4/11/76

Cher Luc,

Les pinceaux donnent la conjecture de ma lettre à Katz dans le cas général.

Soit : X projectif lisse ; D diviseur lisse ; $D' \subset D$ diviseur lisse dans D ; $\mathcal{F}$ faisceau lisse de rg 1 sur $U = X - D$ ramifié le long de D, localement défini par $\psi : \mathbb{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ et un revêtement d'Artin Schreier se ramifiant comme suit :

pour $x = 0$ équation locale pour D, $x = y = 0$ pour D' :

$$T^p - T = y/x^d, \quad \text{avec } (d,p) = 1.$$

Soit $\mathcal{F}'$ le faisceau virtuel $\mathcal{F}' = j_!\mathcal{F} - j_!\mathbb{Q}_\ell + i_*(\mathbb{Q}_\ell)_{D-D'}$. Alors

$$\chi(\mathcal{F}') = 0.$$

Preuve par récurrence. On prend un pinceau de Lefschetz général

a) χ ne change pas par passage à l'éclaté associé au pinceau [utilise la nullité de χ pour l'intersection de X avec l'axe : on l'a par récurrence]

b) χ de la section hyperplane générale est 0 [par récurrence]

c) il ne se passe un accident que quand la section devient tangente à X, D ou D'. ailleurs, on a en effet une situation produit [loc. en haut, $(X, \mathcal{F})$ est produit de la section par le paramètre de la section]

d) pour un pinceau général de haut degré, chacun de ses accidents apporte une contribution :

$$\chi = \alpha(\#\text{ tg à } X) + \beta(\#\text{ tg à } D) + \gamma(\#\text{ tg à } D').$$

On fait maintenant varier le degré du pinceau.

Lemme : Soit $X \subset \mathbb{P}$ projectif lisse. La classe de X dans le $n^{\text{ième}}$ plongement de Segre (par $\mathcal{O}(n)$) est un polynome en n, de degré <u>égal</u> à $\dim(X)$

un calcul facile montre que le coefficient de $x^{\dim X}$ est $\deg_X \mathcal{O}(1) = [c_1 \mathcal{O}(1)]^{\dim X}$.
(méthode des pinceaux, et calcul de χ d'une section hyperplane ...)

Dès lors, on a , variant le degré

$$\underbrace{\chi}_{c^{(2)}} = \alpha(\text{pol } d^\circ \dim X) + \beta(\text{pol } d^\circ(\dim X - 1)) + \gamma(\text{pol } d^\circ(\dim X - 2))$$

<u>d'où</u> si $\dim X \geq 3$, on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\chi = 0$.

le cas $\dim X \leq 2$ ayant déjà été traité, ceci achève la preuve.

Bien à toi

Y Deligne