{mx} f = L_{x'} f(m^{-1}x') = \int_S k(x', y') f(m^{-1}y') dy'$$

Wir substituieren $y' = my$ und weil m eine Isometrie ist, bleibt das Volumelement ungeändert und da wir $x' = mx$ gesetzt haben, so wird

$$L_{mx} f(x) = \int_S k(mx, my) f(y) dy.$$

Unsere Frage heißt nun; wann $L_x = L_{mx}$ ist.
Es ergibt sich sofort die Antwort:

Der Integraloperator L mit dem Kern $k(x,y)$ ist dann und nur dann invariant unter G, wenn

$$k(x,y) = k(mx, my) \text{ für alle } m \in G.$$

Funktionen $k(x,y)$ mit dieser Eigenschaft wollen wir punktpaarweise invariante Funktionen nennen, oder kürzer invariante Funktionen.

Wir beweisen den

Satz 1,1:

Invariante Integraloperatoren sind vertauschbar.

Beweis: Es sei

$$L f(x) = \int_S k(x,y) f(y) dy$$

und

$$M f(x) = \int_S h(x,y) f(y) dy$$

dann ist

$$(LM)\,f(x) = \int_S \Big(\int_S k(x,z)\,h(z,y)\,dz\Big) f(y)\,dy$$

und

$$(ML)\,f(x) = \int_S \Big(\int_S k(z,y)\,h(x,z)\,dz\Big) f(y)\,dy.$$

Es gibt nun nach unseren Voraussetzungen ein $m \in G$, so daß $mx = \mu z$ und $mz = \mu x$ ist. Wegen der Invarianz von $k(x,y)$ ist $k(x,z) = k(mx,mz) = k(\mu z, \mu x)$ und ebenso $h(z,y) = h(\mu y, \mu z)$. Damit wird das Integral

$$J = \int_S k(x,z)\,h(z,y)\,dz = \int_S k(\mu z, \mu x)\,h(\mu y, \mu z)\,dz.$$

Wir substituieren $z \to \mu^{-1} z$, dann ergibt sich

$$J = \int_S k(z, \mu x)\,h(\mu y, z)\,dz.$$

Wegen Bedingung (2) auf S.2. ergibt sich

$$J = \int_S k(z, my)\,h(mx, z)\,dz$$

mit geeignetem $m \in G$. Nach der Substitution $z \to mz$ hat man dann

$$J = \int_S k(mz, my)\,h(mx, mz)\,dz = \int_S k(z,y)\,h(x,z)\,dz$$

Das letzte Glied der Gleichung folgt aus der Invarianz von h und k.
Der Satz ist damit bewiesen.

Wir betrachten nun allgemeiner die bezüglich G invarianten Operatoren aus Ω. Es sei L ein solcher invarianter Operator; bezieht sich L auf die Variable x, so schreiben wir genauer L_x und damit drückt sich die Invarianz von L aus in der Gleichung

$$L_x = L_{mx} \quad \text{für alle } m \in G.$$

Weiter sei $k(x,y)$ eine invariante Funktion, dann ist auch

$$k_1(x,y) = L_x\, k(x,y)$$

eine invariante Funktion. Es ist nämlich

$$k_1(x,y) = L_x\, k(x,y) = L_{mx}\, k(x,y) = L_{mx}\, k(mx,my) = k_1(mx,my).$$

Weiter gilt unter Berücksichtigung von (2.) S. 2.

$$k_1(x,y) = L_x\, k(x,y) = L_{\mu y}\, k(\mu y, \mu x) = L_{\mu y}\, k(mx,my) = L_{\mu y}\, k(x,y).$$

Wir zeigen nun: Sind L und M zwei invariante Operatoren, so gilt für jede invariante Funktion $k(x,y)$:

$$(LM)_x\, k(x,y) = (ML)_x\, k(x,y);$$

denn

$$L_x M_x\, k(x,y) = L_x M_{\mu y}\, k(x,y) \text{ nach}$$

dem oben Gesagten. Es ist aber sicher

$$L_x M_{\mu y} = M_{\mu y} L_x$$

da ja nun L und M auf verschiedene Variablen wirken.

Wir bezeichnen mit Ω_1 die Menge der invarianten Operatoren aus Ω, die mit dem Integrationsprozeß vertauschbar sind. Man kann zeigen, daß diese Operatoren unter einander vertauschbar sind. Zum Beweise konstruiert man zunächst eine Funktionenmenge, die in der Menge $\mathfrak{M}$ der Funktionen auf S dicht liegt und zeigt dann, daß man diese Menge so wählen kann, daß die Operatoren über dieser Menge vertauschbar sind. Die Behauptung folgt dann wegen (b.) S.2. Zur Angabe der in $\mathfrak{M}$ dichten Funktionenmenge bemerken wir: Es sei $k_\delta(x,y)$; $\delta > 0$ eine Funktion des geodätischen Abstandes ϱ zwischen x und y, und es sei $k_\delta(x,y)$ hinreichend oft differenzierbar und $k_\delta(x,y) = 0$ für $\varrho > \delta$. Man sieht dann, daß die Funktionen $\int\limits_S k_\delta(x,y) f(y)\, dy$ dicht sind in der Menge $\mathfrak{M}$. Allerdings muß man noch einige Modifikationen anbringen um auch die Ableitungen bis zur k-ten Ordnung gleichzeitig zu approximieren. Daß die Operatoren über dieser Menge vertauschbar sind folgt nun aber aus dem vorher Bewiesenen, denn $k_\delta(x,y)$ ist ja invariant.

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß die Operatorenalgebra Ω_1 von endlich vielen Operatoren $D_1, \dots, D_m$ erzeugt wird und zwar sind die D_ν als Differentialoperatoren wählbar. —

Es sei nun Γ eine diskontinuierliche Untergruppe und es sei zu Γ eine unitäre Darstellung χ vom Grade r gegeben. Mit $F(x)$ bezeichnen wir eine r-dimensionale Vektorfunktion auf S d.h. ein r-Tupel von Funktionen, die wir zu einem Spaltenvektor anordnen:

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_r(x) \end{pmatrix}$$

Von diesen Vektorfunktionen betrachten wir die, welche folgende Eigenschaften haben:

1.) Es ist $\chi(M)\, F(x) = F(Mx)$ für alle $M \in \Gamma$

2.) $F(x)$ ist eine gemeinsame Eigenfunktion für unsere Operatorenmenge Ω_1

Für die Integraloperatoren aus Ω_1 muß also gelten:

$$\lambda\, F(x) = \int_S k(x,y)\, F(y)\, dy$$

(Diese Gleichung ist komponentenweise zu lesen.)

Über die Kerne $k(x,y)$ setzen wir hier voraus, daß

$k(x,y) = 0$ ist, sofern x und y einen geodätischen Abstand haben, der größer als eine fest vorgegebene Zahl ist. Man kann diese Bedingung in jedem speziellen Fall noch abschwächen, aber darauf wollen wir nicht weiter eingehen.

Wir formen nun die obige Gleichung um. Es sei $\mathfrak{D}$ ~~der~~ ein Fundamentalbereich von Γ. Die Bilder von $\mathfrak{D}$ unter Γ überdecken lückenlos und einfach ganz S. Wir schreiben das in der Form

$$S = \sum_{M \in \Gamma}{}' M\mathfrak{D},$$

Es wird dann

$$\lambda F(x) = \int_S k(x,y) F(y)\, dy = \sum_{M \in \Gamma}{}' \int_{M\mathfrak{D}} k(x,y) F(y)\, dy.$$

Nun ist aber $k(x,y) = k(M^{-1}x, M^{-1}y)$ für alle $M \in \Gamma$ und nach Eigenschaft (1.) von $F(x)$ gilt ferner

$$F(y) = \chi(M) F(M^{-1}y)$$

und damit also

$$\lambda F(x) = \sum_{M \in \Gamma}{}' \int_{M\mathfrak{D}} k(M^{-1}x, M^{-1}y) \chi(M) F(M^{-1}y)\, dy$$

Wir betrachten nun einen einzelnen Term dieser Summe und führen in ihm die Substitution $y \to My$ aus, dann wird

$$\lambda F(x) = \int_{\mathfrak{D}} \Big(\sum_{M \in \Gamma}{}' \chi(M) k(M^{-1}x, y) \Big) F(y)\, dy$$

Wir setzen nun noch

$$K(x,y) = \sum_{M\in\Gamma} \chi(M)\, k(M^{-1}x, y) = \sum_{M\in\Gamma} \chi(M)\, k(x, My).$$

Es ist also $K(x,y)$ eine r-reihige quadratische Matrix und unsere Gleichung lautet nun:

$$\lambda F(x) = \int_{\mathfrak{D}} K(x,y) F(y)\, dy$$

Aus unserer Einschränkung für $k(x,y)$ folgt, daß in unserer Reihe nur endlich viele Glieder stehen. Nehmen wir nun noch an, daß $\mathfrak{D}$ kompakt ist, dann ist jedenfalls $K(x,y)$ gleichmäßig beschränkt und unsere Gleichung sinnvoll. Auch hier kann man wieder nachweisen, daß unter geringeren Voraussetzungen über $k(x,y)$ noch alles gültig bleibt und in gewissen Räumen S kann man auch noch bis zu einem gewissen Grade die Kompaktheit von $\mathfrak{D}$ fallen lassen.

Wir wollen nun die Summe der Eigenwerte für den Operator mit dem Kern $K(x,y)$ berechnen. Unter gewissen Einschränkungen, die man von Fall zu Fall präzisieren muß, wird die Summe der Eigenwerte dargestellt durch

$$\sum \lambda = \int_{\mathfrak{D}} \sigma\big(K(x,x)\big)\, dx\,;$$

dabei bedeutet σ die Spur der Matrix $K(x,x)$.

Aus der Bildung von $K(x,y)$ und weil die Operatorenalgebra Ω_1 von den Differentialoperatoren $D_1, \ldots, D_m$ erzeugt wird, ~~sind~~ erkennt man, daß die Eigenwerte λ von $K(x,y)$ Funktionen $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ der Eigenwerte λ_ν von D_ν $(1 \leq \nu \leq m)$ sind. Berechnen wir nun die rechte Seite unserer obigen Formel. Es ist

$$\int_{\mathfrak{D}} \sigma\big(K(x,x)\big)\, dx = \sum_{M \in \Gamma}{}' \sigma\big(\chi(M)\big) \int_{\mathfrak{D}} k(x, Mx)\, dx$$

Wir fassen nun in dieser Summe alle Elemente einer Klasse konjugierter Elemente aus Γ zusammen; da $\sigma\,(\chi(M))$ für konjugierte Elemente unverändert bleibt, so genügt es

$$\sum_{M \sim M_0}{}' \int_{\mathfrak{D}} k(x, Mx)\, dx \quad \text{mit} \quad N^{-1} M_0 N = M$$

zu betrachten. Wir betrachten in dieser Summe einen einzelnen Term:

$$\int_{\mathfrak{D}} k(x, Mx)\, dx = \int_{\mathfrak{D}} k(x, N^{-1} M_0 N x)\, dx .$$

Wegen der Invarianz von $k(x,y)$ und nach Ausführung der Substitution $x \to N^{-1}x$ ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{D}} k(x, Mx)\,dx = \int_{N\mathfrak{D}} k(x, M_0 x)\,dx$$

und damit wird, wie man leicht einsieht:

$$\sum_{M \sim M_0} \int_{\mathfrak{D}} k(x, Mx)\,dx = \int_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(x, M_0 x)\,dx .$$

Hierbei ist $\mathfrak{D}_{M_0}$ ein Fundamentalbereich für die Gruppe Γ_{M_0} aller mit M_0 vertauschbaren Elemente aus Γ. Die Integrale dieser Form lassen sich nun schreiben, wie man zeigen kann, als

$$\int_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(x, M_0 x)\,dx = \mu\left(\{M_0\}_\Gamma\right) g\left(\{M_0\}_{G}\right).$$

Dabei hängt μ nur von der Klasse~~n~~ konjugierter Elemente zu M_0 ~~bzgl.~~ Γ ab, während g von der Klasse der zu M_0 konjugierten Elemente aus G abhängt. Wir haben also die Spurformel

$$\sum h(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum{}' \sigma(\chi(M_0))\,\mu(\{M_0\}_\Gamma)\,g(\{M_0\}_G),$$

wobei über ein volles Repräsentantensystem der Klassen konjugierter Elemente summiert wird. ~~Man kann weiter zeigen, daß μ von $k(x,y)$ unabhängig ist, und während g von $k(x,y)$ abhängig ist. Außerdem geht h durch Anwendung eines linearen Operators aus k hervor.~~

Zum Abschluß dieses Kapitels geben wir noch einige Beispiele für Räume S der hier betrachteten Art.

Es sei S die reelle Zahlengerade mit der Metrik $ds^2 = dx^2$. G sei die Gruppe der Translationen und μ sei die Spiegelung am Nullpunkt. Man sieht, daß die Zahlengerade zu unserem Raumtypus gehört. Die invarianten Funktionen sind Funktionen von $x-y$ und die Operatorenalgebra Ω_1 wird erzeugt von $\frac{d}{dx}$.

Allgemeiner, alle symmetrischen Räume im Sinne von E. Cartan gehören zu unserem Raumtypus. In den folgenden Kapiteln werden wir uns uns eingehender mit der hyperbolischen Ebene beschäftigen und die hier angegebenen Formeln explizit ausrechnen

§ 2. Einiges aus der hyperbolischen Geometrie.

In diesem Kapitel erinnern wir an einige Sätze und Definitionen aus der Geometrie der hyperbolischen Ebene. Wir übergehen die elementaren Beweise der angeführten Behauptungen.

Es sei H die obere Halbebene der komplexen z-Ebene d. h. die Menge der Punkte $z = x + iy$ mit $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) > 0$. Auf H definieren wir eine Metrik durch

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

H mit dieser Metrik versehen nennen wir die hyperbolische Ebene. Das Volumelement für diese Metrik ist $dv = \frac{dx\,dy}{y^2}$. Jede Bewegung von H (d. h. jede Isometrie ohne Umlegung der Winkel) wird gegeben durch eine Transformation:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit a, b, c, d reell und $ad - bc = 1$; und jede solche Transformation ist eine Bewegung. Jede Geodätische ist ein Halbkreisbogen der orthogonal zur reellen Achse ist. Durch je zwei Punkte z_1 und z_2 geht eine und nur eine Geodätische. Der geodätische Abstand d zweier Punkte z_1 und z_2 ist

$$d(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} .$$

Zwei Punktepaare (z_1, z_2) und (z_1', z_2') lassen sich dann und nur dann durch eine Bewegung in einander überführen, wenn $d(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ ist. Es ist also d eine vollständige Invariante des Punktepaares (z_1, z_2) bezüglich der Gruppe G aller Bewegungen. Für uns wird es allerdings vorteilhafter sein die Invariante

$$t(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{y_1 y_2}$$

als Fundamentalinvariante zu betrachten; denn sie ist einfacher gebaut. Der Zusammenhang zwischen d und t wird gegeben durch:

$$t = e^d + e^{-d} - 2$$

Wir wollen noch auf die geometrische Bedeutung dieser Invariante eingehen. Ein geodätischer Kreis K_ϱ mit dem Radius ϱ ist auch ein Kreis in der euklidischen Metrik. Es gilt:

$$\text{Flächeninhalt von } K_s = \pi \cdot t = \pi\left(e^{s}+e^{-s}-2\right)$$
$$\text{Umfang von } K_s = \pi\left(e^{s}-e^{-s}\right).$$

Wir merken noch an: Der Flächeninhalt eines Polygons mit k Seiten und den Winkeln α_ν ist gleich $(k-2)\pi - \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu$. (Die Winkel werden übrigens in H, wie im Euklidischen gemessen.)

Nun gehen wir etwas näher auf die Gruppe der Bewegungen ein. Jede lineare Transformation, die eine Bewegung vermittelt, besitzt zwei Fixpunkte. Wir gewinnen folgende Übersicht über die Fixpunkte einer solchen Transformation M:

α.) M besitzt zwei konjugiert komplexe Fixpunkte.

β.) M besitzt zwei verschiedene reelle Fixpunkte.

γ.) M besitzt nur einen reellen Fixpunkt.

Andere Fälle können nicht eintreten, da die a, b, c, d reell sind.

Eine Transformation M, die zum Typ (α) gehört, nennt man elliptisch. Ist z_0 der Fixpunkt von M, der in H liegt, so kann man M in der Form

$$\frac{z'-z_0}{z'-\bar z_0} = e^{i\alpha}\,\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}\,; \quad \alpha \text{ reell},$$

schreiben. Es ist also M eine Drehung um den Punkt z_0 mit dem Drehwinkel α.

Ist M vom Typ (β), so nennt man M hyperbolisch. Sind w_1 und w_2 die Fixpunkte von M, so kann man M in der Form:

$$\frac{z'-w_1}{z'-w_2} = \varrho\,\frac{z-w_1}{z-w_2}\,, \text{ mit } \varrho > 0$$

schreiben; und zwar wollen wir die Fixpunkte immer so numerieren, daß $\varrho > 1$ ist.

Gehört M zum Typ (γ), so heißt M parabolisch, und M besitzt die Normalform:

$$\frac{1}{z'-w} = \frac{1}{z-w} + \lambda\,,$$

hierbei ist w der Fixpunkt von M, und λ ist reell.

Wir heben noch hervor, daß es zu je zwei Punkten z_1 und z_2 stets eine Bewegung gibt, die z_1 in z_2 und z_2 in z_1 überführt; man nehme z.B. eine Drehung um π um den Mittelpunkt der geodätischen Strecke zwischen z_1 und z_2.

Es sei nun Γ eine Gruppe von Bewegungen von H. Zwei Punkte z_1 und z_2 heißen äquivalent bezüglich Γ, wenn eine Transformation in Γ existiert, die z_1 in z_2 transformiert. Die Gruppe Γ heißt diskontinuierlich, wenn ein Punkt z_0 existiert, dessen Bilder bei Anwendung aller

Transformationen aus Γ keinen Häufungspunkt in H haben. Eine Punktmenge $\mathfrak{D}$ heißt Fundamentalbereich von Γ, wenn jeder Punkt von H einem Punkt von $\mathfrak{D}$ äquivalent bezüglich Γ ist und wenn keine zwei Punkte von $\mathfrak{D}$ äquivalent sind. Zu jeder diskontinuierlichen Gruppe Γ ist es möglich einen Fundamentalbereich anzugeben, und zwar so, daß $\mathfrak{D}$ konvex ist. (Konvex im Sinne der hyperbolischen Geometrie.) Allerdings muß man noch geeignete Festsetzungen über die Randpunkte von $\mathfrak{D}$ treffen.

Wir setzen nun voraus: Der Fundamentalbereich $\mathfrak{D}$ von Γ besitzt einen endlichen Inhalt. Diese Voraussetzung ist grundlegend für alle folgenden Kapitel. Wir werden nur Gruppen betrachten, bei denen diese Voraussetzung erfüllt ist.

Wir ziehen einige Folgerungen aus dieser Voraussetzung:

1.) Die Anzahl der Seiten von $\mathfrak{D}$ ist endlich, und zwar ist diese Anzahl eine gerade Zahl, weil sich je zwei Seiten bezüglich Γ entsprechen.

2.) $\mathfrak{D}$ ist dann und nur dann nicht-kompakt, wenn Γ parabolische Transformationen enthält.

3.) Die Bilder von $\mathfrak{D}$ bezüglich Γ überdecken H lückenlos und einfach.

Ist die Seitenzahl von $\mathfrak{D}^c$ gleich $2k$ und sind die Winkel α_ν ($\nu = 1, \ldots, 2k$), dann ist der Inhalt $A(\mathfrak{D}^c)$ von $\mathfrak{D}$:

$$A(\mathfrak{D}^c) = (2k-2)\pi - \sum_{\nu=1}^{2k} \alpha_\nu$$

Äquivalente Ecken von $\mathfrak{D}^c$ bezüglich Γ fassen wir zusammen zu einem sogenannten Zyklus. Die Summe der Winkel eines Zyklus ist gleich $\frac{2\pi}{m}$; m eine natürliche Zahl; und zwar ist $m > 1$ dann und nur dann, wenn die Ecken Fixpunkte elliptischer Substitutionen sind, deren Periode gleich m ist. Wir haben also:

$$\frac{A(\mathfrak{D}^c)}{2\pi} \equiv - \sum_\nu \frac{1}{m_\nu} \pmod{1}$$

wobei rechts über alle verschiedenen Zyklen summiert wird. Enthält Γ nur hyperbolische Substitutionen, so gilt sogar:

$$\frac{A(\mathfrak{D}^c)}{2\pi} \equiv 0 \pmod{1}$$

§ 3. Invariante Operatoren in der hyperbolischen Ebene.

Wir wenden uns nun den Integral- und Differentialoperatoren zu. Der Definitionsbereich dieser Operatoren sollen gewisse komplexwertige Funktionen sein, die auf H definiert sind. Wir wollen zunächst diesen Definitionsbereich nicht genauer festlegen; wir verlangen nur, daß alle ~~vo~~kommenden Umformungen erlaubt sein sollen. Dies wird z. B. immer der Fall sein, wenn wir beliebig oft differenzierbare Funktionen betrachten, die außerhalb einer kompakten Menge identisch verschwinden.

Ein Integraloperator hat die Gestalt:

$$L\, f(z) = \iint_H k(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\, dy}{y^2}\,.$$

Wir fragen nun, wie in Kapitel 1, wann ein solcher Integraloperator invariant bezüglich der Gruppe G aller Bewegungen von H ist. Wir wollen diese Frage noch einmal, ~~mal~~ genau wie in Kapitel 1, beantworten. Wir schreiben deutlicher

$$L_z\, f(z) = \iint_H k(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\, dy}{y^2}\,.$$

Sei nun $m \in G$, dann ist also

$$L_{mz} f(z) = L_{\tilde{z}} f(m^{-1}\tilde{z}) = \iint_H k(\tilde{z}', \tilde{z}) f(m^{-1}\tilde{z}) \frac{d\tilde{x}\, d\tilde{y}}{\tilde{y}^2}.$$

Wir substituieren nun $\tilde{z} = mz$. Das Volumelement bleibt dabei ungeändert, denn m ist eine Isometrie. Wir erhalten also:

$$L_{mz} f(z') = \iint_H k(mz', mz) f(z) \frac{dx\, dy}{y^2}.$$

Unsere Frage heißt also: Wann ist

$$L_{mz} = L_z \ ?$$

Es ergibt sich sofort die Antwort:

Der Integraloperator L mit dem Kern $k(z', z)$ ist dann und nur dann invariant bezüglich G, wenn

$$k(z', z) = k(mz', mz)$$

für alle $m \in G$.

Wir werden nur invariante Integraloperatoren untersuchen. Die Kerne $k(z', z)$ dieser Operatoren sind also Funktionen des geodätischen Abstandes d und damit auch Funktionen unserer Fundamentalinvarianten. Wir werden daher auch sehr oft für $k(z', z)$ einfach $k(t)$ schreiben.

Satz 3,1:

Invariante Integraloperatoren sind vertauschbar.

Beweis: Wir führen den Beweis genau so, wie den entsprechenden Beweis in Kapitel 1.
Es sei

$$L f(z) = \iint_H k(z',z) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

und es sei

$$M f(z) = \iint_H h(z',z) \frac{dx\,dy}{y^2},$$

dann ist

$$(LM) f(z) = \iint_H \Big(\iint_H k(z'',z') h(z',z) \frac{dx'dy'}{y'^2} \Big) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

und

$$(ML) f(z) = \iint_H \Big(\iint_H k(z',z) h(z'',z') \frac{dx'dy'}{y'^2} \Big) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Es gibt nun ein $m \in G$, so daß

$$m z'' = z' \text{ und } m z' = z''.$$

Wegen der Invarianz von L ist

$$k(z'',z') = k(mz'', mz') = k(z',z'')$$

und ebenso ist

$$h(z',z) = h(z,z')$$

Damit wird das Integral

$$J = \iint_H k(z'', z')\, h(z', z)\, \frac{dx'dy'}{y'^2}$$

(3,1)

$$= \iint_H k(z', z'')\, h(z, z')\, \frac{dx'dy'}{y'^2}$$

Es sei nun $m_0 \in G$ mit $m_0 z'' = z$ und $m_0 z = z''$. Setzt man das in (3,1) ein und führt die Variablensubstitution $z' \to m_0 z'$ aus, so wird

$$J = \iint_H k(m_0 z', m_0 z)\, h(m_0 z'', m_0 z')\, \frac{dx'dy'}{y'^2}$$

$$= \iint_H k(z', z)\, h(z'', z')\, \frac{dx'dy'}{y'^2}$$

Diese letzte Gleichung folgt aus der Invarianz von L und M. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Neben den Integraloperatoren werden wir noch den Laplaceschen Operator für die hyperbolische Ebene betrachten:

$$y^2 \Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Man rechnet leicht nach, daß dieser Operator invariant bezüglich der Gruppe G ist.

Wir wollen nun die Vertauschbarkeit dieses Differentialoperators mit den Integraloperatoren untersuchen. Der Integraloperator L_1 habe den Kern $k(z', z)$. Da der Laplacesche Operator und auch $k(z', z)$ invariant sind bezüglich G, so ist

$$y'^2 \Delta_{z'} k(z', z) = y^2 \Delta_z k(z', z)$$

Beachtet man dies, so erhält man

$$(3.2)\quad y^2 \Delta L f(z) - L y^2 \Delta f(z) = \iint_H \left[f(z) \Delta k(z', z) - k(z', z) \Delta f(z) \right] dx\,dy$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird nun umgeformt nach dem Greenschen Satz und es steht rechts in (3.2)

$$\lim_{\varrho \to \infty} \oint_{K_\varrho} \left(f \frac{\partial k}{\partial n} - k \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds,$$

wobei K_ϱ den geodätischen Kreis mit dem Radius ϱ um einen festen Punkt bezeichnet.

X Hier sollte etwas über kompaktes $\mathfrak{D}$ stehen! Was?

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Eigenwerte unserer Operatoren zu. Es seien $f(z)$ und $g(z)$ seien zwei nicht-identisch verschwindende Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators zu demselben Eigenwert λ. Es gelte also

$$\lambda f(z) = y^2 \Delta f(z) \text{ und } \lambda g(z) = y^2 \Delta g(z).$$

Es gibt nun sicher ein z_0, so daß $f(z_0) \neq 0$ und $g(z_0) \neq 0$ sind; denn der Operator ist elliptisch. Es sei nun m_φ die Drehung von H mit dem Winkel φ um z_0. Es ist dann mit $f(z)$ auch $f(m_\varphi z)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ und

$$v = \int_0^{2\pi} f(m_\varphi z)\, d\varphi$$

ist auch Eigenfunktion zum Eigenwert λ. Diese so gewonnene Eigenfunktion v wollen wir ~~die~~ eine symmetrisierte Eigenfunktion nennen. Es hängt v nur vom geodätischen Abstand r ab. Es seien nun $v(r)$ und $u(r)$ zwei symmetrisierte Eigenfunktionen zum gemeinsamen Eigenwert λ. Es sei K_ϱ der geodätische Kreis mit dem Radius ϱ um den Punkt z_0; dann gilt:

$$J = \iint\limits_{K_\varrho} \left[u y^2 \Delta v - v y^2 \Delta u \right] \frac{dx\,dy}{y^2} = 0$$

Wir formen nun das Integral nach dem Greenschen Satz um und erhalten

$$J = \int\limits_{C_\varrho} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds .$$

Hierbei bedeutet C_ϱ den Rand des Kreises K_ϱ. Da ϱ beliebig war folgt

$$u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

d.h. $u(r)$ und $v(r)$ sind linear-abhängig. Das Ergebnis unserer Untersuchung ~~können~~ wir wie folgt aussprechen: Die symmetrisierten Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators sind eindeutig (bis auf einen konstanten Faktor) durch den Eigenwert bestimmt.

Dieses Ergebnis kann man nun benützen um eine Beziehung zwischen den Eigenwerten des Differentialoperators und der Integraloperatoren für die es gemeinsame Eigenfunktionen gibt. Das soll im Folgenden geschehen.

Zunächst ist y^s eine Eigenfunktion von $y^2\Delta$; denn es gilt: $\quad y^2 \Delta y^s + s(1-s) y^s = 0$

Wir zeigen nun y^s ist auch Eigenfunktion des invarianten Integraloperators mit dem Kern $k(z', z)$; gleichzeitig werden wir den zugehörigen Eigenwert des Integraloperators als Funktion von s ausrechnen. Es ist $k(z', z)$ invariant, also eine Funktion von

$$t(z', z) = \frac{|z - z'|^2}{yy'} = \frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} - 2 + \frac{(x-x')^2}{yy'}$$

Wir berechnen nun

$$J = \iint_H k(z', z)\, y^s \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} k\left(\frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} - 2 + \frac{(x-x')^2}{yy'}\right) y^s \frac{dx\,dy}{y^2}$$

Wir substituieren nun $x \to x + x'$ und beachten, daß k dann ~~nur~~ von x^2 abhängt; dann ist

$$J = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k\left(\frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} - 2 + \frac{x^2}{yy'}\right) y^s \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Nun substituieren wir $x \to x\sqrt{yy'}$, dann wird

$$J = 2\sqrt{y'}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k\left(\frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} - 2 + x^2\right) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dx\,dy}{y}.$$

Schließlich führen wir noch die Substitution $y \to yy'$ aus und erhalten

$$J = y'^{s} \left[2 \int_0^\infty \int_0^\infty k\left(y + \frac{1}{y} - 2 + x^2\right) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dx\,dy}{y} \right]$$

Daraus ersieht man nun, daß ~~y^s~~ y^s Eigenfunktion ~~von~~ des Integraloperators ist und die eckige Klammer gibt den Eigenwert als Funktion von s.

Nun sei Γ eine diskontinuierliche Untergruppe von G, und es sei der Fundamentalbereich $\mathfrak{D}$ von Γ kompakt. Wir wissen also, Γ enthält keine parabolischen Substitutionen und das Volumen von $\mathfrak{D}$ ist endlich. Es sei nun $\chi(M)$ eine unitäre Darstellung von Γ durch $r \times r$-Matrizen. Wir betrachten nun r-Tupel von Funktionen

$$F(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_r(z) \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft

$$\chi(M)\,F(z) = F(Mz)$$

für jedes $M \in \Gamma$.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall, daß $\chi(M)$ eine Darstellung 1. Grades ist. Der allgemeine Fall bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Wir betrachten also Funktionen $f(z)$ mit $f(Mz) = \chi(M)\, f(z)$ für $M \in \Gamma$. Das Integral

$$A = \iint\limits_{H} k(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\,dy}{y^2}$$

mit invariantem Kern wird

$$A = \sum_{M \in \Gamma} \iint\limits_{M\mathfrak{D}} k(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Hierbei bedeutet $M\mathfrak{D}$ das Bild des Fundamentalbereiches $\mathfrak{D}$ bei der Transformation M und unsere Gleichung folgt daraus, daß die Bilder von $\mathfrak{D}$ unter Γ die ganze Ebene H lückenlos und einfach überdecken. Wir betrachten in der obigen Summe nun einen festen Summanden:

$$A_M = \iint\limits_{M\mathfrak{D}} k(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Wir beachten nun, daß $k(z', z) = k(Mz', Mz)$ und $f(z) = \overline{\chi}(M)\, f(Mz)$ und substituieren $z \to M^{-1}z$ und erhalten also

$$A_M = \iint_{\mathcal{D}} \bar{\chi}(M)\, k(Mz', z)\, f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Setzen wir nun noch

$$\mathbb{K}(z', z) = \sum_{M \in \Gamma} \bar{\chi}(M)\, k(Mz', z)$$

so wird

$$\iint_H k(z', z) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2} = \iint_{\mathcal{D}^c} \mathbb{K}(z', z) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

Allerdings ist diese Umformung zunächst nur eine formale; denn es fehlt der Nachweis, daß die Reihe für $\mathbb{K}(z', z)$ konvergiert.

Satz 3.2:

Ist $k(z', z) = k(t)$ stetig und gilt $k(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$ mit $\varepsilon > 0$, so existiert $\mathbb{K}(z', z)$ und ist in $\mathcal{D}^c$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis: Es ist, wie oben:

$$\iint_H |k(z, z')| \frac{dx\,dy}{y^2} = \iiint_{\mathcal{D}^c} \left\{ \sum_{M \in \Gamma} |k(Mz, z')| \right\} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

Wir führen nun in H Polarkoordinaten ein und erhalten

$$\iint_H |k(z,z')| \frac{dx\,dy}{y^2} = \pi \int_0^\infty |k(t)|\,dt .$$

Nach den Voraussetzungen des Satzes konvergiert das rechtsstehende Integral. Damit ist gezeigt, daß die Reihe für $K(z,z')$ wenigstens für ein Punktepaar $z_0, z_0' \in \mathcal{D}^c$ absolut konvergiert.
Es seien nun $z, z' \in \mathcal{D}^c$, dann gilt:

$$d(Mz, z') \geq d(Mz_0, z_0') - d(z, z_0) - d(z', z_0').$$

Hierbei beachte man, daß $d(Mz, Mz_0) = d(z, z_0)$ ist.
Nun sind aber $d(z, z_0)$ und $d(z', z_0')$ beschränkt in $\mathcal{D}^c$. Es gilt also mit einer passenden Konstanten

$$d(Mz, z') \geq d(Mz_0, z_0') - c .$$

Ferner ist

$$t = e^d + e^{-d} - 2$$

und also
$$e^{-(1+\varepsilon)d} = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right).$$

Damit sieht man, daß

$$\sum_{M \in \Gamma} |k(Mz, z')|$$

bis auf einen konstanten Faktor, der nicht von z und z' abhängt, durch die Reihe

$$\sum_{M\in\Gamma}{}' \left| k(Mz_0, z_0') \right| \quad \text{majorisiert wird.}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wählen nun einen invarianten Kern k, der stetig ist und für den $k(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$. Weiter betrachten wir Funktionen $f(z)$ mit den Eigenschaften

$$1.)\qquad \chi(M) f(z) = f(Mz) \quad \text{für alle } M\in\Gamma$$

und

$$2.)\qquad \lambda f(z') = \iint_H k(z', z) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

Aus den (~~vorstehenden~~) vorhergehenden Umformungen sehen wir, daß

$$\lambda f(z') = \iint_{\mathfrak{D}} \underline{K}(z', z) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Umgekehrt ergibt jede Eigenfunktion des Integraloperators mit dem Kern $\underline{K}(z', z)$ eine Funktion mit den Eigenschaften (1) und (2.). Wir haben also das Studium dieser Funktionen auf das Studium der Eigenfunktionen des Kernes $\underline{K}(z', z)$ zurückgeführt. Nun legen wir noch den Definitionsbereich dieses Operators fest; und zwar soll

$$\iint_{\mathfrak{D}^c} |f|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} < \infty \quad \text{sein.}$$

Aus der Reihendarstellung von $K(z', z)$ sieht man, daß $K(z', z)$ ein normaler Kern ist; ist $k(t)$ reell, so ist der zugehörige Kern $K(z', z)$ sogar hermitesch.

Aus der Theorie der Integralgleichungen entnehmen wir folgende Tatsachen

a.) Die Eigenwerte von $K(z', z)$ sind diskret. (d.h. die Eigenwerte besitzen höchstens 0 als Häufungspunkt.)

b.) Zu jedem von 0 verschiedenen Eigenwert gibt es nur endlich viele Eigenfunktionen.

Wir erwähnen noch den

<u>Satz 3,3</u>:

Das System aller Eigenfunktionen des Operators

$$\iint_{\mathfrak{D}} K(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\,dy}{y^2}$$

ist vollständig.

X <u>Beweis:</u> Fehlt!

Der Operator $\iint\limits_H k(z', z)\, f(z)\, \frac{dx\,dy}{y^2}$ mit

$k(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$ ist mit dem Operator $y^2\Delta$ vertauschbar; es gibt also auch ein System gemeinsamer Eigenfunktionen für die Integral= operatoren und den Laplaceschen Operator. Ferner wissen wir, ist

$$y^2 \Delta f(z) + s(1-s) f(z) = 0$$

und ist $f(z)$ auch Eigenfunktion für den Kern $k(z', z)$ und gilt also

$$\lambda f(z') = \iint\limits_H k(z', z) f(z) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

mit

$$\lambda = 2 \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty k\left(\frac{1}{y} + y - 2 + x^2\right) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dx\,dy}{y}$$

Das Integral auf der rechten Seite nennen wir J; wir wollen es noch ein wenig um= formen. Doch zuvor bemerken wir, da $y^2\Delta$ ein elliptischer Operator ist, so gibt es ~~nur~~ höchstens dann Eigenfunktionen mit

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} |f|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} < \infty \quad \text{und} \quad f(Mz) = \chi(M) f(z)$$

wenn $s(1-s)>0$ ist. Setzt man $s=\sigma+it$, so kann man sich bei der folgenden Berechnung auf $0\leq\sigma\leq 1$ beschränken.

Wir setzen nun

$$q(v) = 2\int_0^\infty k(v+x^2)\,dx.$$

Nach der Substitution $v+x^2=t$ wird

$$q(v) = \int_v^\infty \frac{k(t)}{\sqrt{t-v}}\,dt.$$

Damit wird

$$J = \int_0^\infty q\left(y+\frac{1}{y}-2\right) y^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{dy}{y}.$$

Wir setzen nun noch $y=\log u$ und

$$q\left(e^u+e^{-u}-2\right) = g(u)$$

und erhalten so

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\cdot e^{(s-\frac{1}{2})u}\,du.$$

Endlich setzen wir noch $ir=s-\frac{1}{2}$ und erhalten die endgültige Formel

$$J = h(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,e^{iru}\,du$$

Die Beschränkung auf ~~0~~ $\leq \sigma \leq 1$ lautet in r: $\quad |\mathcal{J}(r)| \leq \frac{1}{2}$; dabei bedeutet $\mathcal{J}(r)$ den Imaginärteil von r.

Im Folgenden werden k und $h(r)$ die Hauptrolle spielen. Wir wollen nun zeigen: Ist $h(r)$ vorgegeben, so ist $k(z', z)$ eindeutig bestimmt. Natürlich darf man $h(r)$ nicht willkürlich vorgeben, aber es gilt der ~~Satz~~

Satz 3,4:

Die Funktion $h(r)$ genüge im Streifen $|\mathcal{J}(r)| < \frac{1}{2} + \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$; folgenden Bedingungen:

1.) $h(r)$ ist gerade in dem Streifen
2.) $h(r)$ ist regulär in dem Streifen
3.) $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{2+\varepsilon}}\right)$ in dem Streifen;

dann ist $k(t)$ eindeutig bestimmt durch $h(r)$, und es ist $k(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$. Ferner ist die durch dieses k bestimmte Funktion $h(r)$ identisch mit der gegebenen.

Zum Beweise betrachten wir das Integral

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\, e^{iru}\, du$$

mit reellem u. Dieses Integral ist offensichtlich absolut konvergent. Zur Abschätzung der Größenordnung von $g(u)$ verschieben wir den Integrationsweg mit Hilfe des Cauchyschen Satzes auf die Parallele zur reellen Achse durch den Punkt $\frac{1}{2}(1+\varepsilon)i$. Dann rechnet man sofort nach, daß

$$g(u) = O\left(e^{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)u}\right)$$

Ferner ist wegen $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{2+\varepsilon}}\right)$ die Differentiation unter dem Integralzeichen erlaubt und man sieht leicht, daß

$$g'(u) = O\left(e^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)|u|}\right)$$

ist. Wir setzen

$$g(u) = q\,(e^{u}+e^{-u}-2) \text{ und}$$

erhalten aus dem Obigen:

$$q(v) = O\left(\frac{1}{v^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right)$$

$$q'(v) = O\left(\frac{1}{v^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\right).$$

Nun bilden wir

$$k(t) = -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{dq(v)}{\sqrt{v-t}}$$

und eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$k(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right).$$

Die letzte Behauptung des Satzes ergibt sich daraus, daß die im Beweise gegebenen Formeln resiprok zu den Formeln von S. sind.

§ 4. Die Spurformel für den kompakten Fall.

Wir haben im letzten Kapitel schon den Kern $K(z', z)$ betrachtet. Unser Plan ist nun folgender: Wir werden prüfen, wann die Spurformel für die Eigenwerte gültig ist:

$$(4.1) \qquad \sum_r h(r) = 2 \iint_{\mathfrak{D}} K(z,z) \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

?

Wir kennen bei gegebenem k ~~das~~ den zugehörigen Kern $K(z', z)$ und die Funktion $h(r)$. Wir werden nun die rechte Seite von (4.1) berechnen und die einzelnen Terme durch $h(r)$ ausdrücken und dann die Ergebnisse beider Seiten miteinander vergleichen.

Da $K(z', z)$ stetig und gleichmäßig beschränkt ist, so gilt bekanntlich sicher

$$\sum_r h^2(r) = 2\iint_{\mathcal{D}}\iint_{\mathcal{D}} |\underline{K}(z',z)|^2 \frac{dx\,dy}{y^2}\,\frac{dx'dy'}{y'^2}.$$

Nimmt man also die Quadrate der zulässigen Operatoren, so ist die Spurformel gültig. Sind nun h_1 und h_2 zulässige Funktionen (d.h. Funktionen, die die Bedingungen des Satzes erfüllen; dann ist die Spurformel für die ~~zugehörigen Operatoren gültig~~ zu h_1^2 und h_2^2 gehörenden Operatoren gültig und natürlich auch für den zu

$$h_1 h_2 = \frac{1}{4}\left\{(h_1+h_2)^2-(h_1-h_2)^2\right\}$$

gehörenden Operator gültig. Ist also $h(r)$ als Produkt zweier zulässiger Funktionen darstellbar, so ist die Spurformel gültig. Nun ist aber die zulässige Funktion $h(r)$ sicher in ein solches Produkt zerlegbar, wenn $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{4+\varepsilon}}\right)$ ist.
Wir halten zunächst an dieser Bedingung für $h(r)$ fest und werden später die Spurformel für alle ~~Wer~~ zulässigen $h(r)$ beweisen.

Wir berechnen nun die rechte Seite von (4.1). Zunächst eine Verabredung über unsere Bezeichnungen. Zwei Elemente M_1 und M aus Γ wollen wir äquivalent nennen, wenn es ein $N \in \Gamma$ gibt, so daß

$$M = N M_1 N^{-1}$$

ist. Wir schreiben dafür $M \sim M_1$. Es ist nun

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} K(z,z)\frac{dx\,dy}{y^2} = \iint\limits_{\mathfrak{D}^c} \sum_{M\in\Gamma}{}' \overline{\chi}(M)\, k(Mz,z)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Wir fassen nun alle Summanden zusammen, deren M untereinander äquivalent sind. Das ergibt einen Ausdruck von der Form:

$$(4.2) \qquad \overline{\chi}(M_0) \sum_{M\sim M_0}{}' \iint\limits_{\mathfrak{D}^c} k(Mz,z)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Es sei nun etwa $M_0 = N^{+1} M N^{-1}$, dann wird

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} k(N^{-1}M_0Nz,\, z)\frac{dx\,dy}{y^2} = \iint\limits_{\mathfrak{D}} k(M_0Nz, Nz)\frac{dx\,dy}{y^2}$$

wegen der Invarianz des Kernes. Wir substituieren nun rechts $z \to N^{-1}z$ und erhalten

$$\iint\limits_{N\mathfrak{D}} k(M_0z, z)\frac{dx\,dy}{y^2}$$

Wir erhalten also für die Summe in (4.2) den Ausdruck

$$\overline{\chi}(M_0) \iint\limits_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(M_0z, z)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{D}_{M_0} = \bigcup\limits_{\nu} N_\nu \mathfrak{D}^c$, wobei die N_ν ein vollständiges Repräsentantensystem für die Restklassen von Γ nach Γ_{M_0} sind. Γ_{M_0} bezeichnet den Zentralisator von M_0 in Γ. Es ist also $\mathfrak{D}_{M_0}$ ein Fundamentalbereich für Γ_{M_0}.

Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

I. $M_0 = E$ (Identität)

Es ist dann $\Gamma_{M_0} = \Gamma$

II. M_0 sei elliptisch; dann ist Γ_{M_0} eine zyklische Gruppe von Drehungen. ~~ist.~~

III. M_0 sei hyperbolisch, und es sei $M_0 = (M_0')^k$ die Darstellung von M_0 als Potenz eines anderen Elementes M_0' aus Γ mit kleinstem möglichen $k \geq 1$ dann ist M_0' ein erzeugendes Element von Γ_{M_0}.

Fall I:

Dann ist $\mathfrak{D}_{M_0} = \mathfrak{D}$ und also

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(M_0 z, z)\frac{dx\,dy}{y^2} = \iint\limits_{\mathfrak{D}} k(z,z)\frac{dx\,dy}{y^2} = k(0)\,A(\mathfrak{D})$$

wobei $A(\mathfrak{D})$ das Volumen von $\mathfrak{D}$ ist. Ferner berechnet man aus unseren Formeln von S.

daß.

$$k(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \, \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} \, h(r) \, dr$$

ist.

Fall III Wegen $k(M_0 z, z) = k(z, M_0^{-1} z) = k(M_0^{-1} z, z)$

~~Wir~~ können wir annehmen, daß $M_0 z = \varrho z$ mit $\varrho > 1$ ist. Es wird dann Γ_{M_0} erzeugt durch $M_0' z = \varrho^{\frac{1}{k}} z$ und ein Fundamentalbereich von Γ_{M_0} ist gegeben durch den Streifen $1 \leq y < \varrho^{\frac{1}{k}}$. Es wird also

$$(4.3) \quad \iint_{\mathcal{D}_{M_0}} k(M_0 z, z) \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{1}^{\varrho^{\frac{1}{k}}} k(\varrho z, z) \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Es ist

$$t(\varrho z, z) = \frac{|\varrho z - z|^2}{\varrho\, y \cdot y} = \frac{(\varrho - 1)^2 |z^2|}{\varrho\, y^2} \quad \text{und}$$

die rechte Seite von (4.3) wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{1}^{\varrho^{\frac{1}{k}}} k\left[\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)\right] \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Wir substituieren $x \to xy$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{1}^{\varrho^{\frac{1}{k}}} k\left[\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}(1 + x^2)\right] \frac{dx\,dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{k} \log \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} k\left[\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}(1+x^2)\right] dx$$

In diesem letzten Integral substituieren wir nun $x \longrightarrow \frac{x\sqrt{\varrho}}{\varrho - 1}$ und wir erhalten:

$$\frac{1}{k}\,\frac{\log \varrho}{\sqrt{\varrho} - \frac{1}{\sqrt{\varrho}}} \int_{-\infty}^{+\infty} k\left[\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho} + x^2\right] dx$$

Dieses letzte Integral ist aber gleich

$$g\left(\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}\right) = g(\log \varrho).$$

Also haben wir schließlich für M_0 hyperbolisch:

$$\iint_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(M_0 z, z)\,\frac{dx\,dy}{y^2} = \frac{1}{k}\,\frac{\log \varrho}{\sqrt{\varrho} - \frac{1}{\sqrt{\varrho}}}\, g(\log \varrho)$$

<u>Fall II</u>

M_0 ist also elliptisch und damit eine Drehung um den Winkel α mit $0 < \alpha < 2\pi$. Wir setzen $M_0 = m_\alpha$. Γ_{M_0} wird erzeugt von einer Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{m}$; m eine natürliche Zahl. $\mathfrak{D}_{M_0}$ ist also der Winkelraum zwischen zwei Geodätischen

Wir haben also

$$\iint_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(m_\alpha z, z)\,\frac{dx\,dy}{y^2} = \frac{1}{m}\iint_{H} k(m_\alpha z, z)\,\frac{dx\,dy}{y^2}$$

Wir nennen das rechtsstehende Integral ohne den Faktor $\frac{1}{m}$ kurz J. Um nun J zu berechnen, führen wir Polarkoordinaten in H ein und zwar nehmen wir als Ursprung der Polarkoordinaten den Punkt $z_0 = i$. Der Fundamentalbereich $\mathfrak{D}_{M_0}$ kann wegen der Invarianz des Kernes k so verschoben werden, dass die Ecke von $\mathfrak{D}_{M_0}$ im Punkte i liegt, ohne daß sich J ändert. Ferner ist $k(m_\alpha z, z)$ ~~nur~~ eine Funktion, die nur vom geodätischen Abstande abhängt. Wir erhalten also

$$J = \pi \int_0^\infty k(t)\, d(e^\varrho + e^{-\varrho} - 2).$$

Nun müssen wir noch

$$t(m_\alpha z, z) = \frac{|m_\alpha z - z|^2}{\mathfrak{I}(m_\alpha z)\cdot y}$$

umformen. Es genügt dazu, nur Punkte z zu betrachten die auf der imaginären Achse liegen und für die $\mathfrak{I}(z) > 1$ ist; denn t ist eine Funktion des geodätischen Abstandes. Der Punkt $z = ie^\varrho$ hat nun von i den Abstand ϱ. Es ist

$$m_\alpha z = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} z + \sin\frac{\alpha}{2}}{-\sin\frac{\alpha}{2} z + \cos\frac{\alpha}{2}}$$

Dieser Ausdruck wird nun mit $z = ie^\varrho$ in die obige Formel für t eingesetzt und man rechnet leicht nach, daß

$$t(m_\alpha z, z) = \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(e^{\varrho} - e^{-\varrho}\right)^2$$

ist. Wir setzen noch $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \beta$ und erhalten

$$J = \pi\int_0^\infty k\left[\beta^2(e^{\varrho}-e^{-\varrho})^2\right](e^{\varrho}-e^{-\varrho})\,d\varrho.$$

Nun führen wir die Variable $t = e^{\varrho}+e^{-\varrho}-2$ ein, und es wird

$$J = \pi\int_0^\infty k\left[\beta^2(t^2+4t)\right]dt$$

Die Substitution $w = \beta^2(t^2+4t)$ führt zu:

$$J = \frac{\pi}{2\beta}\int_0^\infty k(w)\frac{dw}{\sqrt{w+4\beta^2}}.$$

Nun ist aber

$$k(w) = -\frac{1}{\pi}\int_w^\infty \frac{dq(v)}{\sqrt{v-w}}.$$

Wir setzen das in J ein und vertauschen die Integrationen und bekommen

$$J = -\frac{1}{2\beta}\int_0^\infty dq(v)\left[\int_0^v \frac{dw}{\sqrt{(v-w)(w+4\beta^2)}}\right]$$

Das Integral in der eckigen Klammer ist gleich $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{v}}{2\beta}$. Wir setzen dies ein und integrieren partiell und erhalten

$$J = \int_0^\infty \frac{g(v)}{\sqrt{v}\,(4\beta^2+v)}\,dv$$

Wir führen die Variable u ein durch $v = e^u + e^{-u} - 2$ und erhalten

$$J = \int_0^\infty g(u)\,\frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{e^u + e^{-u} - 2}\,du$$

Für $g(u)$ setzen wir nun

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\,e^{iru}\,dr$$

ein; wir vertauschen die Integrationen und haben dann nur noch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}\right)e^{iru}}{e^u + e^{-u} - 2\cos\alpha}\,du$$ zu berechnen. Dieses Integral ist aber gleich

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}\;\frac{e^{\alpha r}}{1+e^{-2\pi r}}\,,$$

und also wird

$$J = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ur}}{1+e^{-2\pi r}}\,h(r)\,dr$$

und es war

$$\iint_{\mathfrak{D}_{M_0}} k(M_0 z, z)\,\frac{dx\,dy}{y^2} = \frac{1}{m}\,J$$

Wir wollen nun unsere Ergebnisse zur endgültigen Spurformel zusammenfassen. Wir bemerken dazu Folgendes: Eine hyperbolische Substitution M aus Γ soll primitiv heißen, wenn sie sich nicht als Potenz eines von M verschiedenen Elementes aus Γ darstellen läßt. Ist M primitiv, so sind es auch alle zu M äquivalenten Elemente. Besitzt ferner M die Normalgestalt

$Mz = \varrho z$ mit $\varrho > 1$, so besitzen auch alle zu M äquivalenten Transformationen denselben Faktor ϱ in ihrer Normalgestalt. Wir nennen ϱ die Norm von M : $N(M) = \varrho$ und sehen, dass diese Norm eindeutig für die ~~zu~~ Klasse $\{M\}$ der zu M äquivalenten Elemente erklärt werden kann durch $N\{M\} = N(M) = \varrho$.

Die Äquivalenzklassen der elliptischen Substitutionen von Γ entsprechen ~~eineindeutig~~ den Zyklen von $\mathfrak{D}$, indem man der elliptischen Substitution M_0 denjenigen Eckenzyklus zuordnet der einen zum Fixpunkt z_0, mit $\mathfrak{I}(z_0) > 0$, äquivalenten Punkt enthält. Jedem Zyklus ist kann eine „erzeugende" Substitution S zugeordnet werden, deren Periode m ist, wobei

$m = 2\pi /$ Summe der Winkeln des Zyklus, und es ist S eine erzeugende Substitution von Γ_{M_0}. Nach diesen Vorbemerkungen fassen wir nun die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen in der Spurformel:

$$\sum_r h(r) = \frac{A(\mathcal{D})}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r\, \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{\pi r}}\, h(r)\, dr +$$

$$+ \cancel{2} \sum_{(S)} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\chi^k(S)}{m \cdot \sin\frac{k}{m}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi k}{m} r}}{1 + e^{-2\pi r}}\, h(r)\, dr \right)$$

$$+ 2 \sum_{\{P\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi^k(\{P\}) \log N\{P\}}{N\{P\}^{\frac{k}{2}} - N\{P\}^{-\frac{k}{2}}}\, g(k \log N\{P\})$$

Wir haben in dieser Formel χ statt $\overline{\chi}$ geschrieben, doch ~~ist~~ das ist erlaubt; denn wir hätten zu Beginn unserer Betrachtungen nur die Darstellung $\overline{\chi}$ anstatt χ wählen müssen um dieses Resultat zu erhalten. Im zweiten Teil der Spurformel, dem elliptischen Teil, ist über die k^+ erzeugenden Substitutionen der verschiedenen Zyklen zu summieren und im dritten Teil bedeutet das erste Summenzeichen, daß über alle verschiedenen primitiven Klassen $\{P\}$ zu summieren ist.

Die obige Formel war das Ziel unserer Be=trachtungen; allerdings haben wir sie nur bewiesen für zulässige $h(r)$ mit $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{4+\varepsilon}}\right)$; $\varepsilon > 0$; Wir wollen nun zeigen, daß die Formel gültig bleibt, wenn $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{2+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$. Unter dieser schwächeren Bedingung ist die rechte Seite der Spurformel auch noch konvergent, wie man leicht sieht. Nur die ~~rechte~~ linke Seite muß nun noch betrachtet werden. Wir wählen zunächst ein spezielles $h(r)$, nämlich $h(r) = e^{-\frac{r^2}{M^2}}$, M konstant; diese Funktion ist sicher zulässig, und es ist $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{4+\varepsilon}}\right)$. Es wird für dieses $h(r)$:

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{M^2} + rui}\, dr = \frac{M \cdot e^{-\frac{M^2 u^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$$

Wir untersuchen nun, was geschieht, wenn $M \to \infty$. Der hyperbolische Teil der Spurformel strebt, wie man sieht, gleichmäßig gegen 0. Der elliptische Teil strebt gleichmäßig gegen eine Konstante.
Wir betrachten nun den Teil I der von der Identität herrührt; es ist

$$|I| < \int_{-\infty}^{+\infty} |r|\, e^{-\frac{r^2}{M^2}}\, dr = \cancel{M}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{M^2}}\, d(r^2) = M^2$$

Weiter sieht man leicht ein, ist die Spurformel für eine Klasse zulässiger Funktionen gültig, so ist sie auch für die Funktionen gültig, die aus dieser Klasse durch gleichmäßige Konvergenz hervorgehen. Ist nun $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{2+\varepsilon}}\right)$ eine zulässige Funktion, dann ist $h_\delta(r) = h(r)e^{-\delta r^2}$; $0 \le \delta \le 1$ eine zulässige Funktionenklasse, für die die Spurformel gültig ist, denn es ist $h_\delta(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{4+\varepsilon}}\right)$. Weiter ist $h(r) = \lim\limits_{\delta \to 0} h_\delta(r)$ und zwar gleichmäßig in r. Damit ist also unsere Spurformel auch gültig für $h(r) = O\left(\frac{1}{|r|^{2+\varepsilon}}\right)$.

§5. Anwendung der Spurformel.

Unsere Ergebnisse werden wir nun anwenden für ein spezielles $h(r)$; und zwar sei

$$h(r) = \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + r^2} - \frac{1}{a^2 + r^2}$$

mit $a > \frac{1}{2}$ und $\sigma > 1$, wenn $s = \sigma + it$ gesetzt wird. Die Funktion $h(r)$ ist eine zulässige Funktion; wir können also die Spurformel aufstellen. Zunächst berechnen wir

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + r^2} - \frac{1}{a^2 + r^2} \right) e^{iru}\, dr$$

Zunächst rechnen wir dieses Integral für $u \geq 0$ aus und zwar mit Hilfe des Residuensatzes, indem wir um einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt O integrieren und dann dessen Radius ~~nach~~ ~~unendl~~ $R \to \infty$. Beachtet man noch, daß $h(r)$ eine gerade Funktion ist, so findet man

$$g(u) = \frac{e^{-(s-\frac{1}{2})|u|}}{2(s-1)} - \frac{e^{-a|u|}}{2a}.$$

Wir bezeichnen nun den von der Identität herrührenden Teil in der Spurformel mit I, den elliptischen Teil mit II und den hyperbolischen Teil mit III. Setzt man nun den gefundenen Ausdruck für g in Teil III ein, so tritt eine Summe der Form:

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}} \sum_{\{P\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi^k(P) \log N\{P\}}{N^{\frac{k}{2}}\{P\} - N^{-\frac{k}{2}}\{P\}} N^{-(s-\frac{1}{2})k}\{P\}$$

oder, was dasselbe ist

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}} \sum_{\{P\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi^k(P) \log N\{P\}}{1 - N^{-k}\{P\}} N^{-sk}\{P\}$$

Die Summe über k kann ~~man~~ man verwandeln in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi^k(P)\, N\{P\}^{-ks-k\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\chi(P) N\{P\}^{-s-\nu}}{1-\chi(P) N\{P\}^{-s-\nu}}$$

Setzt man noch

$$Z(s,\chi) = \prod_{\{P\}} \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \chi(P)\left(N\{P\}\right)^{-s-\nu}\right)$$

so wird:

$$\text{III} = \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \frac{Z'}{Z}(s,\chi) - \frac{1}{a} \frac{Z'}{Z}(a+\tfrac{1}{2},\chi)$$

Wir berechnen nun Teil I und setzen

$$\alpha(r) = \frac{1}{2ir}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}-ir} - \frac{1}{a-ir}\right\}$$

und

$$\beta(r) = \frac{1}{2ir}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}+ir} - \frac{1}{a+ir}\right\};$$

dann ist $h(r) = \alpha(r) - \beta(r)$.

Es ist

$$\text{I} = \frac{A(\mathcal{D})}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} \left(\alpha(r) - \beta(r)\right) dr$$

$$= \frac{2A(\mathcal{D})}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} \alpha(r)\, dr$$

$$= \frac{A(\mathcal{D})}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} \left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}-ir} - \frac{1}{a-ir}\right\} dr$$

Dieses Integral berechnen wir wieder nach dem Residuensatz indem wir die Residuen der oberen Halbebene benützen. Die Polstellen liegen wegen unserer Beschränkung von s an den Stellen $r = (k+\frac{1}{2})i$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$. Es ergibt sich

$$\underline{I} = \frac{A(\mathcal{D})}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s+k} - \frac{1}{a+k+\frac{1}{2}} \right\}$$

Bei der Berechnung von $\underline{II}$ ~~setzen~~ benützen wir die Zerlegung:

$$h(r) = \frac{1}{2(s-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-ir} + \frac{1}{s-\frac{1}{2}+ir} \right)$$

Wir haben nun Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{2l\pi}{m} r}}{1 + e^{-2\pi r}} h(r)\, dr$$

auszurechnen. Für den ersten Summanden von $h(r)$ benützt man wieder die Residuen in der oberen Halbebene und für den zweiten die Residuen in der unteren Halbebene. Man erhält für das obige Integral den Wert:

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)l\pi}{m}}{s+k}$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{II} = \frac{2}{s-\frac{1}{2}} \sum_{\{R\}} \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{\chi^{\ell}(R)}{\sin\frac{\ell\pi}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2k+1)\ell\pi}{m}}{s+k}$$

Wir haben also

$$\sum_r \left(\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+r^2} - \frac{1}{a^2+r^2} \right) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Wir ~~erweitern~~ multiplizieren diese mit $s-\frac{1}{2}$ und erhalten

$$\sum_r \left(\frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+r^2} - \frac{a-\frac{1}{2}}{a^2+r^2} \right) = \mathrm{I}^* + \mathrm{II}^* + \mathrm{III}^*$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun Aussagen über die Funktion $\frac{Z'}{Z}(s,\chi)$ machen. Die Singularitäten dieser Funktion liegen bei $s = \frac{1}{2} + ir$, wie man aus der linken Seite der Formel sieht und bei $s = -k$ $(k = 0, 1, \dots)$, wie man aus der rechten Seite ersieht. Also $\frac{Z'}{Z}(s,\chi)$ ist eine meromorphe Funktion mit Polen in den genannten Stellen. Ferner sieht man leicht ein, daß das Residuum in $s = \frac{1}{2}+ir$ gleich 1 ist. An der Stelle $s = -k$ erhält man zum Residuum von I^* den Beitrag $\frac{A(\mathfrak{D})}{\pi}$ und von II^* den Beitrag $\sum_\nu \frac{1}{m_\nu}$ summiert über alle verschiedenen Zyklen von $\mathfrak{D}$.

Es ist aber (siehe Kapitel 2)

$$\frac{A(\mathfrak{d})}{\pi} + \sum_{\nu} \frac{2}{m_\nu} \equiv 0 \pmod{1};$$

also haben wir auch hier ein ganzzahliges Residuum. Wir sehen also $Z(s, \chi)$ ist eine eindeutige Funktion; sie ist eine ganze Funktion mit Nullstellen bei $s = \frac{1}{2} + ir$ und $s = -k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$

Hier fehlt:

1) Produktzerlegung für $Z(s, \chi)$

2.) Funktionalgleichung

und so weit ich mich erinnere, haben Sie etwas über die asymptotische Abschätzung der Eigenwerte erwähnt.