PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PIERRE DELIGNE

Théorie de Hodge : II

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 40 (1971), p. 5-57.
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1971__40__5_0>

THÉORIE DE HODGE, II

par PIERRE DELIGNE ([1])

SOMMAIRE

1. **Filtrations** 6
   1.1. Objets filtrés 6
   1.2. Filtrations opposées 9
   1.3. Le lemme des deux filtrations 14
   1.4. Hypercohomologie de complexes filtrés 19
2. **Structures de Hodge** 24
   2.1. Structures pures 24
   2.2. La théorie de Hodge 27
   2.3. Structures mixtes 30
3. **Théorie de Hodge des variétés algébriques non singulières** 31
   3.1. Pôles logarithmiques et résidus 31
   3.2. Théorie de Hodge mixte 34
4. **Applications et compléments** 40
   4.1. Le théorème de la partie fixe 40
   4.2. Le théorème de semi-simplicité 43
   4.3. Complément à [2] 49
   4.4. Homomorphismes de schémas abéliens 50

INTRODUCTION

D'après Hodge, l'espace de cohomologie $H^n(X, \mathbf{C})$ d'une variété kählérienne compacte X est munie d'une « structure de Hodge » de poids n, i.e. d'une bigraduation naturelle

$$H^n(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{pq}$$

vérifiant $\overline{H^{pq}} = H^{qp}$. On montre ici que la cohomologie complexe d'une variété algébrique non singulière, non nécessairement compacte, est munie d'une structure d'espèce un peu plus générale, qui fait apparaître $H^n(X, \mathbf{C})$ comme « extension successive » de structures de Hodge de poids décroissants, contenus entre $2n$ et n, dont les nombres de Hodge $h^{pq} = \dim H^{pq}$ sont nuls pour $p>n$ ou $q>n$.

Le lecteur trouvera exposé dans [14] le yoga qui sous-tend cette construction.

([1]) Travail présenté comme thèse de doctorat à l'Université d'Orsay.

La démonstration, essentiellement algébrique, repose d'une part sur la théorie de Hodge, d'autre part sur la résolution des singularités à la Hironaka qui permet, *via* une suite spectrale, « d'exprimer » la cohomologie d'une variété algébrique non singulière quasi-projective en terme de la cohomologie de variétés projectives non singulières.

Le § 1, outre quelques sorites sur les filtrations réunis pour la commodité du lecteur, contient deux résultats-clefs :

a) Le théorème (1.2.10), qui ne sera utilisé que *via* son corollaire (2.3.5), donnant les propriétés fondamentales des « structures de Hodge mixtes ».

b) Le « lemme des deux filtrations » (1.3.16).

Le § 2 rappelle la théorie de Hodge et introduit les structures de Hodge mixtes.

Le cœur de ce travail est le n° 3.2, qui définit la structure de Hodge mixte de $H^n(X, \mathbf{C})$ et établit quelques dégénérescences de suites spectrales.

Le § 4 donne diverses applications, toutes déduites de (4.1.1) et de la théorie de la (K/k)-trace pour les structures de Hodge qui en résulte (4.1.2). Les principales sont (4.2.6) et (4.4.15).

1. Filtrations

1.1. Objets filtrés.

(1.1.1) Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne.

On aura à considérer des filtrations de type $\mathbf{Z}$, en général finies, sur les objets de $\mathscr{A}$:

Définition **(1.1.2)**. — *Une* filtration décroissante (resp. croissante) F *d'un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *est une famille* $(F^n(A))_{n\in\mathbf{Z}}$ (resp. $(F_n(A))_{n\in\mathbf{Z}}$) *de sous-objets de* A, *vérifiant*

$$\forall n, m \quad n \leq m \Rightarrow F^m(A) \subset F^n(A)$$
$$(\text{resp. } \forall n, m \quad n \leq m \Rightarrow F_n(A) \subset F_m(A)).$$

Un *objet filtré* est un objet muni d'une filtration. Quand il n'y aura pas danger de confusion, on désignera souvent par une même lettre des filtrations sur des objets différents de $\mathscr{A}$.

Si F est une filtration décroissante (resp. croissante) sur A, on pose $F^\infty(A) = 0$ et $F^{-\infty}(A) = A$ (resp. $F_{-\infty}(A) = 0$ et $F_\infty(A) = A$).

Les *filtrations décalées* d'une filtration décroissante W sont définies par

$$W[n]^p(A) = W^{n+p}(A).$$

(1.1.3) Si F est une filtration décroissante (resp. croissante) de A, alors les $F_n(A) = F^{-n}(A)$ (resp. les $F^n(A) = F_{-n}(A)$) forment une filtration croissante (resp. décroissante) de A. Ceci permet en principe de ne considérer que des filtrations décroissantes; *sauf mention explicite du contraire, par « filtration » on entendra dorénavant « filtration décroissante »*.

(1.1.4) Une *filtration* F de A est dite *finie* s'il existe n et m tels que $\mathrm{F}^n(\mathrm{A})=\mathrm{A}$ et $\mathrm{F}^m(\mathrm{A})=0$.

(1.1.5) Un *morphisme* d'un objet filtré (A, F) dans un objet filtré (B, F) est un morphisme f de A dans B qui vérifie $f(\mathrm{F}^n(\mathrm{A}))\subset \mathrm{F}^n(\mathrm{B})$ pour $n\in\mathbf{Z}$.

Les objets filtrés (resp. filtrés de filtration finie) de $\mathscr{A}$ forment une catégorie additive dans laquelle existent les limites inductives et projectives finies (et donc les noyaux, conoyaux, images et coïmages d'un morphisme).

Un morphisme $f:(\mathrm{A},\mathrm{F})\to(\mathrm{B},\mathrm{F})$ est dit *strict*, ou *strictement compatible aux filtrations*, si la flèche canonique de $\mathrm{Coïm}(f)$ dans $\mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme d'objets filtrés (cf. (1.1.11)).

(1.1.6) Soit ° le foncteur contravariant identique de $\mathscr{A}$ dans la catégorie duale $\mathscr{A}^\circ$. Si (A, F) est un objet filtré de $\mathscr{A}$, les $(\mathrm{A}/\mathrm{F}^n(\mathrm{A}))^\circ$ s'identifient à des sous-objets de A°. La filtration sur A° *duale* de F est définie par

$$\mathrm{F}^n(\mathrm{A}^\circ)=(\mathrm{A}/\mathrm{F}^{1-n}(\mathrm{A}))^\circ.$$

Le bidual de (A, F) s'identifie à (A, F). Cette construction identifie la duale de la catégorie des objets filtrés de $\mathscr{A}$ à la catégorie des objets filtrés de $\mathscr{A}^\circ$.

(1.1.7) Si (A, F) est un objet filtré de $\mathscr{A}$, son *gradué associé* est l'objet de $\mathscr{A}^{\mathbf{Z}}$ défini par

$$\mathrm{Gr}^n(\mathrm{A})=\mathrm{F}^n(\mathrm{A})/\mathrm{F}^{n+1}(\mathrm{A}).$$

La convention (1.1.6) est justifiée par la formule simple

$$\mathrm{Gr}^n(\mathrm{A}^\circ)=\mathrm{Gr}^{-n}(\mathrm{A})^\circ$$

qui se vérifie sur le diagramme autodual

(1.1.7.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}/\mathrm{F}^n(\mathrm{A}) & & \mathrm{A}/\mathrm{F}^{n+1}(\mathrm{A}) \arrow[ll] & & 0 \\
& \mathrm{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \mathrm{Gr}^n(\mathrm{A}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\mathrm{F}^{n+1}(\mathrm{A}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{F}^n(\mathrm{A}) \arrow[ul] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

(1.1.8) Soient (A, F) un objet filtré et $j:\mathrm{X}\hookrightarrow\mathrm{A}$ un sous-objet de A. La *filtration induite* sur X par F est l'unique filtration sur X telle que j soit strictement compatible aux filtrations; on a

$$\mathrm{F}^n(\mathrm{X})=j^{-1}(\mathrm{F}^n(\mathrm{A}))=\mathrm{X}\cap\mathrm{F}^n(\mathrm{A}).$$

Dualement, la *filtration quotient* sur A/X (unique filtration telle que $p:\mathrm{A}\to\mathrm{A}/\mathrm{X}$ soit strictement compatible aux filtrations) est donnée par

$$\mathrm{F}^n(\mathrm{A}/\mathrm{X})=p(\mathrm{F}^n(\mathrm{A}))\approx(\mathrm{X}+\mathrm{F}^n(\mathrm{A}))/\mathrm{X}\approx\mathrm{F}^n(\mathrm{A})/(\mathrm{X}\cap\mathrm{F}^n(\mathrm{A})).$$

Lemme **(1.1.9).** — *Si* X *et* Y *sont deux sous-objets de* A, *avec* $X \subset Y$, *alors sur* $Y/X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(A/X \to A/Y)$, *la filtration quotient de celle de* Y *coïncide avec celle induite par celle de* A/X. *Dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
A/Y & & A/X \arrow[ll] & \\
& A \arrow[ul] \arrow[ur] & & Y/X \arrow[ul] \\
X \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

les flèches sont strictes.

(1.1.10) On appellera la filtration (1.1.9) sur Y/X la *filtration induite* par celle de A. D'après (1.1.9), sa définition est autoduale.

En particulier, si $\Sigma : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est une o-suite, et si B est filtré, alors $H(\Sigma) = \mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coïm}(g))$ est muni d'une filtration induite canonique.

Le lecteur vérifiera que :

Proposition **(1.1.11).** — (i) *Soit* $f : (A, F) \to (B, F)$ *un morphisme d'objets filtrés de filtration finie. Pour que f soit strict, il faut et il suffit que la suite*

$$0 \to \mathrm{Gr}(\mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Gr}(A) \to \mathrm{Gr}(B) \to \mathrm{Gr}(\mathrm{Coker}(f)) \to 0$$

soit exacte.

(ii) *Soit* $\Sigma : (A, F) \to (B, F) \to (C, F)$ *une* o-*suite de morphismes stricts. On a alors canoniquement*

$$H(\mathrm{Gr}(\Sigma)) \approx \mathrm{Gr}(H(\Sigma)).$$

En particulier, si Σ *est exacte dans* $\mathscr{A}$, *alors* $\mathrm{Gr}(\Sigma)$ *est exacte dans* $\mathscr{A}^{\mathbf{Z}}$.

Dans une catégorie de modules, dire qu'un morphisme $f : (A, F) \to (B, F)$ soit strict signifie que tout $b \in B$, de filtration $\geq n$ ($b \in F^n(B)$) qui est dans l'image de A, est déjà dans l'image de $F^n(A)$:

$$f(F^n(A)) = f(A) \cap F^n(B).$$

(1.1.12) Si $\otimes : \mathscr{A}_1 \times \ldots \times \mathscr{A}_n \to \mathscr{B}$ est un foncteur multiadditif exact à droite, et si A_i est un objet de filtration finie de $\mathscr{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$, on définit une filtration sur $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ par

$$F^k(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\Sigma k_i = k} \mathrm{Im}(\bigotimes_{i=1}^{n} F^{k_i}(A_i) \to \bigotimes_{i=1}^{n} A_i)$$

(somme de sous-objets).

Dualement, si H est exact à gauche, on pose

$$F^k(H(A_i)) = \bigcap_{\Sigma k_i = k} \mathrm{Ker}(H(A_i) \to H(A_i/F^{k_i}(A_i))).$$

Pour H exact, les deux définitions sont équivalentes.

On étend ces définitions à des foncteurs contravariants en certaines variables par (1.1.6). En particulier, pour le foncteur exact à gauche Hom, on pose

$$F^k(\mathrm{Hom}(A, B)) = \{f : A \to B \mid \forall n, f(F^n(A)) \subset F^{n+k}(B)\}.$$

On a donc
$$\mathrm{Hom}((A, F), (B, F)) = F^0(\mathrm{Hom}(A, B)).$$

Sous les hypothèses précédentes, on dispose de morphismes évidents

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{Gr}(A_i) \to \mathrm{Gr}(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i)$$

et
$$\mathrm{Gr}\, H(A_i) \to H(\mathrm{Gr}(A_i)).$$

Pour H exact, ce sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Ces constructions sont compatibles à la composition des foncteurs, en un sens qu'on laisse au lecteur le soin de ne pas expliciter.

1.2. Filtrations opposées.

(1.2.1) Soit A un objet de $\mathscr{A}$ muni de deux filtrations F et G. Par définition, $\mathrm{Gr}_F^n(A)$ est un quotient d'un sous-objet de A, et, en tant que tel, se trouve muni d'une filtration induite par G (1.1.10). Passant au gradué associé, on définit un objet bigradué $(\mathrm{Gr}_G^n \mathrm{Gr}_F^m(A))_{n,m \in \mathbf{Z}}$. D'après un lemme de Zassenhaus, $\mathrm{Gr}_G^n \mathrm{Gr}_F^m(A)$ et $\mathrm{Gr}_F^m \mathrm{Gr}_G^n(A)$ sont canoniquement isomorphes : si on définit les filtrations induites (1.1.10) comme filtrations quotients de filtrations induites sur un sous-objet, on a

$$\begin{array}{c} \mathrm{Gr}_G^n \mathrm{Gr}_F^m(A) \approx (F^m(A) \cap G^n(A)) / ((F^{m+1}(A) \cap G^n(A)) + (F^m(A) \cap G^{n+1}(A))) \\ \| \\ \mathrm{Gr}_F^m \mathrm{Gr}_G^n(A) \approx (G^n(A) \cap F^m(A)) / ((G^{n+1}(A) \cap F^m(A)) + (G^n(A) \cap F^{m+1}(A))). \end{array}$$

(1.2.2) Soit H une troisième filtration de A. Elle induit une filtration sur $\mathrm{Gr}_F(A)$, et donc sur $\mathrm{Gr}_G \mathrm{Gr}_F(A)$. Elle induit aussi une filtration sur $\mathrm{Gr}_F \mathrm{Gr}_G(A)$. On prendra garde que ces filtrations ne se correspondent en général pas par l'isomorphisme (1.2.1). Dans l'expression $\mathrm{Gr}_H \mathrm{Gr}_G \mathrm{Gr}_F(A)$, G et H jouent donc un rôle symétrique, mais non F et G.

Définition **(1.2.3).** — *Deux filtrations finies* F *et* $\overline{F}$ *sur* A *sont dites n*-opposées *si* $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q(A) = 0$ *pour* $p+q \neq n$.

(1.2.4) Si $A^{p,q}$ est un objet bigradué de $\mathscr{A}$, tel que :

a) $A^{p,q} = 0$ sauf pour un nombre fini de couples (p, q),

b) $A^{p,q} = 0$ pour $p+q \neq n$,

alors, on définit deux filtrations finies n-opposées de $A = \sum_{p,q} A^{p,q}$ en posant

(**1.2.4.1**) $$F^p(A) = \sum_{p' \geq p} A^{p',q'}$$

(**1.2.4.2**) $$\overline{F}^q(A) = \sum_{q' \geq q} A^{p',q'}.$$

On a

(**1.2.4.3**) $$\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q (A) = A^{p,q}.$$

Réciproquement :

Proposition (**1.2.5**). — (i) *Soient* F *et* $\overline{F}$ *deux filtrations finies sur* A. *Pour que* F *et* $\overline{F}$ *soient n-opposées, il faut et il suffit que*

$$\forall p, q, \qquad p+q = n+1 \Rightarrow F^p(A) \oplus \overline{F}^q(A) \xrightarrow{\sim} A.$$

(ii) *Si* F *et* $\overline{F}$ *sont n-opposées, et si on pose*

$$\begin{cases} A^{p,q} = 0 & \textit{pour } p+q \neq n \\ A^{p,q} = F^p(A) \cap \overline{F}^q(A) & \textit{pour } p+q = n, \end{cases}$$

alors A *est somme directe des* $A^{p,q}$, *et* F *et* $\overline{F}$ *se déduisent de la bigraduation* $A^{p,q}$ *de* A *par le procédé* (1.2.4).

Preuve. — (i) La condition $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q(A) = 0$ pour $p+q > n$ signifie que $F^p \cap \overline{F}^q = (F^{p+1} \cap \overline{F}^q) + (F^p \cap \overline{F}^{q+1})$ pour $p+q > n$. Par hypothèse, $F^p \cap \overline{F}^q$ est nul pour $p+q$ assez grand; par récurrence descendante, on en déduit que la condition $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q(A) = 0$ pour $p+q > n$ équivaut à la condition $F^p(A) \cap \overline{F}^q(A) = 0$ pour $p+q > n$. Dualement ((1.1.6), (1.1.7), (1.1.10)) la condition $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q(A) = 0$ pour $p+q < n$ équivaut à $A = F^p(A) + \overline{F}^q(A)$ pour $(1-p)+(1-q) > -n$, i.e. pour $p+q \leq n+1$, et (i) en résulte.

(ii) Si F et $\overline{F}$ sont n-opposées, prouvons par récurrence descendante sur p que

(**1.2.5.1**) $$\bigoplus_{p' \geq p} A^{p',q'} \xrightarrow{\sim} F^p(A).$$

a) Pour $F^p(A) = 0$, l'assertion est évidente.

b) La décomposition $A = F^{p+1}(A) \oplus \overline{F}^{n-p}(A)$ induit sur $F^p(A) \supset F^{p+1}(A)$ une décomposition

$$F^p(A) = F^{p+1}(A) \oplus (F^p(A) \cap \overline{F}^{n-p}(A)),$$

et on conclut par récurrence.

Pour p assez petit, on a $F^p(A) = A$. D'après (1.2.5.1), les $A^{p,q}$ forment donc une bigraduation de A et F vérifie (1.2.4.1). Que $\overline{F}$ vérifie (1.2.4.2) en résulte par symétrie.

(**1.2.6**) Les constructions (1.2.4) et (1.2.5) établissent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre objets de $\mathscr{A}$ munis de deux filtrations finies n-opposées et objets bigradués de $\mathscr{A}$ du type considéré en (1.2.4).

Définition (**1.2.7**). — Trois filtrations *finies* W, F *et* $\overline{\mathrm{F}}$ *sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *sont dites* opposées *si*

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\,\mathrm{Gr}_{\overline{\mathrm{F}}}^{q}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{A})=0$$

pour $p+q+n\neq 0$.

Cette condition est symétrique en F et $\overline{\mathrm{F}}$. Elle signifie que F et $\overline{\mathrm{F}}$ induisent sur $\mathrm{W}^n(\mathrm{A})/\mathrm{W}^{n+1}(\mathrm{A})$ deux filtrations $(-n)$-opposées. On pose

$$\mathrm{A}^{p,q}=\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\,\mathrm{Gr}_{\overline{\mathrm{F}}}^{q}\,\mathrm{G}_{\mathrm{W}}^{-p-q}(\mathrm{A}),$$

d'où des décompositions (1.2.4), (1.2.5)

(1.2.7.1) $$\mathrm{W}^n(\mathrm{A})/\mathrm{W}^{n+1}(\mathrm{A})=\bigoplus_{p+q=-n}\mathrm{A}^{p,q}$$

qui font de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}(\mathrm{A})$ un objet bigradué.

Lemme (**1.2.8**). — *Soient* W, F *et* $\overline{\mathrm{F}}$ *trois filtrations finies opposées sur* A, *et* σ *une suite* $(p_i, q_i)_{i\geq 0}$ *de couples d'entiers vérifiant :*

a) $p_i\leq p_j$ *et* $q_i\leq q_j$ *pour* $i\geq j$.

b) *Pour* $i>0$, $p_i+q_i=p_0+q_0-i+1$.

On pose $p=p_0$, $q=q_0$, $n=-p-q$ *et*

$$\mathrm{A}_\sigma=\Big(\sum_{0\leq i}(\mathrm{W}^{n+i}(\mathrm{A})\cap\mathrm{F}^{p_i}(\mathrm{A}))\Big)\cap\Big(\sum_{0\leq i}(\mathrm{W}^{n+i}(\mathrm{A})\cap\overline{\mathrm{F}}^{q_i}(\mathrm{A}))\Big).$$

Alors, la projection de $\mathrm{W}^n(\mathrm{A})$ *sur* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{A})$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{A}_\sigma\xrightarrow{\sim}\mathrm{A}^{p,q}\subset\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{A}).$$

Prouvons par récurrence sur k l'assertion suivante :

$(*_k)$ La projection de $\mathrm{W}^n(\mathrm{A})/\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{A})$ induit un isomorphisme de

$$\Big(\Big(\Big(\sum_{i<k}(\mathrm{W}^{n+i}(\mathrm{A})\cap\mathrm{F}^{p_i}(\mathrm{A}))\Big)+\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})\Big)\cap\Big(\Big(\sum_{i<k}(\mathrm{W}^{n+i}(\mathrm{A})\cap\overline{\mathrm{F}}^{q_i}(\mathrm{A}))\Big)+\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})\Big)\Big)/\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})$$

sur $\mathrm{A}^{p,q}\subset\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{A})$.

Pour $k=1$, c'est la définition même de $\mathrm{A}^{p,q}$.

D'après (1.2.5) (i), on a

(1.2.8.1) $$\mathrm{F}^{p_k}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n+k}(\mathrm{A}))\oplus\overline{\mathrm{F}}^{q_k}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n+k}(\mathrm{A}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n+k}(\mathrm{A}).$$

Posons
$$\begin{aligned}
\mathrm{B}&=\sum_{i<k}(\mathrm{W}^{n+i}(\mathrm{A})\cap\mathrm{F}^{p_i}(\mathrm{A}))\\
\mathrm{C}&=\sum_{i<k}(\mathrm{W}^{n+i}(\mathrm{A})\cap\overline{\mathrm{F}}^{q_i}(\mathrm{A}))\\
\mathrm{B}'&=(\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})\cap\mathrm{F}^{p_k}(\mathrm{A}))+\mathrm{W}^{n+k+1}(\mathrm{A})\\
\mathrm{C}'&=(\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})\cap\overline{\mathrm{F}}^{q_k}(\mathrm{A}))+\mathrm{W}^{n+k+1}(\mathrm{A})\\
\mathrm{D}&=\mathrm{W}^{n+k}(\mathrm{A})\\
\mathrm{E}&=\mathrm{W}^{n+k+1}(\mathrm{A}).
\end{aligned}$$

La formule (1.2.8.1) se transcrit en

$$B' + C' = D$$

et

$$B' \cap C' = E.$$

On a par ailleurs, puisque $p_k \leq p_i$ $(i \leq k)$,

$$B \cap D \subset F^p(A) \cap W^{n+k}(A) \subset B'$$

et puisque $q_k \leq q_i$ $(i \leq k)$,

$$C \cap D \subset \overline{F}^{q_k}(A) \cap W^{n+k}(A) \subset C'.$$

L'assertion $(*_{k+1})$ résulte alors de $(*_k)$ et du

Lemme **(1.2.9)**. — *Soient des sous-objets* B, C, B′, C′, D, E *de* A. *On suppose que*

$$B' + C' = D, \qquad B' \cap C' = E,$$

$$B \cap D \subset B', \qquad C \cap D \subset C'.$$

Alors,

$$((B + B') \cap (C + C'))/E \xrightarrow{\sim} ((B + D) \cap (C + D))/D.$$

Pour prouver la surjectivité, on écrit

$$\begin{aligned} ((B+B') \cap (C+C')) + D &= (((B+B') \cap (C+C')) + B') + C' \\ &= ((B+B') \cap (C+C'+B')) + C' = (B+B'+C') \cap (C+C'+B') = (B+D) \cap (C+D). \end{aligned}$$

Pour prouver l'injectivité, on écrit

$$(B + B') \cap (C + C') \cap D = ((B + B') \cap D) \cap ((C + C') \cap D).$$

Puisque $B' \subset D$, on a

$$(B + B') \cap D = (B \cap D) + B' = B';$$

de même,

$$(C + C') \cap D = C',$$

et

$$(B + B') \cap (C + C') \cap D = B' \cap C' = E.$$

On achève enfin la démonstration de (1.2.8) en notant que (1.2.8) équivaut à $(*_k)$ pour k grand.

Théorème **(1.2.10)**. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une catégorie abélienne, et désignons provisoirement par* $\mathscr{A}'$ *la catégorie des objets de* $\mathscr{A}$ *munis de trois filtrations opposées* W, F *et* $\overline{F}$. *Les morphismes dans* $\mathscr{A}'$ *sont les morphismes dans* $\mathscr{A}$ *compatibles aux trois filtrations.*

(i) $\mathscr{A}'$ *est une catégorie abélienne.*

(ii) *Le noyau (*resp. *conoyau) d'une flèche* $f: A \to B$ *dans* $\mathscr{A}'$ *est le noyau (*resp. *conoyau) de* f *dans* $\mathscr{A}$, *muni des filtrations induites par celles de* A (resp. *quotient de celles de* B).

(iii) *Tout morphisme* $f: A \to B$ *dans* $\mathscr{A}'$ *est strictement compatible aux filtrations* W, F *et* $\overline{F}$; *le morphisme* $\mathrm{Gr}_W(f)$ *est compatible aux bigraduations de* $\mathrm{Gr}_W(A)$ *et* $\mathrm{Gr}_W(B)$; *les morphismes* $\mathrm{Gr}_F(f)$ *et* $\mathrm{Gr}_{\overline{F}}(f)$ *sont strictement compatibles à la filtration induite par* W.

(iv) *Les foncteurs « oubli des filtrations », $\mathrm{Gr_W}$, $\mathrm{Gr_F}$, $\mathrm{Gr_{\overline{F}}}$, et*

$$\mathrm{Gr_W\,Gr_F \simeq Gr_F\,Gr_W \simeq Gr_{\overline{F}}\,Gr_F\,Gr_W \simeq Gr_{\overline{F}}\,Gr_W \simeq Gr_W\,Gr_{\overline{F}}}$$

de $\mathscr{A}'$ dans $\mathscr{A}$ sont exacts.

Désignons par $\sigma_0(p, q)$ et $\sigma_1(p, q)$ les suites

$$\sigma_0(p, q) = (p, q), (p, q), (p, q-1), (p, q-2), (p, q-3), \ldots$$
$$\sigma_1(p, q) = (p, q), (p, q), (p-1, q), (p-2, q), (p-3, q), \ldots$$

et, avec les notations de (1.2.8), posons

$$\mathrm{A}_i^{p,q} = \mathrm{A}_{\sigma_i(p,q)} \qquad (i=0, 1).$$

Si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est compatible à W, F et $\overline{\mathrm{F}}$, on a

(1.2.10.1) $$f(\mathrm{A}_i^{p,q}) \subset \mathrm{B}_i^{p,q} \qquad (i=0, 1).$$

L'assertion (iii) résulte donc du lemme suivant :

Lemme **(1.2.11)**. — *Les $\mathrm{A}_i^{p,q}$ forment une bigraduation de* A. *On a*

(1.2.11.1) $$\mathrm{W}^n(\mathrm{A}) = \sum_{n+p+q \leq 0} \mathrm{A}_i^{p,q} \qquad (i=0, 1)$$

(1.2.11.2) $$\mathrm{F}^p(\mathrm{A}) = \sum_{p' \geq p} \mathrm{A}_0^{p',q'}$$

(1.2.11.3) $$\overline{\mathrm{F}}^q(\mathrm{A}) = \sum_{q' \geq q} \mathrm{A}_1^{p',q'}.$$

Par symétrie, il suffit de prouver les assertions relatives à $i=0$. Posons $\mathrm{A}_0 = \bigoplus \mathrm{A}_0^{p,q}$, et définissons sur A_0 des filtrations W et F par les formules de (1.2.11). L'application canonique i de A_0 dans A est compatible aux filtrations W et F. De plus, d'après (1.2.8), $\mathrm{Gr_W}(i)$ est un isomorphisme, et induit des isomorphismes d'objets gradués

(1.2.11.4) $$\sum_{p+q=n} \mathrm{A}_0^{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{-n}(\mathrm{A}) = \sum_{p+q=n} \mathrm{A}^{p,q}.$$

Le morphisme i est donc un isomorphisme, et les A_0^{pq} forment un bigraduation de A.

La formule (1.2.11.1) exprime alors que $\mathrm{Gr_W}(i)$ est un isomorphisme. D'après (1.2.11.4), $\mathrm{Gr_F\,Gr_W}(i)$ est un isomorphisme, donc aussi $\mathrm{Gr_W\,Gr_F}(i)$ et $\mathrm{Gr_F}(i)$. La formule (1.2.11.2) en résulte.

(1.2.12) Prouvons (1.2.10). Soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ dans $\mathscr{A}'$ et munissons $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(f)$ des filtrations induites par celles de A. D'après (1.2.11), $\mathrm{Gr_W(K)} \hookrightarrow \mathrm{Gr_W(A)}$; de plus, la filtration F (resp. $\overline{\mathrm{F}}$) de K induit sur $\mathrm{Gr_W(K)}$ la filtration image réciproque de la filtration F de $\mathrm{Gr_W(A)}$. Le sous-objet $\mathrm{Gr_W(K)}$ de $\mathrm{Gr_W(A)}$ est enfin compatible à la bigraduation de $\mathrm{Gr_W(A)}$:

$$\mathrm{Gr_W(K)} = \bigoplus_{p,q} (\mathrm{Gr_W(K)} \cap \mathrm{A}^{pq}).$$

On en tire que

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\,\mathrm{Gr}_{\overline{\mathrm{F}}}^{q}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{K}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\,\mathrm{Gr}_{\overline{\mathrm{F}}}^{q}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{A});$$

les filtrations de W, F et $\overline{F}$ de K sont donc opposées et K est un noyau de f dans $\mathscr{A}'$. Ceci, joint au résultat dual, prouve (ii).

Si f est une flèche de $\mathscr{A}'$, le morphisme canonique de $\mathrm{Coïm}(f)$ dans $\mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme dans $\mathscr{A}$; d'après (iii), c'est aussi un isomorphisme dans $\mathscr{A}'$, qui est donc abélienne.

Le foncteur « oubli des filtrations » est exact d'après (ii). L'exactitude des autres foncteurs (iv) résulte aussitôt de (ii), (iii) et (1.1.11), (i) ou (ii).

(1.2.13) Soit A un objet de $\mathscr{A}$ muni d'une filtration finie *croissante* $W_\bullet$ et de deux filtrations finies décroissantes F et $\overline{F}$. La construction (1.1.3) associe à $W_\bullet$ une filtration décroissante $W^\bullet$. On dira que les filtrations $W_\bullet$, F et $\overline{F}$ sont *opposées* si les filtrations $W^\bullet$, F et $\overline{F}$ le sont, i.e. si pour tout n les filtrations induites par F et $\overline{F}$ sur

$$\mathrm{Gr}_n^W(A) = W_n(A)/W_{n-1}(A)$$

sont n-opposées.

Le théorème (1.2.10) se transpose trivialement à cette variante.

1.3. Le lemme des deux filtrations.

(1.3.1) Soit K un complexe différentiel d'objets de $\mathscr{A}$, muni d'une filtration F. Celle-ci est dite *birégulière* si elle induit sur chaque composante de K une filtration finie.

Rappelons la définition des termes $E_r^{pq}(K, F)$ ou simplement E_r^{pq} de la suite spectrale définie par F. On pose

$$Z_r^{pq} = \mathrm{Ker}(d : F^p(K^{p+q}) \to K^{p+q+1}/F^{p+r}(K^{p+q+1}))$$

et on définit dualement B_r^{pq} par la formule

$$K^{p+q}/B_r^{pq} = \mathrm{coker}(d : F^{p-r+1}(K^{p+q-1}) \to K^{p+q}/F^{p+1}(K^{p+q})).$$

Ces formules gardent un sens pour $r = \infty$.

On prendra garde que l'usage fait ici de la notation B_r^{pq} est différent de celui de Godement [TF].

On a par définition :

(1.3.1.1) $$E_r^{pq} = \mathrm{Im}(Z_r^{pq} \to K^{p+q}/B_r^{pq})$$

(1.3.1.2) $$= Z_r^{pq}/(B_r^{pq} \cap Z_r^{pq})$$

(1.3.1.3) $$= \mathrm{Ker}(K^{p+q}/B_r^{pq} \to K^{p+q}/(Z_r^{pq} + B_r^{pq})).$$

On peut encore écrire

(1.3.1.4) $$B_r^{p*} \cap Z_r^{p*} \underset{\mathrm{dfn}}{=} (dF^{p-r+1} + F^{p+1}) \cap (d^{-1}F^{p+r} \cap F^p) = (dF^{p-r+1} \cap F^p) + (F^{p+1} \cap d^{-1}F^{p+r}),$$

puisque $dF^{p-r+1} \subset d^{-1}F^{p+r}$ et que $F^{p+1} \subset F^p$.

Pour $r<\infty$, les E_r forment un complexe gradué par le degré $p-r(p+q)$, et E_{r+1} s'exprime comme cohomologie de ce complexe :

$$E_{r+1}^{pq}=H(E_r^{p-r,q+r-1}\xrightarrow{d_r}E_r^{pq}\xrightarrow{d_r}E_r^{p+r,q-r+1}). \tag{1.3.1.5}$$

Pour $r=0$, on a

$$E_0^{**}=\mathrm{Gr}_F^*(K^*). \tag{1.3.1.6}$$

Proposition **(1.3.2).** — *Soit* K *un complexe muni d'une filtration birégulière* F. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite spectrale définie par* F *dégénère* $(E_1=E_\infty)$.

(ii) *Les morphismes* $d: K^i\to K^{i+1}$ *sont strictement compatibles aux filtrations.*

Vérifions-le lorsque $\mathscr{A}$ est une catégorie de modules. Pour p et q fixés, l'hypothèse que les flèches d_r de sources les E_r^{pq} soient nulles pour $r\geq 1$ signifie que, si $x\in F^p(K^{p+q})$ vérifie $dx\in F^{p+1}(K^{p+q+1})$, alors il existe y dans K^{p+q} tel que $dy=0$ et que x et y aient même image dans E_1^{pq}. Modifiant y par un bord, et posant $z=x-y$, on a alors

$$\forall x\in F^p(K^{p+q})\,(dx\in F^{p+1}(K^{p+q+1})\Rightarrow \exists z(z\in F^{p+1}(K^{p+q})\text{ et } dz=dx))$$

soit en d'autres termes

$$F^{p+1}(K^{p+q+1})\cap dF^p(K^{p+q})=dF^{p+1}(K^{p+q}). \tag{1}$$

Si cette condition est vérifiée quels que soient p et q, on a par récurrence sur r

$$F^{p+r}\cap dF^p=dF^{p+r},$$

ce qui pour $p+r$ grand s'écrit

$$F^p\cap dK=dF^p. \tag{2}$$

L'assertion (2) implique trivialement (1), et équivaut à (ii), ce qui prouve (1.3.2).

(1.3.3) Si (K, F) est un complexe filtré, on désignera par Dec(K) le complexe K muni de la *filtration décalée*

$$\mathrm{Dec}(F)^pK^n=Z_1^{p+n,-p}.$$

Cette filtration est compatible aux différentielles :

$$dZ_1^{p+n,-p}\subset F^{p+n+1}(K^{n+1})\cap \mathrm{Ker}(d)\subset Z_\infty^{p+n+1,-p}\subset Z_1^{p+n+1,-p}.$$

Puisque

$$Z_1^{p+1+n,-p-1}\subset F^{p+1+n}(K^n)\subset B_1^{p+n,-p}\subset Z_1^{p+n,-p}, \tag{1.3.3.1}$$

la flèche évidente de $Z_1^{p+n,-p}/Z_1^{p+1+n,-p-1}$ dans $Z_1^{p+n,-p}/B_1^{p+n,-p}$ est un morphisme

$$u:\ E_0^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\ K)\to E_1^{p+n,-p}(K). \tag{1.3.3.2}$$

Proposition **(1.3.4).** — (i) *Les morphismes* (1.3.3.2) *forment un morphisme de complexes gradués de* $E_0(\mathrm{Dec}\ K)$ *dans* $E_1(K)$.

(ii) *Ce morphisme induit un isomorphisme sur la cohomologie.*

(iii) *Il induit de proche en proche* (via (1.3.1.5)) *des isomorphismes de complexes gradués* $E_r(\mathrm{Dec}(K))\xrightarrow{\sim}E_{r+1}(K)$ $(r\geq 1)$.

Preuve. — Soit F′ la filtration de K définie par

$$F'^{p}(K^n)=\mathrm{Dec}(F)^{p-n}(K^n)=Z_1^{p,n-p}.$$

On a trivialement des isomorphismes, compatibles aux d_r et à (1.3.1.5)

(1.3.4.1) $$E_r^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\ K)=E_{r+1}^{p+n,-p}(K, F').$$

L'application u se déduit de (1.3.4.1) et du morphisme identique

$$(K, F')\to(K, F).$$

Ceci prouve (i), et il reste à vérifier que pour $r\geq 2$,

$$E_r^{pq}(K, F')\xrightarrow{\sim}E_r^{pq}(K, F).$$

On a en effet

$$Z_r^{pq}(K, F')=Z_r^{pq}(K, F)\qquad\text{pour } r\geq 1,$$

et $$Z_r^{pq}(K, F')\cap B_r^{pq}(K, F')=Z_r^{pq}(K, F)\cap B_r^{pq}(K, F)\qquad\text{pour } r\geq 2,$$

et on applique (1.3.1.2).

(1.3.5) La construction (1.3.3) n'est pas autoduale. La construction duale consiste à définir

$$\mathrm{Dec}^*(F)^pK^n=B_1^{p+n-1,-p+1}.$$

On dispose alors de morphismes

$$E_0^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\ K)\to E_1^{p+n,p}(K)\to E_0^{p,n-p}(\mathrm{Dec}^*K)$$

et, pour $r\geq 1$, d'isomorphismes

$$E_r^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\ K)\xrightarrow{\sim}E_{r+1}^{p+n,p}(K)\xrightarrow{\sim}E_r^{p,n-p}(\mathrm{Dec}^*K).$$

Rappelons qu'un morphisme de complexes est appelé un *quasi-isomorphisme* s'il induit un isomorphisme sur la cohomologie.

Définition **(1.3.6)**. — (i) *Un morphisme* $f:(K, F)\to(K', F')$ *de complexes filtrés de filtration birégulière est un* quasi-isomorphisme filtré *si* $\mathrm{Gr}_F(f)$ *est un quasi-isomorphisme, i.e. si les* $E_1^{pq}(f)$ *sont des isomorphismes.*

(ii) *Un morphisme* $f:(K, F, W)\to(K, F', W')$ *entre complexes bifiltrés biréguliers est un* quasi-morphisme bifiltré *si* $\mathrm{Gr}_F\,\mathrm{Gr}_W(f)$ *est un quasi-isomorphisme.*

(1.3.7) Soit K un complexe différentiel d'objets de $\mathscr{A}$, muni de deux filtrations F et W. Soit E_r^{pq} la suite spectrale définie par W. La filtration F induit sur les E_r^{pq} diverses filtrations, qu'on se propose de comparer.

(1.3.8) La formule (1.3.1.2) identifie E_r^{pq} à un quotient d'un sous-objet de K^{p+q}. Le terme E_r^{pq} se trouve par là muni d'une filtration F_d induite par F, appelée la *première filtration directe.*

(1.3.9) Dualement, la formule (1.3.1.3) identifie E_r^{pq} à un sous-objet d'un quotient de K^{p+q}, d'où une nouvelle filtration F_{d^*} induite par F, la *seconde filtration directe.*

Lemme (**1.3.10**). — *Sur* E_0 *et* E_1, *on a* $F_d = F_{d^*}$.

Pour $r = 0$ ou 1, on a $B_r^{pq} \subset Z_r^{pq}$ et on applique (1.1.9).

(**1.3.11**) La formule (1.3.1.5) identifie E_{r+1}^{pq} à un quotient d'un sous-objet de E_r^{pq}. On définit la *filtration récurrente* F_r des E_r^{pq} par les conditions

(i) Sur E_0^{pq}, $F_r = F_d = F_{d^*}$.

(ii) Sur E_{r+1}^{pq}, la filtration récurrente est celle induite par la filtration récurrente de E_r^{pq}.

(**1.3.12**) Les définitions (1.3.8) et (1.3.9) gardent un sens pour $r = \infty$. Si la filtration de K est birégulière, les filtrations directes de E_∞^{pq} coïncident avec celles de $E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$, pour r assez grand, et on définit la filtration récurrente de E_∞^{pq} comme coïncidant avec celle de E_r^{pq} pour r assez grand.

Les filtrations F et W induisent chacune une filtration de $H^*(K)$, et $E_\infty^{**} = \mathrm{Gr}_W^*(H^*(K))$. La filtration F de $H^*(K)$ induit dès lors sur E_∞^{pq} une nouvelle filtration.

Proposition (**1.3.13**). — (i) *Pour la première filtration directe, les morphismes* d_r *sont compatibles aux filtrations. Si* E_{r+1}^{pq} *est considéré comme quotient d'un sous-objet de* E_r^{pq}, *alors la première filtration directe sur* E_{r+1}^{pq} *est plus fine que la filtration* F' *induite par la première filtration directe sur* E_r^{pq} : *on a* $F_d(E_{r+1}^{pq}) \subset F'(E_{r+1}^{pq})$.

(ii) *Dualement, les morphismes* d_r *sont compatibles à la seconde filtration directe, et la seconde filtration directe sur* E_{r+1}^{pq} *est moins fine que la filtration induite par celle de* E_r^{pq}.

(iii) $F_d(E_r^{pq}) \subset F_r(E_r^{pq}) \subset F_{d^*}(E_r^{pq})$.

(iv) *Sur* E_∞^{pq}, *la filtration induite par la filtration* F *de* $H^*(K)$ (1.3.12) *est plus fine que la première filtration directe et moins fine que la seconde.*

(i) est évident, (ii) en est dual et (iii) s'en déduit par récurrence. La première assertion de (iv) est aisée à vérifier, la seconde en est duale.

(**1.3.14**) Désignons par Dec(K) (resp. Dec*(K)) le complexe K muni des filtrations Dec(W) et F (resp. Dec*(W) et F).

Il est clair sur (1.3.4.1) que l'isomorphisme (1.3.4) transforme la première filtration directe de $E_r(\mathrm{Dec}\,K)$ en la première filtration directe de $E_{r+1}(K)$ $(r \geq 1)$. L'isomorphisme dual (1.3.5) transforme la seconde filtration directe de $E_r(\mathrm{Dec}^*K)$ en la seconde filtration directe de $E_{r+1}(K)$.

Lemme (**1.3.15**). — *Si la filtration* F *est birégulière, et si, sur les* $\mathrm{Gr}_W^p(K)$, *les morphismes* d *sont strictement compatibles à la filtration induite par* F, *alors* :

(i) *Le morphisme* (1.3.3.2) *de complexes gradués filtrés par* F

$$u : \mathrm{Gr}_{\mathrm{Dec(W)}}(K) \to E_1(K, W)$$

est un quasi-isomorphisme filtré.

(ii) *Dualement, le morphisme* (1.3.5)

$$u : E_1(K, W) \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{Dec^*(W)}}(K)$$

est un quasi-isomorphisme filtré.

Il suffit, par dualité, de prouver (i).

D'après (1.3.3) et (1.3.4), le complexe $E_1(K, W)$ filtré par F est un quotient du complexe filtré $Gr_{Dec(W)}(K)$. Soit U le complexe filtré noyau, acyclique d'après (1.3.4) (ii). La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de complexes

$$0 \to Gr_F(U) \to Gr_F(Gr_{Dec(W)}(K)) \to Gr_F(E_1(K, W)) \to 0$$

montre que u est un quasi-isomorphisme filtré si et seulement si $Gr_F(U)$ est un complexe acyclique. D'après (1.3.2), et parce que U est acyclique, cela revient à demander que les différentielles de U soient strictement compatibles à la filtration F. De (1.3.3.1), on tire que U est somme sur p des complexes

$$(U^p)^n = B_1^{p+n, -p}/Z_1^{p+1+n, -p-1},$$

munis de la filtration induite par F.

Chaque différentielle d de chacun des complexes U^p s'insère dans un diagramme commutatif d'objets filtrés du type suivant, où, pour simplifier, on a omis d'indiquer le degré total ou complémentaire :

$$\begin{tikzcd}
B^p/Z^{p+1} \arrow[rrr, "d"] \arrow[dr] & & & B^{p+1}/Z^{p+1} \arrow[dd] \\
& \text{Coïm}(d) \arrow[r, "5"] \arrow[dr, phantom, "4"] & \text{Im}(d) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
W^{p+1}/Z^{p+1} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rrr, "3"] \arrow[drrr, phantom, "2"] & & & B^{p+1}/W^{p+2} \arrow[d] \\
W^{p+1}/W^{p+2} \arrow[u] \arrow[rrr, "1"] & & & W^{p+1}/W^{p+2}
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, le morphisme 1 est strict. Le carré 2 n'étant autre que la décomposition canonique de 1, la flèche 3 est un isomorphisme filtré. Les flèches du trapèze 4 sont des isomorphismes; ce sont donc des isomorphismes filtrés, puisque 3 en est un. Que 5 soit un isomorphisme filtré signifie que d est strict. Ceci prouve (1.3.15).

Théorème **(1.3.16).** — *Soit* K *un complexe muni de deux filtrations* W *et* F, *la filtration* F *étant birégulière. Soit* $r_0 \geq 0$ *un entier, et supposons que pour* $0 \leq r < r_0$, *les différentielles du complexe gradué* $E_r(K, W)$ *sont strictement compatibles à la filtration* F_r. *Alors, pour* $r \leq r_0 + 1$, $F_d = F_r = F_{d^*}$ *sur* E_r^{pq}.

On prouvera le théorème par récurrence sur r_0. Pour $r_0 = 0$ l'hypothèse est vide et on applique (1.3.10) et (1.3.13), (iii). Pour $r_0 \geq 1$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $F_d = F_r = F_{d^*}$ sur E_r^{pq} pour $r \leq r_0$.

D'après (1.3.15), le morphisme $u: E_0(\mathrm{Dec}\,K) \to E_1(K)$ est un quasi-isomorphisme filtré. Il induit donc un isomorphisme filtré de $H^*(\mathrm{Dec}\,K)$ dans $H^*(E_1(K))$:

$$u : (E_1(\mathrm{Dec}\,K), F_r) \xrightarrow{\sim} (E_2(K), F_r).$$

De proche en proche, on en déduit que l'isomorphisme canonique de $E_s(\mathrm{Dec}\,K)$ dans E_{s+1} $(s \geq 1)$ est un isomorphisme filtré, pour la filtration récurrente.

Sur $E_1(\mathrm{Dec}(K))$, $F_r = F_d$ (1.3.10), et on sait déjà (1.3.14) que u' est un isomorphisme filtré

$$u' : (E_1(\mathrm{Dec}\,K), F_d) \xrightarrow{\sim} (E_2(K), F_d).$$

Sur $E_2(K)$, on a donc $F_d = F_r$. Ceci, joint au résultat dual, prouve (1.3.16) pour $r_0 = 1$.

Supposons que $r_0 \geq 2$. Alors, les flèches d_1 de $E_1(K)$ sont strictement compatibles aux filtrations, donc aussi les flèches d_0 de $E_0(\mathrm{Dec}\,K)$ (u induit en effet un isomorphisme de suites spectrales, et on applique le critère (1.3.2)).

Pour $0 < s < r_0 - 1$, l'isomorphisme $(E_s(\mathrm{Dec}\,K), F_r) \approx (E_{s+1}(K), F_r)$ montre que les d_s sont strictement compatibles aux filtrations récurrentes.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $F_d = F_r$ sur $E_s(\mathrm{Dec}\,K)$ pour $s \leq r_0$. L'isomorphisme $(E_s(\mathrm{Dec}\,K), F_d) \approx (E_{s+1}(K), F_d)$ (1.3.13) montre alors que $F_d = F_r$ sur $E_r(K)$ pour $r \leq r_0 + 1$. Ceci, joint au résultat dual, prouve (1.3.16).

Corollaire **(1.3.17)**. — *Sous les hypothèses générales de* (1.3.16), *supposons que pour tout r les différentielles d_r soient strictement compatibles aux filtrations récurrentes des* E_r. *Alors, sur* E_∞, *les filtrations* F_d, F_r, F_{d^*} *coïncident, et coïncident avec la filtration induite par la filtration* F *de* $H^*(K)$.

Ceci résulte aussitôt de (1.3.16) et (1.3.13) (iv).

1.4. Hypercohomologie de complexes filtrés.

Dans ce numéro, on rappelle quelques constructions standard en hypercohomologie. On n'utilise pas le langage des catégories dérivées, qui serait le plus naturel ici.

Dans tout le numéro, par « complexe », on entendra « complexe borné inférieurement ».

(1.4.1) Soit T un foncteur exact à gauche d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ dans une catégorie abélienne $\mathscr{B}$. On suppose que tout objet de $\mathscr{A}$ s'injecte dans un objet injectif; les foncteurs dérivés $R^iT : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ sont donc définis. Un objet A de $\mathscr{A}$ sera dit *acyclique* pour T si $R^iT(A) = 0$ pour $i > 0$.

(1.4.2) Soient (A, F) un objet filtré de filtration finie, et TF la filtration de TA par ses sous-objets TF^pA (ce sont des sous-objets car T est exact à gauche). Si $\mathrm{Gr}_F(A)$ est T-acyclique, alors les $F^p(A)$ sont T-acycliques en tant qu'extensions successives d'objets T-acycliques. L'image par T de la suite

$$0 \to F^{p+1}(A) \to F^p(A) \to \mathrm{Gr}^p(A) \to 0$$

est donc exacte, et

$$(1.4.2.1) \qquad \mathrm{Gr}_{\mathrm{FT}}\,\mathrm{TA} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{A}.$$

(1.4.3) Soit A un objet muni de deux filtrations finies F et W telles que $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}\,\mathrm{A}$ soit T-acyclique. Les objets $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}\,\mathrm{A}$ sont alors T-acycliques, ainsi que les $\mathrm{F}^q(\mathrm{A}) \cap \mathrm{W}^p(\mathrm{A})$. Les suites

$$0 \to \mathrm{T}(\mathrm{F}^q \cap \mathrm{W}^{p+1}) \to \mathrm{T}(\mathrm{F}^q \cap \mathrm{W}^p) \to \mathrm{T}((\mathrm{F}^q \cap \mathrm{W}^p)/(\mathrm{F}^q \cap \mathrm{W}^{p+1})) \to 0$$

sont donc exactes, et $\mathrm{T}(\mathrm{F}^q(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^p(\mathrm{A})))$ est l'image dans $\mathrm{T}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^p(\mathrm{A}))$ de $\mathrm{T}(\mathrm{F}^p \cap \mathrm{W}^q)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{T}(\mathrm{F}^q \cap \mathrm{W}^p) & \longrightarrow & \mathrm{T}(\mathrm{F}^q\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^p\,\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{T}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^p\,\mathrm{A} \\
\Big\downarrow \wr & & & & \Big\downarrow \wr \\
\mathrm{TF}^q \cap \mathrm{TW}^p & & \xrightarrow{\hspace{6em}} & & \mathrm{Gr}_{\mathrm{TW}}^p\,\mathrm{TA}
\end{array}$$

montre alors que l'isomorphisme (1.4.2.1) relatif à W transforme la filtration $\mathrm{Gr}_{\mathrm{TW}}(\mathrm{TF})$ en la filtration $\mathrm{T}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}(\mathrm{F}))$.

(1.4.4) Soit K un complexe d'objets de $\mathscr{A}$. Les *objets d'hypercohomologie* $\mathrm{R}^i\mathrm{T}(\mathrm{K})$ se calculent comme suit :

a) On choisit un quasi-isomorphisme $i : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$, tel que les composantes de K′ soient acycliques pour T. Par exemple, on peut prendre pour K′ le complexe simple associé à une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K.

b) On pose

$$\mathrm{R}^i\mathrm{T}(\mathrm{K}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{T}(\mathrm{K}')).$$

On vérifie que $\mathrm{R}^i\mathrm{T}(\mathrm{K})$ ne dépend pas du choix de K′, dépend fonctoriellement de K, et qu'un quasi-isomorphisme $f : \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ induit des *isomorphismes*

$$\mathrm{R}^i\mathrm{T}(f) \; : \; \mathrm{R}^i\mathrm{T}(\mathrm{K}_1) \to \mathrm{R}^i\mathrm{T}(\mathrm{K}_2).$$

(1.4.5) Soit F une filtration birégulière de K. Une *résolution filtrée* T-*acyclique* de K est un quasi-isomorphisme filtré $i : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ de K dans un complexe filtré birégulier tel que les $\mathrm{Gr}^p(\mathrm{K}'^n)$ soient acycliques pour T. Si K′ est une telle résolution, les K'^n sont acycliques pour T et le complexe filtré (cf. (1.4.2)) T(K′) définit une suite spectrale

$$\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{R}^{p+q}\mathrm{T}(\mathrm{Gr}^p(\mathrm{K})) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}\mathrm{T}(\mathrm{K}).$$

Celle-ci est indépendante du choix de K′. On l'appelle la *suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré* K.

Elle dépend fonctoriellement de K et un quasi-isomorphisme filtré induit un isomorphisme de suites spectrales.

Les différentielles d_1 de cette suite spectrale sont les morphismes de connexion définis par les suites exactes courtes

$$0 \to \mathrm{Gr}^{p+1}\mathrm{K} \to \mathrm{F}^p\mathrm{K}/\mathrm{F}^{p+2}\mathrm{K} \to \mathrm{Gr}^p\mathrm{K} \to 0.$$

(1.4.6) Soit K un complexe. On désigne par $\tau_{\leq p}(\mathrm{K})$ le sous-complexe suivant :

$$\tau_{\leq p}(\mathrm{K})^n = \begin{cases} \mathrm{K}^n & \text{pour } n<p \\ \mathrm{Ker}(d) & \text{pour } n=p \\ 0 & \text{pour } n>p. \end{cases}$$

La *filtration*, dite *canonique*, de K par les $\tau_{\leq p}(\mathrm{K})$ se déduit par décalage de la filtration triviale G pour laquelle $\mathrm{G}^0(\mathrm{K})=\mathrm{K}$ et $\mathrm{G}^1(\mathrm{K})=0$. On a, pour la filtration canonique,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1^{pq} &= 0 \quad \text{si } p+q \neq -p \\ &\ \mathrm{H}^{-p} \quad \text{si } p+q=-p. \end{aligned}$$

Un quasi-isomorphisme $f: \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ est automatiquement un quasi-isomorphisme filtré pour les filtrations canoniques.

(1.4.7) Les sous-complexes $\sigma_{\geq p}(\mathrm{K})$ de K :

$$\sigma_{\geq p}(\mathrm{K})^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n<p \\ \mathrm{K}^n & \text{si} \quad n \geq p \end{cases}$$

définissent une filtration birégulière, la *filtration bête* de K.

Les suites spectrales d'hypercohomologie attachées aux filtrations bête ou canonique de K sont les deux *suites spectrales d'hypercohomologie* de K.

Exemple **(1.4.8)**. — Soit $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue entre espaces topologiques et soit $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur X. Soit $\mathscr{F}^*$ une résolution de $\mathscr{F}$ par des faisceaux f_*-acycliques. On a $\mathrm{R}^i f_*\mathscr{F} \simeq \mathscr{H}^i(f_*\mathscr{F}^*)$. Prenons pour foncteur T le foncteur $\Gamma(\mathrm{Y},\ )$. La suite spectrale d'hypercohomologie du complexe $f_*\mathscr{F}^*$ muni de sa filtration canonique (1.4.6)

$$\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^{2p+q}(\mathrm{Y}, \mathrm{R}^{-p}f_*\mathscr{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathscr{F})$$

n'est autre, à la rénumérotation $\mathrm{E}_r^{pq} \mapsto \mathrm{E}_{r+1}^{2p+q,\,-p}$ près que *la suite spectrale de Leray* pour f et $\mathscr{F}$.

(1.4.9) Soit (K, W, F) un complexe bifiltré birégulier. A ce complexe, on associe :

a) Une suite spectrale

$${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_1^{p,\,n-p} = \mathrm{H}^n(\mathrm{Gr}^p_{\mathrm{W}}(\mathrm{K})) \Rightarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{K}),$$

de différentielles ${}_{\mathrm{W}}d_1$ les morphismes de connexion déduits des suites exactes courtes

$$0 \to \mathrm{Gr}^{p+1}_{\mathrm{W}}(\mathrm{K}) \to \mathrm{W}^p(\mathrm{K})/\mathrm{W}^{p+2}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Gr}^p_{\mathrm{W}}(\mathrm{K}) \to 0;$$

b) Une suite spectrale analogue pour la filtration F;

c) Des carrés exacts

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_F^{p+1}\mathrm{Gr}_W^{q+1}K \arrow[r] \arrow[d] & F^p/F^{p+2}(\mathrm{Gr}_W^{q+1}K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_F^p\mathrm{Gr}_W^{q+1}K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_F^{p+1}(W^q/W^{q+2}(K)) \arrow[r] \arrow[d] & F^p/F^{p+2}(W^q/W^{q+2}(K)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_F^p(W^q/W^{q+2}(K)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_F^{p+1}\mathrm{Gr}_W^q K \arrow[r] \arrow[d] & F^p/F^{p+2}\mathrm{Gr}_W^q K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^q K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les lignes et colonnes extérieures de ce carré définissent des morphismes de connexion

$${}_{F,W}d_1 : H^n\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^q K \to H^{n+1}\mathrm{Gr}_F^{p+1}\mathrm{Gr}_W^q K$$

$${}_{W,F}d_1 : H^n\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^q K \to H^{n+1}\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^{q+1}K.$$

Ces morphismes vérifient

$${}_{FW}d_1 \circ {}_{WF}d_1 + {}_{WF}d_1 \circ {}_{FW}d_1 = 0$$

$${}_{FW}d_1^2 = 0 \qquad {}_{WF}d_1^2 = 0.$$

Les morphismes ${}_{FW}d_1$ sont les morphismes d_1 des suites spectrales $E^{(q)}$, de terme $E_1^{(q)p,n-p}$ égal à

(1.4.9.1) $$E_1^{p,q,n-p-q} \underset{\mathrm{dfn}}{=} H^n(\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^q K) \Rightarrow H^n(\mathrm{Gr}_W^q K) = {}_W E_1^{q,n-q},$$

définie par le complexe filtré $\mathrm{Gr}_W^q(K)$. Cette suite spectrale aboutit à la filtration induite par F sur $H^*\mathrm{Gr}_W^q K$. De même, les ${}_{WF}d_1$ sont les d_1 des suites spectrales de mêmes termes initiaux

(1.4.9.2) $$E_1^{p,q,n-p-q} = H^n(\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^q K) \Rightarrow H^n(\mathrm{Gr}_F^p K).$$

$$\begin{tikzcd}
 & H^n\mathrm{Gr}_W^q K \arrow[dr, Rightarrow, "({}_W d_1)"] & \\
H^n\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_W^q K \arrow[ur, Rightarrow, "({}_{F,W}d_1)"] \arrow[dr, Rightarrow, "({}_{W,F}d_1)"'] & & H^n K \\
 & H^n\mathrm{Gr}_F^p K \arrow[ur, Rightarrow, "({}_F d_1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Ces constructions sont symétriques en F et W, *via* l'isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q} \sim \mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}.$$

(1.4.10) On peut encore interpréter les ${}_{\mathrm{W},\mathrm{F}}d_1$ comme les morphismes initiaux d'un morphisme de suites spectrales (1.4.9.2), aboutissant à ${}_{\mathrm{W}}d_1$.

Soit en effet C^q le cône du morphisme

$$\mathrm{W}^q(\mathrm{K})/\mathrm{W}^{q+2}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q}(\mathrm{K}).$$

Dans le diagramme

$$\Sigma : \ \mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q+1}(\mathrm{K})[1] \xrightarrow{u} \mathrm{C}^q \xleftarrow{i} \mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q}(\mathrm{K}),$$

u est un quasi-isomorphisme, et on a

$${}_{\mathrm{W}}d_1 = \mathrm{H}(u)^{-1} \circ \mathrm{H}(i).$$

En fait, u est même un quasi-isomorphisme filtré (pour F), et la construction précédente définit un morphisme de la suite spectrale définie par $(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q}(\mathrm{K}), \mathrm{F})$ dans celle définie par $(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q+1}(\mathrm{K})[1], \mathrm{F})$, morphisme qui aboutit à ${}_{\mathrm{W}}d_1$. Le terme initial de ce morphisme, déduit de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}(\Sigma)$, n'est autre que ${}_{\mathrm{W},\mathrm{F}}d_1$.

(1.4.11) Ces constructions passent telles quelles à l'hypercohomologie. Soit en effet K un complexe muni de deux filtrations birégulières F et W.

Une *résolution* T-*acyclique bifiltrée* de K est un quasi-isomorphisme bifiltré $i : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ tel que les $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{K}'^m)$ soient T-acycliques. Il en existe toujours. Dans le cas particulier où $\mathscr{A}$ est la catégorie des faisceaux de A-modules sur un espace topologique X, et où T est le foncteur Γ de $\mathscr{A}$ dans les A-modules, un exemple de résolution T-acyclique bifiltrée de K est le complexe simple associé au complexe double résolution de Godement $\mathscr{C}^*(\mathrm{K})$ de K, filtré par les $\mathscr{C}^*(\mathrm{F}^p(\mathrm{K}))$ et par les $\mathscr{C}^*(\mathrm{W}^n(\mathrm{K}))$. Puisque $\mathscr{C}^*$ est exact, on a en effet

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}(\mathscr{C}^*(\mathrm{K})) \simeq \mathscr{C}^*(\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}(\mathrm{K})).$$

On n'aura besoin ici d'aucun autre cas.

Si K' est une résolution bifiltrée T-acyclique de K, le complexe TK' est filtré par les $\mathrm{TF}^p\mathrm{K}'$ et par les $\mathrm{TW}^q\mathrm{K}'$ (1.4.3). De plus, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{K}')$ est une résolution filtrée (pour F) T-acyclique de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{n}(\mathrm{K})$, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{n}(\mathrm{K}')$ est une résolution filtrée (pour W) T-acyclique de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{n}(\mathrm{K})$, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{n}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{m}(\mathrm{K}')$ est une résolution T-acyclique de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{n}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{m}(\mathrm{K})$, et

$$\mathrm{T}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{K}' \approx \mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{TK}' \quad \text{(comme complexe W-filtré)}$$

$$\mathrm{T}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}\,\mathrm{K}' \approx \mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}\,\mathrm{TK}' \quad \text{(comme complexe F-filtré)}$$

$$\mathrm{T}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}\,\mathrm{K}' \approx \mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}\,\mathrm{TK}'.$$

Lemme **(1.4.12)**. — *Sous les hypothèses de* (1.4.11) :

(i) *Les termes initiaux des suites spectrales d'hypercohomologie*

$$(1) \qquad {}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_1^{q,n-q} = \mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{W}}^{q}\mathrm{K}) \Rightarrow \mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K})$$

$$(2) \qquad {}_{\mathrm{F}}\mathrm{E}_1^{p,n-p} = \mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}\mathrm{K}) \Rightarrow \mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K})$$

sont aboutissements des suites spectrales d'hypercohomologie des complexes filtrés $\mathrm{Gr}^q_{\mathrm{W}}\mathrm{K}$ *et* $\mathrm{Gr}^p_{\mathrm{F}}\mathrm{K}$, *de terme* E_1 *donné par*

$$\mathrm{E}_1^{p,q,n-p-q} \underset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{Gr}^p_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}^q_{\mathrm{W}}\mathrm{K}) \Rightarrow {}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_1^{q,n-q} \quad (q \text{ fixe}) \tag{3}$$

$$\mathrm{E}_1^{p,q,n-p-q} \underset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{Gr}^p_{\mathrm{F}}\,\mathrm{Gr}^q_{\mathrm{W}}\mathrm{K}) \Rightarrow {}_{\mathrm{F}}\mathrm{E}_1^{p,n-p} \quad (p \text{ fixe}). \tag{4}$$

(ii) *La filtration de* ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_1^{p,n-p}$, *aboutissement de la suite spectrale* (3), *est la filtration de* ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_1^{p,n-p}(\mathrm{TK}')$ *induite par la filtration* F *de* TK'.

(iii) *Pour que les différentielles des complexes* $\mathrm{Gr}^n_{\mathrm{W}}(\mathrm{T}(\mathrm{K}'))$ *soient strictement compatibles à la filtration* F, *il faut et il suffit que les suites spectrales d'hypercohomologie* (3) *dégénèrent au terme* E_1.

(iv) *Les morphismes* d_1 *de la suite spectrale* (4) *sont les termes initiaux de morphismes de degré* 1 *de suites spectrales* (3) *aboutissant aux morphismes* d_1 *de la suite spectrale* (1).

Les assertions (i) et (iv) résultent de (1.4.9) et (1.4.10) appliquées à TK', *via* les isomorphismes (1.4.11). L'assertion (ii) est alors triviale sur la définition de la filtration récurrente F (identique aux filtrations directes par (1.3.10) et (1.3.13) (iii)) et l'assertion (iii) résulte de (1.3.2).

2. Structures de Hodge

2.1. Structures pures.

(2.1.1) Dans toute la suite, on désignera par **C** une clôture algébrique de **R** : on ne suppose pas avoir choisi une racine i de l'équation $x^2+1=0$. La théorie sera invariante par conjugaison complexe (cf. (2.1.14)).

(2.1.2) On désignera par S le groupe algébrique réel $\mathbf{C}^*$, déduit par restriction des scalaires à la Weil de **C** à **R** du groupe $\mathbf{G}_m$:

$$S = \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{G}_m.$$

$$S(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^*.$$

Le groupe S est un tore, i.e. est connexe et de type multiplicatif. Il est donc décrit par le groupe abélien libre de type fini

$$\mathrm{X}(S) = \mathrm{Hom}(S_{\mathbf{C}}, \mathbf{G}_m) = \mathit{Hom}(S, \mathbf{G}_m)(\mathbf{C})$$

de ses caractères complexes, muni de l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/(2)$.

Le groupe $\mathrm{X}(S)$ a pour générateurs z et $\bar{z}$, induisant respectivement l'identité et la conjugaison complexe :

$$\mathbf{C}^* = S(\mathbf{R}) \to S(\mathbf{C}) \to \mathbf{G}_m(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*.$$

La conjugaison complexe échange z et $\bar{z}$.

(2.1.3) On dispose d'une application canonique

$$w : \mathbf{G}_m \to S \tag{2.1.3.1}$$

qui, sur les points réels, induit l'inclusion de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{C}^*$. On a

(2.1.3.2) $$zw = \bar{z}w = \mathrm{Id}.$$

On dispose aussi d'une application

(2.1.3.3) $$\mathrm{N} : S \to \mathbf{G}_m$$

qui sur les points réels s'identifie à la norme $\mathrm{N}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} : \mathbf{C}^* \to \mathbf{R}^*$. On a

(2.1.3.4) $$\mathrm{N} = z\bar{z}$$

(2.1.3.5) $$\mathrm{N} \circ w = (x \mapsto x^2).$$

Définition **(2.1.4)**. — *Une* structure de Hodge réelle *est un vectoriel réel* V *de dimension finie muni d'une action du groupe algébrique réel* S.

(2.1.5) D'après la théorie générale des groupes de type multiplicatif, il revient au même de se donner une structure de Hodge réelle sur V, ou de se donner une bigraduation V^{pq} de $\mathrm{V}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathrm{V}$ qui vérifie $\overline{\mathrm{V}^{pq}} = \mathrm{V}^{qp}$. L'action de S et la bigraduation se déterminent mutuellement *via* la condition :

(2.1.5.1) Sur V^{pq}, S agit par multiplication par $z^p \bar{z}^q$.

(2.1.6) Soit $(\mathbf{C}, \times)$ le monoïde multiplicatif, et soit

$$\bar{S} = \prod_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} (\mathbf{C}, \times).$$

Si V est un vectoriel réel, on vérifie qu'il revient au même de se donner une action de $\bar{S}$ sur V ou de se donner sur V une bigraduation telle que $\overline{\mathrm{V}^{pq}} = \mathrm{V}^{qp}$ et $\mathrm{V}^{pq} = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$.

(2.1.7) Soit V une structure de Hodge réelle, définie par une représentation σ de S et une bigraduation V^{pq}. La graduation de $\mathrm{V}_{\mathbf{C}}$ par les $\mathrm{V}_{\mathbf{C}}^n = \sum_{p+q=n} \mathrm{V}^{pq}$ est alors définie sur $\mathbf{R}$. On l'appelle la *graduation par le poids*. Sur $\mathrm{V}^n = \mathrm{V} \cap \mathrm{V}_{\mathbf{C}}^n$, la représentation σw de $\mathbf{G}_m$ est la multiplication par x^n.

On dira que V est *de poids n* si $\mathrm{V}^{pq} = 0$ pour $p+q \neq n$, i.e. si σw est la multiplication par x^n.

(2.1.8) Soit V une structure de Hodge réelle. La *filtration de Hodge* sur $\mathrm{V}_{\mathbf{C}}$ est définie par

$$\mathrm{F}^p(\mathrm{V}_{\mathbf{C}}) = \sum_{p' \geq p} \mathrm{V}^{p'q'}.$$

D'après (1.2.6), on a

Proposition **(2.1.9)**. — *Soit n un entier. La construction* (2.1.8) *établit une équivalence de catégories entre :*

a) *la catégorie des structures de Hodge réelles de poids n;*

b) *la catégorie des couples formés d'un vectoriel réel de dimension finie* V *et d'une filtration* F *sur* $\mathrm{V}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathrm{V}$ *qui soit n-opposée à sa complexe conjuguée* $\overline{\mathrm{F}}$.

Définition **(2.1.10).** — *Une structure de Hodge* H, *de poids n, consiste en*

a) *un* **Z**-*module de type fini* $H_{\mathbf{Z}}$ *(le « réseau entier »)*;

b) *une structure de Hodge réelle de poids n sur* $H_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}}H_{\mathbf{Z}}$.

(2.1.11) Un morphisme $f:H\to H'$ est un homomorphisme $f: H_{\mathbf{Z}}\to H'_{\mathbf{Z}}$ tel que $f_{\mathbf{R}}: H_{\mathbf{R}}\to H'_{\mathbf{R}}$ soit compatible à l'action de S (i.e. tel que $f_{\mathbf{C}}$ soit compatible à la bigraduation, ou à la filtration de Hodge).

Les structures de Hodge de poids n forment une catégorie abélienne. Si H est de poids n et H′ de poids n', on définit une structure de Hodge $H\otimes H'$ de poids $n+n'$ par les formules :

a) $(H\otimes H')_{\mathbf{Z}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes H'_{\mathbf{Z}}$;

b) l'action de S sur $(H\otimes H')_{\mathbf{R}}=H_{\mathbf{R}}\otimes H'_{\mathbf{R}}$ est produit tensoriel des actions de S sur $H_{\mathbf{R}}$ et $H'_{\mathbf{R}}$.

La bigraduation (resp. la filtration de Hodge) de $(H\otimes H')_{\mathbf{C}}=H_{\mathbf{C}}\otimes H'_{\mathbf{C}}$ est le produit tensoriel des bigraduations (resp. des filtrations de Hodge (cf. (1.1.12)) de $H_{\mathbf{C}}$ et $H'_{\mathbf{C}}$.

On définit de façon analogue la structure de Hodge $\mathit{Hom}(H, H')$ (de poids $n'-n$), les structures de Hodge $\overset{p}{\wedge}H$ (de poids pn), et la structure de Hodge H^* duale de H.

Le « *Hom* interne » précédent, et le groupe des homomorphismes, sont liés par la

Remarque **(2.1.11.1).** — $\mathrm{Hom}(H, H')$ est le sous-groupe de

$$\mathit{Hom}(H, H')_{\mathbf{Z}}=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_{\mathbf{Z}}, H'_{\mathbf{Z}})$$

formé des éléments de type (0, 0).

Les actions de S sur $H_{\mathbf{R}}$, $H'_{\mathbf{R}}$ et $\mathit{Hom}(H, H')_{\mathbf{R}}=\mathrm{Hom}(H_{\mathbf{R}}, H'_{\mathbf{R}})$ sont en effet liées par

$$s(f(x))=s(f)(s(x)).$$

Que f soit de type (0, 0), i.e. invariant par S, signifie donc qu'il commute à l'action de S.

(2.1.12) Pour A un sous-anneau noethérien de **R**, on définit une A-*structure de Hodge de poids n* comme étant formée d'un A-module de type fini H_A et d'une structure de Hodge réelle de poids n sur $H_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\otimes_A H_A$. Ces définitions sont surtout utilisées pour $A=\mathbf{Q}$. Une A-structure de Hodge consiste en un A-module de type fini H_A et en une structure de Hodge réelle sur $H_{\mathbf{R}}=H_A\otimes_A\mathbf{R}$, telle que la graduation par le poids soit définie sur le corps des fractions de A.

Définition **(2.1.13).** — *La* structure de Hodge de Tate $\mathbf{Z}(1)$ *est la structure de Hodge de poids* -2, *de rang* 1, *purement de bidegré* $(-1, -1)$, *de réseau entier* $2\pi i\mathbf{Z}\subset\mathbf{C}$.

L'action de S est donc la multiplication par l'inverse de la norme (2.1.3.3).

Pour $n\in\mathbf{Z}$, on définit $\mathbf{Z}(n)$ comme étant la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de $\mathbf{Z}(1)$: $\mathbf{Z}(n)$ est la structure de Hodge de poids $-2n$, de rang 1, purement de bidegré $(-n, -n)$, de réseau entier $(2\pi i)^n\mathbf{Z}\subset\mathbf{C}$. L'action de S est la multiplication par $N(x)^{-n}$.

(2.1.14) Le choix dans $\mathbf{C}$ d'une solution i de l'équation $x^2+1=0$ détermine sur chaque variété complexe X purement de dimension n une orientation $\mathrm{or}_i(\mathrm{X})$. Quand on change i en $-i$, on a

$$\mathrm{or}_{-i}(\mathrm{X})=(-1)^n\mathrm{or}_i(\mathrm{X}).$$

Le choix de i définit aussi un élément C d'ordre 4 dans $S(\mathbf{R})$: l'image de i par l'isomorphisme $S(\mathbf{R})\simeq\mathbf{C}^*$.

Il définit enfin un isomorphisme entre $\mathbf{Z}$ et le réseau entier de $\mathbf{Z}(n)$: la multiplication par $(2\pi i)^n$.

Quand i, une orientation de X, C, ou une identification $\mathbf{Z}\sim\mathbf{Z}(n)_{\mathbf{Z}}$ figureront dans une formule, il sera en principe entendu qu'ils sont subordonnés à un même choix de i, et qu'en changeant i en $-i$, on trouverait une définition ou formule équivalente.

Définition **(2.1.15)**. — *Une* polarisation *d'une structure de Hodge* H *de poids n est un homomorphisme*

$$(x,y)\ :\ \mathrm{H}\otimes\mathrm{H}\to\mathbf{Z}(-n)$$

tel que la forme bilinéaire réelle $(2\pi i)^n(x,\mathrm{C}y)$ *sur* $\mathrm{H}_{\mathbf{R}}$ *soit symétrique et définie positive.*

(2.1.16) La *structure de Hodge réelle de Tate* est la structure de Hodge réelle $\mathbf{R}(1)$ sous-jacente à $\mathbf{Z}(1)$. On définit de même $\mathbf{R}(n)$ sous-jacent à $\mathbf{Z}(n)$. Une polarisation d'une structure de Hodge *réelle* H de poids n est un homomorphisme

$$(x,y)\ :\ \mathrm{H}\otimes\mathrm{H}\to\mathbf{R}(-n)$$

tel que la forme bilinéaire réelle $(2\pi i)^n(x,\mathrm{C}y)$ sur $\mathrm{H}_{\mathbf{R}}$ soit symétrique et définie positive. Une polarisation est entièrement définie par la forme quadratique définie positive $(2\pi i)^n(x,\mathrm{C}y)$ sur $\mathrm{H}_{\mathbf{R}}$, soumise à la seule condition d'être invariante par le sous-tore compact de S, noyau de N.

On a $$(x,y)=(\mathrm{C}x,\mathrm{C}y)=(y,\mathrm{C}^2x)=(-1)^n(y,x).$$

La forme (x,y) est donc symétrique ou alternée selon la parité de n.

(2.1.17) Le lecteur généralisera ces définitions aux A-structures de Hodge de poids n (2.1.12).

2.2. La théorie de Hodge.

(2.2.1) Soit X une variété kählérienne compacte (par exemple projective lisse). D'après le lemme de Poincaré holomorphe, le complexe de De Rham Ω^*_{X} est une résolution du faisceau constant $\mathbf{C}$. On a donc un isomorphisme (1.4.2)

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathbf{C})\sim\mathbf{H}^*(\mathrm{X},\Omega^*_{\mathrm{X}}),$$

et la filtration bête de Ω^*_{X} (1.4.5) définit la suite spectrale d'hypercohomologie

(2.2.1.1) $$\mathrm{E}_1^{pq}=\mathrm{H}^q(\mathrm{X},\Omega^p_{\mathrm{X}})\Rightarrow\mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X},\mathbf{C}),$$

d'aboutissement la *filtration de Hodge* de $\mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathbf{C})$.

D'après la théorie de Hodge [9], [12], on a :

(A) La suite spectrale (2.2.1.1) est dégénérée : $E_1 = E_\infty$.

(B) La filtration de Hodge de $H^n(X, \mathbf{C})$ est n-opposée à la filtration complexe conjuguée.

(2.2.2) Soit V un système local de vectoriels réels sur X, i.e. un faisceau de $\mathbf{R}$-vectoriels localement isomorphe à un faisceau constant $\mathbf{R}^n$. Supposons qu'il existe sur V une forme bilinéaire

$$Q : V \otimes V \to \mathbf{R}$$

localement constante et *définie*. Pour X connexe, tel est le cas si V est défini par une représentation d'un quotient fini du groupe fondamental de X.

Les points (A) et (B) ci-dessus restent valables tels quels, sans qu'il faille rien changer aux démonstrations, pour la cohomologie à coefficients dans $V_{\mathbf{C}} = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$: la suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p(V)) \Rightarrow H^{p+q}(X, V_{\mathbf{C}})$$

déduite de la résolution de De Rham de $V_{\mathbf{C}}$ par $\Omega_X^*(V_{\mathbf{C}})$ dégénère, et aboutit à une filtration sur $H^n(X, V_{\mathbf{C}})$ n-opposée à la filtration complexe conjuguée.

Le vectoriel $H^n(X, V)$ est donc muni d'une structure de Hodge réelle de poids n canonique.

(2.2.3) On montre dans [2] que les énoncés (2.2.1) restent valables pour X une variété algébrique complète non singulière, non nécessairement kählérienne. La démonstration de *loc. cit.*, basée sur une réduction au cas projectif *via* le lemme de Chow et la résolution des singularités, s'étend au cadre (2.2.2).

(2.2.4) Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible. Voici deux façons de définir la classe $c_1(\mathscr{L})$.

(2.2.4.1) Le faisceau $\mathscr{L}$ définit un élément c dans $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Son image par $df/f : \mathcal{O}^* \to \Omega^1$ se trouve dans $H^1(X, \Omega^1)$. Plus précisément, df/f définit un morphisme de complexes

$$d\log : \mathcal{O}^*[-1] \to [0 \to \Omega_X^1 \to \Omega_X^2 \to \ldots] = \sigma_{\geq 1}(\Omega_X^*).$$

Ce complexe s'envoie dans Ω_X^*, d'où

$$d\log : \mathcal{O}^*[-1] \to \Omega_X^*,$$

et l'image de c par $d\log$ est dans $\mathbf{H}^2(\Omega_X^*)$. Cette construction garderait un sens pour une variété algébrique sur un corps k quelconque. Pour $k = \mathbf{C}$, on a de plus

$$H^2(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^2(X, \Omega_X^*)$$

d'où une classe $$c_1'(\mathscr{L}) \in H^2(X, \mathbf{C}).$$

(2.2.4.2) La suite exacte exponentielle

$$0 \to \mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$$

définit un homomorphisme

$$\partial : \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}^*) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(1)),$$

d'où une classe $$\partial c = c_1''(\mathscr{L}) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(1)).$$

Si i est choisi, cette classe s'identifie à

$$c_1'''(\mathscr{L}) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{Z}),$$

et pour $\mathscr{L} = \mathcal{O}(\mathrm{D})$, $c_1'''(\mathscr{L})$ n'est autre que la classe de cohomologie entière définie par D (les orientations étant définies par i).

(2.2.5) Prouvons que :

(2.2.5.1) Pour α l'injection naturelle de $\mathbf{Z}(1)$ dans $\mathbf{C}$, on a

$$-\alpha c_1''(\mathscr{L}) = c_1'(\mathscr{L}).$$

(2.2.5.2) Pour β l'injection naturelle de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$, on a

$$-\beta c_1'''(\mathscr{L}) = \frac{1}{2\pi i} c_1'(\mathscr{L}).$$

On le vérifie en contemplant le diagramme de complexes suivant, dans lequel $\approx$ désigne un quasi-isomorphisme, et dont le rectangle supérieur est anticommutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "\approx"] \arrow[d, equal] & & \Omega^*_{\mathrm{X}} & & \sigma_{\geq 1}\Omega^* \arrow[ll] \arrow[d, equal] \\
\mathbf{C} & & {[\mathbf{C} \to \mathcal{O}]} \arrow[ll] \arrow[rr, "\approx", "d"'] & & \sigma_{\geq 1}\Omega^* \\
\mathbf{Z}(1) \arrow[u] & & {[\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]} \arrow[ll] \arrow[u] \arrow[rr, "\approx", "\exp"'] & & \mathcal{O}^*[-1] \arrow[u, "d \log"']
\end{tikzcd}$$

(2.2.6) Soit X une variété projective non singulière purement de dimension n. Un choix de i définit une orientation de X et un isomorphisme $\mathbf{Z}(1) \simeq \mathbf{Z}$. Le morphisme trace correspondant :

$$\mathrm{H}^{2n}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(n)) \to \mathbf{Z}$$

qui s'en déduit ne dépend pas du choix de i.

D'après Hodge, pour $i \leq n$, le morphisme

$$\mathrm{L}^{n-i} = \wedge c_1''(\mathcal{O}(1))^{n-i} : \mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^{2n-i}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(n-i)),$$

est un isomorphisme et, combiné à la dualité de Poincaré

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Z}) \otimes \mathrm{H}^{2n-i}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(n-i)) \to \mathrm{H}^{2n}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(n-i)) \to \mathbf{Z}(-i),$$

il fournit une polarisation sur la *partie primitive* $\mathrm{Ker}(\mathrm{L}^{n-i+1})$ de $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Z})$.

On en déduit que les structures de Hodge rationnelles $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Q})$ sont polarisables.

2.3. Structures mixtes.

Définition **(2.3.1)**. — *Une* structure de Hodge mixte H *consiste en* :

a) *Un* **Z**-*module de type fini* $H_{\mathbf{Z}}$ (*le* « réseau entier »).

b) *Une filtration finie croissante* W_n *de* $H_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}}$, *appelée la* filtration par le poids.

c) *Une filtration finie* F^p *de* $H_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}}$, *appelée la* filtration de Hodge.

On exige que sur $H_{\mathbf{C}}$, *la filtration* $W_{\mathbf{C}}$ *déduite de* W *par extension des scalaires, la filtration* F *et sa complexe conjuguée* $\overline{F}$ *forment un système* $(W_{\mathbf{C}}, F, \overline{F})$ *de trois filtrations opposées* ((1.2.7) et (1.2.13)).

(2.3.2) Désignons encore par W la filtration de $H_{\mathbf{Z}}$ image réciproque de la filtration W de $H_{\mathbf{Q}}$. L'axiome des structures de Hodge mixtes signifie que pour chaque n, la filtration F induit sur $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Gr}_n^W(H_{\mathbf{Z}})$ une filtration n-opposée à sa complexe conjuguée. D'après (2.1.9), $\mathrm{Gr}_n^W(H_{\mathbf{Z}})$ se trouve muni d'une structure de Hodge de poids n, de filtration de Hodge induite par F.

Exemple **(2.3.3)**. — Si H est une structure de Hodge de poids n, on définit une structure de Hodge mixte de même réseau entier et de même filtration de Hodge en posant

$$W_i(H_{\mathbf{Q}}) = 0 \quad \text{pour } i < n \qquad \text{et} \qquad W_i(H_{\mathbf{Q}}) = H_{\mathbf{Q}} \quad \text{pour } i \geqslant n.$$

(2.3.4) Un *morphisme* $f : H \to H'$ de structures de Hodge est un homomorphisme $f : H_{\mathbf{Z}} \to H'_{\mathbf{Z}}$ compatible aux filtrations W et F (et donc compatible à $\overline{F}$). On déduit aussitôt de (1.2.10) le théorème suivant.

Théorème **(2.3.5)**. — (i) *La catégorie des structures de Hodge mixtes est abélienne.*

(ii) *Le noyau* (resp. *conoyau*) *d'un morphisme* $f : H \to H'$ *a pour réseau entier le noyau* (resp. *conoyau*) K *de* $f : H_{\mathbf{Z}} \to H'_{\mathbf{Z}}$, $K \otimes \mathbf{Q}$ *et* $K \otimes \mathbf{C}$ *étant munis des filtrations induites* (resp. *quotients*) *des filtrations* W *et* F *de* $H_{\mathbf{Q}}$ *et* $H_{\mathbf{C}}$ (resp. *de* $H'_{\mathbf{Q}}$ *et* $H'_{\mathbf{C}}$).

(iii) *Tout morphisme* $f : H \to H'$ *est strictement compatible à la filtration* W *de* $H_{\mathbf{Q}}$ *et* $H'_{\mathbf{Q}}$ *et à la filtration* F *de* $H_{\mathbf{C}}$ *et* $H'_{\mathbf{C}}$. *Il induit des morphismes de* **Q**-*structures de Hodge* :

$$\mathrm{Gr}_n^W(f) : \mathrm{Gr}_n^W(H_{\mathbf{Q}}) \to \mathrm{Gr}_n^W(H'_{\mathbf{Q}})$$

et des morphismes strictement compatibles à la filtration induite par $W_{\mathbf{C}}$:

$$\mathrm{Gr}_F^p(f) : \mathrm{Gr}_F^p(H_{\mathbf{C}}) \to \mathrm{Gr}_F^p(H'_{\mathbf{C}}).$$

(iv) *Le foncteur* Gr_n^W *est un foncteur exact de la catégorie des structures de Hodge mixtes dans la catégorie des* **Q**-*structures de Hodge de poids n.*

(v) *Le foncteur* Gr_F^p *est exact.*

(2.3.6) Soit H une structure de Hodge mixte. Les $W_n(H_{\mathbf{Z}})$, munis des filtrations induites par W et F, forment alors des sous-structures de Hodge mixtes $W_n(H)$ de H. Le quotient $W_n(H)/W_{n-1}(H)$ s'identifie à $\mathrm{Gr}_n^W(H_{\mathbf{Z}})$, muni de sa structure de Hodge (2.3.2), (2.3.3). Cette structure de Hodge se notera $\mathrm{Gr}_n^W(H)$.

(2.3.7) On pose $H^{pq} = \mathrm{Gr}_F^p \, \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \, \mathrm{Gr}_{p+q}^W(H_{\mathbf{C}}) = (\mathrm{Gr}_{p+q}^W(H))^{p,q}$. Les *nombres de Hodge* de H sont les entiers

$$h^{pq} = \dim_{\mathbf{C}} H^{pq}.$$

Le nombre de Hodge h^{pq} de H est donc le nombre de Hodge h^{pq} de la structure de Hodge $\mathrm{Gr}_{p+q}^W(H)$.

(2.3.8) On définit une **Q**-*structure de Hodge mixte* H comme consistant en un vectoriel de dimension finie $H_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, une filtration finie croissante W de $H_{\mathbf{Q}}$ et une filtration finie décroissante F de $H_{\mathbf{C}}$, les filtrations $W_{\mathbf{C}}$, F et $\bar{F}$ étant opposées. Le théorème (2.3.5) se généralise trivialement à cette variante.

3. Théorie de Hodge des variétés algébriques non singulières

3.1. Pôles logarithmiques et résidus.

(3.1.1) Rappelons quelques propriétés classiques des « pôles logarithmiques » des formes différentielles holomorphes. Le lecteur trouvera des démonstrations dans [3], II, (3.1) à (3.7), par exemple.

(3.1.2) Un diviseur Y dans une variété analytique complexe lisse X sera dit être *à croisements normaux* si l'inclusion de Y dans X est localement isomorphe à l'inclusion d'une réunion d'hyperplans de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$; ceci n'implique pas que Y soit réunion de diviseurs lisses. Soient Y un diviseur à croisements normaux dans X et j l'inclusion de $X^* = X - Y$ dans X. On désigne par $\Omega_X^1\langle Y\rangle$ le sous-$\mathcal{O}$-Module localement libre de $j_*\Omega_{X^*}^1$ engendré par Ω_X^1 et par les $\dfrac{dz_i}{z_i}$ pour z_i équation locale d'une composante irréductible locale de Y. Le *faisceau* $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ *des p-formes différentielles sur* X *à pôle logarithmique le long de* Y est par définition le sous-faisceau localement libre $\overset{p}{\wedge}\Omega_X^1\langle Y\rangle$ de $j_*\Omega_{X^*}^p$.

Proposition **(3.1.3)**. — (i) *Une section α de $j_*\Omega_{X^*}^p$ appartient à $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ si et seulement si α et $d\alpha$ présentent au pis des pôles simples le long du diviseur* Y.

(ii) *Les $\Omega_X^p\langle Y\rangle$ forment le plus petit sous-complexe de $j_*\Omega_{X^*}^*$, stable par produit extérieur, contenant Ω_X^*, et contenant la différentielle logarithmique df/f de toute section locale méromorphe le long de* Y *de $j_*\mathcal{O}_{X^*}^*$.*

On appelle $\Omega_X^*\langle Y\rangle$ le *complexe de De Rham logarithmique* de X le long de Y. D'après (3.1.3), (ii), ce complexe est contravariant en le couple (X, X^*).

(3.1.4) Localement sur X, Y est réunion de diviseurs lisses Y_i, et on désigne par Y^n (resp. $\tilde{Y}^n$) la réunion (resp. la somme disjointe) des intersections n à n des Y_i. Les Y^n se recollent en un sous-espace Y^n de X, et les $\tilde{Y}^n$ se recollent en la variété normalisée de Y^n. On a $\tilde{Y}^0 = Y^0 = X$ et on pose $\tilde{Y} = \tilde{Y}^1$.

On définit l'ensemble à deux éléments des *orientations* d'un ensemble fini à

n éléments E comme étant l'ensemble des générateurs de $\overset{n}{\wedge}\mathbf{Z}^{\mathrm{E}}$. Pour $n \geq 2$, cet ensemble est celui des classes de conjugaison sous le groupe alterné d'ordres totaux sur E.

Si, à chaque point y de $\tilde{\mathrm{Y}}^n$, on associe l'ensemble des n composantes locales de Y qui contiennent l'image dans X d'un voisinage de y dans $\tilde{\mathrm{Y}}^n$, on définit sur $\tilde{\mathrm{Y}}^n$ un système local E_n d'ensembles à n éléments. Le système local des orientations de ces ensembles est un torseur sous $\mathbf{Z}/(2)$. Ce torseur définit, *via* l'inclusion de $\mathbf{Z}/(2)$ dans $\mathbf{C}^*$, un système local complexe ε^n de rang 1 sur $\tilde{\mathrm{Y}}^n$, muni d'un isomorphisme $(\varepsilon^n)^{\otimes 2} \simeq \boldsymbol{C}$. On a

$$\varepsilon^n \simeq \overset{n}{\wedge} \boldsymbol{C}^{\mathrm{E}_n}.$$

Localement sur $\tilde{\mathrm{Y}}^n$, ε^n est muni de deux isomorphismes opposés $\pm\alpha : \varepsilon^n \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$. On pose

$$\varepsilon^n_{\mathbf{Z}} = \alpha^{-1}((2\pi i)^{-n}\mathbf{Z}).$$

Il y a lieu de voir ε^n, muni de $\varepsilon^n_{\mathbf{Z}}$, comme une forme tordue de $\mathbf{Z}(-n)$ sur $\tilde{\mathrm{Y}}^n$.

On désignera par $\varepsilon^n_{\mathrm{X}}$ (resp. par $(\varepsilon^n_{\mathrm{X}})_{\mathbf{Z}}$) l'image directe de ε^n (resp. de $\varepsilon^n_{\mathbf{Z}}$) par l'application de $\tilde{\mathrm{Y}}^n$ dans X. On a

(3.1.4.1) $$\varepsilon^n_{\mathrm{X}} \simeq \overset{n}{\wedge} \varepsilon^1_{\mathrm{X}} \qquad (n \geq 0).$$

Si Y est une réunion de diviseurs lisses distincts $(\mathrm{Y}_i)_{i \in \mathrm{I}}$, le choix d'un ordre total sur I trivialise les ε^n.

(3.1.5) Désignons par $\mathrm{W}_n(\Omega^p_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle)$ le sous-Module de $\Omega^p_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle$ formé des combinaisons linéaires de produits

$$\alpha \wedge \frac{dt_{i(1)}}{t_{i(1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{i(m)}}{t_{i(m)}} \qquad (m \leq n),$$

avec α holomorphe et les $t_{i(j)}$ équations locales de composantes locales distinctes Y_j de Y. On appelle *filtration par le poids* de $\Omega^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle$ la filtration *croissante* par les sous-complexes $\mathrm{W}_n(\Omega^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle)$. On a

(3.1.5.1) $$\mathrm{W}_n(\Omega^p_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle) \wedge \mathrm{W}_m(\Omega^q_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle) \subset \mathrm{W}_{n+m}(\Omega^{p+q}_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle).$$

Désignant par i_n l'application de $\tilde{\mathrm{Y}}^n$ dans X, on vérifie que la correspondance

$$\alpha \wedge \frac{dt_{i(1)}}{t_{i(1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{i(n)}}{t_{i(n)}} \mapsto (\alpha \,|\, \mathrm{Y}_{i(1)} \cap \ldots \mathrm{Y}_{i(n)}) \otimes (\text{orientation } i(1) \ldots i(n))$$

définit des isomorphismes de complexes

(3.1.5.2) $$\text{Rés} : \mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_n(\Omega^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{Y}\rangle) \approx i_{n_*}\Omega^*_{\tilde{\mathrm{Y}}^n}(\varepsilon^n)[-n]$$

(le « *résidu de Poincaré* »).

(3.1.6) L'interprétation qui suit, en terme de (3.1.5.2), de la suite spectrale de Leray pour l'inclusion de X^* dans X, m'a été signalée par N. Katz. Elle permettra de vérifier un point que j'avais tout d'abord considéré comme évident ((3.2.5), (ii), 1re partie).

(3.1.7) Tout point de X admet un système fondamental de voisinages ouverts de Stein dont la trace sur X^* soit de Stein. Pour $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X^*, on a donc $R^i j_* \mathscr{F} = 0$ pour $i > 0$. Le complexe de De Rham $\Omega^*_{X^*}$ est donc une résolution du faisceau constant $\mathbf{C}$ par des faisceaux acycliques pour le foncteur j_*. Dès lors

$$\text{(3.1.7.1)} \qquad H^*(X^*, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^*(X^*, \Omega^*_{X^*}) \xleftarrow{\sim} \mathbf{H}^*(X, j_*\Omega^*_{X^*})$$

et la suite spectrale de Leray pour le morphisme j s'identifie à la suite spectrale d'hypercohomologie pour $j_*\Omega^*_{X^*}$, correspondant à la filtration τ par les sous-complexes $\tau_{\leq -n}(j_*\Omega^*_{X^*})$ (1.4.6).

Proposition **(3.1.8)**. — *Les morphismes de complexes filtrés*

$$(\Omega^*_X\langle Y\rangle, W) \xleftarrow{\alpha} (\Omega^*_X\langle Y\rangle, \tau) \overset{\beta}{\hookrightarrow} (j_*\Omega^*_{X^*}, \tau)$$

sont des quasi-isomorphismes filtrés. Ils définissent un isomorphisme entre la suite spectrale de Leray pour j en cohomologie complexe et la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(\Omega^*_X\langle Y\rangle, W)$ *sur* X.

D'après (1.4.5) et (3.1.7), il suffit de prouver la première assertion. On trouvera dans [3], II, (6.9) ou dans [1], la démonstration du fait que β est un quasi-isomorphisme, donc un quasi-isomorphisme filtré. On peut aussi calculer directement les faisceaux de cohomologie des deux membres : ceux de $\Omega^*_X\langle Y\rangle$ sont déterminés par (3.1.5.2), tandis que ceux de $j_*\Omega^*_{X^*}$ sont les $R^i j_* \mathbf{C}$, qui peuvent se calculer par voie topologique.

Pour $n \geq p$, on a

$$W_n(\Omega^p_X\langle Y\rangle) = \Omega^p_X\langle Y\rangle,$$

de sorte que α est un morphisme de $\Omega^*_X\langle Y\rangle$, muni de τ, dans $\Omega^*_X\langle Y\rangle$, muni de la filtration décroissante associée à W (1.1.3). D'après (3.1.5.2), on a

$$\text{(3.1.8.1)} \qquad \mathscr{H}^i(\mathrm{Gr}^W_n(\Omega^*_X\langle Y\rangle)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq n \\ \varepsilon^n_X & \text{pour } i = n; \end{cases}$$

on déduit de la première ligne de cette formule que α est un quasi-isomorphisme filtré. Ceci prouve (3.1.8).

D'après (3.1.7), l'isomorphisme (3.1.8.1) définit un isomorphisme

$$\text{(3.1.8.2)} \qquad R^n j_* \mathbf{C} \simeq \mathscr{H}^n(j_*\Omega^*_{X^*}) \simeq \mathscr{H}^n(\Omega^*_X\langle Y\rangle) \simeq \varepsilon^n_X.$$

Les isomorphismes (3.1.4.1) correspondent, *via* (3.1.8.2), au cup-produit.

Proposition **(3.1.9)**. — *Le morphisme canonique de* $R^n j_* \mathbf{Z}$ *dans* $R^n j_* \mathbf{C}$ *identifie,* via (3.1.8.2), *le faisceau* $R^n j_* \mathbf{Z}$ *à* $(\varepsilon^n_X)_{\mathbf{Z}}$ (3.1.4).

La question est locale sur X. On peut donc supposer que X est un polycylindre ouvert D^m, avec

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\},$$

et que $Y = \bigcup_{k=1}^{\ell} Y_k$, $Y_k = \mathrm{pr}_k^{-1}(0)$. La fibre en 0 de $R^n j_* \mathbf{Z}$ est alors la cohomologie entière de $X^* = D^{*\ell} \times D^{(m-\ell)}$, avec

$$D^* = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}.$$

L'espace X^* a le type d'homotopie d'un tore; sa cohomologie est donc sans torsion, et le cup-produit définit des isomorphismes

$$\overset{n}{\wedge}(R^1 j_* \mathbf{Z})_0 \xrightarrow{\sim} (R^n j_* \mathbf{Z})_0.$$

Il suffit donc de prouver (3.1.9) pour $n = 1$.

L'homologie entière $H_1(X^*)$ est engendrée par les lacets γ_k tournant autour des divers Y_k. On a

$$\oint_{\gamma_k} \frac{dz_k}{z_k} = \pm 2\pi i;$$

la cohomologie entière est donc engendrée par les $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dz_k}{z_k}$ et ceci prouve (3.1.9).

(3.1.10) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X^*, donné comme restriction à X^* d'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}'$ sur X. On appelle *image directe méromorphe* $j_*^m \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ la limite inductive

$$j_*^m \mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}'(nY).$$

Localement sur X, Y est somme d'une famille finie $(Y_i)_{i \in I}$ de diviseurs lisses, et on définit la *filtration par l'ordre du pôle* P sur $j_*^m \mathcal{O}_X^*$ par la formule

(3.1.10.1) $$P^p(j_*^m \mathcal{O}_{X^*}) = \sum_{\mathbf{n} \in A_p} \mathcal{O}_X(\Sigma(n_i + 1) Y_i)$$

pour $$A_p = \{(n_i)_{i \in I} \mid \sum_i n_i \leq -p \text{ et } \forall i,\ n_i \geq 0\}.$$

Cette construction se globalise et fournit sur $j_*^m \mathcal{O}_{X^*}$ une filtration exhaustive telle que $P^p = 0$ pour $p > 0$.

On appelle *filtration par l'ordre du pôle* du complexe $j_*^m \Omega_{X^*}^* = j_*^m \mathcal{O}_{X^*} \otimes \Omega_X^*$ la filtration

(3.1.10.2) $$P^p(j_*^m \Omega_{X^*}^k) = P^{p-k}(j_*^m \mathcal{O}_X) \otimes \Omega_X^k.$$

La filtration P induit sur le sous-complexe $\Omega_X^*\langle Y \rangle$ de $j_*^m \Omega_{X^*}^*$ la filtration bête par les $\sigma_{\geq p}(\Omega_X^*\langle Y \rangle)$, filtration encore appelée la *filtration de Hodge* F.

Proposition **(3.1.11)**. — *Le morphisme d'inclusion*

$$(\Omega_X^*\langle Y \rangle, F) \to (j_*^m \Omega_{X^*}^*, P)$$

est un quasi-isomorphisme filtré.

Cet énoncé m'a été suggéré par [4]. Une démonstration figure dans [3], II, (3.13).

3.2. Théorie de Hodge mixte.

Rappelons qu'on entend dorénavant par schéma, un schéma de type fini sur **C**, *et par faisceau sur* S *un faisceau sur* S^{an}.

(3.2.1) Soit X un schéma lisse et séparé. D'après Nagata [11], X est un ouvert de Zariski d'un schéma complet $\bar{X}$. D'après Hironaka [8], on peut prendre $\bar{X}$ lisse, et tel que $Y = \bar{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux.

Le lecteur qui voudrait éviter la référence à Nagata pourra supposer X quasi-projectif. La complétion lisse $\overline{X}$ peut alors être choisie projective, et telle que Y soit réunion de diviseurs lisses. Lorsqu'on se limite à de telles compactifications, on n'a besoin de la théorie de Hodge que sous la forme standard (2.2.1).

(3.2.2) D'après (3.1.7) et (3.1.8), on a

$$H^*(X, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{H}^*(\overline{X}, \Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle).$$

On définit la *filtration de Hodge* F sur le complexe $\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle$ comme étant la filtration $F^p = \sigma_{\geq p}$ par les tronqués bêtes (1.4.5). Sur $\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle$, on dispose donc de deux filtrations : F et W (3.1.5).

(3.2.3) Nous aurons à utiliser qu'il existe des résolutions bifiltrées $i: \Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle \to K^*$ telles que les $\mathrm{Gr}^p_F\, \mathrm{Gr}^W_n(K_j)$ soient des faisceaux acycliques pour le foncteur Γ :

$$H^i(\overline{X}, \mathrm{Gr}^p_F\, \mathrm{Gr}^W_n(K^j)) = 0 \quad \text{pour } i > 0.$$

Voici deux méthodes pour en construire :

a) On peut prendre pour K^* la résolution canonique de Godement $\mathscr{C}^*(\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle)$, filtrée par les $\mathscr{C}^*(W_n(\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle))$ et les $\mathscr{C}^*(F^p(\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle))$. C'est une résolution bifiltrée car $\mathscr{C}^*$ est un foncteur exact.

b) On peut prendre pour K^* la d''-résolution de $\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle$. Soit $\Omega^{pq}_{\overline{X}}$ le faisceau des formes C^∞ de type (p, q) ; K^* est alors le complexe simple associé au complexe double des $\Omega^p_{\overline{X}}\langle Y\rangle \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^{0,q}_{\overline{X}}$ (sous-complexe des $j_*\Omega^{**}_X$). Ce complexe est filtré par les $F^p(\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \otimes \Omega^{0,*}_{\overline{X}}$ et par les $W_n(\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \otimes \Omega^{0,*}_{\overline{X}}$; pour prouver que c'est une résolution bifiltrée, on utilise que le faisceau $\mathscr{O}_\infty$ des fonctions complexes C^∞ sur $\overline{X}$ est plat sur $\mathscr{O}$ (corollaire au théorème de préparation C^∞ de Malgrange). Les faisceaux $\mathrm{Gr}_F\, \mathrm{Gr}_W(K^*)$ sont fins, car ce sont des faisceaux de modules sur le faisceau mou $\mathscr{O}_\infty$.

(3.2.4) Avec les notations de (3.2.3), la cohomologie complexe de X apparaît comme la cohomologie du complexe bifiltré $\Gamma(\overline{X}, K^*)$. On dispose donc de deux suites spectrales aboutissant à $H^*(X, \mathbf{C})$. Elles s'écrivent, avec les notations de (3.1.4) :

(3.2.4.1) $${}_W E_1^{pq} = \mathbf{H}^{p+q}(\overline{X}, \varepsilon^{-p}_{\overline{X}}[p]) = \mathbf{H}^{2p+q}(\tilde{Y}^p, \varepsilon^{-p}) \Rightarrow H^n(X, \mathbf{C})$$

(3.2.4.2) $${}_F E_1^{pq} = H^q(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \Rightarrow H^n(X, \mathbf{C}).$$

La première d'entre elles, à la renumérotation ${}_W E_1^{pq} \mapsto E_2^{2p+q, -p}$ près, n'est autre que la suite spectrale de Leray de l'inclusion j.

Théorème **(3.2.5).** — (i) *Sur les termes* ${}_W E_r^{pq}$ *de la suite spectrale* (3.2.4.1), *la première filtration directe, la seconde filtration directe et la filtration récurrente définies par* F *coïncident.*

(ii) *La filtration sur* $H^n(X, \mathbf{C})$ *aboutissement de la suite spectrale* ${}_W E$ *se déduit d'une filtration* W *de* $H^n(X, \mathbf{Q})$. *Ni elle, ni la filtration* F *aboutissement de la suite spectrale* ${}_F E$, *ne dépendent de la compactification choisie* $\overline{X}$ *de* X *ou du choix de* K^*.

(iii) *Les filtrations* $W[n]$ (1.1.2) *et* F *définissent sur* $H^n(X, \mathbf{Z})$ *une structure de Hodge mixte, fonctorielle en* X.

D'après (3.1.7), la suite spectrale ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}$ est la suite spectrale de Leray pour j_* (à une renumérotation près). Elle se déduit donc par tensorisation avec $\mathbf{C}$ d'une suite spectrale de $\mathbf{Q}$-vectoriel et la première assertion (ii) est vraie. La conjugaison complexe agit sur les ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}$; elle peut se calculer *via* (3.1.10).

Lemme **(3.2.6)**. — *Les suites spectrales d'hypercohomologie des complexes filtrés* $\mathrm{Gr}_n^{\mathrm{W}}(\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}}\langle \mathrm{Y}\rangle)$, *munis de la filtration induite par la filtration de Hodge, dégénèrent au terme* E_1.

Définissons les Y^n et $\widetilde{\mathrm{Y}}^n$ comme en (3.1.4) et soit $i_n : \widetilde{\mathrm{Y}}^n \to \mathrm{X}$. D'après (3.1.5.2), on a

$$\mathrm{Gr}_n^{\mathrm{W}}(\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}}\langle \mathrm{Y}\rangle) \sim i_{n_*}\Omega^*_{\widetilde{\mathrm{Y}}^n}(\varepsilon^n)[-n].$$

De plus, la filtration de Hodge induit la filtration bête (1.4.5), de sorte que la suite spectrale (3.2.6) se déduit par translations sur les degrés de la suite spectrale classique

$$\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^q(\widetilde{\mathrm{Y}}^n, \Omega^p_{\widetilde{\mathrm{Y}}^n}(\varepsilon^n)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\widetilde{\mathrm{Y}}^n, \varepsilon^n).$$

Si $\overline{\mathrm{X}}$ est projectif et Y réunion de diviseurs lisses, alors $\widetilde{\mathrm{Y}}^n$ est projectif, ε^n est un système local trivial et la théorie de Hodge classique (2.2.1) fournit la dégénérescence (3.2.6). Pour le cas général, il faut référer à [2] (voir (2.2.2), (2.2.3)).

La théorie de Hodge fournit encore que la filtration de Hodge sur $\mathrm{H}^k(\widetilde{\mathrm{Y}}^n, \varepsilon^n)$ est k-opposée à sa complexe conjuguée (la conjugaison complexe étant définie en terme de $\varepsilon^n_{\mathbf{Z}}$ (3.1.4)). On a ici, compte tenu des translations sur les degrés :

Lemme **(3.2.7)**. — *La filtration sur*

$${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_1^{-n,k+n} = \mathbf{H}^k(\overline{\mathrm{X}}, \mathrm{Gr}_n^{\mathrm{W}}(\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}}\langle \mathrm{Y}\rangle)) \approx \mathrm{H}^{k-n}(\widetilde{\mathrm{Y}}^n, \varepsilon^n),$$

aboutissement de la suite spectrale (3.2.6), *est* $(k+n)$*-opposée à sa complexe conjuguée.*

Lemme **(3.2.8)**. — *Les différentielles* d_1 *de la suite spectrale* ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}$ *sont strictements compatibles à la filtration* F.

Sur les termes E_1, il n'y a qu'une filtration induite par F à considérer ((1.3.10) et (1.3.13), (iii)), et d_1 est compatible à cette filtration ((1.3.13), (i)). Cette filtration est l'aboutissement de la suite spectrale (3.2.6) ((1.4.8), (ii)). D'après (3.2.7), la flèche d_1

$$d_1 : \mathbf{H}^k(\overline{\mathrm{X}}, \mathrm{Gr}_n^{\mathrm{W}}(\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}}\langle \mathrm{Y}\rangle)) \to \mathbf{H}^{k+1}(\overline{\mathrm{X}}, \mathrm{Gr}_{n-1}^{\mathrm{W}}(\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}}\langle \mathrm{Y}\rangle)),$$

soit

(3.2.8.1) $$d_1 : \mathrm{H}^{k-n}(\widetilde{\mathrm{Y}}^n, \varepsilon^n) \to \mathrm{H}^{k-n+2}(\widetilde{\mathrm{Y}}^{n-1}, \varepsilon^{n-1})$$

est compatible à des filtrations $(k+n)$-opposées à leur complexe conjuguée. Puisque d_1 commute à la conjugaison complexe, d_1 respecte la bigraduation (de poids $k+n$) définie par F et $\overline{\mathrm{F}}$, ce qui prouve (3.2.8). De plus, la cohomologie du complexe E_1 sera encore bigraduée :

Lemme **(3.2.9)**. — *Sur* ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_2^{pq}$, *la filtration récurrente* F *est* q*-opposée à sa complexe conjuguée.*

Prouvons par récurrence sur r que :

Lemme **(3.2.10)**. — *Pour* $r \geq 0$, *les différentielles* d_r *de la suite spectrale* ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}$ *sont strictement compatibles à la filtration récurrente* F. *Pour* $r \geq 2$, *elles sont nulles.*

Pour $r=0$ (resp. $r=1$), on applique (3.2.6) et (1.4.8), (iii) (resp. (3.2.8)). Pour $r\geq 2$, il suffit de prouver que $d_r=0$. Par récurrence et d'après (1.3.16), on peut supposer que sur les termes ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_s$ $(s\geq r+1)$, on a $\mathrm{F}_d=\mathrm{F}_r=\mathrm{F}_{d^*}$, et que ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r={}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_2$. D'après (1.3.13), (i), d_r est donc compatible à la filtration F_r.

Sur ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{pq}={}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_2^{pq}$, la filtration F_r est q-opposée à sa complexe conjuguée. Le morphisme

$$d_r : {}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{pq} \to {}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{p+r,\,q-r+1}$$

vérifie donc, pour $r-1>0$

$$\begin{aligned} d_r({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{pq}) = d_r\Big(\sum_{a+b=q}(\mathrm{F}^a({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{pq}) \cap \overline{\mathrm{F}}^b({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{pq}))\Big) \\ \subset \sum_{a+b=q}(\mathrm{F}^a({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{p+r,\,q-r+1}) \cap \overline{\mathrm{F}}^b({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_r^{p+r,\,q-r+1})) = 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve (3.2.10), qui, d'après (1.3.16), implique (3.2.5) (i).

D'après (1.3.17), la filtration de ${}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_\infty^{pq}$ induite par la filtration F de $\mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathbf{C})$ est q-opposée à sa complexe conjuguée. Puisque $q=-p+(p+q)$, ceci prouve la première partie de (3.2.5) (iii).

(3.2.11) Prouvons (ii) et (iii), ce qui achèvera la démonstration.

A. *Indépendance du choix de* K^*.

Les filtrations F et W de $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathbf{C})$ sont les aboutissements des suites spectrales d'hypercohomologie de $\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}}\langle \mathrm{Y}\rangle$ pour les filtrations F et W. Ces suites spectrales toutes entières ne dépendent pas du choix de K^*.

B. *Fonctorialité.*

Soit $f : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ un morphisme de schéma. Supposons donné un morphisme de compactifications lisses

(3.2.11.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}_1 & \xrightarrow{f} & \mathrm{X}_2 \\ {\scriptstyle j_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_2} \\ \overline{\mathrm{X}}_1 & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{\mathrm{X}}_2 \end{array}$$

les $\mathrm{Y}_i=\overline{\mathrm{X}}_i-\mathrm{X}_i$ étant des diviseurs à croisements normaux. Le morphisme canonique (voir (3.1.3)) de $\overline{f}^*\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}_2}\langle \mathrm{Y}_2\rangle$ dans $\Omega^*_{\overline{\mathrm{X}}_1}\langle \mathrm{Y}_1\rangle$ est alors un morphisme de complexes bifiltrés; sur l'hypercohomologie, il induit un morphisme compatible à F et W, et donc $f^* : \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_2, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_1, \mathbf{Z})$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes, pour les structures définies par les compactifications $\overline{\mathrm{X}}_i$.

C. *Indépendance de la compactification.*

Avec les notations de B, si f est un isomorphisme, alors f^* est un morphisme bijectif de structures de Hodge mixtes, donc un isomorphisme (2.3.5).

Si $\overline{\mathrm{X}}_1$ et $\overline{\mathrm{X}}_2$ sont deux compactifications lisses de X, avec $\mathrm{Y}_i=\overline{\mathrm{X}}_i-\mathrm{X}_i$ diviseur à croisements normaux, il existe une troisième compactification lisse $\overline{X}$, avec $Y = \overline{X} - X$ diviseur à croisements normaux, qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & \\ \overline{X}_1 & \overline{X} \arrow[l] \arrow[r] & \overline{X}_2 \end{tikzcd}$$

A savoir, on prend pour $\overline{X}$ une résolution des singularités de l'adhérence de l'image diagonale de X dans $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$. L'application identique de $H^n(X, \mathbf{Z})$ muni de la structure de Hodge mixte définie par $\overline{X}_1$, dans $H^n(X, \mathbf{Z})$ muni de celle définie par $\overline{X}_2$, est donc composée de deux isomorphismes.

Pour achever la démonstration de (ii) et (iii), on remarque que tout morphisme f s'insère dans un diagramme (3.2.11.1) : on choisit des compactifications $\overline{X}'_1$ et $\overline{X}_2$ de X_1 et X_2, puis on prend pour $\overline{X}_1$ une résolution des singularités de l'adhérence de l'image de X_1 dans $\overline{X}'_1 \times \overline{X}_2$.

Définition **(3.2.12)**. — *La* structure de Hodge mixte de la cohomologie d'une variété algébrique lisse séparée *est la structure de Hodge mixte* (3.2.5), (iii).

Corollaire **(3.2.13)**. — *Avec les notations précédentes* :

(i) *La suite spectrale* (3.2.4.1) *dégénère en* E_2, i.e. *la suite spectrale de Leray pour l'inclusion* $j : X^* \hookrightarrow X$ *dégénère en* E_3 $(E_3 = E_\infty)$.

(ii) *La suite spectrale* (3.2.4.2)

$$_{F}E_1^{pq} = H^q(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{C})$$

dégénère en E_1.

(iii) *La suite spectrale définie par le faisceau* $\Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle$, *muni de la filtration* W :

$$\begin{aligned} E_1^{-n, k+n} &= H^k(\overline{X}, \mathrm{Gr}_n^W(\Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle)) \\ &\approx H^k(\widetilde{Y}^n, \Omega^{p-n}_{\widetilde{Y}^n}(\varepsilon^n)) \Rightarrow H^k(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle) \end{aligned}$$

dégénère en E_2.

L'assertion (i) est prouvée en (3.2.10).

Considérons les quatre suites spectrales de (1.4.12), relatives au complexe bifiltré $\Omega^*_{\overline{X}}\langle Y \rangle$. D'après (i), on a

$$\sum_n \dim H^n(X, \mathbf{C}) = \sum_{p,q} \dim {}_{W}E_2^{p,q}.$$

Les termes ${}_{W}E_1^{n,k-n}$ sont, pour n fixe, aboutissement d'une suite spectrale *dégénérée en* E_1 (3.2.6) de termes initiaux $E_1^{p,n,k-p-n}$ (notations de (1.4.12)) les termes initiaux de la suite spectrale (iii). Puisque ${}_{W}d_1$ est strictement compatible à la filtration F aboutissement de cette suite spectrale (3.2.7), et est (1.4.12) l'aboutissement d'un morphisme entre ces suites spectrales, qui débute par les différentielles de (iii), on a

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{p}({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_2^{n,k-n}) \approx \mathrm{H}^{*}(\mathrm{E}_1^{p,n-1,k-n-p} \to \mathrm{E}_1^{p,n,k-n-p} \to \mathrm{E}_1^{p,n+1,k-n-p})$$

et $\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^{*}({}_{\mathrm{W}}\mathrm{E}_2^{**})$ est la somme des termes E_2^{***} des suites spectrales (iii). On a donc

(3.2.13.1) $$\sum_n \dim \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{C}) = \Sigma \dim \mathrm{E}_2^{***}.$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_n \dim \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{C}) \leq \Sigma \dim {}_{\mathrm{F}}\mathrm{E}_1^{**}$$

avec égalité si et seulement si la suite spectrale (ii) dégénère en E_1, et

$$\Sigma \dim {}_{\mathrm{F}}\mathrm{E}_1^{**} \leq \Sigma \dim \mathrm{E}_2^{***},$$

avec égalité si et seulement si les suites spectrales (iii) dégénèrent en E_2. Comparant avec (3.2.13.1), on obtient (3.2.13).

Corollaire **(3.2.14)**. — *Soit* ω *une p-forme différentielle méromorphe sur* $\overline{\mathrm{X}}$, *holomorphe sur* X *et présentant au pis des pôles logarithmiques le long de* Y. *Alors, la restriction* $\omega|\mathrm{X}$ *de* ω *à* X *est fermée, et si la classe de cohomologie dans* $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathbf{C})$ *définie par* ω *est nulle, on a* $\omega = 0$.

C'est le cas particulier ${}_{\mathrm{F}}\mathrm{E}_1^{p0} = {}_{\mathrm{F}}\mathrm{E}_{\infty}^{p0}$ de (3.2.13), (ii).

Corollaire **(3.2.15)**. — (i) *Si* X *est une variété algébrique complète lisse, la structure de Hodge mixte sur* $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Z})$ *est la structure de Hodge de poids n classique.*

(ii) *Les nombres de Hodge* h^{pq} *de la structure de Hodge mixte de* $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Z})$ (X *algébrique lisse*) *ne peuvent être non nuls que pour* $p \leq n$, $q \leq n$ *et* $p+q \geq n$.

L'assertion (i) est claire; pour prouver (ii), on remarque que, pour Y réunion de diviseurs lisses, la structure de Hodge rationnelle $\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{W}}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Q}))$ est quotient d'un sous-objet d'une structure de Hodge de poids $n+k$, à savoir

$$\mathrm{H}^{n-k}(\tilde{\mathrm{Y}}^n, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}(-k).$$

(3.2.16) Soit X un schéma lisse et séparé. On sait que X admet des compactifications lisses $\overline{\mathrm{X}}$ et que le sous-groupe de $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Z})$ image de $\mathrm{H}^n(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Z})$ est indépendant du choix de $\overline{\mathrm{X}}$ (cf. [6], (9.1) à (9.4)).

Corollaire **(3.2.17)**. — *Sous les hypothèses* (3.2.16), *l'image de* $\mathrm{H}^n(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Q})$ *dans* $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Q})$ *est* $\mathrm{W}_n(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Q}))$ (W désignant la filtration par le poids (3.2.12)).

On peut supposer que $\overline{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$ est un diviseur à croisements normaux. L'assertion résulte alors de ce que $\mathrm{W}[-n]$ est l'aboutissement de la suite spectrale de Leray pour l'inclusion $j : \mathrm{X} \hookrightarrow \overline{\mathrm{X}}$.

Corollaire **(3.2.18)**. — *Soit f un morphisme d'un schéma propre et lisse* Y *dans un schéma lisse* X *admettant une compactification lisse* $\overline{\mathrm{X}}$:

$$\mathrm{Y} \xrightarrow{f} \mathrm{X} \xhookrightarrow{j} \overline{\mathrm{X}}.$$

Alors, les groupes $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Q})$ *et* $\mathrm{H}^n(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Q})$ *ont même image dans* $\mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \mathbf{Q})$.

Puisque f^* et $(jf)^*$ sont strictement compatibles à la filtration par le poids ((3.2.5), (iii)), il suffit de prouver que $\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}(f^*)$ et $\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}(f^*j^*)$ ont même image dans $\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}(\mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \mathbf{Q}))$. D'après (3.2.17) et (3.2.15), $\mathrm{Gr}_n^{\mathrm{W}}(j^*)$ est un isomorphisme, tandis que $\mathrm{Gr}_m^{\mathrm{W}}(f^*)=0$ pour $m \neq n$ puisque $\mathrm{Gr}_m^{\mathrm{W}}(\mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \mathbf{Q}))=0$ pour $m \neq n$.

Remarque **(3.2.19)**. — D'après (3.1.11) et (1.4.5), sous les hypothèses de (3.2.5) la filtration de Hodge sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{C})$ est l'aboutissement de la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe $j_*^m \Omega^*_{\mathrm{X}^*}$, muni de la filtration par l'ordre du pôle (3.1.10) : cette suite spectrale coïncide avec (3.2.4.2).

4. Applications et compléments

4.1. Le théorème de la partie fixe.

Théorème **(4.1.1)**. — *Soient* S *un schéma lisse séparé, et* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{S}$ *un morphisme propre et lisse.*

(i) *En cohomologie rationnelle, la suite spectrale de Leray*

$$\mathrm{E}_2^{pq}=\mathrm{H}^p(\mathrm{S}, \mathrm{R}^q f_* \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathbf{Q})$$

dégénère $(\mathrm{E}_2=\mathrm{E}_\infty)$.

(ii) *Si* $\overline{\mathrm{X}}$ *est une compactification non singulière de* X, *le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^n(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{S}, \mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q})$$

est surjectif.

Pour f projectif et lisse, l'assertion (i) est prouvée dans [2]. La démonstration de [2] est réécrite de façon plus lisible dans [5]; elle n'utilise pas la lissité de S.

Fixons f, et prouvons que (i) $\Rightarrow$ (ii). On se ramène à supposer S connexe non vide. Si $s \in \mathrm{S}$ est un point de S, le système local $\mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q}$ est entièrement décrit par sa fibre $(\mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q})_s$ en s, et par l'action du groupe fondamental $\pi=\pi_1(\mathrm{S}, s)$ sur cette fibre. On a

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}, \mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} [(\mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q})_s]^\pi.$$

Si $\mathrm{X}_s=f^{-1}(s)$, la flèche composée

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}, \mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q})_s \approx \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_s, \mathbf{Q})$$

est donc injective. Soient les flèches

$$\mathrm{H}^n(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Q}) \xrightarrow{a} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathbf{Q}) \xrightarrow{b} \mathrm{H}^0(\mathrm{S}, \mathrm{R}^n f_* \mathbf{Q}) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_s, \mathbf{Q}).$$

Les flèches cb et cba ont même image d'après (3.2.18). La flèche b est un « edge-homomorphism » de la suite spectrale de Leray, donc est surjective par hypothèse. Puisque c est injective, b et ba ont même image et ba est surjective.

Ceci prouve (ii) pour f projectif. Déduisons-en le cas général. On se ramène encore à supposer S connexe non vide.

D'après le lemme de Chow et la résolution des singularités, il existe un schéma quasi-projectif et lisse X′ et un morphisme projectif et birationnel $p : X' \to X$. Il existe alors (par Bertini, ou Sard) un ouvert de Zariski non vide S_1 de S tel que $X'_1 = (fp)^{-1}(S_1)$ soit lisse sur S_1. Soient enfin $X_1 = f^{-1}(S_1)$, $\bar{X}$ une compactification lisse de X et $\bar{X}'_1$ une compactification lisse de X'_1 qui domine $\bar{X}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{X} & & \bar{X}'_1 \arrow[ll, "\bar{p}"'] \\
X \arrow[ur, hook] \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[l, hook'] \arrow[d, "f_1"] & X'_1 \arrow[l, "p"'] \arrow[ur, hook] \arrow[d, "f'_1"] \\
S & S_1 \arrow[l, hook', "i"] \arrow[r, equal] & S_1
\end{tikzcd}$$

Si $s \in S_1$, le morphisme $i_* : \pi_1(S_1, s) \to \pi_1(S, s)$ est surjectif car la codimension topologique de $S - S_1$ est ≥ 2. On a donc

$$H^0(S, R^n f_* \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(S_1, R^n f_{1*} \mathbf{Q})$$

et il suffit de prouver que

$$H^n(\bar{X}, \mathbf{Q}) \to H^0(S_1, R^n f_{1*} \mathbf{Q})$$

est surjectif.

Les flèches verticales du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^n(\bar{X}, \mathbf{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{p}^*"] & H^n(X_1, \mathbf{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"] & H^0(S_1, R^n f_{1*} \mathbf{Q}) \arrow[d, "p^*"] \\
H^n(\bar{X}'_1, \mathbf{Q}) \arrow[r] & H^n(X'_1, \mathbf{Q}) \arrow[r] & H^0(S_1, R^n f'_{1*} \mathbf{Q})
\end{tikzcd}$$

admettent pour inverse à gauche les *morphismes de Gysin* $\bar{p}_!$, $p_!$ et $p_!$, définis par dualité de Poincaré comme transposés des flèches analogues aux précédentes en cohomologie à support propre. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^n(\bar{X}, \mathbf{Q}) \arrow[r, "u"] & H^0(S_1, R^n f_{1*} \mathbf{Q}) \\
H^n(\bar{X}', \mathbf{Q}) \arrow[r, "v"] \arrow[u, "\bar{p}_!"] & H^0(S_1, R^n f'_{1*} \mathbf{Q}) \arrow[u, "p_!"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif. La flèche u est donc facteur direct de la flèche v. Cette dernière étant surjective (puisque f'_1 est projectif), il en est de même de u.

Prouvons (i) dans le cas général. On se ramène à supposer f purement de dimension relative n. Soit $f \times f$ la projection de $X \times_S X$ sur S.

Soit δ l'image de la classe de cohomologie de la diagonale de $X \times_S X$ dans $H^0(S, R^n(f \times f)_* \mathbf{Q})$. On a par Künneth

$$R^n(f \times f)_* \mathbf{Q} = \sum_{p+q=n} (R^p f_* \mathbf{Q} \otimes R^q f_* \mathbf{Q}).$$

On désignera par δ'_{pq} $(p+q=n)$ les composantes de δ dans cette décomposition, et par δ_{pq} des classes dans $H^n(X \times_S X)$ d'images les δ'_{pq}.

Les δ_{pq} définissent dans la catégorie dérivée $D^+(S)$ des homomorphismes

$$\delta_p : Rf_* \mathbf{Q} \to Rf_* \mathbf{Q}$$

tels que $\mathscr{H}^q(\delta_p)$ soit o pour $p \neq q$, et soit l'identité pour $p = q$. D'après [2], on a donc dans $D^+(S)$

(4.1.1.1) $$Rf_* \mathbf{Q} \approx \sum_p R^p f_* \mathbf{Q}[-p],$$

et la suite spectrale de Leray dégénère.

Corollaire **(4.1.2)**. — *Soit* $f: X \to S$ *un morphisme propre et lisse de but un schéma réduit connexe et séparé* S. *Soit* $(R^n f_* \mathbf{Q})^0$ *le plus grand sous-système local constant de* $R^n f_* \mathbf{Q}$, *de fibre* $H^0(S, R^n f_* \mathbf{Q})$. *Alors, pour chaque* $s \in S$, $(R^n f_* \mathbf{Q})^0_s$ *est une sous-structure de Hodge de* $(R^n f_* \mathbf{Q})_s \simeq H^n(X_s, \mathbf{Q})$, *et la structure de Hodge induite sur* $H^0(S, R^n f_* \mathbf{Q})$ *est indépendante de* s.

Soient $s \in S$ et $X_s = f^{-1}(s)$. Si S est lisse, et si $\overline{X}$ est une compactification lisse de X, alors d'après (4.1.1), le sous-espace $(R^n f_* \mathbf{Q})^0_s$ de $(R^n f_* \mathbf{Q})_s$ est l'image de $H^n(\overline{X}, \mathbf{Q})$. Puisque l'application de restriction

$$H^n(\overline{X}, \mathbf{Q}) \to H^n(X_s, \mathbf{Q})$$

est un morphisme de structures de Hodge, son image est une sous-structure de Hodge et la structure de Hodge induite sur $H^0(S, R^n f_* \mathbf{Q})$, quotient de celle de $H^n(\overline{X}, \mathbf{Q})$, est indépendante de s.

Dans le cas général, (4.1.2) signifie encore que si a est une section globale de $R^n f_* \mathbf{C}$, alors ses composantes $a^{p,q}$ de type (p, q), *a priori* seulement des sections continues du fibré complexe défini par $R^n f_* \mathbf{C}$, sont en fait localement constantes, i.e. des sections de $R^n f_* \mathbf{C}$. Tel est le cas, car $a^{p,q}$ est continue, et localement constante sur l'ouvert de lissité (dense) de S d'après ce qui précède.

(4.1.3) Dans le cas où S est compact, une généralisation de (4.1.2) est prouvée par voie analytique dans Griffiths [5].

Comme corollaires de (4.1.2), citons :

(4.1.3.1) (Griffiths [5]) Soit $f: X \to S$ un morphisme propre et lisse comme en (4.1.2). Si une section globale a de $R^n f_* \mathbf{C}$ est de type de Hodge (p, q) en un point, alors a est de type (p, q) partout. En particulier, si $n = 2$ et si a est en un point s la classe de cohomologie d'un diviseur de X_s, alors a est en tout point la classe de cohomologie d'un diviseur et, pour S lisse, est même définie par un diviseur D sur X.

(4.1.3.2) (Grothendieck [7]) Soit S un schéma réduit et connexe de type fini sur $\mathbf{C}$, et soient $f_1 : X_1 \to S$ et $f_2 : X_2 \to S$ deux schémas abéliens sur S. Si un morphisme $u : R^1 f_{2*}\mathbf{Z} \to R^1 f_{1*}\mathbf{Z}$ provient en un point s de S d'un morphisme de variétés abéliennes $\tilde{u}_s : (X_1)_s \to (X_2)_s$, alors u provient d'un (et d'un seul) morphisme de schémas abéliens $\tilde{u} : X_1 \to X_2$.

(4.1.3.3) (Cf. Katz [10]) Soient S un schéma lisse connexe, s un point de S, $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse et P un facteur direct du système local $R^i f_* \mathbf{Q}$, qui soit point par point une sous-structure de Hodge. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) La structure de Hodge de P est localement constante.

b) La représentation P_s de $\pi_1(S, s)$ se factorise par un quotient fini de $\pi_1(S, s)$.

c) Il existe un revêtement étale fini non vide $u : S' \to S$ tel que $u^* P$ soit une famille constante de structures de Hodge.

4.2. Le théorème de semi-simplicité.

(4.2.1) Soit S un espace topologique. Une *famille continue de structures de Hodge* sur S consiste en :

a) Un système local $H_{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{Z}$-modules de type fini sur S.

b) Pour tout point $s \in S$, une structure de Hodge sur la fibre $(H_{\mathbf{Z}})_s$, cette structure variant continûment avec s.

Une famille continue H de structures de Hodge sur S est dite de *poids n* si les fibres H_s $(s \in S)$ sont de poids n.

On définit de même une *famille continue de* $\mathbf{Q}$*-structures de Hodge* comme un système local de $\mathbf{Q}$-vectoriels, muni en chaque point d'une $\mathbf{Q}$-structure de Hodge variant continûment.

Une *polarisation* d'une famille continue H de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge de poids n est un morphisme de systèmes locaux de $H_{\mathbf{Q}} \otimes H_{\mathbf{Q}}$ dans le système local constant $\mathbf{Q}(-n)_{\mathbf{Q}}$, qui en chaque point $s \in S$ définisse une polarisation de H_s.

(4.2.2) Supposons S connexe, et soit $\mathscr{C}$ une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des familles continues de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge sur S. On aura à considérer les conditions suivantes :

(4.2.2.1) $\mathscr{C}$ est stable par facteur direct, par somme directe et par produit tensoriel; les familles constantes de Tate $\mathbf{Q}(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$ sont dans $\mathscr{C}$.

(4.2.2.2) Toute structure de Hodge homogène ($=$d'un poids n) dans $\mathscr{C}$ est polarisable.

(4.2.2.3) Pour tout $H \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$, il existe un système local $H'_{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{Z}$-modules libres sur S tel que $H'_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q} \approx H_{\mathbf{Q}}$.

(4.2.2.4) Pour tout H dans $\mathscr{C}$, le plus grand sous-système local constant H^f de H est une famille constante de sous-structures de Hodge de H.

Lemme **(4.2.3)**. — *Si $\mathscr{C}$ vérifie les conditions* (4.2.2.1) *et* (4.2.2.2), *alors :*

(i) *$\mathscr{C}$ est une sous-catégorie abélienne semi-simple de la catégorie abélienne des familles continues de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge sur* S.

(ii) *Si* $H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *alors son dual* H^* *et les* $\overset{p}{\wedge} H$ *sont dans* $\mathscr{C}$; *si* $H_1, H_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *alors* $\mathit{Hom}(H_1, H_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

Si $H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et si H_1 est un sous-objet de H, dans la catégorie des familles continues de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge, prouvons que H_1 est facteur direct de H dans cette catégorie. On peut supposer H homogène. Si ψ est une forme de polarisation pour H, l'orthogonal de H_1 pour ψ est en effet un sous-objet de H supplémentaire de H_1. Ceci prouve (i).

Si $H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ est de poids n, une polarisation de H définit un isomorphisme entre H^* et $H \otimes \mathbf{Q}(n)$. D'après (4.2.2.1), on a donc $H^* \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Pour H quelconque dans $\mathscr{C}$, si on décompose H en ses composantes homogènes, on a $H^* = \bigoplus_n (H^n)^*$, d'où encore $H^* \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Enfin, $\overset{p}{\wedge} H$ est facteur direct dans $\overset{p}{\otimes} H$ et $\mathit{Hom}(H_1, H_2) \simeq H_1^* \otimes H_2$.

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse de schémas réduits. Le faisceau $R^i f_* \mathbf{Q}$ est alors un système local, et pour $s \in S$, $(R^i f_* \mathbf{Q})_s \simeq H^i(X_s, \mathbf{Q})$ est muni d'une $\mathbf{Q}$-structure de Hodge. Celle-ci varie continûment avec s.

Définition **(4.2.4)**. — *Soit* S *un schéma lisse et connexe. Une famille continue* H *de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge sur* S^{an} *sera dite* algébrique *s'il existe un ouvert de Zariski non vide* U *de* S, *un entier k et un morphisme projectif et lisse* $f : X \to U$ *tel que* $H|U$ *soit facteur direct dans* $Rf_* \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}(k)$.

Proposition **(4.2.5)**. — (i) *La catégorie des familles continues algébriques de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge sur* S *vérifie les conditions de* (4.2.2).

(ii) *Si une famille continue* H *de structures de Hodge sur* S *est telle que sa restriction à un ouvert de Zariski dense* U *de* S *soit algébrique, alors* H *est algébrique.*

(iii) *Si* $f : X \to S$ *est propre et lisse, alors* $Rf_* \mathbf{Q}$ *est algébrique.*

L'assertion (ii) est évidente. Prouvons (i). Soit $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des familles continues de structures de Hodge sur S qui sont de la forme $Rf_* \mathbf{Q}$ (f projectif et lisse). Alors :

a) D'après la formule de Künneth

$$R(f \times g)_* \mathbf{Q} \simeq Rf_* \mathbf{Q} \otimes Rg_* \mathbf{Q},$$

$\mathscr{C}_0$ est stable par produit tensoriel.

b) $\mathscr{C}_0$ est stable par somme directe :

$$R(f \amalg g)_* \mathbf{Q} \simeq Rf_* \mathbf{Q} \oplus Rg_* \mathbf{Q}.$$

c) Les composantes homogènes de tout $H \in \mathscr{C}_0$ sont polarisables (cf. (2.2.6)).

d) Les objets $H \in \mathscr{C}_0$ vérifient (4.2.2.3), puisque

$$Rf_* \mathbf{Q} \simeq Rf_* \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Q}.$$

e) Les objets $H \in \mathscr{C}_0$ vérifient (4.2.2.4), d'après (4.1.2).

Soit $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des facteurs directs d'objets de $\mathscr{C}_0$. Alors, $\mathscr{C}_1$ est stable par produit tensoriel, somme directe, facteur direct et vérifie (4.2.2.2) à (4.2.2.4). De plus, $\mathbf{Q}(-1)$ est dans $\mathscr{C}_1$, car de la forme $R^2 f_* \mathbf{Q}$ pour $f : \mathbf{P}^1_S \to S$ le fibré projectif. La catégorie $\mathscr{C}_2$ des $H \otimes \mathbf{Q}(k)$ $(k \in \mathbf{N})$ vérifie donc (4.2.2.1) à (4.2.2.4).

Pour en déduire (i), il suffit de noter que si H est une famille continue de structures de Hodge, et U un ouvert de Zariski dense de S, alors un sous-objet, une polarisation, ou un réseau entier de $H|U$ se prolongent de façon unique à H.

Prouvons (iii). Si $f : X \to S$ est projectif et lisse, il existe un ouvert de Zariski dense U de S et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f'"'] & & X|U \arrow[dl, "f|U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

avec f' projectif et lisse et p birationnel surjectif (appliquer le lemme de Chow et la résolution des singularités à la fibre générique de f). L'application de restriction

$$p^* : (Rf_* \mathbf{Q})|U \to Rf'_* \mathbf{Q}$$

est alors une injection directe de familles continues de structures de Hodge, d'inverse à gauche le morphisme de Gysin $p_!$, d'où l'algébraïcité de $Rf_* \mathbf{Q}$.

Théorème **(4.2.6)**(1). — *Soit* S *un espace topologique connexe, localement connexe et localement simplement connexe, muni d'un point base s. Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie de familles continues de structures de Hodge sur* S *qui vérifie les conditions* (4.2.2). *Alors, si* $H \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$, *la représentation de* $\pi_1(S, s)$ *sur la fibre* $(H_{\mathbf{Q}})_s$ *est semi-simple.*

---

(1) *(Ajouté sur épreuves.)* Soit S un schéma lisse et connexe. Une *famille de structures de Hodge* sur S est une famille continue H de structures de Hodge sur S qui vérifie les conditions suivantes :

a) La filtration de Hodge de $(H_{\mathbf{C}})_s$ varie de façon holomorphe avec s, i.e. correspond à une filtration F de $H_{\mathscr{O}} = H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathscr{O}$.

b) La dérivée covariante ∇ vérifie $\nabla F^p \subset \Omega^1_S \otimes F^{p-1}$.

Soit $\mathscr{C}$ la catégorie de celles des familles continues de Q-structures de Hodge sur S qui sont sous-jacentes à une famille de structures de Hodge, et dont les facteurs directs homogènes sont polarisables. Il est clair que $\mathscr{C}$ vérifie (4.2.2.1) à (4.2.2.3). On peut déduire de résultats de W. Schmid (août 1970, non publié) et de P.A. Griffiths [5] que $\mathscr{C}$ vérifie (4.2.2.4). Ce théorème, dont (4.1.2) est un corollaire, permet d'appliquer (4.2.6) et ses corollaires aux objets de $\mathscr{C}$.

Soit $H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Le système local $H_{\mathbf{Q}}$ définit un système local complexe $H_{\mathbf{C}} = H_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C}$. Pour tout système local complexe V sur S, on désigne par V^c le fibré vectoriel complexe qu'il définit, identifié au faisceau de ses sections continues.

Par définition, le groupe S (2.1.2) agit sur $H_{\mathbf{C}}^c$. Un sous-fibré de $H_{\mathbf{C}}^c$ sera dit *horizontal* ou *localement constant* s'il est défini par un sous-système local de $H_{\mathbf{C}}$.

Lemme **(4.2.7)**. — *Soit* V *un sous-système local de rang un de* $H_{\mathbf{C}}$. *Supposons qu'une puissance tensorielle* $V^{\otimes n}$ $(n \geq 1)$ *de* V *soit un système local trivial*, i.e. *que* $\pi_1(S, s)$ *agisse sur* V_s via *un groupe fini (nécessairement cyclique). Alors, pour* $t \in S$, tV^c *est encore localement constant.*

Pour que tV^c soit localement constant, il suffit que $(tV^c)^{\otimes n} = tV^{c \otimes n} \subset \overset{n}{\otimes} H_{\mathbf{C}}$ le soit. Or, $V^{\otimes n}$ est engendré par une section globale horizontale v, et par hypothèse tv est encore horizontal (4.2.2.4).

Procédons par récurrence sur $\dim(H_{\mathbf{Q}})_s$. On peut supposer H homogène non nul. Soit d la dimension minimale des sous-systèmes locaux complexes non nuls de $H_{\mathbf{C}}$. La somme W de tous les sous-systèmes locaux de $H_{\mathbf{C}}$ de dimension d (automatiquement simples) est « définie sur $\mathbf{Q}$ », i.e. est de la forme $W_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C}$ pour $W_{\mathbf{Q}}$ sous-système local de $H_{\mathbf{Q}}$. Par construction, W_s est un $\pi_1(S, s)$-module semi-simple complexe, donc $(W_{\mathbf{Q}})_s$ est un $\pi_1(S, s)$-module semi-simple sur $\mathbf{Q}$.

Soit $H_{\mathbf{Z}}$ un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres tels que $H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q} \simeq H_{\mathbf{Q}}$, et soit $W_{\mathbf{Z}} = H_{\mathbf{Z}} \cap W_{\mathbf{Q}}$. Si W est de dimension e, le système local $(\overset{e}{\wedge} W)^{\otimes 2}$ est trivial. En effet :

$$\overset{e}{\wedge} W \simeq \overset{e}{\wedge} W_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C},$$

et $\pi_1(S, s)$ ne peut agir sur $(\overset{e}{\wedge} W_{\mathbf{Z}})_s$ que par ± 1.

Soit V un sous-système local complexe de dimension d de $H_{\mathbf{C}}$, et soit V′ un supplémentaire de V dans W (semi-simplicité de W). On a

$$\overset{e}{\wedge} W \simeq \overset{d}{\wedge} V \otimes \overset{e-d}{\wedge} V'.$$

Appliquons (4.2.7) au sous-système local $\overset{d}{\wedge} V \otimes \overset{e-d}{\wedge} V'$ de $\overset{d}{\wedge} H_{\mathbf{C}} \otimes \overset{e-d}{\wedge} H_{\mathbf{C}}$. On trouve que pour $t \in S$:

$$t(\overset{d}{\wedge} V \otimes \overset{e-d}{\wedge} V')^c = \overset{d}{\wedge} tV^c \otimes \overset{e-d}{\wedge} tV'^c \subset \overset{d}{\wedge} H_{\mathbf{C}} \otimes \overset{e-d}{\wedge} H_{\mathbf{C}}$$

est localement constant. Dès lors, $\overset{d}{\wedge} tV^c \subset \overset{d}{\wedge} H_{\mathbf{C}}$ et $tV^c \subset H_{\mathbf{C}}$ sont localement constants.

Par définition de W, on a $tV^c \subset W^c$: W^c est stable par S, et $W_{\mathbf{Q}}$ est une sous-structure de Hodge de H. Si ψ est une polarisation de H, H est dès lors somme directe de W et de son orthogonal, tous deux dans $\mathscr{C}$, et on conclut par récurrence.

Corollaire **(4.2.8)**. — *Sous les hypothèses de* (4.2.6) :

(i) *L'algèbre* A *des endomorphismes du système local* $H_{\mathbf{Q}}$ *est semi-simple. Elle admet une (et une seule)* $\mathbf{Q}$*-structure de Hodge telle que, en chaque point* s, $A \otimes H_s \to H_s$ *soit un morphisme de structures de Hodge.*

(ii) *Le centre de* A *est de type* (0, 0) *et la loi de composition* $\cdot$: $A \otimes A \to A$ *est un morphisme de structures de Hodge.*

(iii) *Soit* W *un sous-système local complexe de dimension* d de $H_{\mathbf{C}}$:

a) *Pour* $t \in S$, $tW^c \subset H_{\mathbf{C}}$ *est localement constant et définit un sous-système local* tW *isomorphe à* W.

b) *Une puissance* $(\overset{d}{\wedge} W)^{\otimes n}$ $(n \geq 1)$ *du système local* $\overset{d}{\wedge} W$ *est un système local trivial.*

L'algèbre A est le commutant de $\pi_1(S, s)$ dans $(H_{\mathbf{Q}})_s$. Sa semi-simplicité résulte donc de (4.2.6) et de Bourb., *Alg.*, chap. 8, § 5, n° 2, prop. 4. Par ailleurs, A est la fibre du plus grand sous-système local constant de $\mathcal{H}om(H_{\mathbf{Q}}, H_{\mathbf{Q}})$. Puisque $\mathcal{H}om(H, H) \in \mathscr{C}$ ((4.2.3), (ii)), l'existence de la structure de Hodge (i) résulte de l'hypothèse (4.2.2.4). Il est clair que la loi de composition est un morphisme de structures de Hodge. Il en résulte que le centre Z de A est une sous-structure de Hodge : $Z_{\mathbf{C}}$ est bigradué, comme intersection des noyaux des morphismes bihomogènes $[x, \ ]$ pour x bihomogène. Enfin, Z, donc $Z_{\mathbf{C}}$, est semi-simple, et, pour $(p, q) \neq (0, 0)$, Z^{pq} est nul car nilpotent.

Un sous-système local complexe W de $H_{\mathbf{C}}$ est défini par un projecteur e de $A_{\mathbf{C}}$. Pour $t \in S$, tW^c est défini par le projecteur $t.e$, donc est localement constant. Puisque le groupe S est connexe, pour vérifier que tW est isomorphe à W, il suffit de vérifier que pour t dans un voisinage assez petit de 1, le $\mathbf{C}[\pi_1(S, s)]$-module tW_s est isomorphe à W_s. Soient H_i les composantes isotypiques du $\mathbf{C}[\pi_1(S, s)]$-module $(H_{\mathbf{C}})_s$. On a

$$W_s = \bigoplus_i (W_s \cap H_i)$$

et

$$tW_s = \bigoplus_i (tW_s \cap H_i).$$

De plus, pour t assez proche de 1, tW_s est proche de W_s dans la grassmannienne, et donc

$$\dim(tW_s \cap H_i) \leq \dim(W_s \cap H_i). \tag{4.2.8.1}$$

En fait, puisque $\dim(tW_s) = \dim(W_s)$, on a égalité dans (4.2.8.1). Les diverses composantes isotypiques de W_s et tW_s ont donc respectivement même longueur, et W_s est isomorphe à tW_s.

Prouvons (iii), *b)*. Il suffit de traiter le cas où H est homogène et où W_s est un $\mathbf{C}[\pi_1(S, s)]$-module simple. Soit H_1 la composante isotypique de $(H_{\mathbf{C}})_s$ qui contient W_s. D'après *a)*, H_1 est stable par S. Si W_s est de dimension d et H_1 de longueur k, on a

$$\overset{kd}{\wedge} H_1 \approx (\overset{d}{\wedge} W_s)^{\otimes k}$$

comme $\mathbf{C}[\pi_1(S, s)]$-module. Si χ est le caractère de $\pi_1(S, s)$ défini par $\overset{d}{\wedge} W$, le caractère χ_1 défini par $\overset{kd}{\wedge} H_1$ est donc χ^k. Soit $H_2 = H_1 + \overline{H}_1$. Puisque H_1 est stable par S, H_2 est défini par une sous-structure de Hodge réelle de $(H_{\mathbf{R}})_s$. Toute forme de polarisation sur H induit donc sur H_2 une forme bilinéaire non dégénérée invariante par $\pi_1(S, s)$.

Si $\dim(H_2)=e$, la représentation $(\overset{e}{\wedge}H_2)^{\otimes 2}$ de $\pi_1(S, s)$ est donc triviale. Dès lors :

a) Pour H_1 réel : χ^{2k} est trivial.

b) Pour H_1 non réel $(H_1+\overline{H}_1)$: $\chi^{2k}.\overline{\chi}^{2k}$ est trivial.

Dans les deux cas, on a $|\chi|=1$.

La représentation de $\pi_1(S, s)$ sur $(H_{\mathbf{C}})_s$ provient par extension des scalaires d'une représentation définie sur $\mathbf{Q}$ (savoir $(H_{\mathbf{Q}})_s$). Les représentations conjuguées de W figurent donc dans $(H_{\mathbf{C}})_s$; il y en a au plus $N=\dim(H)$, et pour tout automorphisme σ de $\mathbf{C}$, on a

$$|\sigma(\chi)|=1.$$

Pour $\gamma\in\pi_1(S, s)$, $\chi(\gamma)$ est un entier algébrique ayant au plus N conjugués complexes, et ceux-ci sont tous de valeur absolue 1 ; $\chi(\gamma)$ est donc une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité, avec $k\leqslant N$. On a donc $\chi^{N!}=1$, ce qui prouve *b)*.

Corollaire **(4.2.9)**. — *Soit* S *un schéma lisse, connexe et séparé, muni d'un point base* $s\in S$. *Soient* $f: X\to S$ *un morphisme de schémas tel que* $R^n f_* \mathbf{Q}$ *soit un système local sur* S, G *l'adhérence de Zariski de l'image de* $\pi_1(S, s)$ *dans* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}((R^n f_* \mathbf{C})_s)$ *et* G^0 *la composante neutre de* G. *Alors :*

a) *Si f est propre et lisse,* G^0 *est semi-simple.*

b) *En général,* G^0 *n'admet aucun quotient de type multiplicatif (*i.e., *le radical de* G^0 *est unipotent).*

Prouvons *a)*. Quitte à remplacer S par un revêtement étale fini, on se ramène au cas où $G=G^0$. Par ((4.2.5), (iii)), le système local $R^n f_* \mathbf{Q}$ est sous-jacent à une famille algébrique H de structures de Hodge, donc est justiciable de (4.2.8) ((4.2.5), (i)). Le groupe G est réductif, car il admet une représentation semi-simple fidèle (à savoir $(R^n f_* \mathbf{C})_s$). Si G (supposé connexe) n'était pas semi-simple, il admettrait une représentation complexe non triviale ρ de rang un; puisque H_s est fidèle, ρ serait facteur direct dans $((H+H^*)^{\otimes m}_{\mathbf{C}})_s$ pour un m. Ceci contredit (4.2.8), (iii), *b)*, car $(H+H^*)^{\otimes m}$ est algébrique et aucune puissance tensorielle de ρ n'est triviale.

Soit π un groupe, et considérons la propriété suivante d'une représentation ρ de π dans un vectoriel complexe V de dimension finie :

(*) La composante neutre G^0 de l'adhérence de Zariski G de $\rho(\pi)$ dans Aut(V) n'admet aucun quotient de type multiplicatif.

Lemme **(4.2.10)**. — *Soit* $0\to V'\to V\to V''\to 0$ *une suite exacte de représentations du type précédent. Alors,* V *vérifie* (*) *si (et seulement si)* V' *et* V'' *vérifient* (*).

Soient G, G' et G'' les groupes définis par V, V' et V''. Comme π, G laisse V' stable, d'où un morphisme

$$u=(u', u'') : G\to G'\times G'',$$

de noyau unipotent, et tel que u' et u'' soient surjectifs. Soit N la composante neutre du noyau de u''. Puisque u' est surjectif, $u'(N)$ est distingué dans G', et n'admet donc aucun quotient de type multiplicatif. Si χ est un caractère de G^0, χ se factorise par $u(G^0)$, s'annule sur N, une puissance de χ se factorise par G''^0, et χ est trivial.

Prouvons (4.2.9), *b)* par dévissage et par récurrence sur la dimension relative de f. On peut supposer X réduit.

Supposons tout d'abord X quasi-projectif. Il existe alors un ouvert non vide U de S, un ouvert dense X' de $X_U = f^{-1}(U)$ lisse sur U, et une compactification $\bar{X}'$ de X' au-dessus de U, propre et lisse sur U. On peut choisir $\bar{X}'$ tel qu'un ouvert X'' de $\bar{X}'$ contienne X' et soit propre sur X_U

$$\begin{tikzcd}
X_U \arrow[ddr, "f_U"'] & & X'' \arrow[ll, "p"'] \arrow[rr, hook, "k"] \arrow[ddl, "f''"] & & \bar{X}' \arrow[ddlll, "\bar{f}'"] \\
& X' \arrow[ul, hook, "i"] \arrow[ur, hook, "j"'] \arrow[d, "f'"] & & & \\
& U & & &
\end{tikzcd}$$

On dispose de suites exactes longues de faisceaux

$$\begin{array}{l}
\to R^i f_{U*}(i_!\mathbf{Q}) \to R^i f_{U*}\mathbf{Q} \to R^i f_{U*}(\mathbf{Q}/i_!\mathbf{Q}) \to \\
\to R^i f''_*(j_!\mathbf{Q}) \to R^i f''_*\mathbf{Q} \to R f''_*(\mathbf{Q}/j_!\mathbf{Q}) \to \\
\to \quad R^i f''_!\mathbf{Q} \quad \to R^i \bar{f}'_*\mathbf{Q} \to R^i \bar{f}'_*(\mathbf{Q}/k_!\mathbf{Q}) \to
\end{array}$$

Pour U assez petit, ces faisceaux sont des systèmes locaux et l'hypothèse de récurrence s'applique à $R^* f_{U*}(\mathbf{Q}/i_!\mathbf{Q})$, à $R^* f''_*(\mathbf{Q}/j_!\mathbf{Q})$, et à $R^* \bar{f}'_*(\mathbf{Q}/k_!\mathbf{Q})$. D'après *a)* la condition $(*)$ est vérifiée par $R^* \bar{f}'_*\mathbf{Q}$. D'après (4.2.10), elle est dès lors vérifiée par $R^* f''_!\mathbf{Q}$, et par le système local dual $R^* f''_*\mathbf{Q}$ (dualité de Poincaré). D'après (4.2.10), la condition $(*)$ est vérifiée par $R^* f''_*(j_!\mathbf{Q})$, isomorphe à $R^* f_{U*}(i_!\mathbf{Q})$ car p est propre, ainsi que par $R^* f_{U*}\mathbf{Q}$. Puisque le morphisme $\pi_1(U) \to \pi_1(S)$ est surjectif, $R^i f_*\mathbf{Q}$ vérifie (4.2.9), *b)*.

Pour passer du cas f quasi-projectif au cas général, il suffit d'utiliser la suite spectrale de Leray pour un recouvrement (U_i) de X par des ouverts quasi-projectifs :

$$R^* f_*(\bigcap_i U_i, \mathbf{Q}) \Rightarrow R^* f_*\mathbf{Q},$$

et (4.2.10).

4.3. **Complément à** [2].

Dans [2], (5.4) (footnote), j'affirme sans démonstration que

Proposition **(4.3.1)**. — *Soit* X *un schéma propre et lisse sur* **C**. *Si une forme* C^∞ *sur* X *vérifie* $d'\alpha = d''\alpha = 0$ *et est cohomologue à zéro, alors il existe* β *tel que* $\alpha = d'd''\beta$.

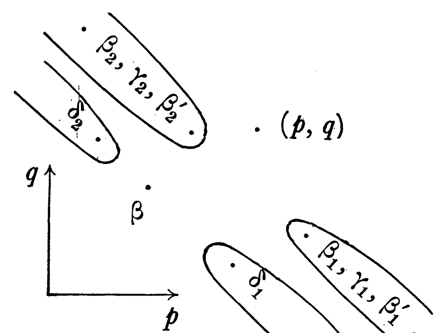
Voici la démonstration. Comme en *loc. cit.*, on se ramène au cas où α est bihomogène, d'un bidegré (p, q). Puisque la suite spectrale du complexe double $H^0(X, \Omega^{pq})$ dégénère, la différentielle extérieure d est strictement compatible à la filtration par le premier degré p (1.3.2). Si $\alpha \sim 0$, il existe donc une forme β_1 telle que $d\beta_1 = \alpha$ et que les composantes $\beta_1^{p'q'}$ de β_1 soient nulles pour $p' < p$.

Par conjugaison complexe, il existe de même β_2 tel que $d\beta_2 = \alpha$ et que $\beta_2^{p'q'} = 0$ pour $q' < q$. On a $d(\beta_1 - \beta_2) = 0$.

Soit γ une forme vérifiant $d'\gamma = d''\gamma = 0$ dans la classe de cohomologie de $\beta_1 - \beta_2$ *(loc. cit.)*. Soit γ_1 (resp. γ_2) la somme des composantes de γ de type (p', q') pour $p' \geq p$ (resp. $q' \geq q$). Posant $\beta_1' = \beta_1 - \gamma_1$ et $\beta_2' = \beta_2 + \gamma_2$, on a encore $d\beta_1' = d\beta_2' = \alpha$; de plus, $\beta_1' - \beta_2' = \beta_1 - \beta_2 - \gamma$ est cohomologue à zéro : il existe δ tel que

$$d\delta = \beta_1' - \beta_2'.$$

Soient δ_1 la somme des composantes de type (p', q') de δ avec $p' < p - 1$, δ_2 la somme des composantes pour lesquelles $q' > q - 1$ et β la composante de type $(p-1, q-1)$,



On a $\quad \beta_2' = d\delta_2 + d''\beta \quad$ et $\quad \alpha = d\beta_2' = dd\delta_2 + dd''\beta = d'd''\beta.$

4.4. Homomorphismes de schémas abéliens.

On se propose de montrer comment, dans quelques cas, on peut débarrasser (4.1.3.2) de l'hypothèse d'algébraïcité en un point.

(4.4.1) Pour $f: X \to S$ un morphisme propre et lisse, on désignera par $R_i f_* \mathbf{Z}$ le système local sur S^{an} de l'homologie des fibres de f. En chaque point $s \in S$, $(R_i f_* \mathbf{Z})_s \simeq H_i(X_s, \mathbf{Z})$ est muni d'une structure de Hodge de poids $-i$, duale de la structure de Hodge de $H^i(X_s, \mathbf{Z})$. Cette structure varie continûment avec $s \in S$.

(4.4.2) Si $f: X \to S$ est un schéma abélien, l'exponentielle définit une suite exacte de faisceaux sur S^{an}

$$0 \to R_1 f_* \mathbf{Z} \to \mathrm{Lie}(X) \to X \to 0,$$

et la filtration de Hodge est la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to R_1 f_* \mathbf{Z} \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Lie}(X) \to 0.$$

Il est connu que

Rappel **(4.4.3)**. — *Soit* S *un schéma lisse de type fini sur* **C**. *La construction* (4.4.2) *établit une équivalence de catégorie entre :*

a) *la catégorie des schémas abéliens sur* S;

b) *la catégorie des familles continues polarisables de structures de Hodge* H *de type* $(-1, 0)+(0, -1)$ *sur* S, *telles que* $H_{\mathbf{Z}}$ *soit sans torsion et que la filtration de Hodge varie holomorphiquement sur* S.

La surjectivité essentielle du foncteur $a) \mapsto b)$ résulte de Borel [13]; la pleine fidélité résulte que ce que, pour X_1 et X_2 deux schémas abéliens sur S, le S-schéma $\mathcal{H}om_S(X_1, X_2)$ est non ramifié sur S, donc a mêmes sections algébriques ou holomorphes.

(4.4.4) Soient Z un corps commutatif, H une algèbre centrale simple sur Z et $*$ un antiautomorphisme Z-linéaire de H. Après extension des scalaires, on a $H \simeq \mathrm{End}(V)$ pour V un vectoriel sur Z, et $*$ est alors la transposition par rapport à une forme bilinéaire Φ sur V, unique à un facteur près. Supposons que $*$ soit involutif; les formes $\Phi(X, Y)$ et $\Phi(Y, X)$ sont alors proportionnelles : $\Phi(X, Y)=\lambda\Phi(Y, X)$, avec $\lambda^2=1$. *On pose* $\varepsilon_*=\lambda$. Si $[H : Z]=d^2$, on a

$$\mathrm{Tr}(* : H \to H)=\varepsilon_*.d.$$

Tout automorphisme Z-linéaire C de H est intérieur : $Cx=cxc^{-1}$. Si C est involutif et commute à $*$, les éléments c^2 et cc^* sont centraux, de sorte que $c^*=\lambda c$ avec λ central. Puisque $c^{**}=c$, on a $\lambda^2=1$. *On pose* $\varepsilon_C=\lambda$.

On vérifie aisément que l'involution $C\circ *$ satisfait à

$$\varepsilon_{C\circ *}=\varepsilon_C.\varepsilon_*.$$

Rappel **(4.4.5)**. — *Soient* X *une variété abélienne simple sur un corps* K *et* H *le corps* $\mathrm{End}_K(X)\otimes\mathbf{Q}$. *Toute polarisation de* X *définit une involution positive* $*$ *de* H :

$$\mathrm{Tr}(hh^*)>0 \quad si \quad h \neq 0.$$

Si Z_0 *est le sous-corps invariant par* $*$ *du centre* Z *de* H, Z_0 *est donc totalement réel et on est dans l'un des cas suivants :*

a) $Z=Z_0$, *pour toute place réelle* ρ *de* Z, $H\otimes_\rho\mathbf{R}$ *est une algèbre de matrices sur* $\mathbf{R}$, *et* $\varepsilon_*=1$.

b) $Z=Z_0$, *pour toute place réelle* ρ *de* Z, $H\otimes_\rho\mathbf{R}$ *est une algèbre de matrices sur* $\mathbf{H}$, *et* $\varepsilon_*=-1$.

c) Z *est une extension quadratique totalement imaginaire de* Z_0.

(4.4.6) Soient $f_i : X_i \to S$ $(i = 1,2)$ deux schémas abéliens sur un schéma lisse S. Le groupe abélien libre

$$\mathrm{Hom}(R_1 f_{1*}\mathbf{Z}, R_1 f_{2*}\mathbf{Z}) \simeq \Gamma(S, \mathcal{H}om(R_1 f_{1*}\mathbf{Z}, R_1 f_{2*}\mathbf{Z}))$$

est alors muni d'une structure de Hodge de poids 0 (4.2.8). De plus, d'après (2.1.11.1) et (4.4.3), le groupe $\mathrm{Hom}_S(X_1, X_2)$ est la composante de type (0, 0) de ce groupe.

(4.4.7) Soit S un schéma lisse connexe non vide de point générique η et soit $f: X \to S$ un schéma abélien sur S. Le centre Z de $H = \mathrm{End}(R_1 f_* \mathbf{Z})$ est alors de type (0, 0) (4.2.8), donc contenu dans $\mathrm{End}_S(X) \simeq \mathrm{End}_{k(\eta)}(X_\eta)$.

Une polarisation de X définit une involution $*$ de H. La restriction de celle-ci à $\mathrm{End}_S(X)$ est positive, de sorte que Z est produit de corps totalement réels ou extensions quadratiques imaginaires de corps totalement réels.

Désignons par C les actions de $i \in S(\mathbf{R})$ sur $H_{\mathbf{R}} = H \otimes \mathbf{R}$ et sur les $(R_1 f_* \mathbf{R})_s$, pour $s \in S$. Sur $H_{\mathbf{R}}$, $C^2 = 1$, et C commute à $*$; sur $(R_1 f_* \mathbf{R})_s$, $C^2 = -1$. Si ψ est la forme alternée sur $R_1 f_* \mathbf{Z}$, à valeurs entières, déduite de la polarisation de X, on a

$$\psi(hx, Cy) = \psi(x, h^* Cy) = \psi(x, C.C(h^*).y).$$

On en déduit que

(4.4.7.1) $$\mathrm{Tr}(h.C(h^*)) > 0 \quad \text{pour } h \neq 0.$$

(4.4.8) Supposons maintenant que X_η soit simple, de sorte que Z soit un corps. Soit $\rho: Z \to \mathbf{C}$ un plongement complexe. L'algèbre

$$H_\rho = H \otimes_{Z, \rho} \mathbf{C}$$

est alors une algèbre de matrices et un facteur direct bigradué dans $H_{\mathbf{C}} = H \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$. Choisissons un isomorphisme

(4.4.8.1) $$H_\rho \simeq \mathrm{End}(V_\rho).$$

Du fait que les générateurs infinitésimaux de S agissent sur H_ρ par des dérivations, nécessairement intérieures, on déduit que V_ρ admet une bigraduation, unique à translation près, telle que (4.4.8.1) soit un isomorphisme bigradué. Soit $(R_1 f_* \mathbf{C})_\rho$ le système local bigradué

$$(R_1 f_* \mathbf{C}) \otimes_{Z \otimes \mathbf{C}, \rho} \mathbf{C},$$

facteur direct de $R_1 f_* \mathbf{C}$. Désignons par T_ρ le système local

$$T_\rho = \mathrm{Hom}_{H_\rho}(V_\rho, (R_1 f_* \mathbf{C})_\rho).$$

On a

(4.4.8.2) $$V_\rho \otimes_{\mathbf{C}} T_\rho \xrightarrow{\sim} (R_1 f_* \mathbf{C})_\rho$$

(isomorphisme bigradué). Puisque $(R_1 f_* \mathbf{C})_\rho$ est du type $(-1, 0) + (0, -1)$, une des conditions suivantes est vérifiée :

a) V_ρ est bihomogène;

b) T_ρ est bihomogène.

Il est clair que la condition *a)* (resp. *b)*) est simultanément vérifiée pour ρ et pour $\bar{\rho}$. Si la condition *a)* est vérifiée en chaque place, alors H est de type (0, 0). Si la condition *b)* est vérifiée en chaque place, alors la structure de Hodge sur $R_1 f_* \mathbf{Q}$ est localement constante.

(4.4.9) Supposons maintenant que Z soit totalement réel. Pour chaque plongement réel φ de Z, on posera $\varepsilon_{H,\varphi}=+1$ si $H\otimes_{Z,\varphi}\mathbf{R}$ est une algèbre de matrices et $\varepsilon_{H,\varphi}=-1$ sinon. Si un plongement complexe ρ induit un plongement réel φ, on pose $\varepsilon_{H\rho}=\varepsilon_{H\varphi}$.

Soit $\rho: Z\to\mathbf{C}$, se factorisant par $\varphi: Z\to\mathbf{R}$. La conjugaison complexe sur H_ρ est induite par un automorphisme antilinéaire σ_1 de V_ρ, unique à un facteur scalaire réel près, de carré scalaire. Puisque σ_1 commute à σ_1^2, σ_1^2 est réel et, normalisant σ_1, on peut supposer que $\sigma_1^2=\pm 1$. On a alors

(4.4.9.1) $$\sigma_1^2=\varepsilon_{H\rho}.$$

L'automorphisme de conjugaison complexe sur

$$(R_1 f_*\mathbf{C})_\rho=((R_1 f_*\mathbf{Q})\otimes_{Z,\varphi}\mathbf{R})\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$$

est « compatible » à (4.4.8.2) et peut s'écrire

$$\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2.$$

Puisque $\sigma^2=1$, on a par (4.4.9.1)

(4.4.9.2) $$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\varepsilon_{H\rho}.$$

Soit Φ une forme de polarisation sur $R_1 f_*\mathbf{Z}$. Cette forme est nécessairement du type

$$\Phi=\mathrm{Tr}_{Z/\mathbf{Q}}(\psi)$$

où ψ est une forme Z-bilinéaire alternée sur $R_1 f_*\mathbf{Q}$.

Soit ψ_ρ la forme induite sur $V_\rho\otimes_{\mathbf{C}}T_\rho$. La forme alternée ψ_ρ est invariante par $\pi_1(S,s)$. Puisque T_ρ est irréductible, on peut l'écrire

(4.4.9.3) $$\psi_\rho=A_\rho\otimes B_\rho,$$

avec A_ρ sur V_ρ, et B_ρ sur T_ρ invariante par $\pi_1(S,s)$.

Puisque T_ρ est irréductible, B_ρ est symétrique ou alternée. Puisque ψ_ρ est alternée, A_ρ est alors alternée ou symétrique. Puisque les T_ρ sont conjugués entre eux, qu'on soit dans l'un ou l'autre cas ne dépend pas de ρ. On pose

(4.4.9.4) $$A_\rho(X,Y)=\varepsilon_V A_\rho(Y,X)$$

(4.4.9.5) $$B_\rho(X,Y)=\varepsilon_T B_\rho(Y,X).$$

On a donc

(4.4.9.6) $$\varepsilon_V\varepsilon_T=-1$$

et il est clair sur (4.4.4) que si $*$ est l'involution de H déduite de ψ,

(4.4.9.7) $$\varepsilon_*=\varepsilon_V.$$

Dans le cas (4.4.8), *a)* (resp. *b)*) normalisons les bigraduations de sorte que V_ρ (resp. T_ρ) soit de bidegré (0, 0). On a alors pour x, y non nuls dans V_ρ et T_ρ :

cas *a)* $$A_\rho(x,\sigma_1 x)B_\rho(y, C\sigma_2 y)>0\,;$$

cas *b)* $$A_\rho(x, C\sigma_1 x)B_\rho(y,\sigma_2 y)>0.$$

Normalisant A_ρ et B_ρ (dont seul le produit tensoriel est donné), on peut supposer que

cas *a)* $\qquad A_\rho(x, \sigma_1 x) > 0 \quad$ et $\quad B_\rho(y, C\sigma_2 y) > 0$;

cas *b)* $\qquad A_\rho(x, C\sigma_1 x) > 0 \quad$ et $\quad B_\rho(y, \sigma_2 y) > 0$.

De plus, A_ρ et B_ρ, tout comme Φ, sont invariantes par le sous-tore compact Ker(N) de S, et en particulier par C. On a dans le cas *a)*

$$0 < A_\rho(\sigma_1 x, \sigma_1 \sigma_1 x) = \varepsilon_V . \varepsilon_{H.\rho} A_\rho(x, \sigma_1 x),$$

d'où $\varepsilon_V . \varepsilon_{H\rho} = 1$. De même, dans le cas *b)*, on trouve que $\varepsilon_T . \varepsilon_{H\rho} = 1$.

Lemme **(4.4.10)**. — *Pour* $\varepsilon_T = \varepsilon_{H\rho}$, *on est dans le cas* b); *pour* $\varepsilon_T = -\varepsilon_{H\rho}$, *on est dans le cas* a).

Proposition **(4.4.11)**. — *Soient* S *un schéma lisse connexe non vide, de point générique* η, $f : X \to S$ *un schéma abélien sur* S, $H = \mathrm{End}(R_1 f_* \mathbf{Q})$, *et* Z *le centre de* H. *On suppose que* :

(a) X_η *est simple sur* $k(\eta)$.

(b) X *ne devient constant sur aucun revêtement fini de* S.

(c) *Une des conditions suivantes est vérifiée* (cf. (4.4.5)) :

(c_1) Z *est* quadratique *imaginaire*;

(c_2) Z *est totalement réel, et pour chaque plongement réel* $\varphi : Z \to \mathbf{R}$, $H \otimes_{Z,\varphi} \mathbf{R}$ *est une algèbre de matrices sur* $\mathbf{R}$;

(c_3) Z *est totalement réel, et pour chaque plongement réel* $\varphi : Z \to \mathbf{R}$, $H \otimes_{Z,\varphi} \mathbf{R}$ *est une algèbre de matrices sur* $\mathbf{H}$.

On a alors

$$\mathrm{End}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(R_1 f_* \mathbf{Z}).$$

Montrons qu'on est dans le cas (4.4.8), *a)*, ou (4.4.8), *b)* pour toutes les places de Z simultanément. C'est clair (4.4.8) sous l'hypothèse (c_1), et résulte de (4.4.10) sous les hypothèses (c_2) ou (c_3), car non seulement ε_T, mais encore $\varepsilon_{H\rho}$ est alors indépendant de ρ.

La condition (4.4.8), *b)* ne peut pas être vérifiée en chaque place de Z, car la structure de Hodge serait alors localement constante, ce qui d'après (4.1.3.3) et (4.4.3) viole *b)*. La condition *a)* est donc vérifiée en chaque place de Z, de sorte que H est de type (0, 0) (4.4.8). Compte tenu de (4.4.3), ceci achève la démonstration.

Proposition **(4.4.12)**. — *Soit* $f : X \to S$ *un schéma abélien sur un schéma lisse* S. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout schéma abélien* $g : Y \to S$, *on a*

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(R_1 f_* \mathbf{Z}, R_1 g_* \mathbf{Z}).$$

(ii) *La condition* (i) *est vérifiée pour* $X = Y$, *et le centre* Z *de* $\mathrm{End}_S(X) \otimes \mathbf{Q}$ *n'admet aucune place complexe* $\rho : Z \to \mathbf{C}$ *telle que le facteur direct* $R_1 f_* \mathbf{Q} \otimes_{Z,\rho} \mathbf{C}$ *de* $R_1 f_* \mathbf{C}$ *soit purement de type de Hodge* $(-1, 0)$.

On se ramène à supposer que S est connexe non vide, de point générique η, et que X_η est une variété abélienne simple sur $k(\eta)$. Si (i) ou (ii) est vérifiée, $D = \mathrm{End}(X_\eta) \otimes \mathbf{Q}$ est alors un corps, et, pour $s \in S$, $(R_1 f_* \mathbf{Q})_s$ est une représentation irréductible de $\pi_1(S, s)$.

Pour prouver que (ii) $\Rightarrow$ (i), on peut supposer Y_η simple, et $(R_1 g_* \mathbf{Q})_s$ isotypique de type $(R_1 f_* \mathbf{Q})_s$. On a alors un isomorphisme de familles continues de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge (D étant de type (0, 0))

$$R_1 g_* \mathbf{Q} \approx R_1 f_* \mathbf{Q} \otimes_D \mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{Q}, R_1 g_* \mathbf{Q}).$$

On a $D \otimes \mathbf{C} \simeq \mathbf{M}_n(Z \otimes \mathbf{C})$. Si $e \in D \otimes \mathbf{C}$ se transforme par un tel isomorphisme en l'idempotent e_{11}, on a encore un isomorphisme de vectoriels bigradués

$$(R_1 g_* \mathbf{C})_s \approx (R_1 f_* \mathbf{C})_s \otimes_{Z \otimes \mathbf{C}} e(\mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{C}, R_1 g_* \mathbf{C})).$$

Si la condition (ii) est vérifiée, et si $e(\mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{C}, R_1 g_* \mathbf{C}))$ n'est pas purement de type (0, 0), alors $(R_1 g_* \mathbf{C})_s$ ne pourrait pas être purement de type $(-1, 0) + (0, -1)$, ce qui est absurde. On en déduit que $\mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{Z}, R_1 g_* \mathbf{Z})$ est purement de type (0, 0), et (i) en résulte par (4.4.3) et (2.1.11.1).

Soit Z une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel Z^0. Si $Z \otimes \mathbf{R} \approx \mathbf{C} \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}$, on définit une action par homothéties de S sur $Z \otimes \mathbf{R}$ en envoyant $s \in S(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{C}^*$ sur $(s^2 . N(s)^{-1}, 1, \ldots, 1)$. Le couple formé de Z et de cette action de S sur $Z \otimes \mathbf{R}$ est une structure de Hodge polarisable Z_ρ de type $(-1, 1) + (0, 0) + (1, -1)$, qui dépend de Z et de la place choisie $\rho : Z \to \mathbf{C}$.

Soit X un schéma abélien sur S, tel que X_η soit simple. Si le centre Z de $\mathrm{End}(R_1 f_* \mathbf{Q})$ n'est pas totalement réel, il est extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Si la seconde hypothèse de (ii) est violée, le facteur direct $R_1 f_* \mathbf{Q} \otimes_Z Z_\rho$ de la famille continue de structures de Hodge polarisable $R_1 f_* \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Q}} Z_\rho$ est purement de type $(-1, 0) + (0, -1)$.

D'après (4.4.3), le choix d'un réseau entier dans $R_1 f_* \mathbf{Q} \otimes_Z Z_\rho$ définit un schéma abélien $g : Y \to S$, et $\mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{Q}, R_1 g_* \mathbf{Q})$ n'est pas purement de type (0, 0), ce qui viole (i).

Corollaire **(4.4.13)**. — *Soient* S *un schéma lisse connexe de point générique* η *et* $f : X \to S$ *un schéma abélien sur* S *de dimension relative* $g \leq 3$. *On suppose que sur aucun revêtement étale fini de* S, X *n'admet de sous-schéma abélien constant. Alors, pour tout schéma abélien* $g : Y \to S$, *on a*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{Z}, R_1 g_* \mathbf{Z})$$

et

$$\mathrm{Hom}(Y, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R_1 g_* \mathbf{Z}, R_1 f_* \mathbf{Z}).$$

Par dualité, on se ramène à ne prouver que la première assertion. On se ramène aussi à supposer X_η simple. Vérifions que X satisfait à l'une des conditions (c) de (4.4.11).

Posons $H = \mathbf{M}_c(D)$, D étant un corps gauche de rang b^2 sur son centre Z, que l'on sait être totalement réel ou totalement imaginaire. Posant $a = [Z : \mathbf{Q}]$, on a

(4.4.13.1) $$ab^2 c \mid 2g \leq 6.$$

1) Si Z est totalement imaginaire, et non quadratique imaginaire, on doit avoir $a=2g=4$. Pour $s\in S$, le commutant de Z agissant sur $(R_1 f_* \mathbf{Q})_s$ est alors commutatif, de sorte que l'action de $\pi_1(S, s)$ est abélienne, donc se factorise par un groupe fini ((4.2.8), (iii), *b)* ou (4.2.9)). Ceci est absurde ((4.1.3.3) et (4.4.3)).

Avec les notations de (4.4.8), on pourrait aussi noter que les T_ρ sont alors de rang un, de sorte que la condition (4.4.8), *b)* est vérifiée en chaque place et que la structure de Hodge est localement constante.

2) Si Z est totalement réel et si les conditions (c_1) et (c_2) sont violées, alors $a\geq 2$ et $b\geq 2$, ce qui est absurde.

Vérifions que X satisfait aux conditions de (4.4.12). Si Z est quadratique imaginaire, et s'il existe $\rho : Z\to \mathbf{C}$ tel que $R_1 f_* \mathbf{Q}\otimes_{Z,\rho}\mathbf{C}$ soit purement de type de Hodge $(-1, 0)$, alors la structure de Hodge de $R_1 f_* \mathbf{Q}$ est localement constante, ce qui est absurde. Ceci prouve (4.4.13).

(4.4.14) Soit $f: X\to S$ un schéma abélien polarisé de dimension g sur une base lisse et connexe S. Si $s\in S$, le groupe fondamental $\pi_1(S, s)$ agit sur la fibre $H^1(X_s, \mathbf{Z})$ de $R^1 f_* \mathbf{Z}$ en s. La polarisation de X définit une forme alternée sur $H^1(X_s, \mathbf{Z})$, à valeurs dans $\mathbf{Z}(-1)$, non dégénérée sur $\mathbf{Q}$, et l'action de $\pi_1(S, s)$ se fait en respectant cette forme. Considérons l'hypothèse :

(4.4.14.1) Le morphisme défini par X de S dans l'une des composantes irréductibles du schéma de modules de variétés abéliennes polarisées correspondant est un morphisme dominant.

Le résultat suivant m'a été suggéré par J.-P. Serre.

Corollaire **(4.4.15)**. — *Soient* S *un schéma lisse connexe et* $f: X\to S$ *un schéma abélien polarisé sur* S *qui vérifie* (4.4.14.1). *Alors, pour tout schéma abélien* $g: Y\to S$, *on a*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R_1 f_* \mathbf{Z}, R_1 g_* \mathbf{Z}).$$

Soit $s\in S$. D'après (4.4.11) et (4.4.12), il suffit de montrer que la représentation de $\pi_1(S, s)$ sur $(R_1 f_* \mathbf{Q})_s$ est absolument irréductible, de sorte que $H=\mathbf{Q}$. C'est ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme **(4.4.16)**. — *Si* X *vérifie* (4.4.14.1), *alors l'image de* $\pi_1(S, s)$ *dans le groupe des automorphismes symplectiques de* $H^1(X_s, \mathbf{Z})$ *est d'indice fini.*

Soit n un entier. Quitte à remplacer S par un revêtement étale surjectif, défini par un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(S, s)$, on peut supposer que le système local ${}_nX = \mathrm{Ker}(n.\,\mathrm{id}: X\to X)$ est trivial sur S. Remplaçant X par un schéma abélien isogène, on se ramène ensuite et de plus à supposer X polarisé de la série principale. Supposons $n\geq 3$.

Le schéma abélien X définit alors un morphisme dominant x de S dans le schéma de modules « de Jacobi » M_n des schémas abéliens polarisés de la série principale munis d'un isomorphisme symplectique entre ${}_nX$ et $(\mathbf{Z}/n)^{2g}$; de plus, X est une image réciproque par x du schéma abélien universel sur M_n. On sait que $\pi_1(M_n, x(s))$ s'envoie isomorphiquement sur le sous-groupe de $\mathbf{Sp}(H^1(X_s, \mathbf{Z}))$ noyau de l'application de réduction mod n. Il reste donc à vérifier que :

Lemme **(4.4.17).** — *Soit* $p : S \to M$ *un morphisme dominant de schémas lisses connexes. Le sous-groupe* $p(\pi_1(S, s))$ *de* $\pi_1(M, p(s))$ *est alors d'indice fini.*

Soit t un point fermé de la fibre générique de p, et soit T' son adhérence dans S. Il existe un ouvert de Zariski dense U de M tel que $T = p^{-1}(U) \cap T'$ soit un revêtement étale de U.

On ne restreint pas la généralité en prenant $s \in T$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T, s) & \longrightarrow & \pi_1(S, s) \\ \Big\downarrow a & & \Big\downarrow c \\ \pi_1(U, p(s)) & \xrightarrow[b]{} & \pi_1(M, p(s)) \end{array}$$

la flèche a a une image d'indice fini, car T est un revêtement fini étale, et la flèche b est surjective, car $M - U$ est de codimension réelle ≥ 2. La flèche c a donc une image d'indice fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. Atiyah and W. V. D. Hodge, Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Ann. of Math.*, **62** (1955), 56-91.

[2] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **35** (1968), 107-126.

[3] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lectures Notes in mathematics*, **163**, Springer, 1970.

[4] P. A. Griffiths, On the periods of certain rational integrals, I, *Ann. of Math.*, **90**, 3 (1969), 460-495.

[5] P. A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds, III, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **38** (1970), 125-180.

[6] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, III : Exemples et compléments. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland Publ. Co., 1968.

[7] A. Grothendieck, Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, *Inv. Math.*, **2** (1966), 59-78.

[8] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 109-326.

[9] W. V. D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge Univ. Press, 2e éd., 1952.

[10] N. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turritin, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **39** (1971), 175-232.

[11] M. Nagata, Imbedding of an abstract variety in a complete variety, *J. Math. Kyoto*, **2**, 1 (1962), 1-10.

[12] A. Weil, Variétés kählériennes, *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, VI, Paris, Hermann, 1958.

[13] A. Borel, non publié.

[14] P. Deligne, Théorie de Hodge, I, *Actes du Congrès international des mathématiciens*, Nice, 1970.

TF R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, XIII, Paris, Hermann, 1958.

Manuscrit reçu le 15 septembre 1970.