Inventiones math. 17, 273–302 (1972)

Les immeubles des groupes de tresses généralisés

Pierre Deligne (Bures-sur-Yvette)

Introduction

Le résultat principal de ce travail est le suivant.

Théorème. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathcal{M}$ un ensemble fini d'hyperplans homogènes de V, $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V et $Y = V_{\mathbb{C}} - \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M_{\mathbb{C}}$. On suppose que les composantes connexes de $V - \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M$ sont des cônes simpliciaux ouverts. Alors, Y est un $K(\pi, 1)$.*

Soient V comme plus haut, et $W \subset GL(V)$ un groupe fini engendré par des réflexions. On suppose qu'aucun vecteur non nul de V n'est fixe sous W:

$$V^W = 0.$$

Soit Φ une quelconque structure euclidienne sur V, invariante par W, et soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des hyperplans M tels que la réflexion orthogonale par rapport à M soit dans W. On sait alors que $(V, \mathcal{M})$ vérifie l'hypothèse du théorème, et que W agit librement sur l'espace Y_W correspondant. Le quotient $X_W = Y_W / W$ est donc aussi un $K(\pi, 1)$.

Ce résultat avait été conjecturé par Brieskorn. Il n'est nouveau que pour W de type H_3, H_4, E_6, E_7 ou E_8 (Brieskorn [2]). Nous donnons aussi une nouvelle démonstration de ce que le groupe fondamental de X_W est le groupe de tresses généralisé $\tilde{W}$ correspondant à W (Brieskorn [3]).

Réduit au cas particulier considéré plus haut, le plan de la démonstration est le suivant.

a) On construit un immeuble $I(\tilde{W})$ sur lequel $\tilde{W}$ agit, et un ensemble $\mathcal{S}$ de sphères dans $I(\tilde{W})$, isomorphes à la sphère unité de V. Le groupe $\tilde{W}$ agit de façon strictement simplement transitive sur $\mathcal{S}$.

b) On montre qu'à homotopie près $I(\tilde{W})$ est le bouquet des sphères $S \in \mathcal{S}$.

c) On relie X_W et $I(\tilde{W})$.

La description de $\mathcal{S}$ et la possibilité de c) étaient apparues lors d'une conversation avec Brieskorn et Tits au printemps 1970. Les idées requises pour établir b) m'ont été fournies par Garside [4], que je suis souvent de très près.

Dans le paragraphe 4, on détermine le centre de $\tilde{W}$ et on résoud le problème des mots et le problème de conjugation dans $\tilde{W}$. Ces résultats ont été obtenus indépendamment par E. Brieskorn et K. Saito, qui utilisent comme nous les méthodes de Garside [4].

Le langage géométrique utilisé et les techniques de démonstration sont essentiellement dues à Tits, avec les idées duquel j'ai pu me familiariser en assistant à un de ses séminaires et lors de conversations.

Je suis heureux de pouvoir lui dire ici ma reconnaissance.

0. Notations

(0.1) $L^+(D)$: monoïde à unité libre engendré par un ensemble D.

(0.2) $L(D)$: groupe libre engendré par un ensemble D.

(0.3) A^-: adhérence d'une partie A d'un espace topologique.

(0.4) Pour x, y dans un monoïde à unité et $n \geqq 0$, on pose $\mathrm{prod}(n; x, y) = x y x y \ldots$ (n facteurs); on a $\mathrm{prod}(2n; x, y) = (x y)^n$, $\mathrm{prod}(2n+1; x, y) = (x y)^n x$.

§ 1. Galeries

(1.1) Soit $\mathscr{M}$ un ensemble fini d'hyperplans (les *murs*) dans un espace vectoriel réel de dimension finie V. Nous utiliserons la terminologie (*murs*, *chambres*, *faces*, *facettes*) de [1] V §1 (les facettes forment une partition de E). Le *support* P d'une facette F est l'intersection des murs contenant F; F est ouverte dans P. Pour toute chambre A et tout mur M, on note $D_M(A)$ l'ensemble des chambres du même côté de M que A. Si A et B sont deux chambres, on note $D(A, B)$ l'intersection des $D_M(A)$ pour A et B du même côté de M. Nous écartant de la terminologie de [1] IV 1 ex 15, nous dirons que deux chambres A et B sont *mitoyennes* si $A \neq B$ et que A et B ont une face en commun. Nous utiliserons constamment les faits triviaux suivants.

(1.2) **Lemme.** (i) *Soit M un mur d'une chambre B. Il existe une et une seule chambre B', mitoyenne à B, ayant M pour mur. M est le seul mur qui sépare B de B'.*

(ii) *Soient B_1, B_2, B_3 trois chambres, et $\mathscr{M}(B_i, B_j)$ l'ensemble des murs qui séparent B_i de B_j. On a*

$$\mathscr{M}(B_1, B_3) = \big(\mathscr{M}(B_1, B_2) - \mathscr{M}(B_2, B_3)\big) \cup \big(\mathscr{M}(B_2, B_3) - \mathscr{M}(B_1, B_2)\big).$$

Une *galerie* de *longeur* n ($n \geqq 0$) de *source* A et de *but* B est une suite de chambres $(C_0, \ldots, C_n)$ avec $A = C_0$, C_{i+1} mitoyenne de C_i ($0 \leqq i \leqq n$) et $C_n = B$. Le *composé* de deux galeries $G = (C_0, \ldots, C_n)$ et $G' = (C'_0, \ldots, C'_m)$

est défini si $C_n = C'_0$, et vaut alors

$$GG' = (C_0, \ldots, C_n, C'_1, \ldots, C'_m).$$

Si G est une galerie de source A, $A.G$ désigne son but.

La galerie G^* opposée à une galerie $G = (C_0, \ldots, C_n)$ est la galerie $(C_n, \ldots, C_0)$. On a $(GG')^* = G'^* G^*$.

La galerie $-G$ *antipodique* d'une galerie $G = (C_0, \ldots, C_n)$ est la suite des chambres antipodiques $-G = (-C_0, \ldots, -C_n)$.

On a $-(GG') = (-G)(-G')$, et $-(G^*) = (-G)^*$.

La *distance* $d(A, B)$ d'une chambre A à une chambre B est la plus petite longueur d'une galerie de A à B. Une galerie de A à B est *minimale* si elle est de longueur $d(A, B)$.

(1.3) **Proposition.** *La distance $d(A, B)$ est le nombre de murs qui séparent A de B. Pour qu'une galerie G de A à B soit minimale, il faut et suffit qu'elle traverse une fois les murs qui séparent A de B et 0 fois les autres.*

Il est clair que toute galerie de A à B traverse tout mur qui sépare A de B, et il suffit de prouver l'existence d'une galerie G de A à B, de longueur égale au nombre k de murs qui séparent A de B. On procède par récurrence sur k. L'intersection des $D_M(A)$ pour M un mur de A est réduite à A. Dès lors, ou bien $A = B$, auquel cas on prend $G = (A)$, ou bien il existe un mur M de A qui sépare A de B. Soit A' la chambre mitoyenne de A ayant M pour mur. M est le seul mur qui sépare A de A', de sorte qu'un mur N sépare A' de B si et seulement si $M \neq N$ et que N sépare A de B. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une galerie G' de longueur $k-1$ allant de A' à B, et on prend $G = (AA')\, G'$.

(1.4) **Corollaire.** *Soient A, B, C trois chambres. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, *i.e. il existe une galerie minimale de A à C passant par B.*

(ii) *Pour qu'un mur sépare A de C, il faut et suffit qu'il sépare A de B ou B de C. En d'autres termes,* $\mathcal{M}(A, B) \subset \mathcal{M}(A, C)$ (cf. 1.2(ii)).

(iii) $B \in D(A, C)$.

(1.5) **Proposition.** *Soient P une intersection de murs, $V_P = V/P$, $\mathrm{pr}_P \colon V \to V_P$ la projection et $\mathcal{M}_P$ l'ensemble des hyperplans N de V_P tels que $\mathrm{pr}_P^{-1}(N)$ soit un mur. On note π'_P l'unique application des facettes de $(V, \mathcal{M})$ dans celles de $(V_P, \mathcal{M}_P)$ telle que $\mathrm{pr}_P(F) \subset \pi'_P(F)$.*

(i) *π'_P respecte la relation d'incidence $F_1 \subset F_2^-$; si $F_1 \subset F_2^-$, on a*

$$\mathrm{codim}(F_1 \text{ dans } F_2^-) \geqq \mathrm{codim}(\pi'_P[F_1] \text{ dans } \pi'_P[F_2]).$$

π'_P transforme chambre en chambre; si A et B sont mitoyennes, soit $\pi'_P(A)=\pi'_P(B)$, soit $\pi'_P(A)$ et $\pi'_P(B)$ sont mitoyennes.

(ii) *Soit F une facette de support P* (1.1). *La restriction de π'_P à l'ensemble des facettes E de $(V, \mathscr{M})$ telles que $F \subset E^-$ est bijective. Ainsi que son inverse π_F, elle respecte la codimension, l'incidence $E_1 \subset E_2^-$ et donc la mitoyenneté des chambres. On notera encore π_F la bijection pr_P^{-1} entre intersections de murs dans V_P et intersections de murs dans V, contenant P.*

(iii) *Si $C=\pi_F(C')$, on a, pour toute chambre X de $(V, \mathscr{M})$,*

$$\pi_F^{-1} D(C,X)=D\big(C',\pi'_P(X)\big) \quad et \quad \pi_F^{-1}\mathscr{M}(C,X)=\mathscr{M}_P\big(C',\pi'_P(X)\big).$$

Pour $X=\pi_F(X')$, on a

$$\pi_F\big(D(C',X')\big)=D(C,X) \quad et \quad \pi_F\big(\mathscr{M}_P(C',X')\big)=\mathscr{M}(C,X);$$

π_F induit alors une bijection entre galeries minimales de C' à X' et de C à X.

La vérification est laissée au lecteur ((iii) se déduit de 1.4(ii)$\Leftrightarrow$(iii)).

(1.6) **Notations.** (i) Pour F une facette de support P, $V_P, \mathscr{M}_P, \mathrm{pr}_P, \pi'_P$ se notent encore $V_F, \mathscr{M}_F, \mathrm{pr}_F, \pi'_F$.

(ii) Soient P une intersection de murs et C une chambre. On suppose qu'il existe une facette de C (i.e. dans C^-) de support P. Cette facette est alors unique. On la note $F(P)$ et on pose

$$C.\Delta(P)=\pi_{F(P)}\big(-\pi_{F(P)}^{-1}(C)\big).$$

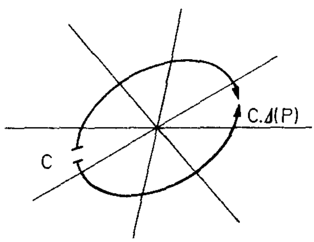
(1.7) **Lemme.** (i) *Pour qu'un mur sépare C de $C.\Delta(P)$, il faut et suffit qu'il contienne P* ((1.5)(iii)).

(ii) *Pour M un mur de C, $C.\Delta(M)$ est l'unique chambre mitoyenne à C ayant M pour mur* (cf. 1.5(iii), 1.2(i)).

(iii) *Soient $M \neq N$ deux murs de C, dont l'intersection P contient une facette de C ouverte dans P. Il existe exactement deux galeries minimales de C à $C.\Delta(P)$. L'une commence par $(C, C.\Delta(M))$, l'autre par $(C, C.\Delta(N))$.*

L'assertion (iii) se vérifie par réduction au rang deux, (cf. 1.5(iii)), où le dessin est

(1.7.1)



Nous supposerons désormais remplie la condition suivante.

(1.8) **Hypothèse.** *Les chambres sont des cônes simpliciaux ouverts.*

En d'autres termes, chaque chambre est l'ensemble des points à coordonnées >0 dans une base convenable de V.

(1.9.1) *Remarque.* Soit P une intersection de murs.

(i) $(V_P, \mathcal{M}_P)$ vérifie encore (1.8);

(ii) l'ensemble $\mathcal{M}^P$ des traces sur P des murs ne contenant pas P vérifie encore (1.8).

Si $\mathcal{M}$ est défini par un «groupe de Weyl» W (voir l'introduction), $\mathcal{M}^P$ n'est plus en général de ce type.

(1.9.2) *Remarque.* L'hypothèse (1.8) assure que si P est une intersection de murs d'une chambre C, la condition de (1.6) est vérifiée. La chambre $C.\Delta(P)$ est donc définie.

(1.10) **Définition.** *Deux galeries de mêmes extrémités G et G' sont équivalentes (notation: $G \sim G'$) s'il existe une suite de galeries $G = G_0, \ldots, G_n = G'$ $(n \geqq 0)$ telle que G_{j+1} se déduise de G_j de la façon suivante $(0 \leqq j < n)$:*

a) *on a des décompositions $G_j = E_1 F E_2$, $G_{j+1} = E_1 F' E_2$;*

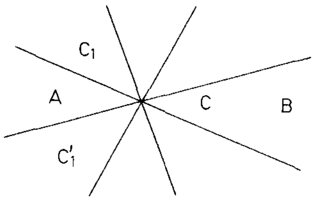
b) *il existe une chambre C et deux murs M, N de C tels que F et F' soient les deux galeries minimales de C à $C.\Delta(M \cap N)$.*

La composition des galeries, les opérations $G \to G^*$ et $G \to -G$, les applications source et but, la fonction «longueur» sont compatibles à cette relation d'équivalence et passent donc au quotient. On notera en principe par des minuscules les classes de galeries. On dit qu'une classe de galeries e *commence* (resp. *finit*) par une classe de galeries f s'il existe g tel que $e = fg$ (resp. $e = gf$). On vérifie:

(1.11) **Proposition.** *Deux galeries équivalentes traversent le même nombre de fois chaque mur.*

(1.12) **Proposition.** *Deux galeries minimales de mêmes extrémités sont équivalentes.*

Soient $G = (C_0, \ldots, C_n)$ et $G' = (C'_0, \ldots, C'_n)$, d'extrémités A et B. On procède par récurrence sur la longueur des galeries considérées. Le cas $n = 0$ est trivial et l'hypothèse de récurrence permet de supposer que $C_1 \neq C'_1$. Soient M et M' les murs qui séparent $A = C_0 = C'_0$ de C_1 et C'_1, et $C = A.\Delta(M \cap M')$. Les murs M et M' séparent A de B. Par réduction au rang deux (1.5)(iii), on en déduit que tout mur qui sépare A de C sépare A de B



(dessin dans $V_{M\cap M'}$; on omet d'écrire $\pi'_{M\cap M'}(\ )$).

Soient F (resp. F') la galerie minimale de A à C qui passe par C_1 (resp. C'_1), et E une galerie minimale de C à B. Les galeries FE et $F'E$ sont minimales et équivalentes. Les galeries minimales G et FE (resp. G' et FE') commencent par (A, C_1) (resp. par (A, C'_1)). L'hypothèse de récurrence implique qu'elles sont équivalentes, et (1.12) en résulte.

(1.13) **Notation.** (i) On désigne par $u(A,B)$ la classe d'équivalence des galeries minimales de A à B.

(ii) Pour I un ensemble de murs d'une chambre C, d'intersection P, on pose $\Delta(P)=u(C, C.\Delta(P))$ (cf. (1.9.2)). Pour I l'ensemble de tous les murs, on pose $\Delta=u(C, -C)$.

L'intérêt de la notation réside dans l'ambiguité sur C.

(1.14) **Proposition.** *Soient A une chambre et $\mathcal{G}$ un ensemble de classes de galeries de longueur bornée de source A. Supposons que $\mathcal{G}$ vérifie la conjonction* (i) *de*

(i_a) $(A)\in\mathcal{G}$.

(i_b) *Si $gh\in\mathcal{G}$, alors $g\in\mathcal{G}$.*

(i_c) *Soient g de but B et M, N deux murs de B. Si $g\Delta(M)$ et $g\Delta(N)$ sont dans $\mathcal{G}$, alors $g\Delta(M\cap N)\in\mathcal{G}$.*

On a alors

(ii) *Il existe une (unique) classe de galeries x de source A telle que*

$$\mathcal{G}=\{g\,|\,x \text{ commence par } g\}.$$

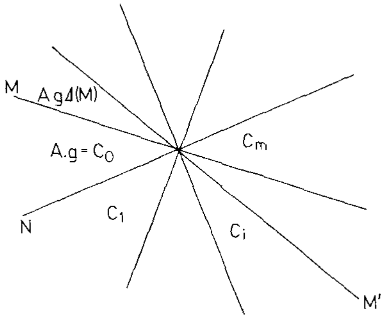
L'unicité est claire: si x commence par y et que $x\neq y$, y est de longueur strictement plus petite que x. Soit x de longueur maximale dans $\mathcal{G}$. Pour s'assurer que x convient, il suffit de prouver l'assertion suivante.

(*) Soient g et M tels que (a) x commence par g et (b) x ne commence pas par $g\Delta(M)$, et $g\Delta(M)\in\mathcal{G}$. Il existe alors g' et M', vérifiant encore (a) et (b), avec g' strictement plus long que g.

Puisque $g\Delta(M)\in\mathcal{G}$, la maximalité de x entraîne que $g\neq x$, donc que x commence par $g\Delta(N)$ pour N convenable, nécessairement distinct de M. D'après (i_c), on a alors $g\Delta(M\cap N)\in\mathcal{G}$.

Puisque $g\Delta(M\cap N)$ commence par $g\Delta(M)$, x ne commence pas par $g\Delta(M\cap N)$.

Soit $(C_0, \ldots, C_m)$ la galerie minimale de $A.g$ à $A.g\Delta(M\cap N)$ qui commence par $(A.g, A.g\Delta(N))$. Soit i $(0<i<m)$ le plus grand i tel que x commence par $g'=g(C_0, \ldots, C_i)$. Alors, g' et le mur M' entre C_i et C_{i+1} vérifient (a)(b).



(projection dans $V_{M\cap N}$).

(1.15) **Proposition.** *Soient A une chambre et $\mathscr{B}$ un ensemble de chambres. Pour que $\mathscr{B}$ vérifie la conjonction* (i) *de*

($\mathrm{i_a}$) *$A\in\mathscr{B}$.*

($\mathrm{i_b}$) *Si $B\in\mathscr{B}$, alors $D(A, B)\subset\mathscr{B}$.*

($\mathrm{i_c}$) *Soient M et N deux murs d'une chambre B. Si A et B sont du même côté de M et de N et que $B.\Delta(M)$ et $B.\Delta(N)$ sont dans $\mathscr{B}$, alors $B.\Delta(M\cap N)\in\mathscr{B}$.*

Il faut et il suffit que

(ii) *Il existe une (unique) chambre C telle que $\mathscr{B}=D(A, C)$.*

On vérifie facilement que (ii) $\Rightarrow$ (i). Pour prouver que (i) $\Rightarrow$ (ii), on applique (1.14) à l'ensemble $\mathscr{G}$ des $u(A, B)$ pour $B\in\mathscr{B}$ (noter que d'après (1.3) et (1.11) toute galerie G de classe g telle qu'un $u(A, B)$ commence par g est automatiquement minimale) et on applique (1.4)(i) $\Leftrightarrow$ (iii) à la classe de galeries $x=u(A, X)$ obtenue.

Appliquant le critère (1.15), on trouve:

(1.16) **Corollaire.** *Soient A et B deux chambres mitoyennes séparées par le mur M, et C du même côté de M que B. Il existe C' tel que*

$$D(A, C)\cap D_M(B)=D(B, C').$$

(1.17) **Corollaire.** (i) *Soient A, C_1, C_2 trois chambres. Il existe C telle que*

(1.17.1) $$D(A, C)=D(A, C_1)\cap D(A, C_2).$$

(ii) *Soient A et C_1 deux chambres, et M un mur de A. Il existe C' telle que*

(1.17.2) $$D(A, C') = D(A, C_1) \cap D_M(A).$$

En fait, (ii) est le cas particulier de (i) pour $C_2 = -(A.\Delta(M))$.

(1.18) **Lemme.** *Soient M, M', M'' trois murs distincts d'une chambre A, $A_1 = A.\Delta(M)$, $B = A.\Delta(M \cap M' \cap M'')$, $B' = A.\Delta(M \cap M')$ et $B'' = A.\Delta(M \cap M'')$. Pour toute chambre C, si $B' \in D(A_1, C)$ et $B'' \in D(A_1, C)$, on a $B \in D(A_1, C)$.*

La facette F de A ouverte dans $M \cap M' \cap M''$ est une facette de toutes les chambres A, A_1, B, B' et B''. Appliquant (1.5)(iii), nous pouvons donc nous ramener au cas où $\dim V = 3$. Appliquant (1.17)(ii), on peut supposer de plus que A_1 et C sont du même côté de M. Faisons ces hypothèses, et supposons que $B', B'' \in D(A_1, C)$. Puisque M' (resp. M'') sépare A_1 de B' (resp. B''), A_1 et C sont séparés par M', M'' (et du même côté de M); A et C sont donc séparés par M, M' et M'', et $C = -A = B$.

Le résultat clef suivant est inspiré de [4].

(1.19) **Proposition.** (i) *Soient A, B, C trois chambres, F une galerie de A à B et G_1, G_2 deux galeries de B à C. Si $FG_1 \sim FG_2$, alors $G_1 \sim G_2$.*

(ii) *De même, si $G_1 E \sim G_2 E$, alors $G_1 \sim G_2$.*

(iii) *Soit g une classe d'équivalence de galeries, de source A. Il existe une chambre C telle que g commence par $u(A, B)$ si et seulement si $B \in D(A, C)$.*

On déduit (ii) de (i) par passage aux galeries opposées.

Soient $G = (C_0, \ldots, C_n)$ et $G' = (C'_0, \ldots, C'_n)$ deux galeries de longueur n et de mêmes extrémités. Si $n \geqq 1$, on pose $G_1 = (C_1, \ldots, C_n)$ et $G'_1 = (C'_1, \ldots, C'_n)$. Si de plus $C_1 \neq C'_1$, on note M et M' les murs qui séparent $C_0 = C'_0$ de C_1 et C'_1, et on pose $A = C_0.\Delta(M \cap M')$. Considérons la relation $R_n(G, G')$ suivante entre galeries G, G' comme plus haut.

$R_n(G, G') \Leftrightarrow$ on a soit

α) $n = 0$;

β) $n \neq 0$, $C_1 = C'_1$ et $G_1 \sim G'_1$;

γ) $n \neq 0$, $C_1 \neq C'_1$ et il existe une galerie F de A à $C_n = C'_n$ telle que $G_1 \sim u(C_1, A).F$ et $G'_1 \sim u(C'_1, A).F$.

Nous prouverons par récurrence sur n l'assertion suivante

(A_n) R_n est une relation d'équivalence.

Admettons (A_i) pour $i < n$, et prouvons (1.19.1) à (1.19.3) ci-dessous.

(1.19.1) Pour les galeries de longueur $i < n$, $R_i(G, G') \Leftrightarrow G \sim G'$.

Il est trivial que $R_i(G, G') \Rightarrow G \sim G'$, et, avec les notations de (1.10), si $G \sim G'$, on a $R_i(G_j, G_{j+1})$.

(1.19.2) L'assertion (i) pour FG_1 de longueur $< n$ est vraie.

Ceci résulte de (1.19.1) et de la seconde clause dans la définition des R_i.

(1.19.3) L'assertion (iii) est vraie pour g de longueur $<n$.

Ceci résulte de (1.15) appliqué à l'ensemble $\mathscr{B}$ des chambres B telles que g commence par $u(A, B)$: L'hypothèse (i_c) de (1.15) se vérifie à l'aide de (1.19.2), de (1.18) et de la troisième clause dans la définition des R_i.

Il reste à prouver que si G, G' et G'' sont trois galeries de longueur n allant de A à C et que $R_n(G, G')$ et $R_n(G, G'')$, on a $R_n(G', G'')$. Si $n=0$, ou que $C_1 = C'_1$, ou que $C_1 = C''_1$, c'est trivial.

Pour $n>0$, nous noterons M, M', M'' les murs qui séparent $A = C_0 = C'_0 = C''_0$ de C_1, C'_1 et C''_1. Distinguons deux cas

Cas 1. $C_1 \neq C'_1 = C''_1$. Soit $B = A.\Delta(M \cap M')$. On a par hypothèse

$$(C_1, \dots, C_n) \sim u(C_1, B)\, F' \sim u(C_1, B)\, F'',$$
$$(C'_1, \dots, C'_n) \sim u(C'_1, B)\, F',$$
$$(C''_1, \dots, C''_n) \sim u(C''_1, B)\, F''.$$

De (1.19.2), on tire alors que $F' \sim F''$, et donc que $R_n(G', G'')$.

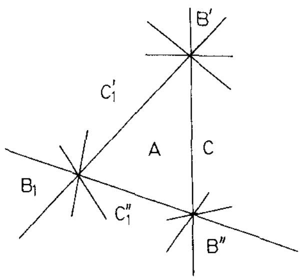
Cas 2. $C_1 \neq C'_1 \neq C''_1 \neq C_1$. Soient $B_1 = A.\Delta(M' \cap M'')$, $B' = A.\Delta(M \cap M')$, $B'' = A.\Delta(M \cap M'')$ et $B = A.\Delta(M \cap M' \cap M'')$. On a

$$G_1 = (C_1, \dots, C_n) \sim u(C_1, B')\, F' \sim u(C_1, B'')\, F''$$
$$G'_1 = (C'_1, \dots, C'_n) \sim u(C'_1, B')\, F'$$
$$G''_1 = (C''_1, \dots, C''_n) \sim u(C''_1, B'')\, F''$$

de sorte que la classe g_1 de G_1 commence par $u(C_1, B')$ et $u(C_1, B'')$. Il résulte alors de (1.19.3) et du lemme (1.18) que g_1 commence par $u(C_1, B)$: $G_1 \sim u(C_1, B)\, F$. D'après (1.19.2), on a $F' \sim u(B', B)\, F$ et $F'' \sim u(B'', B)\, F$, donc $G_1 \sim u(C_1, B)\, F$, $G'_1 \sim u(C'_1, B)\, F$ et $G''_1 \sim u(C''_1, B)\, F$. Dès lors,

$$G'_1 \sim u(C'_1, B_1)\, u(B_1, B)\, F$$
$$G''_1 \sim u(C''_1, B_1)\, u(B_1, B)\, F,$$

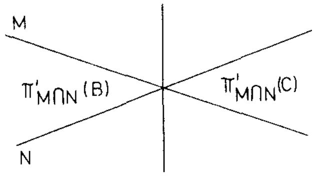
de sorte que $R_n(G', G'')$.



(dessin sur la sphère unité de $V_{M \cap M' \cap M''}$).

(1.20) **Corollaire.** *Les conditions* (i) *et* (ii) *de* (1.14) *sont équivalentes.*

Supposons (ii) et prouvons (i_c). Sous les hypothèses de (i_c), si $x=gh$ (h de source B), il résulte de (1.19)(i) que h commence par $\Delta(M)$ et $\Delta(N)$. Soit C la chambre garantie par (1.19)(iii) pour h. Puisque M et N séparent B de C, $\pi'_{M\cap N}(C)$ ne peut être que $\pi'_{M\cap N}(B).\Delta$ et (i_c) résulte de (1.5)(iii).



(1.21) **Corollaire.** *Pour toute chambre A, soit $n(A, i)$ le nombre de classes de galeries de source A et de longueur i. Posons*

$$f_A=\sum_0^\infty n(A, i)\, t^i \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Pour toute chambre A, et pour P parcourant les intersections de murs de A (y compris $\{0\}$ et V), on a

$$\sum_P (-1)^{\operatorname{codim}(P)}\, t^{d(A,\, A.\Delta(P))} f_{A.\Delta(P)} = 1.$$

Ceci exprime que

a) le nombre de classes de galeries de longueur i qui commencent par $\Delta(P)$ est $n(A.\Delta(P), i-d(A, A.\Delta(P)))$ ((1.19)(i));

b) les classes de galeries qui commencent par $\Delta(P)$ et $\Delta(Q)$ commencent par $\Delta(P\cap Q)$ (résulte de (1.19)(iii)).

(1.22) *Algorithme.* Soient $G=(A_0, \dots, A_n)$ une galerie de longueur $n \geqq 1$, $G_1=(A_1, \dots, A_n)$, M le mur qui sépare A_0 de A_1, C la chambre dont l'existence est garantie par (1.19)(iii) (pour G) et C_1 la chambre analogue pour G_1. On peut calculer C par récurrence à l'aise de la formule suivante (cf. (1.16))

(1.22.1) $$D(A_1, C)=D_M(A_1)\cap D(A_1, C_1).$$

Puisque $A_1 \in D(A, C)$, M sépare en effet A de C et $C \in D_M(A_1)$. D'après (1.19)(i), on a aussi $D(A_1, C) \subset D(A_1, C_1)$, d'où l'inclusion $\subset$. Enfin, si $B \in D_M(A_1)\cap D(A_1, C_1)$, G_1 commence par $u(A_1, B)$ et G commence par $u(A, A_1).u(A_1, B)=u(A, B)$, d'où (1.22.1).

(1.23) **Corollaire.** *Soient G et H deux galeries composable. Soient A la source de G, B celle de H et C garantie par* (1.19)(iii): *on a $H \sim u(B, C).H'$. Alors, pour toute chambre D, pour que la classe de GH commence par $u(A, D)$, il faut (et il suffit) que celle de $Gu(B, C)$ commence par $u(A, D)$.*

(1.24) **Proposition.** *Soient A une chambre, P une intersection de murs de A, $F=F(P)$ (1.6) et g une classe d'équivalence de galeries de source A. Il existe une classe de galeries g' de $(V_P, \mathcal{M}_P)$, de source $\pi_F^{-1}(A)$, telle que pour toute galerie H de $(V_P, \mathcal{M}_P)$, g commence par $\pi_F(H)$ si et seulement si g' commence par H.*

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des classes de galeries h de source $\pi_F^{-1}(A)$ de $(V_P, \mathcal{M}_P)$ telles que g commence par $\pi_F(h)$. Appliquons (1.14) à $(V_P, \mathcal{M}_P)$ et à $\mathcal{G}$. D'après (1.19) la condition (i) est vérifiée (cf. la preuve de (1.20)), et (1.24) résulte de (1.14)(ii).

(1.25) On peut regarder l'ensemble des galeries comme étant l'ensemble des flèches d'une catégorie $\mathrm{Gal}_0(V, \mathcal{M})$ ayant les chambres pour objets. De même, les classes d'équivalence de galeries sont les flèches d'une catégorie quotient $\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M})$. Soient A, B et C trois chambres, E une galerie de A à B et F une galerie de B à C. Bien que les conventions générales dans les catégories soient autres, nous continuerons à noter EF le composé de E et F. La loi $*$ (resp. $G \to -G$) est une antiéquivalence (resp. une équivalence) de $\mathrm{Gal}_0(V, \mathcal{M})$ ou $\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M})$ avec elle-même, induisant l'identité (resp. $C \to -C$) sur l'ensemble des objets.

Quand aucune confusion ne sera à craindre, nous écrirons simplement Gal_0 et Gal_+ pour $\mathrm{Gal}_0(V, \mathcal{M})$ et $\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M})$ (ou pour une catégorie $\mathrm{Gal}_0(V_P, \mathcal{M}_P)$ ou $\mathrm{Gal}_+(V_P, \mathcal{M}_P)$). Par abus de langage, nous appelerons souvent *galeries* les flèches de Gal_+.

(1.26) **Lemme.** (i) *Dans* Gal_+, *pour toute galerie g, on a*

$$g\Delta = \Delta(-g).$$

(ii) *Quels que soient g et h de source A dans* Gal_+, *il existe n tel que $g\Delta^n$ commence par h. Si h est composé de k galeries $u(A_i, A_{i+1})$, on peut prendre $n=k$.*

Procédant par récurrence, on se ramène à prouver (i) pour g de longueur un. Pour $g=(B, C)$, on a

$$\begin{aligned} g\Delta &= u(B, C)\,u(C, -C) = u(B, C)\,u(C, -B)\,u(-B, -C) \\ &= u(B, -B)\,u(-B, -C) = \Delta(-g). \end{aligned}$$

Quelle que soit la chambre B, $\Delta = u(A, -A)$ commence par $u(A, B)$. Dès lors, (ii) se déduit de (i) par récurrence sur k.

La proposition suivante résulte aussitôt de (1.26), de son transformé par $*$ et de (1.19)(i), (ii).

(1.27) **Proposition.** (i) *Dans* Gal_+ *l'ensemble de toutes les flèches donne lieu à un calcul de fractions à gauche et à droite.*

(ii) *Soit* $\mathrm{Gal}(V, \mathcal{M})$, *ou simplement* Gal, *la catégorie (un groupoïde) déduite de* Gal_+ *en rendant inversibles toutes les flèches; appelons positives les flèches de* Gal *dans l'image de* Gal_+. *Le foncteur canonique de* Gal_+ *dans* Gal *est fidèle, et toute flèche* g *de* Gal *peut se mettre sous les formes* $g = g_1 \Delta^{-n} = \Delta^{-n} g_2$ *avec* g_1 *et* g_2 *positifs.*

Si une catégorie C n'a qu'un seul objet A et que le monoïde $\mathrm{Hom}(A, A)$ est simplifiable, que l'ensemble de toutes les flèches de C donne lieu à un calcul des fractions à gauche et à droite signifie que $\mathrm{Hom}(A, A)$ vérifie la condition de Öre à gauche et à droite. La «théorie du calcul des fractions» utilisée en (1.27) et ci-dessous est une généralisation immédiate de la théorie de Öre pour plonger un tel monoïde dans un groupe.

(1.28) Pour tout mur M, le nombre de fois que g dans Gal_+ traverse M est bien défini (1.11). Cette fonction de g se prolonge par additivité pour $g \in \mathrm{Gal}$. Plus généralement, pour toute intersection de murs P, on pourrait utiliser la propriété universelle de Gal pour définir des foncteurs

$$\pi'_P\colon \mathrm{Gal}(V, \mathcal{M}) \to \mathrm{Gal}(V_P, \mathcal{M}_P).$$

(1.29) Soient A une chambre, P une intersection de murs de A et $F = F(P)$ (1.6). La fonction π_F induit un foncteur

(1.29.1) $$\pi_F\colon \mathrm{Gal}_0(V_P, \mathcal{M}_P) \to \mathrm{Gal}_0(V, \mathcal{M}).$$

L'image de ce foncteur est stable par équivalence, et il induit un foncteur *fidèle*

(1.29.2) $$\pi_F\colon \mathrm{Gal}_+(V_P, \mathcal{M}_P) \to \mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M}).$$

De la théorie du calcul des fractions et de (1.19)(i) résulte alors la

(1.30) **Proposition.** *Sous les hypothèses précédentes, le foncteur déduit de* (1.29.2)

$$\pi_F\colon \mathrm{Gal}(V_P, \mathcal{M}_P) \to \mathrm{Gal}(V, \mathcal{M})$$

est fidèle.

(1.31) **Proposition.** *Soient* C *une chambre,* I *et* J *deux ensembles de murs de* C, $K = I \cap J$, P, Q *et* R *les intersections des murs dans* I, J *et* K *et* $F(P)$, $F(Q)$ *et* $F(R)$ *les facettes correspondantes dans* C (1.6). *La facette* $F(R)$ *est la plus petite facette contenant* $F(P)$ *et* $F(Q)$. *Dans le groupoïde* $\mathrm{Gal}(V, \mathcal{M})$, *on a*

$$\pi_{F(P)}(\mathrm{Gal}(V_P, \mathcal{M}_P)) \cap \pi_{F(Q)}(\mathrm{Gal}(V_Q, \mathcal{M}_Q)) = \pi_{F(R)}(\mathrm{Gal}(V_R, \mathcal{M}_R)).$$

Une chambre admettant $F(P)$ et $F(Q)$ pour facettes admet aussi $F(R)$ pour facette. Ceci prouve (1.31) pour les objets.

Soit $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(A, B)$, et supposons que

$$g = \pi_{F(P)}(g'_1) = \pi_{F(Q)}(g'_2).$$

D'après (1.27)(ii), on a

$$g_1' = \Delta(P)^{-n} g_1'' \quad \text{et} \quad g_2' = \Delta(Q)^{-n} g_2''$$

avec g_i'' positif, pour $n \geqq 0$ assez grand. Soient $g_1 = \pi_{F(P)} g_1''$ et $g_2 = \pi_{F(Q)} g_2''$.

D'après (1.26)(ii) (transformé par $*$), $\Delta^n \Delta(P)^{-n}$ est positif; on a dans $\mathrm{Gal}_+(V, \mathscr{M})$

(1.31.1) $$\left(\Delta^n \Delta(P)^{-n}\right) g_1 = \left(\Delta^n \Delta(Q)^{-n}\right) g_2.$$

(1.31.2) **Lemme.** *Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A, B)$ commence tant par $\left(\Delta^n \Delta(P)^{-n}\right)$ que par $\left(\Delta^n \Delta(Q)^{-n}\right)$, alors h commence par $\left(\Delta^n \Delta(R)^{-n}\right)$.*

Déduisons (1.31) de (1.31.2). D'après (1.31.2), on a

$$\left(\Delta^n \Delta(P)^{-n}\right) g_1 = \left(\Delta^n \Delta(Q)^{-n}\right) g_2 = \left(\Delta^n \Delta(R)^{-n}\right) g_3$$

avec g_3 positif. On a donc $g = \Delta(R)^{-n} g_3$. La galerie positive $g_3 = \Delta(R)^n g$ appartient à l'image de $\pi_{F(P)}$ et de $\pi_{F(Q)}$. Elle traverse (1.28) donc zéro fois tout mur ne contenant pas P ou Q, i.e. ne contenant pas R. Elle appartient donc à l'image de $\pi_{F(R)}$.

Prouvons (1.31.2). Soit $A(P) = A.\Delta.\Delta(P)$, et de même pour Q et R. La galerie $\Delta\Delta(P)^{-1}$ de source A est $u(A, A(P))$; celle de source $A(P)$ est $u(A(P), A)$. De (1.26)(i) résulte que $\Delta\Delta(P) = \Delta(P)\Delta$. On a donc

(1.31.3) $$\Delta^n \Delta(P)^{-n} = u(A, A(P)).u(A(P), A)\, u(A, A(P)) \ldots \quad (n \text{ facteurs}).$$

(1.31.4) **Lemme.** $A(R) \in D(A(P), A(Q))$.

Avec les notations de (1.2), $\mathscr{M}(A\Delta, A(P))$ est l'ensemble des murs qui conteniennent P et $\mathscr{M}(A\Delta, A(Q))$ l'ensemble de ceux qui contiennt Q. D'après (1.2), $\mathscr{M}(A(P), A(Q))$ est l'ensemble de ceux qui contiennent P ou Q, mais non R, soit $\mathscr{M}(A(P), A(R)) \cup \mathscr{M}(A(Q), A(R))$, et on applique (1.4).

D'après (1.19)(iii), une classe de galeries qui commence par $\Delta\Delta(P)^{-1}$ et $\Delta\Delta(Q)^{-1}$ commence donc aussi par $\Delta\Delta(R)^{-1}$, et (1.31.2) résulte par récurrence du

(1.31.5) **Lemme.** *Soient P et R des intersections de murs d'une chambre A, avec $P \subset R$. Soit h dans Gal_+ de source A. Si h commence tant par $\Delta^n \Delta(P)^{-n}$ ($n > 0$) que par $\Delta\Delta(R)^{-1}$, alors h commence par $\left(\Delta\Delta(R)^{-1}\right)\left(\Delta\Delta(P)^{-1}\right)^{n-1}$.*

On peut supposer que $n \geqq 2$. Posons $h = \left(\Delta\Delta(P)^{-1}\right) h'$. Avec les notations précédentes, h' commence alors tant par $\Delta\Delta(P)^{-1} = u(A(P), A)$ que par $u(A(P), A(R))$. Appliquons (1.19)(iii).

La chambre C de loc. cit. est alors séparée de $A(P)$ par tout mur M qui sépare $A(P)$ de A (i.e. $M \not\supset P$) ou $A(P)$ de $A(R)$ (i.e. $M \supset P$ et $M \not\supset R$). La chambre C n'est donc séparée de $A(P)\Delta$ que par des murs $M \supset R$, et $C \in D(A(P).\Delta, A(P).\Delta\Delta(R))$. Dès lors, h' commence tant par $(\Delta\Delta(R)^{-1})$ que par $(\Delta\Delta(P)^{-1})^{n-1}$. Procédant par récurrence sur n, on en déduit que h' commence par $(\Delta\Delta(R)^{-1})(\Delta\Delta(P)^{-1})^{n-2}$, de sorte que h commence par $(\Delta\Delta(P)^{-1})(\Delta\Delta(R)^{-1})(\Delta\Delta(P)^{-1})^{n-2}$ et on conclut en notant que

$$\Delta\Delta(P)^{-1}\,\Delta\Delta(R)^{-1} = \Delta\Delta(R)^{-1}\,\Delta\Delta(P)^{-1}.$$

(1.32) **Proposition.** *Pour F une facette d'une chambre C, engendrant une intersection de murs P, on a*

$$\pi_F^{-1}(\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M})) = \mathrm{Gal}_+(V_P, \mathcal{M}_P) \subset \mathrm{Gal}(V_P, \mathcal{M}_P).$$

Supposons que $\pi_F(\Delta^{-n} g) = h$ soit dans $\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M})$. On a alors $\pi_F(g) = \Delta(P)^n h$ et, d'après (1.28), toute galerie H représentant h ne traverse que des murs passant par F. On a donc $h = \pi_F(h_1)$ avec h_1 dans $\mathrm{Gal}_+(V_P, \mathcal{M}_P)$ et on conclut par (1.30).

§ 2. Immeubles

(2.1) Soient $(V, \mathcal{M})$ comme au § 1 (vérifiant (1.8)) et $r = \dim V$. Soit S la sphère de rayon un dans V, pour une quelconque structure euclidienne sur V (on pourrait plus intrinsèquement poser $S = V - \{0\}/\mathbb{R}_+^*$). Les hyperplans $M \in \mathcal{M}$ découpent une triangulation de S, et nous noterons encore S l'espace simplicial (schéma simplicial) correspondant, et sa réalisation géométrique. Nous transporterons à S la terminologie utilisée pour V (chambres, facettes, mitoyenneté, galerie, ...).

(2.2) Choisissons une «chambre fondamentale» A_0 dans S. Nous noterons I_+ l'espace construit ci-dessous; il dépend de $V, \mathcal{M}$ et A_0, et est muni de $q\colon I_+ \to S$.

a) Soit $\mathcal{X}_+$ l'ensemble des classes d'équivalence de galeries g de source A_0,

$$\mathcal{X}_+ = \coprod_B \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A_0, B).$$

b) Soit Z la somme disjointe, indexée par $g \in \mathcal{X}_+$, du simplexe fermé de S, adhérence du simplexe ouvert de dimension $r-1$ qu'est le but de g

$$Z_+ = \coprod_{g \in \mathcal{X}_+} (\text{but de } g)^-.$$

Soit q' l'application évidente de Z_+ sur S.

c) I_+ (muni de q) est un quotient de Z_+ (muni de q'). Si G est une galerie de A_0 à B et C une chambre mitoyenne à B, on recolle (but de g)$^-$ et (but de $g(BC)$)$^-$ selon la face fermée commune de leurs images dans S.

(2.3) L'espace I_+ est décomposé en facettes, images de facettes de Z_+ et s'envoyant bijectivement sur une facette de S. Ses *chambres* (resp.

faces, resp. *sommets*) sont ses facettes de dimension $r-1$ (resp. $r-2$, resp. 0).

Les *sommets* d'une facettes F sont les sommets contenus dans l'adhérence $\bar{F}$ de F. Les chambres de I^+ sont indexées par $\mathscr{X}_+$; on note $\tilde{A}_0 \cdot g$ celle d'indice g et $\tilde{A}_0$ celle d'indice (A_0).

Soient $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A_0, A)$, $\tilde{A} = \tilde{A}_0 \cdot g$ et $H = (C_0, \ldots, C_n)$ une galerie de A à B, de classe h.

On pose
$$\tilde{A}.h = \tilde{A}_0 . g h$$

Les chambres $\tilde{A}.(C_0, \ldots, C_i)$ $(0 \leqq i \leqq n)$ forment une galerie dans I_+. On appellera *positives* les galeries ainsi obtenues.

(2.4) **Lemme.** *Soit F une facette de S, A et B deux chambres de S ayant F pour facette, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A_0, A)$ et $h = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A_0, B)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) *dans I_+, les facettes $q^{-1}(F)$ de $\tilde{A}_0 . g$ et $\tilde{A}_0 . h$ coïncident;*

(b) *$g^{-1} h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(A, B)$ est dans $\pi_F(\mathrm{Gal})$;*

(c) *il existe g_1 et h_1 dans $\pi_F(\mathrm{Gal}_+)$ tels que $g g_1 = h h_1$.*

La condition (b) est une relation d'équivalence entre galeries de A_0 à une chambre dont F est facette. On en déduit que (a) $\Rightarrow$ (b). Que (b) $\Rightarrow$ (c) résulte de (1.26)(i). Enfin, (c) $\Rightarrow$ (a) est trivial sur les définitions.

De (2.4) (a) $\Leftrightarrow$ (b) et (1.31), on déduit aussitôt le résultat suivant.

(2.5) **Proposition.** *Chaque facette de I_+ est uniquement déterminée par l'ensemble de ses sommets. On peut donc décrire I_+ comme la réalisation géométrique du schéma simplicial suivant.*

a) *Pour x sommet de S, soit $\mathscr{G}(x)$ l'ensemble des g dans Gal_+ de source A_0 et de but une chambre dont x est sommet. Soit $\mathscr{G}(x)/\pi_x$ le quotient de $\mathscr{G}(x)$ par la relation d'équivalence (2.4)(b) (pour $F = x$). Alors, l'ensemble des sommets est*
$$\coprod_x \mathscr{G}(x)/\pi_x.$$

b) *Pour qu'un ensemble E de sommets tende un simplexe, il faut et suffit qu'il existe une galerie g de source A_0 telle que pour $y \in E$, g soit dans $\mathscr{G}(q\, y)$ et que y soit l'image de g dans $\mathscr{G}(q\, y)/\pi_{q y}$.*

(2.6) **Proposition.** *Soit F une facette de I_+. Il existe une classe de galeries g telle que, pour que F soit une facette d'une chambre $B = \tilde{A}_0 . h$, il soit nécessaire et suffisant que l'on ait*
$$h = g\, \pi_F(h')$$
pour h' convenable dans Gal_+.

Prenons pour g une galerie de longueur minimum telle que F soit facette de $A = \tilde{A}_0 . g$. Soit $B = \tilde{A}_0 . h$ une chambre dont F soit facette. D'après (2.4)(a) $\Leftrightarrow$ (c), il existe des galeries h_1 et h_2 dans $(V_{qF}, \mathcal{M}_{qF})$, avec

$$g\,\pi_F(h_1) = h\,\pi_F(h_2).$$

Appliquons le transformé par $*$ de (1.24). Vu la minimalité de g, on trouve que h_1 finit par $h_2 : h_1 = h' h_2$. D'après (1.19)(ii), on a

$$g\,\pi_F(h') = h$$

et ceci prouve (2.6).

(2.7) **Notation.** *Soit A une chambre de I_+. On désigne par $S(A)$ la réunion des chambres fermées $(A.(qA, B))^-$ pour B chambre de S.*

On vérifie que $q|S(A)$ est un isomorphisme entre $S(A)$ et S.

(2.8) **Définition.** *$\hat{I}_+$ est l'espace déduit de I_+ en «bouchant» les sphères $S(A)$.*

De façon précise, soit B^r une boule dont S soit le bord. Quand on voudra travailler simplicialement, on prendra pour B^r le cône sur l'espace simplicial S. On définit $\hat{I}_+$ comme déduit de I_+ par attachement d'une famille de copies $b(A)$ de B^r, famille indexée par l'ensemble des chambres de I_+. Les applications d'attachements sont les

$$\partial b(A) \xrightarrow{\sim} S \xleftarrow{q} S(A).$$

Les applications d'attachement sont simpliciales, de sorte que $\hat{I}_+$ apparaît encore comme la réalisation géométrique d'un schéma simplicial (de sommets ceux de I_+ et les «centres des boules»). L'espace $\hat{I}_+$ est muni d'une application (simpliciale) évidente

$$q\colon\ \hat{I}_+ \to B^r.$$

(2.9) **Proposition.** *L'espace $\hat{I}_+$ est contractile.*

L'espace I_+ est donc le bouquet des sphères $S(A)$.

Soient $(I_+)_n$ la réunion des chambres fermées $(\tilde{A}_0 . g)^-$ pour g de longueur $\leqq n$, et $(\hat{I}_+)_n$ la réunion de $(I_+)_n$ et de l'ensemble des boules $b(A)$ pour $\partial b(A) \subset (I_+)_n$.

On a $(\hat{I}_+)_0 = A_0^-$ (contractile), et

$$\hat{I}_+ = \varinjlim (\hat{I}_+)_n.$$

La proposition résulte du

(2.9.1) **Lemme.** *$(\hat{I}_+)_n$ est rétracte par déformation de $(\hat{I}_+)_{n+1}$.*

Nous devons construire une famille continue $(\varphi_t)_{0\leq t\leq 1}$ d'applications continues de $(\hat{I}_+)_{n+1}$ dans lui-même, avec $\varphi_0=\mathrm{Id}$, $\varphi_t|(\hat{I}_+)_n=\mathrm{Id}$ et $\varphi_1((\hat{I}_+)_{n+1})=(\hat{I}_+)_n$.

Soient $A=\tilde{A}_0.g$ une chambre de $(I_+)_{n+1}$ qui n'est pas dans $(I_+)_n$, et F une facette de A.

(2.9.2) **Lemme.** *Supposons qu'il existe une chambre $B=\tilde{A}_0.h$ dans $(I_+)_{n+1}$, distincte de A, dont F soit une facette. Il existe alors une chambre $B'=\tilde{A}_0.h'$ dans $(I_+)_n$, et un mur M de qB', contenant qF, tel que $A=B'.\Delta(M)$.*

Soit g_0 la galerie considérée en (2.6). On a

$$g=g_0\,\pi_F(g_1) \quad \text{et} \quad h=g_0\,\pi_F(h_1).$$

Les hypothèses impliquent que la longueur $\lg(g_1)\neq 0$ (sinon, puisque $A\neq B$, on aurait $\lg(h)>\lg(g)=n+1$). Pour un mur convenable M de qA, on a alors $g_1=h'\Delta(M)$, et on pose $B'=\tilde{A}_0 h'$.

Pour la chambre fermée A^-, $A^-\cap(I_+)_n$ est donc réunion d'un ensemble (non vide) de faces fermées, et, dans $(I_+)_{n+1}$, les points de $A^- -(A^-\cap(I_+)_n)$ n'appartiennent qu'à la seule chambre fermée A^-.

Distinguons deux cas

$$\textit{Cas 1.}\ A^-\cap(I_+)_n\neq\partial A^-.$$

Dans ce cas, il n'existe pas de sphère $S(B)$ avec

$$A\subset S(B)\subset(I_+)_{n+1}.$$

Nous prendrons pour $\varphi_t|A^-$ un effondrement de A^- sur $A^-\cap(I_+)_n$.

$$\textit{Cas 2.}\ A^-\cap(I_+)_n=\partial A^-.$$

Posons $A=\tilde{A}_0.g$. Pour tout mur M de qA, il résulte alors de (2.7.2) que g finit par $\Delta(M)$.

D'après ((1.19)(iii)), g finit donc par Δ: on a $A=B.\Delta$, avec B uniquement défini par A, d'après (1.19)(ii). Quand on passe de $(\hat{I}_+)_{n+1}$ à $(\hat{I}_+)_n$, A et l'intérieur de la boule $b(B)$ disparaissent. On prend pour $\varphi_t|b(B)$ un effondrement de $b(B)$ sur $S(B)-A$.

D'après ce qui a été vu au cas 1, toute boule qui disparaît est du type précédent. Ceci achève la construction de φ_t et prouve (2.7).

(2.10) *L'espace* I, muni de $q\colon I\to S$ se définit comme I_+, en remplaçant Gal_+ par Gal.

a) On pose $\mathscr{X}=\coprod_B \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(A_0,B)$.

b) On pose $Z=\coprod_{g\in\mathscr{X}}(\text{but de g})^-$.

c) Soit q' l'application évidente de Z sur S. L'espace I, muni de q, est un quotient de Z muni de q'. Pour $g\in\mathscr{X}$ de but B et C une chambre mitoyenne à B, on recolle (but de g)$^-$ et (but de $g(BC)$)$^-$ selon la face fermée commune de leurs images dans S. En d'autres termes, si deux chambres B et C ont une facette commune F, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(A_0, B)$ et que $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(A_0, C)$, alors, dans I, les facettes fermées $q'^{-1}(F)^-$ de (but de g)$^-$ et de (but de h)$^-$ sont identifiées si et seulement si

$$h g^{-1} \in \pi_F \, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(\pi_F^{-1}(B), \pi_F^{-1}(C)).$$

(2.11) On définit comme pour I_+ les *chambres*, *faces*, *facettes* ouvertes ou fermées de I. On définit $\tilde{A}_0$, et $\tilde{A}.h$ (pour $\tilde{A}$ une chambre et h dans Gal de source $q\tilde{A}$) comme en (2.3). L'analogue de (2.4)(a)$\Leftrightarrow$(b) est ici trivialement vrai. Comme en (2.5), on déduit alors de (1.31) que chaque facette de I est uniquement déterminée par l'ensemble de ses sommets, et I apparaît comme la réalisation géométrique d'un schéma simplicial qui admet une description de type (2.5). Pour toute chambre A de I, on définit comme en (2.7) une sphère $S(A)$; q induit un isomorphisme de $S(A)$ sur S. Comme en (2.8) on définit un immeuble $\hat{I}$, muni de $q: \hat{I} \to B^r$, en «bouchant» toutes les sphères $S(A)$.

(2.12) Outre q et sa décomposition en chambres, I est muni de la structure additionnelle suivante:
– Une «composition» $\tilde{B}.g$ est définie qui à une chambre $\check{B}$ de I d'image B dans S et à $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(B, C)$ associe une chambre de I d'image C dans S. La construction $g \mapsto \tilde{B}.g$ définit un isomorphisme de l'espace analogue à I obtenu en prenant B pour chambre fondamentale avec l'espace I (pour $A_0 = B$, on trouve des automorphismes de I). En particulier,

$$\tilde{B}.(g\,h) = (\tilde{B}.g).h.$$

(2.13) Pour toute chambre A de I au-dessus de A_0, on définit une application

$$i_A\colon I_+ \to I \qquad (\text{resp. } \hat{I}_+ \to \hat{I}),$$

compatible à la projection sur S (resp. B^r) en envoyant la chambre fermée $(A.g)^-$ de I_+ (resp. la boule $b(A.g)$ de $\hat{I}_+$) sur la chambre (resp. la boule) de même nom de I (resp. $\hat{I}$).

(2.14) **Proposition.** (i) *i_A identifie I_+ à un sous-espace fermé de I et $\hat{I}_+$ à un sous-espace fermé de $\hat{I}$.*

(ii) *On a*

$$I = \varinjlim_n i_{\tilde{A}_0.\Delta^{-2n}}(I_+) \quad et \quad \hat{I} = \varinjlim_n i_{\tilde{A}_0.\Delta^{-2n}}(\hat{I}_+).$$

Les assertions (i) ou (ii) pour $\hat{I}_+$ et $\hat{I}$ résultent des assertions (i) ou (ii) pour I_+ et I.

Prouvons (i) pour I_+ et I. Soient B et C deux chambres de S ayant une facette commune F. Soient $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A_0, B)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}_+}(A, C)$. Supposons que les facettes $q^{-1}F$ de $(A.g)^-$ et $(A.h)^-$ soient égales dans I.

On a alors

$$g^{-1}h=\pi_F(e) \quad \text{pour} \quad e\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(\pi_F^{-1}B, \pi_F^{-1}C).$$

D'après (1.26), on peut écrire $e=e_1 e_2^{-1}$ avec e_i dans Gal_+. D'après (1.29), on a alors $g\pi_F(e_1)=h\pi_F(e_2)$ dans Gal_+, et les facettes $q^{-1}F$ de $(A.g)^-$ et $(A.h)^-$ sont donc déjà égales dans I_+.

Pour prouver (ii), il suffit de remarquer que toute galerie g de source A_0 dans Gal peut s'écrire $g=\Delta^{-2n}g'$ avec g' dans Gal_+.

De (2.14) on tire que $\pi_i(\hat{I})=\varinjlim \pi_i(\hat{I}_+)$. Puisque I est un CW-complexe, on déduit de (2.9) le résultat suivant.

(2.15) **Théorème.** *L'espace $\hat{I}$ est contractile.*

L'espace I est donc le bouquet des sphères $S(A)$ pour A parcourant les chambres de I.

§ 3. Revêtements

(3.1) Soient $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V, $M_{\mathbb{C}}$ le complexifié de M pour $M\in\mathcal{M}$ et

$$Y=V_{\mathbb{C}}-\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M_{\mathbb{C}}.$$

Dans ce paragraphe, nous construisons par recollement un espace $\tilde{Y}$ au-dessus de Y. La donnée de recollement sera décrite à l'aide de I et de $\hat{I}$. Les facettes de S et les facettes de V autre que $\{0\}$ sont en bijection canonique, et nous aurons constamment à passer des unes aux autres. En général, nous noterons de même les facettes correspondantes; en cas de besoin la correspondance se notera $F\mapsto[F]$.

(3.2) **Lemme.** *Soient A, B et C trois chambres de I, avec $C\subset S(A)\cap S(B)$. Alors, q induit un isomorphisme de $S(A)\cap S(B)$ avec l'intersection de S et des demi-espaces fermés $D'_M(qC)$ contenant qC limités par un mur M qui sépare qA de qB.*

L'intersection des $D'_M(qC)$ est réunion de chambres fermées. Si C' est l'une d'elles, qA et qB sont du même côté de tout mur qui sépare qC de C'. On en déduit que les relèvements sur $S(A)$ ou $S(B)$ d'une galerie minimale de qC à C' coïncident, et $(C')^-\subset q(S(A)\cap S(B))$.

Réciproquement, si une facette F n'est pas dans l'intersection des $D'_M(qC)$, il existe un mur M tel que $F\not\subset M$ qui sépare qA de qB et F de qC. Supposons que par impossible $F\subset q(S(A)\cap S(B))$. Soient D une chambre de S dont F est facette et $(C_0, C_1 \dots C_{n+1})$ une galerie de qC à D. Soit M_i le mur qui sépare C_i de C_{i+1} et α_i (resp. β_i)$=\pm 1$ selon que C_{i+1} et A (resp. B) sont ou ne sont pas du même côté de M_i. Par hypothèse, F est facette de $C\Delta(M_0)^{\alpha_0}\dots\Delta(M_n)^{\alpha_n}$ et de $C.\Delta(M_0)^{\beta_0}\dots\Delta(M_n)^{\beta_n}$.

D'après (2.4) et (1.24), on a alors (puisque $M \not\supset F$)

$$\sum_{M_i=M} \alpha_i = \sum_{M_i=M} \beta_i,$$

ce qui est absurde: un membre vaut un, l'autre -1.

(3.3) **Lemme.** *Soit $\mathscr{R}$ et $\mathscr{I}$ les applications «partie réelle» et «partie imaginaire» de $V_{\mathbb{C}}$ dans V. Soit $v \in V_{\mathbb{C}}$, et F la facette de V telle que $\mathscr{R} v \in F$. Pour que $v \in Y$, il faut et suffit que* $\mathrm{pr}_F(\mathscr{I} v)$ *soit dans une chambre de* $(V_F, \mathscr{M}_F)$.

C'est clair.

Ce qui suit a pour fondement intuitif le fait qu'à toute «promenade» dans I (accomplie en suivant une galerie de la forme $\Delta(M_1)^{\varepsilon_1} \dots \Delta(M_k)^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = \pm 1$) correspond un chemin ch (une classe de chemin) dans Y. L'image par $\mathscr{R}$ de ch dans V passe de chambre en chambre, en traversant successivement les murs $M_1, \dots, M_k$ en des points m_i. Pour $\varepsilon_i = 1$ (resp. -1) le chemin passe par l'une des deux composantes R de $\mathscr{R}^{-1}(m_i) \cap Y$ (en bijection par $\mathscr{I}$ avec $V - M$): celle telle que $\mathscr{I} R$ contienne (resp. ne contienne pas) la chambre précédente.

(3.4) **Notations.** (i) Soit C une chambre de $(V, \mathscr{M})$. On note $Y(C)$ l'ouvert de Y formé des $x \in V_{\mathbb{C}}$ vérifiant la condition suivante:

– si F est la facette de V telle que $\mathscr{R} x \in F$, alors $\mathrm{pr}_F \mathscr{I} x \in \pi'_F(C)$.

(ii) Soient A et B deux chambres de I. Si $S(A) \cap S(B)$ contient une chambre C, notons provisoirement $Y'(A, B)$ l'intersection des demi-espaces ouverts $D'_M(q\,C)^0$, pour M comme en 3.2. On pose

$$Y(A, B) = Y(q\,A) \cap Y(q\,B) \cap \mathscr{R}^{-1}\, Y'(A, B) \subset V_{\mathbb{C}}.$$

Si $S(A) \cap S(B)$ ne contient pas de chambre, on pose $Y(A, B) = \emptyset$.

(iii) Pour F une facette de V, *l'étoile* $Et(F)$ est la réunion des facettes (ouvertes) G de $(V, \mathscr{M})$ telles que $F \subset G^-$.

(iv) Pour F une facette de V et C une chambre de $(V_F, \mathscr{M}_F)$, on pose

$$V(F, C) = \{v \in V_{\mathbb{C}} | \mathscr{R} v \in Et(F) \ \text{ et } \ \mathrm{pr}_F \mathscr{I} v \in C\}.$$

(3.5) **Lemme.** *Soit G une facette de V. Les $V(F, C)$ pour F une facette telle que $G \subset F^-$ et C une chambre de V_F forment un recouvrement ouvert de $Y \cap \mathscr{R}^{-1}(Et\,G)$. En particulier (faire $G = \{0\}$), les $V(F, C)$ recouvrent Y.*

Si $x \in Y \cap \mathscr{R}^{-1}(Et\,G)$ et que $\mathscr{R} x \in F$, x est dans l'un des $V(F, C)$ (3.3).

(3.6) Soit Y' la somme disjointe, indexée par les boules $b(A)$ de $\hat{I}$,

$$Y' = \coprod_{b(A)} Y(q\,A).$$

On note $Y'(b(A))$ la composante d'indice $b(A)$. On dispose d'une projection évidente p': $Y' \to Y$. Soit R la relation suivante sur Y':

Pour $x \in Y'(b(A))$ et $y \in Y'(b(B))$, $R(x, y)$ signifie que $p'(x) = p'(y)$ et que $p'(x), p'(y) \in Y(A, B)$.

C'est une relation d'équivalence car (cf. (3.2)) $Y(A, B) \cap Y(B, C) \subset Y(A, C)$. On a

(3.6.1) Le saturé pour R d'un ouvert de Y' est encore ouvert.

On pose $\tilde{Y} = Y'/R$. On dispose d'une projection évidente

$$p: \tilde{Y} \to Y.$$

Pour toute boule $b(A)$ de $\hat{I}$, on note $\tilde{Y}(b(A))$ l'image de $Y'(b(A))$ dans $\tilde{Y}$.

Le théorème suivant implique celui par lequel débute l'introduction.

(3.7) **Théorème.** *$\tilde{Y}$ est un revêtement contractile de Y.*

A. *$\tilde{Y}$ est un revêtement de Y.*

Nous montrerons, pour $V(F, C)$ comme en (3.4)(iv), que $p^{-1} V(F, C)$ est somme de copies de $V(F, C)$.

a) Soit $b(A)$ une boule de $\hat{I}$. Pour B une chambre telle que $F \subset B^-$, soit la chambre de I

$$C'_B = A.u(A, B)\, u(\pi_F(C), B)^{-1}.$$

Par construction, $B \subset q(S(A) \cap S(C'_B))$ et en particulier, si $F \neq \{0\}$

$$[F] \subset q(S(A) \cap S(C'_B)). \tag{3.7.1}$$

Prouvons que

$$\tilde{Y}(b(A)) \cap p^{-1} V(F, C) \subset \bigcup_{F \subset B^-} \tilde{Y}(b(C'_B)). \tag{3.7.2}$$

Soit x dans le membre de gauche. Soit G la facette de V à laquelle $\mathscr{R} p x$ appartient. On a $F \subset G^-$. Prenons pour B une chambre dont G est facette. Par hypothèse, on a

$$\mathrm{pr}_G \mathscr{I} p x \in \pi'_G(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_F \mathscr{I} p x \in C.$$

On a donc $\pi'_G(A) = \pi'_G(\pi_F C)$. On déduit alors de (3.2) que toute chambre dont G est facette est dans $q(S(A) \cap S(C'_B))$, que px est dans $Y(A, C'_B)$ et que donc $x \in \tilde{Y}(b(C'_B))$.

b) Posons $Y'(F, C) = \bigcup_{q(C')=C} (Y'(b(C')) \cap p'^{-1}(V(F, C)))$. D'après a), on a ensemblistement

$$p^{-1} V(F, C) = Y'(F, C)/R.$$

C'est même un isomorphisme d'espaces topologiques, d'après (3.6.1), car $Y'(F, C)$ est ouvert dans Y'. D'après (3.2), la relation d'équivalence induite par R sur $\bigcup_{q(C_r)=C} Y'(b(C'))$ est triviale. On conclut en remarquant que, pour tout C' au-dessus de C,

$$V(F, C) \subset Y(b(C')).$$

B. *Un recouvrement ouvert de* $\tilde{Y}$.

(3.7.3) **Notations.** (i) Pour F une facette de I,

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{F \subset S(C)} (\tilde{Y}(b(C)) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(qF)).$$

(ii) Pour $o(A)$ centre d'une boule $b(A)$ de $\hat{I}$,

$$\tilde{Y}(o(A)) = \tilde{Y}(b(A)) \cap p^{-1} V(\{0\}, A).$$

(3.7.4) **Lemme.** (i) *Les* $\tilde{Y}(s)$ *pour* s *sommet de* $\hat{I}$ *forment un recouvrement de* $\tilde{Y}$ *dont* $\hat{I}$ *est le nerf* (*i.e., une famille de* $\tilde{Y}(s)$ *a une intersection non vide si et seulement si les* s *correspondant sont les sommets d'une facette de* $\hat{I}$).

(ii) *Si une facette* F *de* I *a pour sommets* $s_0, \ldots, s_p$, *alors*

$$\tilde{Y}(F) = \tilde{Y}(s_0) \cap \cdots \cap \tilde{Y}(s_p).$$

(iii) *Si* $F \subset S(A)$, *alors* $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$ *est contractile;* $\tilde{Y}(o(A))$ *est contractile.*

(3.7.4.1) Soient F_i $(i=1,2)$ deux facettes de I et C_i $(i=1,2)$ deux chambres de I telles que $F_i \subset S(C_i)$ et que

$$(\tilde{Y}(b(C_1)) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(qF_1)) \cap (\tilde{Y}(b(C_2)) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(qF_2)) \neq \emptyset.$$

Alors, F_1 et F_2 tendent une facette F de I (unique d'après (2.5)–(2.11)), $F \subset S(C_i)$ et l'intersection précédente coïncide avec

$$\tilde{Y}(b(C_1)) \cap \tilde{Y}(b(C_2)) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(F).$$

Par hypothèse

$$Y(C_1, C_2) \cap \mathscr{R}^{-1} Et(qF_1) \cap \mathscr{R}^{-1} Et(qF_2) \neq \emptyset;$$

F_1 et F_2 sont dans $S(C_1) \cap S(C_2)$ et y tendent une facette F. De plus, $Et(qF_1) \cap Et(qF_2) = Et(qF)$, d'où la formule annoncée.

De (3.7.4.1), on déduit que $\tilde{Y}(F_1) \cap \tilde{Y}(F_2)$ est vide si F_1 et F_2 ne tendent pas de facette commune F, et vaut

$$\bigcap_{F \subset S(C)} \tilde{Y}(bC) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(F) = \tilde{Y}(F)$$

sinon (faire $C_1 = C_2$). Ceci prouve (ii) et une partie de (i).

(3.7.4.2) Si $o(A) \neq o(B)$, alors $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(o(B)) = \emptyset$.

Si $qA = qB$, on a $\tilde{Y}(b(A)) \cap \tilde{Y}(b(B)) = \emptyset$. Si $qA \neq qB$, on a

$$p\,\tilde{Y}(o(A)) \cap p\,\tilde{Y}(o(B)) = \emptyset.$$

(3.7.4.3) Si $F \not\subset S(A)$, alors $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F) = \emptyset$.

Si $F \subset S(B)$, on a $F \not\subset S(A) \cap S(B)$ et

$$Et(qF) \cap Y(A, B) = Et(qF) \cap p(\tilde{Y}(b(A)) \cap \tilde{Y}(b(B))) = \emptyset.$$

Il est clair que:

(3.7.4.4) Si $F \subset S(A)$, alors p induit un isomorphisme de $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$ avec $Y(qA) \cap \mathscr{R}^{-1} Et(qF)$.

Le lemme (3.7.4) résulte alors de:

(3.7.5) **Lemme.** *Pour toute facette F de V, et toute chambre A,*

$$Y(A) \cap \mathscr{R}^{-1} Et(F)$$

est contractile.

Soit v_0 un vecteur tel que $\mathscr{R} v_0 \in F$ et que $\mathscr{I} v_0 \in A$. Alors pour $0 \leqq t \leqq 1$, φ_t: $v \mapsto v_0 + t(v - v_0)$ est une application de $Y(A)$ et de $\mathscr{R}^{-1} Et(F)$ dans eux-mêmes. On a $\varphi_0(Y(A) \cap \mathscr{R}^{-1} Et(F)) = \{v_0\}$ et $\varphi_1 = \mathrm{Id}$.

C. *Etude de* $\tilde{Y}(F)$ (F facette de I).

D'après (3.5), (3.7.1) et (3.7.2), on a

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{F \subset B^-} \tilde{Y}(b(B)) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(F). \tag{3.7.6}$$

Choisissons une «chambre fondamentale» $A_{F,0}$ dans $(V_F, \mathscr{M}_F)$ et notons I_F l'immeuble correspondant. Choisissons aussi $\tilde{A}^I_{F,0}$ dans I au-dessus de $\pi_F(A_{F,0})$. Pour chaque chambre $B = \tilde{A}_0 \cdot g_F$ de I_F, nous noterons $\pi_F(B)$ la chambre $\tilde{A}^I_{F,0} \cdot \pi_F(g_F)$ de I. D'après (2.10), (3.7.6) peut se récrire

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{B \text{ dans } I_F} \tilde{Y}(b(\pi_F(B))) \cap p^{-1} \mathscr{R}^{-1} Et(F).$$

Soient

$$Y_F = (V_F)_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathscr{M}_F} M_{\mathbb{C}}$$

et $\tilde{Y}_F$ le revêtement de Y_F défini à l'aide de I_F.

Quels que soient B et C dans I_F, il résulte de (1.30) que les chambres de S dans $Y(\pi_F(B), \pi_F(C)) \cap Et(F)$ sont exactement les $\pi_F(D)$, pour D dans $Y_F(B, C)$.

Les recollements qui définissent $\tilde{Y}(F)$ et $\tilde{Y}_F$ sont donc compatibles, et il existe un unique diagramme cartésien

$$(3.7.7)\qquad \begin{array}{ccc} \tilde{Y}_F & \longleftarrow & \tilde{Y}(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_F & \xleftarrow{\mathrm{pr}_F} & \mathscr{R}^{-1}Et(F) \subset Y \end{array}$$

qui envoie $\tilde{Y}(b(\pi_F(B))) \cap p^{-1}\mathscr{R}^{-1}Et(F)$ dans $\tilde{Y}_F(b(B))$ pour B une chambre de I_F. La première flèche verticale donc aussi la seconde sont des revêtements.

On vérifie facilement que l'application pr_F de (3.7.7) est une équivalence d'homotopie, d'où

(3.7.8) **Lemme.** *$\tilde{Y}_F$ et $\tilde{Y}(F)$ ont même type d'homotopie.*

D. *Fin de la démonstration.*

Nous prouverons (3.7) par récurrence sur $r = \dim V$. Soit $\mathscr{U}$ le recouvrement ouvert de $\tilde{Y}$ par les $\tilde{Y}(s)$, pour s sommet de $\hat{I}$. D'après (3.7.4)(i), $\hat{I}$ est le nerf de $\mathscr{U}$. D'après (3.7.4), (3.7.8) et l'hypothèse de récurrence, les intersections non vides d'ouverts appartenant à $\mathscr{U}$ sont contractiles. Ceci implique [6] que $\tilde{Y}$ et $\hat{I} = \mathrm{Nerf}(\mathscr{U})$ ont même type d'homotopie. On conclut par (2.15).

§ 4. Groupes de tresses

(4.1) Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et $W \subset GL(V)$ un groupe fini engendré par des réflexions. On suppose que $V^W = \{0\}$. Soit Φ une quelconque structure euclidienne invariante par W et soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des hyperplans M tels que la réflexion orthogonale par rapport à $\mathscr{M}$ soit dans W. On sait que

a) $(V, \mathscr{M})$ vérifie 1.6 ([1] V 3.9 prop. 7);

b) W permute les chambres de $(V, \mathscr{M})$ de façon strictement simplement transitive ([1] V 3.2 Th. 1);

c) si $x \in V$ appartient à la chambre fermée $\bar{A}$, son stabilisateur est engendré par les réflexions par rapport aux murs de A contenant x ([1] V 3.3 prop. 1);

d) (résulte de c)) le groupe W agit librement sur $Y_W = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathscr{M}} M_{\mathbb{C}}$.

D'après b), si C_0 et C_1 sont deux chambres, il existe un unique $w \in W$ tel que $w C_0 = C_1$; ces w induisent un système transitif de bijections entre les murs des différentes chambres. Passant au quotient, on obtient un ensemble D à $\dim(V)$ éléments et, pour chaque chambre C, une bijection φ_C de D avec l'ensemble des murs de C. On a

(4.1.1) $$\varphi_{wC}(i) = w\,\varphi_C(i) \qquad (w \in W).$$

Pour la définition de la *matrice de Coxeter* $(m_{ij})_{i,j \in D}$ et celle du *graphe de Coxeter*, on renvoie à [1] V 3.4.

(4.2) Choisissons une chambre A_0 de $(V, \mathscr{M})$. Pour $i \in D$, soit w_i la réflexion par rapport au mur $\varphi_{A_0}(i)$. [1] V 3.2 Th. 1 dit que W est engendré par les w_i, ces générateurs étant soumis aux seules relations

$$(w_i w_j)^{m_{ij}} = e.$$

(4.3) Soit $X_W = Y_W/W$: d'après (4.1)d), Y_W est un revêtement de X_W, de groupe W. Soit $y_0 \in A_0$ d'image $x_0 \in X_W$. Pour chaque $i \in D$, soit ℓ_i' la classe d'homotopie de chemins dans Y_W, de y_0 à $w_i(y_0)$, qui, pour $y \in A_0$, contient la ligne brisée de sommets successifs $y_0, y_0 + i y_0, w_i(y_0) + i y_0, w_i(y_0)$. L'image ℓ_i de ℓ_i' dans X_W est un lacet de point base x_0.

(4.4) **Théorème.** (i) *Le groupe fondamental $\pi_1(X_W, x_0)$ est engendré par les ℓ_i; ceux-ci sont soumis aux seules relations*

(4.4.1) $$\mathrm{prod}(m_{ij}, \ell_i, \ell_j) = \mathrm{prod}(m_{ji}; \ell_j, \ell_i).$$

(ii) *Le revêtement universel de X_W est contractile: X_W est un $K(\pi; 1)$.*

L'assertion (i) est prouvée dans Brieskorn [3]. Une autre démonstration sera esquisée en (4.18) ci-dessous. Comme expliqué dans l'introduction, (ii) résulte de (3.7) et de (4.1).

(4.5) Dans le §1, nous nous sommes largement inspiré de l'étude faite par Garside [4] du groupe des tresses d'Artin; nous pouvons maintenant déduire des résultats obtenus des informations sur tous les groupes du type $\pi_1(X_W, x_0)$ (Garside avait déjà considéré certains d'entre eux). La traduction repose sur (4.6), (4.7) ci-dessous.

(4.6) Soient $G = (C_0, \ldots, C_n)$ une galerie et M_i le mur qui sépare C_{i-1} de C_i $(1 \leqq i \leqq n)$. On a $\varphi_{C_{i-1}}^{-1}(M_i) = \varphi_{C_i}^{-1}(M_i)$. On note $\ell(G)$ l'élément $\varphi_{C_1}^{-1}(M_1) \ldots \varphi_{C_n}^{-1}(M_n)$ de $L^+(D)$ (0.1).

L'application ℓ induit une bijection de l'ensemble des galeries G de source donnée avec $L^+(D)$. On a

(4.6.1) $\ell(w(G)) = \ell(G)$ (pour $w \in W$);

(4.6.2) $\ell(G_0 G_1) = \ell(G_0)\,\ell(G_1)$ (pour G_0 et G_1 composables).

Soit w: $L(D) \to W$ l'homomorphisme qui prolonge l'application $i \mapsto w_i$ de D dans W.

(4.7) **Proposition.** *Pour toute galerie G de source A_0, on a*

$$A_0.G = w(\ell(G))(A_0).$$

C'est un avatar de l'identité

$$\begin{aligned}&[(w_1 \dots w_{n-1})\, w_n (w_1 \dots w_{n-1})^{-1}]\\ &\cdot [(w_1 \dots w_{n-2})\, w_{n-1} (w_1 \dots w_{n-2})^{-1}] \dots [w_1] = w_1 \dots w_n.\end{aligned}$$

(4.8) De cette proposition on déduit que, pour $w \in W$, l'entier $d(A_0, w(A_0))$ est la plus petite longueur des mots en les w_i qui valent w; plus précisément, ℓ induit une bijection de l'ensemble des galeries minimales de A_0 à $w A_0$ avec l'ensemble des mots $m \in L(D)$, de longueur minimale, tels que $w = w(m)$.

(4.9) **Définition.** (i) *Le monoïde des tresses G^+ de type D est le monoïde à unité engendré par D, les générateurs $i \in D$ étant soumis aux seules relations*

(4.9.1) $$\operatorname{prod}(m_{ij}; i, j) = \operatorname{prod}(m_{ij}; j, i).$$

(ii) *Le groupe des tresses G (ou groupe des tresses généralisé) de type D est le groupe engendré par D, les générateurs étant soumis à* (4.9.1).

(4.10) On notera que W admet encore la présentation

(4.10.1) $$\operatorname{prod}(m_{ij}; w_i, w_j) = \operatorname{prod}(m_{ij}; w_j, w_i),$$

(4.10.2) $$w_i^2 = e.$$

de sorte que $i \mapsto w_i$ se prolonge en un homomorphisme de G dans W.

(4.11) On vérifie sur les définitions que deux galeries G_0 et G_1 de même source sont équivalentes si et seulement $\ell(G_0)$ et $\ell(G_1)$ ont même image dans G^+. Compte tenu de (4.9), (1.12) admet donc la traduction suivante ([1] IV 1.6 prop. 5).

(4.12) **Rappel.** *Soit $w \in W$. L'image dans G^+ des mots $m \in L(D)$, de longueur minimale parmi ceux tels que $w = w(m)$, ne dépend que de w.*

Cette image se notera $r(w)$; r est une section de $w\colon G^+ \to W$. D'après (4.7), on a $r(w) = \ell(u(A_0, w A_0))$.

De même, [1] IV 1.4 lemme 2 correspond à (1.11).

(4.13) La catégorie «quotient» de $\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M})$ par W est définie ainsi:

a) L'ensemble de ses objects est réduit à un élément: c'est

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Gal}_+(V, \mathcal{M}))/W.$$

b) Le monoïde de ses flèches est $\mathrm{Fl}(\mathrm{Gal}_+(V,\mathcal{M}))/W$, et le passage au quotient

$$\mathrm{Gal}_+(V,\mathcal{M}) \to \mathrm{Gal}_+(V,\mathcal{M})/W$$

est un foncteur.

Cette catégorie, n'ayant qu'un objet, s'identifie au monoïde de ses flèches. D'après (4.6.1), (4.6.2) et (4.11), ℓ identifie ce monoïde à G^+.

On définit de même $\mathrm{Gal}(V,\mathcal{M})/W$. Cette catégorie n'a qu'un objet et, d'après sa propriété universelle, ℓ se prolonge en un isomorphisme du groupe de ses flèches avec G:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}_+(V,\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}_+(V,\mathcal{M})/W \arrow[r, "\sim", "\ell"'] \arrow[d] & G^+ \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(V,\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(V,\mathcal{M})/W \arrow[r, "\sim", "\ell"'] & G
\end{tikzcd}$$

(4.14) **Théorème.** (i) *Dans G^+, les translations à gauche et à droite sont injectives.*

(ii) *G^+ vérifie la condition de Öre à gauche et à droite. Il résulte donc de* (i) *que G^+ se plonge dans G.*

(iii) *Pour J une partie de D, soit G_J^+ (resp. G_J) le sous-monoïde (resp. sous-groupe) de G^+ (resp. G) engendré par les $i \in J$. Alors, l'application évidente identifie G_J^+ (resp. G_J) au monoïde (resp. groupe) des tresses de type J.*

(iv) *On a $G_J^+ = G_J \cap G^+$.*

(v) *Si J et K sont deux parties de D, on a $G_J \cap G_K = G_{J \cap K}$.*

(vi) *Soit $n(i)$ le nombre d'éléments de G^+ de longueur i et posons $f = \sum n(i)\, t^i$. Pour $J \subset D$, soit $m(J)$ le nombre des murs qui passent par l'intersection des murs d'une (quelconque) chambre A, d'indice dans J (= nombre de réflexions dans le groupe de Weyl W_J). On a*

$$f = \Big(\sum_{J \subset D} (-1)^{|J|}\, t^{m(J)}\Big)^{-1}.$$

Ces assertions traduisent respectivement: (i): (1.1)(i) et (ii); (ii): (1.26)(ii) et son transformé par passage aux galeries opposées (cf. aussi (4.16) ci-dessous); (iii): (1.30); (iv): (1.32); (v): (1.31); (vi): (1.21) (les f_A de loc. cit. sont tous égaux à f).

Soient $x, y \in G^+$. On dit que x *commence* par y s'il existe z dans G^+ avec $x = yz$. La proposition (1.19)(iii) se traduit ainsi

(4.15) **Lemme.** *Soit $x \in G^+$. Il existe une chambre C telle que, pour tout $w \in W$, x commence par $r(w)$ si et seulement si $w A_0 \in D(A_0, C)$.*

(4.16) Soient J une partie de D et P l'intersection des murs $\varphi_{A_0}(i)$ $(i \in J)$. On note $\Delta(J)$ l'élément $\ell(u(A_0, A_0.\Delta(P)))$ de G^+; on pose $\Delta = \Delta(D)$. Soit $i \mapsto \bar{i} = \varphi_{-C}^{-1} \varphi_C(i)$ *l'involution d'opposition* de D. On note encore $w \mapsto \bar{w}$ les automorphismes de $L^+(D)$, G^+ et G qui envoient i sur $\bar{i}$ (on a $m_{ij} = m_{\bar{i}\bar{j}}$). Traduisant (1.26) à l'aide de (4.4), on trouve que pour g dans G^+ ou G, on a

(4.16.1) $$g\Delta = \Delta \bar{g}.$$

En particulier, Δ^2 est central.

Quel que soit $i \in D$, Δ «commence» par i: on a $\Delta = i x$, dans G^+. Dès lors

(4.17) **Proposition.** *G se déduit de G^+ en rendant inversible l'élément central Δ^2.*

(4.18) La description (2.11), (2.5)–(2.7) de l'immeuble I attaché à $(V, \mathcal{M})$ peut se traduire ainsi.

a) L'ensemble des sommets de I est

$$I^0 = \coprod_{i \in D} G/G_{D-\{i\}}.$$

b) Pour qu'un ensemble de sommets tende un simplexe, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans l'ensemble des classes $gG_{D-\{i\}}$, pour un $g \in G$.

c) La sphère fondamentale $S_0 = S(A_0)$ est réunion du simplexe fondamental, tendu par les classes latérales de e dans les $G/G_{D-\{i\}}$, et de ses transformés par les $r(w)$ $(w \in W)$.

La description précédente rend évidente une action à gauche de G sur I. Elle respecte l'ensemble des sphères $S(A)$ et la correspondance $A \mapsto S(A)$.

Par transport de structure, G agit sur le revêtement $\tilde{Y}_W$ de Y_W (3.6), on a un morphisme équivariant

$$(G - \tilde{Y}_W) \to (W - Y_W).$$

On en tire que G est le groupe fondamental de $X_W = Y_W/W$, et (4.4)(i).

(4.19) Pour être complet, montrons que le problème des mots, le problème de conjugaison et la question de calculer le centre de G peuvent se résoudre comme dans [4]. Si le graphe de Coxeter D de W est somme disjointe de graphes D_α, le groupe de tresses de type D est produit des groupes de tresses des types D_α. Le cas essentiel est donc celui d'un graphe D connexe.

(4.20) *Le problème des mots:* il y a un procédé de décision pour savoir si deux éléments m et n de $L(D)$ ont même image dans G.

a) Savoir si m et n dans $L^+(D)$ ont même image dans G^+ est décidable, car les relations imposées ne changent pas la longueur des mots, et qu'il n'y a qu'un nombre fini de mots de longueur donnée. On peut aussi utiliser (1.22).

b) Quel que soit m_i $(i=1,2)$ dans le groupe libre $L(D)$ engendré par D, on peut calculer $m'_i \in L^+(D)$ et $k \geqq 0$ tels que m_i et $m'_i \Delta^{-k}$ aient même image dans G (cf. (4.17)), m_1 et m_2 ont alors même image dans G si et seulement si m'_1 et m'_2 ont même image dans G^+.

(4.21) **Théorème.** *Si le graphe de Coxeter D est connexe (non vide) et que l'involution d'opposition est triviale (resp. non triviale), le centre de G est monogène infini, engendré par Δ (resp. Δ^2).*

Considérons la propriété suivante de $x \in G^+$.

(*) Quel que soit $i \in D$, il existe $i' \in D$ tel que $i\,x = x\,i'$.

Il suffit de prouver que, si x vérifie (*) et que $x \neq e$, alors $x = \Delta\,y$ avec $y \in G^+$. Par récurrence sur la longueur de x, on en déduira que si x vérifie (*), x est de la forme Δ^k. En particulier, le centre de G^+ est contenu dans l'ensemble des Δ^k $(k \geqq 0)$; d'après (4.14)(i) et (4.17), celui de G est contenu dans l'ensemble des Δ^k $(k \in \mathbb{Z})$ et l'assertion résulte de (4.16.1).

Soit donc $x \in G^+$ qui vérifie (*). Soient C comme en (4.15) et w l'image dans W de $\ell u(A_0, C)$. On peut écrire $x = r(w)\,y$, avec $y \in G^+$. Soit $i \in D$. D'après (*), $i\,x = r(w)\,y\,i'$ commence par $r(w)$; de (1.23), on tire alors que $i\,r(w)$ commence par $r(w)$: $i\,r(w) = r(w)\,i''$. En particulier, pour tout i, il existe i'' avec $i\,w = w\,i''$; ceci signifie que tout mur de A_0 est aussi un mur de $w\,A_0$. Parmi les $2^{|D|}$ cônes simpliciaux ouverts limités par les murs de A_0, seuls A_0 et $-A_0$ sont de chambres: ce sont les seuls dont les angles entre les faces soient tous $\leqq \pi/2$ (on utilise ici la connexité de D). Si $x \neq e$, on a $w \neq e$ et donc $w\,A_0 = -A_0$. Puisqu'alors $\Delta = r(w)$, ceci achève la démonstration.

(4.22) *Le groupe dérivé.* Soit D' le graphe ayant D pour ensemble de sommets, deux sommets étant reliés par un trait si et seulement si m_{ij} est impair. Soit D_0 l'ensemble des composantes connexes de D'. On définit un épimorphisme

$$\mathrm{Lg}\colon\ G \to \mathbb{Z}^{D_0}$$

en envoyant i sur le vecteur de base d'indice la composante connexe de i dans D'. On vérifie aussitôt que Lg identifie $\mathbb{Z}^{D_0}$ au plus grand quotient abélien de G.

(4.23) *Problème de conjugaison.* Il s'agit de donner un procédé de décision pour savoir si deux éléments x et y de G (donnés explicitement comme images de mots dans $L(D)$) sont conjugués. Puisque Δ^2 est central, $\Delta^{-2k}\,a$ et $\Delta^{-2k}\,b$ sont conjugués si et seulement si a et b le sont. D'après

(4.17), il suffit donc de traiter le cas où $x, y \in G^+$. De même, si x et y sont conjugués, il existe a *dans* G^+ tel que $xa = ay$. Si x et y sont conjugués, $\mathrm{Lg}(x) = \mathrm{Lg}(y)$. Il n'y a qu'un nombre fini de $x \in G^+$ de «longueur» $\mathrm{Lg}(x)$ donnée et W est fini. L'existence d'un procédé de décision résulte alors de (4.20) et du lemme suivant.

(4.24) *Lemme. Soient x, y dans G^+. Si x et y sont conjugués, il existe une suite $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ d'éléments de G^+ et une suite d'éléments w_i de W telle que*

$$x_{i+1}\, r(w_i) = r(w_i)\, x_i.$$

Soit $a \in G^+$ tel que $xa = ay$. Posons $a = r(w_0) \ldots r(w_{n-1})$, w_i étant l'élément de W de longueur maximum tel que $r(w_i) \ldots r(w_{n-1})$ s'écrive sous la forme $r(w_i)\, b_i$ avec $b_i \in G^+$ (4.15). Soit $a_i = r(w_0) \ldots r(w_i)$. Nous prouverons que $x_i = a_i^{-1} x a_i$ est dans G^+, de sorte que les x_i et w_i répondent au problème.

Il résulte de (1.23) que, quel que soit $w \in W$, si xa commence par $r(w)$, alors $x\, r(w_0)$ commence aussi par $r(w)$. En particulier, puisque $xa = ay = r(w_0)\, b_0\, y$ commence par $r(w_0)$, $x\, r(w_0) = r(w_0)\, x_1$ avec $x_1 \in G^+$. On achève la démonstration en procédant par récurrence sur n.

Remarque. Soit σ un automorphisme du graphe de Coxeter D, et notons encore σ l'automorphisme correspondant de G. On a $\Delta^\sigma = \Delta$. Les arguments précédents s'appliquent encore à la question de savoir, pour $x, y \in G$, s'il existe a dans G tel que $xa = a^\sigma y$. On se ramène à prendre x, y et a dans G^+. Dans ce cas et, avec les notations précédentes, si $xa = a^\sigma y$, les $(a_i^{-1})^\sigma x a_i$ sont dans G^+. Prenant pour σ l'involution $i \mapsto \bar{i}$, on trouve un critère analogue à (4.24) pour la conjugaison de Δx et Δy $(x, y \in G^+)$.

Bibliographie

Le lecteur trouvera une bibliographie plus complète sur les groupes de tresses dans [2].

1. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5, 6. Paris: Hermann 1968.
2. Brieskorn, E.: Sur les groupes de tresses. Sém. Bourbaki 401, nov. 71.
3. Brieskorn, E.: Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. Inventiones math. **12**, 57–61 (1971).
4. Garside, F. A.: The braid groups and other groups. Quat. J. Math. Oxford, 2e ser. **20**, 235–254 (1969).
5. Tits, J.: Normalisateurs de Tores. I Groupes de Coxeter étendus. J. of algebra **4** (1), 96–116 (1966).
6. Weil, A.: Sur les théorèmes de De Rham. Comm. Math. Helv. **26** (1952).

Pierre Deligne
Institut des Hautes Études Scientifiques
35 Route de Chartres
F-91440 Bures-sur-Yvette
France

(Reçu le 24 avril 1972)