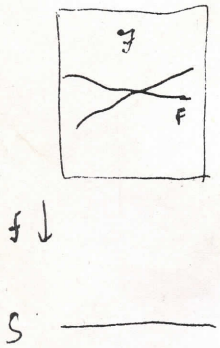
28/10/76

Cher Luc,

Voici une semi-continuité que j'avais conjecturée dans le temps sur les conducteurs de Swan.

Th 1 Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse séparé de dim relative 1, $F \subset X$ fini sur S et $\mathcal{F}$ un faisceau loc. c^t constr. sur $U = X - F$, prolongé par 0 sur X.

(Pour ce qui nous intéresse, $\mathcal{F}$ peut être simplement un faisceau de $\mathbb{Z}/\ell$-modules). On suppose $\mathcal{F}$ de rang constant r



On suppose $F \to S$ universellement ouvert.

Pour $s \in S$, soient $\bar{s}$ un point géométrique en s, et

$$\varphi(s) = \sum_{f \in F_{\bar{s}}} \left(Sw_f(\mathcal{F} \text{ sur } X_{\bar{s}}) + r \right)$$

Alors (i) la fonction $\varphi(s)$ est semi-continue inférieurement, et constructible

(ii) si elle est constante, $(X, \mathcal{F})$ est universellement localement acyclique.

Preuve. Des arguments bien connus donnent que φ est constructible. Ceci ramène la preuve de la semi-continuité au cas où S est un trait. Le résultat suivant ramène de même la preuve de l'acyclicité locale au cas où S est un trait :

Prop 2 Soient $S' \to S$ un morphisme local de schémas strictement locaux, $\bar{\eta}'$ un point géométrique de S', et $\bar{\eta}$ son image dans S. Soient s' et s les points fermés. Soit X sur S, et X' sur S' obtenu par ch^t de base.

$$\begin{tikzcd} X_{\bar{\eta}} \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d] & X \arrow[d] & X_s \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d] \\ \bar{\eta} \arrow[r, hook] & S & s \arrow[l, hook] \end{tikzcd}$$

et de m̂ avec '

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, et que le lieu de non lissité de $(X,\mathcal{F})/S$ coupe X_s en x en un <u>point isolé</u>.

Alors, <u>près de</u> x, $\iota^* R\bar{j}'_* \bar{j}'^* \mathcal{F}'$ est l'image inverse de $\iota^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{F}$ (et est constructible)

<u>Preuve</u> comme SGA 7 <u>XIII</u> 2.4.2 (ingrédients : réduction au cas propre, Th d'acyclicité locale pour amma que "$R\phi$" est à support dans x au voisinage de x, ~~et~~, invariance de la cohomologie par changement de corps alg. clos, et th de ch de base propre pour relier "cycles évanescents" et coh. de la fibre générale)

Supposons donc S un trait strictement local ; les anations (i)(ii) résultent du résultat suivant

<u>Prop 3</u> : Soit $f : X \to S$ lisse séparé, $F \subset X$ fini plat ~~de~~ sur S, et local, de point fermé x, $\mathcal{F}$ localement constant de rang r sur $X - F$, prolongé par 0. On a

$$Sw(\mathcal{F} \text{ sur } X_{\bar{s}}, \text{ en } x) + r = \sum_{f \in F_{\bar{\eta}}} \left(Sw(\mathcal{F} \text{ sur } X_{\bar{\eta}}, \text{ en } f) + r\right) - \dim R\Psi^1_x(\mathcal{F}).$$

<u>NB</u> : a) l'hypothèse de platitude sur F assure que $R\Psi^i_x(\mathcal{F}) = 0$ pour $i \neq 1$; c'est pour ceci qu'on a dans le Th demandé F/S univ. ouvert.

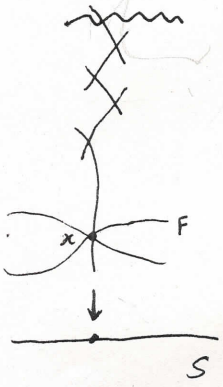
b) pour prouver (i) + (ii), il suffit de prouver ce résultat, avec F connexe : pour $F = \coprod F_i$ en effet, on a
$$\begin{cases} a) & (i) \text{ pour les } F_i \Rightarrow (i) \\ b) & \text{constance de } \varphi(s) \underset{(i)}{\Rightarrow} \text{ constance pour les } F_i, \ldots \end{cases}$$

c) le cas qui m'intéresse le plus est celui où F est une section z de X/S. dans ce cas, on trouve que $Sw(\mathcal{F} \text{ sur } X_{\bar{s}}, \text{ en } z(\bar{s}))$ est semi-continu inférieurement. Toutefois, on peut avoir ~~égalité~~ constance de φ, et ne pas être dans ce cas : deux points quadratiques ordinaire, en car. 0, ($Sw = 0$) peuvent confluer en un point quadratique non dégénéré, en car 2 ($Sw = 1$) :

de façons moins elliptique, considérer sur $\mathbb{A}^1/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_2)$ le faisceau défini par le revêtement double $T^2 + bT + b = 0$, avec où, mod 2, b s'annule simplement en 0.

~~Preuve : Grâce au Th de réduction semi-stable, on se ramène à supposer que X se plonge dans $\overline{X}$ sur S~~

Preuve : il nous est loisible de ramifier S. Ceci nous ramène à supposer que X se plonge dans $\overline{X}$ sur S, propre, et lisse sauf pour un nombre fini de points quadratiques ordinaires en réduction (Th de réduction stable)



Le faisceau $\mathcal{F}$ donne lieu sur $\overline{X}$ à un faisceau loc. c^{t} sur $\overline{X} - F - \underbrace{\text{partie de la fibre spéciale} - \text{partie plate sur } S}_{\text{fermés ne contenant pas } x}$.

Nous allons maintenant passer de $\overline{X}$ à $X'/\overline{X}$; on veut

a) X' est une courbe comme $\overline{X}$, et étale sur X au-dessus de x

b) sur X' - (image réciproque de F), $\mathcal{F}$ se prolonge en un faisceau loc c^{t}.

On le fait par étapes :

X'/S : a) trouver $X'/\overline{X}$ étale au-dessus de x, propre sur $\overline{X}$, au-dessus duquel $\mathcal{F}$ se prolonge en dehors de F' : ce X' sera défini comme un "joint", de sorte qu'il suffit de trouver de tels X' qui, localement sur X, mangent aussi la ramification de $\mathcal{F}$. Le point est que si $\sum a_i T^i = 0$ définit un revêtement de U, ramifié le long de V, alors, si on perturbe les a_i par des quantités très nulles le long de V, on trouve un revêtement qui, le long de V, est localement isomorphe au précédent.

b) réappliquer le Th de réduction semi-stable

situation étudiée, répétée.

Comparons $\chi(X'_s, \mathcal{F})$ et $\chi(X'_{\bar\eta}, \mathcal{F})$

① Par la formule d'E.P. : si $X'/\bar{X}$ est à k feuillets :

$$\chi(X'_{\bar\eta}, \mathcal{F}) = \chi(X'_{\bar\eta}).r - k\Big(\sum_{f\in F_{\bar\eta}} (Sw(\mathcal{F} \text{ en } X_{\bar\eta}, f) + r)\Big)$$

$$\chi(X'_s, \mathcal{F}) = \chi(X'_s).r - k\big(Sw(\mathcal{F} \text{ en } X_s, x) + r$$

$$\chi(X'_s) = \chi(X_s) - \#\, p^{t}\text{ doubles en fibre spéciale}$$

$$\chi(X'_{\bar\eta}, \mathcal{F}) - \chi(X'_s, \mathcal{F}) = -(\#\, p^{t}\text{ doubles sur } X_s).r$$
$$- k\Big(\sum_{f\in F_{\bar\eta}} (Sw + r) - (Sw + r \text{ sur } X_s)\Big)$$

② Par la méthode des cycles évanescents : en x, on a $\phi_x = \psi_x$, et seul $\psi_x^1 \neq 0$. En les points doubles apparus en fibre spéciale, on a seulement ϕ^1, de dim. r. Au total

$$\Delta\chi = -(\#\, p^{t}\text{ doubles sur } X_s).r - k(\psi_x^1 \text{ pour } \mathcal{F}/X).$$

Comparant ces formules, on trouve le résultat annoncé.

<u>Variante</u> : soit $X \hookrightarrow F$: F fini sur S, X lisse de dim 1 sur S en dehors de F,
$\downarrow$
S

$\mathcal{F}$ faisceau loc c^{t} de rang r sur $X - F$.

<u>Alors</u> : pour $\mathcal{F}$ virtuel <u>de dimension 0</u>, on a

$$\sum_{\substack{f\in F_s \\ b \text{ branche par } f \text{ de } X_s}} Sw(\mathcal{F} \text{ sur } b) = \sum_{\substack{f\in F_{\bar\eta} \\ b \text{ branche par } f \text{ de } X_s}} Sw(\mathcal{F} \text{ sur } b) + \sum_{f\in F_s} \dim \psi_x^*(\mathcal{F})$$

$\Gamma(-1)^{i}$...

La preuve est la m̂.

Bien à toi

P. Deligne