Bures, le 9 octobre 1973

Cher Henri,

Soit X un espace analytique complexe, et

$$\varepsilon : X_* \longrightarrow X$$

un espace analytique lisse simplicial qui soit un hyperrecouvrement propre de X

|| <u>Conjecture</u> : $R\varepsilon_{**}(\Omega^p_{X_*}) \in D^+_{coh}(X, \mathcal{O})$ est indépendant du choix de X_*

[Notation : $\underline{\underline{\Omega}}^p_{X_*}$]

<u>Rmq</u> : ceci clarifie beaucoup ce que je fais dans Hodge III. On a mis X un double complexe, avec $d_1^{\cdot\cdot}$ linéaire et $d_2^{\cdot\cdot}$ opérateur différentiel du premier ordre, et bien défini à quasi-isomorphisme filtré près (c'est $R\varepsilon_{**}\Omega^*_{X_*}$, de gradué les $R\varepsilon_{**}\Omega^p_{X_*}$).

Pour X projectif, la suite spectrale dégénérée en E_1 qui aboutit à la filtration de Hodge est

$$H^q(X, \underline{\underline{\Omega}}^p) \Rightarrow H^{p+q}(X^{an}, \mathbb{C}).$$

<u>Evidence</u> : il suffit sans doute, par dévissage, de voir ceci :

Soit X lisse, $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ l'éclatement de $Y \subset X$ lisse de codim c, et $\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$.

Soit le système des $(\tilde{X}/X)^{\Delta_n} \xrightarrow{\varepsilon_n} X$

on a $(\tilde{X}/X)^k = \tilde{X}$ recollé selon $\tilde{Y}$ à $(\tilde{Y}/Y)^n$ (inclusion diagonale de $\tilde{Y}$).

Soit $\underline{\underline{\Omega}}^p_{(\tilde{X}/X)^k}$ défini comme $\operatorname{Ker}(\Omega^p_{\tilde{X}} \oplus \Omega^p_{(\tilde{Y}/Y)^n} \longrightarrow \Omega^p_{\tilde{Y}})$

<u>Alors</u> $\Omega^p_X \xrightarrow{\approx} R\varepsilon_{**}\underline{\underline{\Omega}}_{(\tilde{X}/X)^k}$.

"Preuve" : a) soit $\eta : (\tilde{Y}/Y)^{\Delta_*} \longrightarrow Y$. On a $R\eta_{**}\Omega^p = \Omega^p$

(clair : il y a des sections locales)

b) ceci permet de simplifier la figure :

Le fait géométrique devient que $X \sim$ la réalisation géométrique de

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{X} \\ & Y \end{tikzcd}$$

, et il faut vérifier un triangle

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$$0 \to \Omega^p_X \longrightarrow \Omega^p_Y \oplus R\pi_* \Omega^p_{\tilde{X}} \longrightarrow R\pi'_* \Omega^p_{\tilde{Y}} \to 0$$

<u>Soit</u> : a) $\Omega^p_X \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega^p_{\tilde{X}}$ et $\Omega^p_Y \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega^p_{\tilde{Y}}$

b) $R^i \pi_* \Omega^p_{\tilde{X}} \xrightarrow{\sim} R^i \pi'_* \Omega^p_{\tilde{Y}}$ $(i>0)$

~~qui provient de la suite exacte~~

$$\cancel{0 \to \pi^* \Omega^p_X \to \Omega^p_{\tilde{X}} \to \Omega^p_Y \to 0}$$

en effet, on a

$$0 \to \pi^* \Omega^1_X \to \Omega^1_{\tilde{X}} \to \Omega^1_{\tilde{Y}/Y} \to 0$$

d'où une filtration de $\Omega^p_{\tilde{X}}$ de quotient successifs :

$$\left.\begin{array}{l} \Omega^p_{\tilde{Y}/Y} \\ \vdots \\ \Omega^p_{\tilde{Y}/Y}(i) \quad (0<i<p) \end{array}\right\} \text{de } R\pi_* = 0$$

et $\pi^* \Omega^p_X$ $\Big\}$ de $R\pi_* = \Omega^p_X$

et l'assertion.

<u>Exemple</u> Pour X projectif, si $\underline{\underline{\Omega}}^0_X = \mathcal{O}$, alors $H^*(X, \mathbb{C}) \to H^*(X, \mathcal{O})$ est surjectif.

<u>Exemple</u> : $\mathcal{X}^0(\underline{\underline{\Omega}}^0_X)$ est le sous-faisceau (sur X) du faisceau d'anneaux sur normalisé de X, formé des f constants dans chaque fibre irréductible. Notant par ^{n} le normalisé, on a

$$0 \to \mathcal{X}^0(\underline{\underline{\Omega}}^0_X) \to \mathcal{O}_{X^n} \rightrightarrows \mathcal{O}_{(X^n \times_X X^n)_{red}}$$

<u>Exemple</u> On doit avoir, pour G groupe fini agissant sur X et $\pi : X \to X/G$:

$$\underline{\underline{\Omega}}_{X/G} = (\pi_* \underline{\underline{\Omega}}_X)^G .$$

si Z = lisse / groupe fini, on doit donc avoir $\underline{\underline{\Omega}}^0 = \mathcal{O}$. Pour une V-variété propre X, posant localement $X = X_1/G$, et $\underline{\Omega}^p_X = (\pi_* \Omega^p_{X_1})^{G_1}$, on a le complexe $\underline{\Omega}^*_X$ donne lieu à une théorie de Hodge standard.

<u>Exemple</u> : si $A = B \amalg_C D$, on doit avoir un triangle

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}_A \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}_B \oplus \underline{\underline{\Omega}}_D \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}_C \to 0$$

si $\underline{\underline{\Omega}}^0 = 0$ pour B, D et C, ce doit donc être pareil pour A

<u>Exemple</u> si $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ est birationnel, et un isomorphisme hors de $Y \subset X$, d'image réciproque $\tilde{Y}$: $\pi' : \tilde{Y} \to Y$, on doit avoir un triangle

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}_X \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}_Y \oplus R\pi_* \underline{\underline{\Omega}}_{\tilde{X}} \longrightarrow R\pi'_* \underline{\underline{\Omega}}_{\tilde{Y}} \to 0$$

<u>Exemple</u> soit X le cône sur une variété projective $V \subset \mathbb{P}^n$. On a,

a) $\Gamma \mathcal{X}^0(\underline{\underline{\Omega}}^0_X) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n>0} H^0(V, \mathcal{O}(n))$

b) $\Gamma \mathcal{X}^i(\underline{\underline{\Omega}}^0_X)$ est le module gradué suivant sur cette algèbre graduée :

$$\bigoplus_{n>0} H^i(V, \mathcal{O}(n))$$

On a $\underline{\underline{\Omega}}^0_X = 0$ si et seulement si, pour $n > 0$, $H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(n)) \to H^*(V, \mathcal{O}(n))$ est surjectif.

<u>Ex.</u> $V = V_m(\underline{a})$, $\sum a_i < n+2$ (FAC 78 Prop 5)

<u>Fonctorialité</u> : a) $\underline{\underline{\Omega}}_X$ doit être fonctoriel en X

b) on a un "cup-produit", au minimum : $\mathcal{X}^i \underline{\underline{\Omega}}^p \otimes \mathcal{X}^j \underline{\underline{\Omega}}^q \to \mathcal{X}^{i+j} \underline{\underline{\Omega}}^{p+q}$

c) si X_* est un hyperrecouvrement propre de X, on doit avoir

$$R\varepsilon_{X*} \underline{\underline{\Omega}}^p_{X_*} = \underline{\underline{\Omega}}^p_X$$

<u>Generalisation</u> a) <u>idéal</u> on devrait avoir une telle théorie pour d'autres faisceaux (complexes de faisceaux) que $\underline{\mathbb{C}}$.

b) <u>au moins</u> : $U \hookrightarrow X$; $Rj_* \mathbb{C}$. (cf Hodge III)

J'espère que ces gribouillis ne sont pas trop cancrés

Bien à toi

P. Deligne