28/10/70

3

Cher Luc,

Troisième lettre (j'étais en forme hier)

Th. Soit X propre sur k alg clos, et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux éléments du groupe de Grothendieck des faisceaux ~~[illegible]~~ constructibles de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ ~~[illegible]~~-vectoriels. Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont localement égaux, alors $\chi(\mathcal{F}_1) = \chi(\mathcal{F}_2)$

On procède par récurrence sur la dimension de X. Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

; pour $X' \to X$ birationnel, la récurrence montre qu'il suffit considérer X' ~~[illegible]~~ et les images réciproques $\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2$

$(\chi(X, \mathcal{F}) = \chi(X', \mathcal{F}') + \chi(\text{fermé } F \text{ où } \varphi \text{ n'est pas iso}, \mathcal{F}) - \chi(\varphi^{-1}F, \mathcal{F}'))$

et on regarde la suite spectrale de Leray de f. On a

$$\chi(X', \mathcal{F}') = \chi(\mathbb{P}^1) . \chi(\text{fibre générique}, \mathcal{F}) - \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \text{dim. tot } R\Gamma(X_t, \phi^*(\mathcal{F}'))$$

y compris un Sw, cf SGA 7

On va voir que le 2e membre est terme à terme pareil pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Pour le 1er terme, cela résulte de l'hyp. de récurrence. Reste à voir

$$\text{dim tot } R\Gamma(X_t, \phi^*)$$, voire plus généralement

$$\chi\ R\Gamma(X_t, \phi^*)$$ dans la catégorie des modules munis d'une action de l'inertie. L'hypothèse assure que, dans la catégorie des faisceaux de modules avec action de l'inertie I, ou plutôt son groupe de Grothendieck, $R\phi(\mathcal{F}_1)$ et $R\phi(\mathcal{F}_2)$ sont localement égaux. Reste à disposer de l'hypothèse de récurrence ~~[illegible]~~ pour les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ ~~[illegible]~~ $[I]$-faisceaux. Il suffit de noter que $K(\overline{\mathbb{Z}/\ell}[I]\text{-faisceaux const. sur } X) =$

$$K(\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-faisceaux sur } X) \otimes \underbrace{K(\overline{\mathbb{F}}_\ell[I]\text{-modules})}_{\mathbb{Z}\text{-module de base les } \overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. irred. de } I}$$

<u>Remarque</u> l'ingrédient essentiel de cette preuve est ~~la~~ le théorème de finitude pour les faisceaux de cycles évanescents de SGA $4\frac{1}{2}$.

Par ailleurs, je crois maintenant comprendre χ pour les surfaces, lorsque, en codimension 1, on ne fait pas apparaître d'extension résiduelle inséparable (ceci s'applique donc à la conjecture dans ma lettre à Katz). Je n'ai pas écrit de démonstration complète.

Soit X une surface – supposée normale pour simplifier – sur k algébriquement clos, D un diviseur de Weil sur X, $U = X - D$ et $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant sur U, de rang r.

Par localisation en un point générique δ de D, on obtient un trait X_δ, de corps des fractions K. Le faisceau $\mathcal{F}$ correspond à une représentation fidèle de $Gal(K'/K)$, K' extension galoisienne finie de K. On fait l'hypothèse

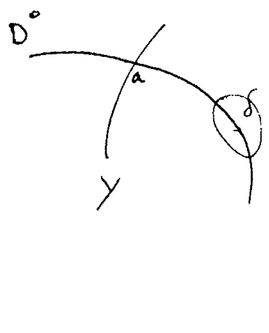
(*) les corps résiduels des points du normalisé de X_δ dans K', qui sont au-dessus de δ sont séparables sur $k(\delta)$

Si $\bar\delta$ est le spectre d'une clôture séparable de δ, et que $X_{(\bar\delta)}$ est le localisé strict de X en $\bar\delta$, avec les mêmes notations, (*) devient

(*') ~~le cor~~ le corps résiduel de K' coïncide avec celui de K

On peut sous cette hypothèse définir le <u>conducteur de Swan</u> de $\mathcal{F}$ en $\bar\delta$ – noté $Sw(\mathcal{F}$ en $\bar\delta)$ – et il existe un ouvert lisse dense D° de D, tel que chaque fois qu'une courbe lisse Y sur X coupe <u>transversalement</u> D° en un point a, spécialisation d'un point générique δ, on ait

$$Sw(\mathcal{F}|Y \text{ en } a) = Sw(\mathcal{F} \text{ en } \bar\delta).$$



{Tout ceci vaut pour tout D diviseur lisse $\subset X$ lisse, en toute dimension;}

Si Y bouge, et continue à couper D dans D° transversalement, on est dans une situation d'acyclicité locale (lettre précédente). On peut le voir de façon directe : le point est que $\mathcal{F}$ se trivialise sur $X' \xrightarrow{\varphi} X$, et que pour Y lisse coupant D dans D°, et transversalement, $\varphi^{-1}Y$ est encore lisse.

<u>Résultat local</u> : on prend X strictement local, essentiellement de type fini sur k.

(Th2) Soit f $X \longrightarrow A^1$, envoyant le point fermé x sur 0. On suppose que f est lisse en dehors de x, et que $f|D$ est étale en dehors de x. Soient D_i les composantes irréductibles de D, j l'inclusion de U dans X, et Sw_i le conducteur de Swan de $\mathcal{F}$ au point générique de D_i. Alors, notant Ψ^*_x la fibre en x des faisceaux de cycles évanescents Ψ, (rél. f), l'entier

$$\dim \mathrm{tot}\ \Psi^*_x\left(j_!\mathcal{F} - r\, j_!\mathbb{F}_\ell + \sum Sw_i\, \mathbb{F}_{\ell D_i}\right)$$

est indépendant de f

<u>On le notera $Sw_x(\mathcal{F})$</u>

<u>Remarques</u> : (1) dim tot est la somme

$$\sum (-1)^i \left(\dim \Psi^i + Sw\, \Psi^i\right)$$, l'expression sous Ψ^*_x est un $\mathbb{F}_\ell$-faisceau virtuel. L'expression $\Psi^*_x(\ )$ ne dépend que de sa fibre générale. Celle-ci, regardée comme faisceau virtuel sur une courbe, a les propriétés suivantes

a) rang nul au point générique

b) en tout point, (rang générique − rang de la fibre au point + Sw) $= 0$.

<u>Résultat global</u> on prend X propre

Th3 Supposons X projectif ~~propre~~, et soient D_i les composante irréductible de D. Soit $D_i^\circ = D_i \cap D^\circ$, et Sw_i comme précédement. On a

$$\chi(X, j_!\mathcal{F}) = \chi_c(U).\mathrm{rg}\,\mathcal{F} - \sum_i \chi(D_i^\circ)\, Sw_i - \sum_{x \in D - D^\circ} Sw_x(\mathcal{F})$$

ou χ, d'après Grothendieck

<u>esquisse de preuve</u>. on écrit le Th2 sous la forme

$$(1) \quad \chi\big(X, j_!\mathcal{F} - \mathrm{rg}\, j_!\underline{\mathbb{F}_\ell} + \sum_i Sw_i\, (\mathbb{F}_\ell)_{D_i^\circ}\big) = \sum_{x \in D - D^\circ} Sw_x(\mathcal{F})$$

Calculons χ à l'aide d'un pinceau ~~[illegible]~~ de sections hypersurface d'axe disjoint de D. Si ces sections sont en général lisses, transverses à D°, et toutes génériquement lisses, la formule d'Euler-Poincaré donne la formule écrite, avec un Sw_x calculé en terme du pinceau. Quand on varie le pinceau, deux problèmes, si on fixe D° comme avant

a) les tangences entre D° et les sections du pinceau

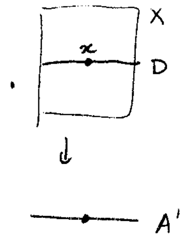
b) la variation de f (cf Th1) liée aux sections passant par les points de $D - D^\circ$.

Pour a), on désire avoir

(2) si $x \in D_i^\circ$, alors $Sw_x(\mathcal{F}) = Sw_i$.

On commence par prendre des pinceaux généraux de haut degré, <u>de degré variable</u>. Ceci fait varier le # de p^t de tangence de D° avec le pinceau, et on trouve que (1) n'est tenable que si (2) est vrai pour une tangence générale. Ceci acquit, on vérifie Th1 ~~puis Th2~~ par passage du global au local (cf lettre précédente) puis on trouve le Th1.

Exemple 1 (local) : X lisse, D lisse, ~~est~~ section locale de $f : X \to \mathbb{A}^1$ supposé lisse :



on a $Sw_x(\mathcal{F}) = \dim \operatorname{tot} \Psi_x^*(j_! \mathcal{F}) + Sw(\mathcal{F}, \text{en fibre générique})$

(car $\Psi_x^*(j_! \mathbb{F}_\ell) = 0$ et $\Psi_x^*(\mathbb{F}_{\ell\, D_i}) = \mathbb{F}_\ell$ en degré 0)

$$= Sw(\Psi_x^* j_! \mathcal{F}) + \underbrace{\dim \Psi_x^*(j_! \mathcal{F}) + Sw(\mathcal{F}, \text{en fibre générique})}_{\text{étudié dans la lettre précédente}}$$

$$= Sw(\Psi_x^* j_! \mathcal{F}) + Sw(\mathcal{F}, \text{en fibre spéciale})$$

$$= Sw \text{ en fibre } \cancel{\text{générale}}\ \text{spéciale} - Sw\, \Psi_x^* j_! \mathcal{F}$$

Appliquons cette formule.

Si Sw est le même dans les fibres générales et spéciales, on sait que $\Psi = 0$ (lettre précédente), et $Sw_x(\mathcal{F})$ est le Swan générique.

Cor Les cond. suivantes sont équivalentes : (i) Sw_x = Sw générique (ii) pour une section transverse, Sw en fibre spéciale = Sw en fibre générique (iii) ceci a lieu pour toute section transverse.

Exemple 2 : x et y sont des coordonnées sur X (lisse, local), D est $x = 0$, Ψ_0 est un caractère additif de $\mathbb{F}_p$, non trivial, et $\mathcal{F}$ est le faisceau de rang 1 défini par Ψ_0 et le revêtement d'Artin-Schreier

$$T^p - T = y/x^d \qquad (d \text{ premier à } p)$$

alors, en l'origine s, on a $Sw_s(\mathcal{F}) = 0$.

On prend $f = y$ et on calcule par la formule de l'exemple 1.

On a 1) en fibre spéciale, le faisceau est constant. $Sw = 0$

2) la ramification de Ψ est modérée ; on le voit en passant à la situation globale analogue, où X est le plan affine, et en notant que le Rf_* se trivialise sur le revêtement $\sqrt[d]{y}$, car

$$\begin{array}{l} H^*(\mathbb{A}^1, \text{faisceau défini par } T^p - T = a/x^d) \\ \quad \downarrow{\scriptstyle S}\ (\text{homothétie en } x \text{ de rapport } \sqrt[d]{a})^* \\ H^*(\mathbb{A}^1, \text{faisceau défini par } T^p - T = 1/x^d) \end{array}$$ (indépendant de a

*

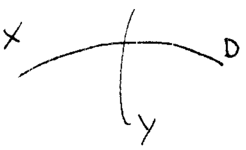
Bien à toi P. Deligne

P.S

Si on permet, en codim 1, les extensions inséparables, le problème essentiel me semble être le suivant :

X surface lisse D div lisse connexe $\mathcal{F}$ loc c^{t} sur $X - D$.

existe-t-il un ouvert $D^{\circ} \neq \emptyset$ de D tel que, quand on restreint $\mathcal{F}$ à une courbe lisse coupant transversalement D, on trouve toujours le même conducteur de Swan ?



Le conducteur trouvé ne dépend que du jet de Y au point où il coupe D, si on prend le jet d'ordre assez grand.

Regardons donc sur D le ~~fibr~~ fibré J des jets d'ordre assez grand de courbes lisses transverses à D. La fonction " conducteur de Swan " sur J est constructible, et la lettre précédente montre que sa valeur générique est sa valeur maximum. Soit $J' \subset J$ le fermé où le conducteur est plus petit.

<u>Question</u> : J' peut-il avoir une composante de codimension 1 s'envoyant sur D ?