LES CONSTANTES DES EQUATIONS FONCTIONNELLES DES FONCTIONS L

Par P. Deligne

International Summer School on Modular Functions, Antwerp 1972

Contents

INTRODUCTION

Les résultats essentiels de cet article sont les suivants.

(A) On donne une démonstration simple du théorème de Langlands [9] (déjà prouvé au signe près par Dwork [6]) qui permet d'écrire la constante des équations fonctionnelles des fonctions L d'Artin (ou de Weil [19]) comme produit de constantes locales.

Le théorème à démontrer est local, et la démonstration de Langlands avait l'élégance d'être purement locale. Pour l'essentiel, il s'agit de démontrer une identité (multiplicative) entre sommes de Gauss un peu généralisées chaque fois qu'on a une relation $\mathbb{Z}$-linéaire entre caractères de groupes de Galois locaux induits par des caractères de représentations de dimension un de sous-groupes. Langlands construisait un ensemble générateur de telles relations, et ramenait les identités à démontrer à des identités entre sommes de Gauss qu'il démontrait en s'appuyant sur le théorème de Stickelberger.

La démonstration présentée ici est très proche de la démonstration [5] de l'identité de Hasse-Davenport (cf. aussi Weil [18]). Elle utilise un argument global (4.12), et le fait que les constantes locales à définir sont de nature essentiellement triviale à l'infini, dans le cas non ramifié, et dans certains cas très ramifiés (4.14).

(B) Soient K un corps de fonctions et ρ : Gal $(\overline{K}/K) \to GL(n, \mathbb{Q}_\ell)$ une représentation ℓ-adique du groupe de Galois de K, presque partout non ramifiée. Grothendieck a montré que le produit eulérien étendu aux places de K (avec p^{-s} remplacé par une indéterminée t)

$$Z(\rho,t) = \prod_v \det(1-F_v t^{\deg(v)}, (\mathbb{Q}_\ell^n)^{\rho(I_v)})^{-1} \in \mathbb{Q}_\ell[[t]]$$

est une fraction rationnelle, et qu'une équation fonctionnelle relie $Z(\rho,t)$ à $Z(\check{\rho},t)$:

$$Z(\check{\rho},pt^{-1}) = \varepsilon \,.\, Z(\rho,t)$$

(la <u>constante</u> ε est un monôme a t^b). Cette théorie est résumée au §10. Le résultat (A) suggère une formule pour exprimer la constante ε comme produit de constantes locales. Nous montrons que cette formule est vraie lorsque ρ appartient à un système compatible infini de représentations ℓ-adiques (9.3 et 9.9) . D'après Weil [16] et Jacquet-Langlands [8] , cette formule, appliquée au système compatible de représentations ℓ-adiques défini par une courbe elliptique sur K , permet d'associer une forme modulaire pour GL(2,K) à toute courbe elliptique sur K .

Il serait très intéressant de savoir si la formule obtenue reste valable pour une quelconque représentation ℓ-adique.

Voici le contenu des divers §§, et leur interdépendance.

Le début du § 1 rassemble quelques résultats sur les représentations induites des groupes finis qui nous seront utiles.

La fin du § (1.11-fin) ne sert pas dans le reste de l'article. Pour G un groupe résoluble, on y décrit un ensemble R de relations linéaires (sur $\mathbb{Z}$) entre les caractères de G induits par des caractères de dimension un de sous-groupes, et on montre que toute telle relation est combinaison linéaire d'éléments de R. Le résultat, et sa démonstration, sont contenus implicitement dans [9] .

Les §§2 et 3 servent essentiellement à fixer les notations. Au §2, on rappelle la structure du groupe de Galois d'un corps local [10] , on définit les "groupes de Weil" (variante des groupes de Galois) et on donne quelques énoncés de la théorie du corps de classe. Le lecteur prendra garde que, dans tout cet article, l'isomorphisme de la théorie du corps de classe local transforme uniformisante en <u>inverse</u> de la substitution de Frobenius (la raison est donnée en 3.6). Le §3 est un rappel de la thèse de Tate, et de Artin [1] .

Le §4 contient la démonstration du résultat annoncé en (A) ci-dessus ; le formulaire du §5 donne une liste de propriétés fondamentales des constantes locales construites au §4, et quelques identités entre sommes de Gauss qui en résultent.

Les §§6,7 et 8 (qui ne dépend que du §2) sont préliminaires à la démonstration de (B), donnée au §9. Dans les énoncés des §§3 et 4 , nous avions été très attentifs à n'utiliser que des formules "rationnelles", ne contenant ni passage à la limite ni racine carrée (fût-ce d'un entier positif) Nous en récoltons le fruit aux §§6 et 7. Au §6, pour K un corps local non archimédien et V une représentation modulaire de $W(\overline{K}/K)$ sur un corps Λ de caractéristique $\ell \neq p$, nous définissons (par transport de structure pour $\ell = 0$ et par réduction mod ℓ pour $\ell \neq 0$) une constante locale $\epsilon(V, \Psi, dx) \in \Lambda^*$.

Au §7, pour K global de caractéristique p et V une représentation modulaire de $W(\overline{K}/K)$, nous prouvons par réduction mod ℓ une équation fonctionnelle pour la fonction $L \in \Lambda(t)$ correspondante.

Au §8, nous donnons des classes d'isomorphie de représentations ℓ-adiques du groupe de Weil d'un corps local une description purement algébrique, indépendante de la topologie de $\mathbb{Q}_\ell$. Ceci sert à définir la <u>compatibilité</u> de représentation ℓ et ℓ'-adique. La notion introduite est plus fine que celle de Serre [12] .

Le §9 donne la démonstration de (B) (9.3 et 9.9). L'idée est que pour démontrer une identité, il suffit de la démontrer mod ℓ pour une infinité de ℓ . Nous donnons aussi, pour les corps de fonctions, une réponse partielle à une question de Serre en montrant (9.8) que deux représentations ℓ et ℓ'-adiques, donnant lieu au même polynôme caractéristique de Frobenius (supposé dans $\mathbb{Q}[t]$)en presque toutes les places, vérifient une compatibilité aux places résiduelles.

Le §10 résume la théorie de Grothendieck des fonctions L (cf [7] et SGA 5), qui nous a servi de façon cruciale au §9. En 10.11, je tente d'expliquer le sel de sa méthode. Les résultats farfelus 10.13 résultent aussitôt de ce qui précède. J'ignore leur signification.

§1.- REPRESENTATIONS VIRTUELLES D'UN GROUPE FINI

1.1 Soit K un corps (commutatif). Le cas le plus important pour nous sera celui où K est algébriquement clos de caractéristique 0, par exemple $K = \mathbb{C}$. Soit G un groupe. On notera $R_K(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $K[G]$ - modules de dimension finie sur K. Il s'identifie au $\mathbb{Z}$-module libre de base l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations linéaires K-irréductibles de G sur K. C'est un anneau commutatif à unité (pour le produit tensoriel sur K) et même un λ-anneau au sens de Grothendieck. Ses éléments sont les <u>représentations virtuelles de</u> G <u>sur</u> K.

Pour définir un homomorphisme f de $R_K(G)$ dans un groupe commutatif X, il suffit :

a) de définir $f(V)$, pour V une représentation de G sur K ;

b) de vérifier que pour toute suite exacte de représentations

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0 ,$$

on a $f(V) = f(V') + f(V'')$.

Appliquant cette règle, on définit la <u>dimension</u> d'une représentation virtuelle

$$\dim : R_K(G) \longrightarrow \mathbb{Z} ,$$

et son <u>déterminant</u>

$$\det : R_K(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, K^*).$$

Si H est un sous-groupe d'indice fini de G, on définit l'<u>induction</u>

$$\mathrm{Ind}_H^G : R_K(H) \longrightarrow R_K(G)$$

comme correspondant à l'extension des scalaires $V \longmapsto K[G] \otimes_{K[H]} V$ (c'est un foncteur exact ; il passe donc aux représentations virtuelles). Pour $f : G \longrightarrow H$, on définit la <u>restriction</u>

$$\mathrm{Res}_G^H : R_K(H) \longrightarrow R_K(G)$$

comme restriction des scalaires de $K[H]$ à $K[G]$. Pour f surjectif, on parle parfois plutôt d'inflation.

Pour tout groupe G, on note G^{ab} le plus grand quotient abélien de G. Un K-quasi-caractère χ de G est un homomorphisme $\chi : G \longrightarrow K^*$; on l'identifie au K-quasi-caractère de G^{ab} par lequel il se factorise, et on note $[\chi]$ la représentation de dimension 1 correspondante.
Pour G fini, nous emploierons indifféremment les mots "caractère" et "quasi-caractère". "Caractère" ne signifiera jamais "caractère d'une représentation de dimension > 1".
The following proposition is due to P. Gallagher [20].
Proposition 1.? - Soient G un groupe, H un sous-groupe d'indice fini et t : $G^{ab} \longrightarrow H^{ab}$ le transfert. Pour ρ une représentation virtuelle de dimension 0 de H et $x \in G^{ab}$, on a

$$\det(\mathrm{Ind}_H^G(\rho))(x) = \det(\rho)\ (t(x)) \quad .$$

On montrera (à peine) plus généralement que, si ϵ est le déterminant de la représentation de permutation de G sur G/H

$$\epsilon : \ G \longrightarrow \mathfrak{S}_{G/H} \longrightarrow \pm 1 \quad ,$$

on a, pour ρ de dimension quelconque,

$$\det(\mathrm{Ind}_H^G(\rho))\ (x) = \epsilon^{\dim \rho} \det(\rho)\ (t(x)) \quad .$$

C'est assez évident en termes topologiques. Soient B_G le classifiant de G et B_H celui de H, vu comme revêtement à $[G : H]$ feuillets de B_G : $f : B_H \longrightarrow B_G$. Les représentations de G s'identifient aux systèmes locaux de K-vectoriels de dimension finie sur B_G, et Ind_H^G au foncteur f_*. Le transfert $H_1(B_G) \longrightarrow H_1(B_H)$ est transposé aux morphismes trace $f_! : H^1(B_G, X) \longrightarrow H^1(B_H, X)$, ($X$ groupe abélien). Pour $X = K^*$, $f_!$ correspond à la norme : si $\eta \in H^1(B_G, K^*)$ est la classe d'un système local de rang 1 de K-vectoriels L, $f_!(\eta)$ est la classe de $N(L)$, système local sur B_G qui localement sur B_G est le produit tensoriel des images réciproques de L par $[G:H]$ sections disjointes.

Posons $\det V = \overset{\dim V}{\wedge} V$ (pour V un système local) et soit $\underline{\epsilon}$ le système local $\det f_* K$. La proposition 1.2 résulte de l'existence d'un isomorphisme canonique, pour V système local sur B_H

$$\det f_* V = \underline{\epsilon}^{\otimes \dim V} \otimes N(\det V) .$$

La construction de cet isomorphisme est locale sur B_G ; elle se ramène à la

<u>Construction 1.3</u> - Pour $(V_i)_{i \in I}$ une famille finie de K-vectoriels de dimension d , et $\epsilon = \det(K^I)$, on a canoniquement

$$\det (\bigoplus_i V_i) \simeq \epsilon^{\otimes d} \otimes \bigotimes_i \det (V_i) .$$

La flèche est, pour $i_1 \ldots i_n$ la suite des éléments de I ,

$$(e_{i_1,1} \wedge \ldots \wedge e_{i_1,d}) \wedge \ldots \wedge (e_{i_n,1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n,d}) \longmapsto$$

$$(i_1 \wedge \ldots \wedge i_n)^{\otimes d} \otimes (e_{i_1,1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n,d}) \otimes \ldots \otimes (e_{i_n,1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n,d}) .$$

<u>Parenthèse</u> 1.4. Plutôt qu'un classifiant B_G , on eut plus intrinsèquement pu prendre dans le raisonnement précédent le topos classifiant B_G de Grothendieck (SGA 4 IV 2.4 pg. 315 (pour E = (Ens)).

Supposons G fini. Nous dirons que K est <u>assez gros</u> s'il contient toutes les racines de l'unité d'ordre divisant le ppcm des ordres des éléments de G . Un groupe H sera dit <u>p-élémentaire</u> s'il est produit d'un p-groupe par un groupe cyclique, <u>élémentaire</u> s'il est p-élémentaire pour un nombre premier p convenable.

Nous aurons besoin de la variante suivante du théorème de Brauer sur les caractères induits (qu'on obtient en omettant partout "de dimension 0").

<u>Proposition</u> 1.5. <u>Si</u> K <u>est assez gros</u>, <u>toute représentation virtuelle de dimension</u> 0 <u>de</u> G <u>est somme de représentations virtuelles</u> $\mathrm{Ind}_H^G(x)$, <u>avec</u> x <u>virtuel de dimension</u> 0, H <u>élémentaire et</u> x <u>combinaison linéaire de représentations de dimension</u> 1 <u>de</u> H .

D'après le théorème de Brauer appliqué à la représentation triviale 1_G de G , il existe une décomposition

$$1_G = \sum_H \mathrm{Ind}_H^G(z_H) \qquad \text{(H élémentaire).}$$

Pour y représentation virtuelle de dimension 0 de G, on a alors

$$y = \Sigma\, y.\, \mathrm{Ind}_H^G(z_H) = \Sigma\, \mathrm{Ind}_H^G(\, \mathrm{Res}_H^G(y).\, z_H) \quad ,$$

avec dim $(\mathrm{Res}_H^G(y).z_H) = 0$. Ceci nous ramène à supposer G élémentaire. Par linéarité, on peut supposer y de la forme $\rho - \dim(\rho).1_G$, avec ρ irréductible, donc (puisque G est nilpotent) induite par un caractère χ d'un sous-groupe H de G contenant le centre Z . On a alors

$$\rho\text{-}\dim(\rho).1_G = \mathrm{Ind}_H^G(\chi - 1_H) + (\mathrm{Ind}_H^G(1_H) - [G:H]1_G) \quad .$$

Le premier terme est du type voulu, et le second est l'inflation d'une représentation virtuelle de dimension 0 de G/Z. On conclut par une récurrence sur l'ordre de G (noter que $|G/Z| < |G|$ si $G \neq \{e\}$).

<u>Scholie</u> 1.6. Un homomorphisme $f : R_K(G) \longrightarrow X$ est connu quand on connaît sa valeur en 1_G et en les $\mathrm{Ind}_H^G(\chi - 1_H)$, pour H élémentaire et χ un caractère de H .

1.7. Soit A un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique p de corps des fractions K et de corps résiduel $k = A/m$. Rappelons la définition de l'homomorphisme de décomposition ([11] III 2.2)

$$d \;:\; R_K(G) \longrightarrow R_k(G) \quad :$$

pour V une représentation de G sur K et E un réseau G-invariant,

$$d([V]) = [E \otimes_A k] \quad .$$

Proposition 1.8. On suppose K assez gros. Le noyau de l'homomorphisme de décomposition d est alors engendré par les

$$\mathrm{Ind}_H^G([\chi'] - [\chi'']) \quad ,$$

pour H un sous-groupe élémentaire et $\chi', \chi'' \in \mathrm{Hom}(H,K^*)$ congrus mod m .

L'homomorphisme d'anneaux d commutant à l'induction, le raisonnement de 1.5 nous ramène au cas où G est élémentaire, donc produit d'un p-groupe P par un groupe H d'ordre premier à p. Les corps K et k étant assez gros, on a $R_K(G) = R_K(P) \otimes R_K(H)$, et de même pour R_k . Pour un groupe d'ordre premier à p, d est bijectif. On a donc

$$\mathrm{Ker}(R_K(G) \longrightarrow R_k(G)) = \mathrm{Ker}(R_K(P) \longrightarrow R_k(P)) \otimes R_K(H) \quad .$$

Appliquant le théorème de Brauer à H, on voit qu'il suffit de prouver 1.8 pour un p-groupe. Ce cas est trivial, car tout caractère $\chi \in \mathrm{Hom}(P,K^*)$ d'un p-groupe est congru à 1 mod m.

1.9. Dans la fin de ce numéro, on suppose que $K = \mathbb{C}$, on ne considère que des groupes finis et on abrège $R_K(G)$ en $R(G)$. Pour G commutatif, on note G^* le groupe des caractères de G .

Soit $R_+(G)$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base l'ensemble des classes de G-conjugaison de couples (H,χ) : H sous-groupe de G et χ caractère de H . On définit dans $R_+(G)$ une multiplication par la règle

$$(1.9.1) \quad (A,\alpha).(B,\beta) = \sum_{(x,y)\in G\backslash(G/A\times G/B)} (A^x \cap B^y, (\alpha^x|A^x\cap B^y).(\beta^y|A^x\cap B^y))$$

((x,y) parcourt des représentants des orbites de G dans $G/A \times G/B$, $A^x = xAx^{-1}$ et α^x est le caracterè $\alpha(x^{-1}ax)$ de A^x). Pour cette multiplication, $R_+(G)$ est un anneau commutatif d'unité $(G,1)$, et on définit un homomorphisme d'anneaux

(1.9.2) $$b : R_+(G) \longrightarrow R(G) \quad \text{par} \quad (H,\chi) \longmapsto \mathrm{Ind}_H^G(\chi) \quad .$$

Cet homomorphisme est surjectif d'après le théorème de Brauer. Pour χ un caractère de G, la multiplication par (G,χ) se note $.\chi$ et s'appelle <u>torsion</u> par χ :

(1.9.3) $$(H,\varphi).\chi = (H,\varphi.(\chi|H)) \quad .$$

Pour $G' \subset G$, on définit l'<u>induction</u>

(1.9.4) $$\mathrm{Ind} : R_+(G') \longrightarrow R_+(G) \ : \ (H,\chi) \longmapsto (H,\chi) \quad .$$

Pour $u : G \longrightarrow G'$ un morphisme, on définit la <u>restriction</u>

(1.9.5) $$\mathrm{Res} : R_+(G') \longrightarrow R_+(G) : (H,\chi) \longmapsto \sum_{s \in u(G)\backslash G'/H} (u^{-1}(sHs^{-1}),\chi^s \circ u)$$

(s parcourt un ensemble de représentants des doubles classes). On dispose de diagrammes commutatifs (pour le second, cf. [11] p. 75)

$$\begin{tikzcd} R_+(G') \arrow[r, "\mathrm{Ind}"] \arrow[d, "b"'] & R_+(G) \arrow[d, "b"'] \\ R(G') \arrow[r, "\mathrm{Ind}"] & R(G) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_+(G') \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "b"'] & R_+(G) \arrow[d, "b"'] \\ R(G') \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & R(G) \end{tikzcd} ,$$

et on a la formule, pour $R \in R_+(G)$,

(1.9.6) $$R.(H,\chi) = \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(R).\ \chi\ ) \quad .$$

On parle d'<u>inflation</u> lorsque u est surjectif :

(1.9.7) $$\mathrm{Infl} : R_+(G') \longrightarrow R_+(G) \ : \ (H,\chi) \longmapsto (u^{-1}H,\ \chi\circ u) \quad .$$

Notation 1.9.8. Pour toute fonction additive de représentation F, on note de même la fonction qu'elle définit sur $R(G)$, et le composé $F\circ b$. Ainsi, $\dim(v) = \dim(b(v)),\dots$

Variantes 1.10.

(i) On note $R_+^o(G)$ le sous-groupe de $R_+(G)$ engendré par les $(H,\chi) - (H,1)$. Pour (H,χ) parcourant la base canonique de $R_+(G)$, à l'exception des $(H,1)$, ces éléments forment une base de $R_+^o(G)$. On vérifie que $R_+^o(G)$ est un idéal de $R_+(G)$. Soit $R^o(G) \subset R(G)$ l'ensemble des représentations virtuelles de dimension 0 de G. D'après 1.5, l'application naturelle, induite par (1.9.2), de $R_+^o(G)$ dans $R^o(G)$ est surjective.

(ii) Pour G un groupe topologique (fini ou non), on note $R_+(G)$ et $R_+^o(G)$ les groupes analogues aux précédents obtenus en se limitant aux sous-groupes fermés H d'indice fini et aux quasi-caractères continus. Les fonctorialités 1.9 se généralisent, mutatis mutandis.

La fin de ce § ne servira plus par la suite. Nous y exposons des résultats tirés de Langlands [9].

Lemme 1.11. *Supposons que* $G = H.C$, *avec* C *commutatif distingué, et soit* χ *un caractère de* H. *Pour tout* $\mu \in C^*$, *soit* $G_\mu \subset G$ *le fixateur de* μ (G *agit sur* C^* *par conjugaison*). *Si* $\chi|H\cap C = \mu|H\cap C$, *on note* $\{\chi,\mu\}$ *le caractère de* $G_\mu = (H \cap G_\mu).C$ *qui prolonge* $\chi|H\cap G_\mu$ *et* μ. *On a, pour* μ *parcourant un ensemble de représentants des classes de* G-*conjugaison de caractères de* C *tels que* $\chi|H\cap C = \mu|H\cap C$,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\chi) = \sum_{\substack{\chi|H\cap C = \mu|H\cap C \\ \mu \in C^*/G}} \mathrm{Ind}_{G_\mu}^G(\{\chi,\mu\})$$

La vérification est laissée au lecteur.

1.12. Un élément R de $\mathrm{Ker}(R_+(G) \longrightarrow R(G))$ sera dit de type I, II ou III s'il existe un quotient A d'un sous-groupe B de G tel que R s'obtienne à partir d'un élément S de l'un des types respectifs suivants de $\mathrm{Ker}(R_+(A) \longrightarrow R(A))$ par inflation de A à B, torsion par un caractère de B et induction de B à G. On désigne par ℓ un nombre premier.

I $\quad A \simeq \mathbb{Z}/\ell \qquad\qquad S = (e, [1]) - \sum_{\chi \in A^*} (A,\chi)$

II $\quad A$ est une extension centrale de $(\mathbb{Z}/\ell)^2$ par un groupe abélien Z, $H_i (i=1,2)$ l'image réciproque dans A des premiers et second facteurs $\mathbb{Z}/\ell$, et χ_i un caractère de H_i. On suppose que $\chi_1 | Z = \chi_2 | Z$, et que ce caractère de Z est non trivial sur un commutateur.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H_1 \arrow[d, hook] \\ H_2 \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd}$$

La relation S est

$$S = (H_1,\chi_1) - (H_2,\chi_2) \qquad .$$

III $\quad A$ est un produit semi-direct $H.C$, χ est un caractère de H et le sous-groupe distingué C est minimal parmi les sous-groupes commutatifs distingués non triviaux de A. Pour tout caractère μ de C, A_μ est le fixateur de μ et $\{\chi,\mu\}$ est le caractère de A_μ qui prolonge $\chi | H \cap A_\mu$ et μ. S exprime la relation suivante, où μ parcourt un ensemble de représentants des orbites de A agissant dans C^* par conjugaison

$$\mathrm{Ind}_H^A(\chi) = \sum_{\mu \in C^*/A} \mathrm{Ind}_{A_\mu}^A (\{\chi,\mu\}) \quad .$$

Ces relations sont des cas particuliers de 1.11 (pour I, $H = \{e\}$, $C = A$; pour II, $H = H_1$, $C = H_2$; pour III, H et C sont H et C).

Toute relation déduite par induction, inflation ou torsion d'une relation de type I (resp. II, III) est encore du même type.

Théorème 1.13. (Langlands [9] § 18). *Si G est nilpotent, le noyau de* $b : R_+(G) \longrightarrow R(G)$ *est engendré (comme* $\mathbb{Z}$*-module) par les relations de type* I *et* II .

Lemme 1.13.1. *Si G est commutatif,* Ker(b) *est engendré par les relations de type* I .

Il faut montrer que pour tout sous-groupe H de G et tout $\chi \in H^*$, la relation

$$\mathrm{Ind}_H^G(\chi) = \sum_{\substack{\varphi \in G^* \\ \varphi | H = \chi}} [\varphi] \tag{1}$$

est conséquence (= combinaison linéaire) de relations de type I . Celles-ci sont les suivantes : pour $H' \subset H'' \subset G$ avec $[H'':H']$ premier, et χ un caractère de H' (toujours induit par un caractère de G),

$$\mathrm{Ind}_{H'}^G(\chi) = \sum_{\varphi|H'=\chi} \mathrm{Ind}_{H''}^G(\varphi)$$

que (1) en résulte se voit en prenant une suite de Jordan-Hölder de G/H.

La vérification du lemme suivant est laissée au lecteur.

Lemme 1.13.2. *Soient* C *un sous-groupe commutatif distingué de* G, T *un ensemble de représentants de* C^*/G, $\mu \in T$, *et* G_μ *le fixateur de* μ . *Soit* (H_i) *une famille de sous-groupes de* G *contenant* C, *et* χ_i *un caractère de* H_i, *avec* $\chi_i | C \in T$. *Si la relation*

$$\sum n_i \ \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\chi_i) = 0$$

est vraie dans $R(G)$, la relation

$$\sum_{\chi_i|C=\mu} n_i \ \mathrm{Ind}_{H_i}^{G_\mu} (\chi_i) = 0$$

<u>est vraie dans</u> $R(G_\mu)$.

Soit Z le centre de G et prouvons 1.13 par récurrence sur l'ordre de G/Z. D'après 1.13.1, on peut supposer G non commutatif. Soit donc C un sous-groupe commutatif distingué contenant Z, tel que $[C:Z] = \ell$ soit premier, et d'image centrale dans G/Z.

Soit une relation

(1) $$\sum_i n_i \ \mathrm{Ind}_{H_i}^{G} (\chi_i) = 0 \quad .$$

Elle est conséquence de relations induites par les relations

(a_i) $$\mathrm{Ind}_{H_i}^{H_iZ} (\chi_i) = \sum_{\chi_i'|H_i=\chi_i} [\chi_i']$$

et d'une relation (2) analogue à (1), avec $H_i \supset Z$.

Les relations (a_i) sont combinaisons linéaires de relations de type I ; on peut le déduire de 1.13.1 appliqué à $H_iZ/\mathrm{Ker}(\chi_i)$.

La relation (2) est conséquence de relations induites par des relations 1.11 pour HC, H, C, χ (avec $H \supset Z$)

(b) $$\mathrm{Ind}_H^{HC}(\chi) = \sum_{\substack{\chi|H\cap C = \mu|H\cap C \\ \mu \in C^*/H}} \mathrm{Ind}_{(HC)_\mu}^{HC} (\{\chi,\mu\})$$

et d'une relation (3) analogue à (1), avec cette fois $H_i \supset C$. Appliquons 1.13.2 à (3), pour l'exprimer comme somme de relations induites par des relations

(4) $$\sum_i n_i \ \mathrm{Ind}_{H_i}^{G_\mu} (\chi_i) = 0 \quad ,$$

avec $H_i \supset C$ et $\chi_i|C = \mu$.

L'image de C dans $G_\mu/\mathrm{Ker}(\mu)$ est centrale (car μ, invariant par G_μ, est injectif sur $C/\mathrm{Ker}(\mu)$). L'hypothèse de récurrence s'applique donc à G_μ, et les relations (4) sont du type voulu. Prouvons que les relations (b) le sont. Si $HC \neq G$, cela résulte de l'hypothèse de récurrence, appliquée à HC. Si $HC = G$, H est distingué, car il contient Z et que C est central mod Z. Soit A l'intersection des noyaux des conjugués de χ. La relation (b) est l'inflation d'une relation analogue pour G/A. Si l'hypothèse de récurrence s'applique à G/A, on a gagné. Sinon, on se retrouve dans la même situation qu'avant, avec $A = \{e,\}$, et on conclut par le

<u>Lemme</u> 1.13.3. <u>Avec les notations précédentes</u>, <u>si</u> $A = \{e\}$, <u>la relation</u> (b) <u>est de la forme</u> II.

Le groupe H est commutatif, car des caractères séparent ses éléments. Le groupe Z est cyclique, car un seul caractère sépare ses éléments.

Pour $c \in C$ et $h \in H$, posons $u(c,h) = ch\,c^{-1}h^{-1}$. C'est un élément de Z, car C est central mod Z. Il dépend biadditivement de c et h, et définit $\bar{u} : C/Z \otimes H/Z \longrightarrow Z$. Soit c engendrant C/Z. Puisque Z est le centre et que $G \neq Z$, $\bar{u}(c,\ ) : H/Z \longrightarrow Z$ est injectif, d'image cyclique tuée par ℓ et non triviale. Dès lors, $|C/Z| = |H/Z| = \ell$, et G est extension centrale de $C/Z \times H/Z$ par Z. Le caractère χ est distinct d'au moins un de ses conjugués (sinon H serait central) ; il est donc non trivial sur un commutateur, et on est dans la situation II.

<u>Théorème</u> 1.14. (Langlands [9]). <u>Si</u> G <u>est résoluble</u>, <u>le noyau de</u> $b : R_+(G) \longrightarrow R(G)$ <u>est engendré par les relations de type</u> I, II <u>et</u> III.

<u>Lemme</u> 1.14.1. <u>Si</u> G <u>est résoluble</u>, <u>le sous</u> $\mathbb{Z}$<u>-module</u> $N(G)$ <u>de</u> $R_+(G)$ <u>engendré</u> par les relations de type I, II et III est un idéal.

Prouvons 1.14 et 1.14.1 par une récurrence simultanée sur l'ordre de G .

(A) 1.14 <u>pour les sous-groupes propres de</u> G <u>implique</u> 1.14.1 <u>pour</u> G .

Soient $R \in R_+(G)$ de type I, II ou III, H un sous-groupe et χ un caractère de G. Prouvons que $R.(H,\chi) \in N = \mathbf{N}(G)$. Si $H = G$, cela résulte de ce que N est stable par torsion par un caractère de G . Si $H \neq G$, on a (1.9.6) $R.(H,\chi) = \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(R).\ \chi)$, avec $\mathrm{Res}_H^G(R) \in \mathrm{Ker}(R_+(H) \longrightarrow R(H))$.
Vu l'hypothèse, $\mathrm{Res}_H^G(R) \in N(H)$ et $R.(H,\chi)$ qui se déduit de $\mathrm{Res}_H^G(R)$ par torsion et induction est dans $N(G)$.

(B) 1.14.1 <u>pour</u> G <u>et</u> 1.14 <u>pour les groupes d'ordre plus petit impliquent</u> 1.14 <u>pour</u> G .

Soit Z le centre de G . D'après 1.13, on peut supposer (et on suppose) que G n'est pas nilpotent. Distinguons deux cas.

(B1) $\qquad Z \neq \{e\}$.

D'après le théorème de Brauer dans G/Z, il existe des sous-groupes nilpotents $H_i \supset Z$ de G et des caractères χ_i de H_i/Z tels que

$$1_{G/Z} = \Sigma\, n_i\ \mathrm{Ind}_{H_i/Z}^{G/Z}\ (\chi_i) \quad .$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à G/Z , de sorte que

$$S = (G,1) - \Sigma\, n_i(H_i,\ \chi_i) \in N(G) \quad .$$

Soit $R \in \mathrm{Ker}(b)$. On a (1.9.6)

$$R = R.S + \Sigma\, n_i\ \mathrm{Ind}_{H_i}^G\ (\mathrm{Res}_{H_i}^G(R)\ \ \chi_i) \quad .$$

Puisque $S \in N(G)$, on a $R.S \in N(G)$. On conclut en notant que, d'après 1.13 ou l'hypothèse, $\mathrm{Res}_{H_i}^G(R) \in N(H_i)$

(B2) $\qquad Z = \{e\}$.

Soit C un sous-groupe commutatif distingué non trivial minimal et, pour $\mu \in C^*$, soit G_μ son fixateur. Procédons comme dans la démonstration de 1.13. On trouve que toute relation $R \in \mathrm{Ker}(b)$ est combinaison linéaire de relations (a) induites par des relations 1.11 pour HC, H, C, χ ($H \subset G$, χ caractère de H, $H \not\supset C$) et de relations induites par des relations exprimant une identité

$$\text{(b)} \qquad \Sigma\, n_i \ \mathrm{Ind}_{H_i}^{G_\mu}(\chi_i) = 0 \quad ,$$

avec $H_i \supset C$ et $\chi_i | C = \mu$ (μ caractère de C). Puisque $Z = \{e\}$, $|G_\mu/\mathrm{Ker}(\mu)| < |G|$ et l'hypothèse de récurrence s'applique à ces dernières. Considérons une relation (a). Si $HC \neq G$, on applique l'hypothèse de récurrence. Si $HC = G$, $H \cap C$ est distingué car distingué dans H et dans C. Par minimalité de C, $H \cap C = \{e\}$: la relation est du type III.

<u>Remarque</u> 1.15. Il est vraisemblablement possible d'extraire de [9] la description d'un système générateur de $\mathrm{Ker}(R_+^o(G) \longrightarrow R^o(G))$, pour des groupes convenables G. Je n'ai pas eu le courage de m'y essayer.

§ 2. GROUPES DE WEIL.

2.1. Racines de l'unité.

Soit $\overline{K}$ un corps séparablement clos d'exposant caractéristique p. Pour tout entier n, on note $\mathbb{Z}/n(1)(\overline{K})$, ou simplement $\mathbb{Z}/n(1)$, le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité de $\overline{K}$. Pour $n|m$, on dispose d'une application de transition $\mathbb{Z}/m(1) \longrightarrow \mathbb{Z}/n(1) : x \longmapsto x^{\frac{m}{n}}$; on pose

$$\hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_{n} \mathbb{Z}/n(1) \quad .$$

Pour ℓ un nombre premier, on pose de même

$$\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_{k} \mathbb{Z}/\ell^k(1) \quad .$$

Les applications évidentes $\hat{\mathbb{Z}}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ induisent un isomorphisme

$$\hat{\mathbb{Z}}(1) \xrightarrow{\sim} \prod_{\ell \neq p} \hat{\mathbb{Z}}_\ell(1) \quad .$$

Pour tout $\hat{\mathbb{Z}}$-module V, on pose $V(1) = V \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}(1)$. Pour V un $\mathbb{Z}_\ell$-module, on a $V(1) \xrightarrow{\sim} V \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$. Pour le $\hat{\mathbb{Z}}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ est canoniquement isomorphe au groupe de racines de l'unité de $\overline{K}$: pour $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Z}(1)$, d'image $\overline{x}$ dans $\mathbb{Z}/m(1)$, l'image de $\frac{n}{m} \otimes x$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ est identifiée à $\overline{x}^{\,n}$.

Pour $\ell \neq p$, $\mathbb{Z}_\ell(1)$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{Z}_\ell$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Z}_\ell(i)$ sa puissance tensorielle $i^{\text{ième}}$ (pour $i \leq 0$, $\mathbb{Z}_\ell(i)$ est le dual de $\mathbb{Z}_\ell(-i)$). Pour tout $\mathbb{Z}_\ell$-module V, on pose encore $V(i) = V \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(i)$.

2.2. Notations.

2.2.1. Soit K un corps local. On note $\| \ \|$ la valeur absolue normalisée de K : si dx est une mesure de Haar,

$$\|a\| \int f(ax)\, dx = \int f(x)\, dx \quad , \qquad \text{i.e}$$

$$d(ax) = \|a\|\, dx \quad .$$

Pour $s \in \mathbb{C}$, on note ω_s le quasi-caractère $x \longmapsto \|x\|^s$ de K^* dans $\mathbb{C}^*$.

Si K est non archimédien ($\neq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on note $\mathcal{O}$ l'anneau de la valuation v de K, π une uniformisante, k le corps résiduel $\mathcal{O}/(\pi)$, p la caractéristique de k, et on pose $d = [k:\mathbb{F}_p]$, $q = p^d = \# k$. On a donc $\|x\| = q^{-v(x)}$.

2.2.2. Supposons K non archimédien. On désigne par $\overline{K}$ une clôture séparable de K et on note $\overline{\mathcal{O}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}$ dans $\overline{K}$, $\overline{k}$ le corps résiduel de $\overline{\mathcal{O}}$ (une clôture algébrique de k), et v la valuation de $\overline{K}$, à valeurs dans $\mathbb{Q}$, qui prolonge celle de K.

On dispose d'une filtration en trois crans du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$,

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \supset I \supset P$$

de quotients successifs

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)/I & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}} \\ I/P & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathbb{Z}}(1)\ (\overline{k}) \\ P & : & \text{un pro-}p\text{-groupe} \quad . \end{array}$$

On l'obtient comme suit (pour les démonstrations, on renvoie à [10]).

a) Par transport de structure, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ agit sur $\overline{\mathcal{O}}$ et $\overline{k}$. Le groupe d'inertie I est le noyau de la flèche de réduction

$$v' : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \quad .$$

Le quotient $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est canoniquement isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$, de générateur topologique la substitution de Frobenius $\varphi : x \longmapsto x^q$.

b) Le groupe d'inertie sauvage P est l'unique pro-p-groupe de Sylow de I. Le morphisme équivariant $t : I \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}(1)(\overline{k})$, de noyau P, est caractérisé par la congruence (modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathcal{O}}$)

$$\underset{\vee}{\underline{\frac{\sigma(x)}{}}} \equiv t(\sigma).v(x) \quad (\sigma \in I,\ x \in \overline{K}) \quad ,$$

où

$$t(\sigma).v(x) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ (1)\ (\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \bar{k}^* \qquad .$$

Pour $\ell \neq p$ premier, on note t_ℓ l'application composée

$$t_\ell\ :\ I \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}(1)\ (\bar{k}) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)\ (\bar{k}) \qquad .$$

2.2.3. Soit k un corps fini à q éléments de clôture algébrique $\bar{k}$. On note $W(\bar{k}/k)$ le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}$ engendré par $\varphi : x \longmapsto x^q$. On a canoniquement

$$W(\bar{k}/k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \qquad \text{(engendré par } \varphi) \quad .$$

Le <u>Frobenius géométrique</u> $F \in W(\bar{k}/k)$ est par définition φ^{-1} .

2.2.4. Soient K, $\bar{K}$ comme en 2.2.2.Le <u>groupe de Weil</u> $W(\bar{K}/K)$, ou <u>groupe de Weil absolu</u> de K , est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ formé des σ tels que $v'(\sigma)$ soit une puissance entière du Frobenius φ . On le munit de la topologie induisant la topologie naturelle de I, et pour laquelle I est ouvert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[dd, equal] & W(\bar{K}/K) \arrow[r] \arrow[dd, hook] & W(\bar{k}/k) \arrow[r] \arrow[dd, hook] \arrow[rrd, equal] & 0 & \\
 & & & & & \mathbb{Z} \arrow[dd, hook] \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \arrow[r] \arrow[rrd, equal] & 0 & \\
 & & & & & \hat{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd} \quad .$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ est le complété de $W(\bar{K}/K)$ pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini ; pour L une extension finie de K dans $\bar{K}$, le sous-groupe correspondant de $W(\bar{K}/K)$ s'identifie à $W(\bar{K}/L)$. On appellera parfois Frobenius géométriques les éléments de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ ou $W(\bar{K}/K)$ d'image F.

2.2.5. Supposons K archimédien, de clôture algébrique $\overline{K}$. On définit $W(\overline{K}/K)$ comme l'extension suivante de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\overline{K}^*$.

1) $K \simeq \mathbb{R}$: $W(\overline{K}/K)$ est engendré par $\overline{K}^*$ et un élément F , avec $F^2 = -1$ et $F z F^{-1} = \overline{z}$ pour $z \in \overline{K}^*$

2) $K \simeq \mathbb{C}$: $W(\overline{K}/K) = \overline{K}^*$.

2.3. La <u>théorie du corps de classe local</u> fournit un isomorphisme entre $W(\overline{K}/K)^{ab}$ et K^* .

Supposons K non archimédien. Pour une raison expliquée en 3.6, nous normaliserons alors cet isomorphisme (= choisirons lui ou son inverse) de telle sorte que les Frobenius <u>géométriques</u> correspondent aux uniformisantes.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook] \arrow[d] & I \arrow[r, hook] \arrow[d] & W(\overline{K}/K) \arrow[r] \arrow[d] & W(\overline{k}/k) = \mathbb{Z} \arrow[d, "-1"] \\
1+(\pi) \arrow[r, hook] & \mathcal{O}^* \arrow[r, hook] & K^* \arrow[r, "v"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Une représentation de $W(\overline{K}/K)$ est <u>non ramifiée</u> (resp. <u>modérément ramifiée</u>) si elle est triviale sur I (resp. sur P). De même, un quasi-caractère χ de K^* est non ramifié (resp. modérément ramifié) s'il est trivial sur $\mathcal{O}^*$ (resp. $1+(\pi)$). Pour ℓ premier à p, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur $\mathbb{Z}_\ell(1)$ est non ramifiée, décrite par le quasi-caractère $\omega_1 = \|x\|$ de K^* .

Pour K complexe, l'isomorphisme de la théorie du corps de classe local est celui évident sur 2.2.5 ; pour K réel, c'est celui qui rend vrai 2.3.1, 2.3.2 ci-dessous.

Soit $L \subset \overline{K}$ une extension finie de K, de sorte que $W(\overline{K}/L) \subset W(\overline{K}/K)$. Les diagrammes suivants (où N est la norme et t le transfert) sont commutatifs ([10] XIII § 4)

(2.3.1)

$$\begin{tikzcd}
W(\overline{K}/L) \arrow[r] \arrow[d, hook] & W(\overline{K}/L)^{ab} \arrow[r, no head, "\sim"] \arrow[d] & L^* \arrow[d, "N_{L/K}"] \\
W(\overline{K}/L) \arrow[r] & W(\overline{K}/K)^{ab} \arrow[r, no head, "\sim"] & K^*
\end{tikzcd}$$

(2.3.2)

$$\begin{tikzcd}
W(\overline{K}/K)^{ab} \arrow[r, no head, "\sim"] \arrow[d, "t"] & K^* \arrow[d, hook] \\
W(\overline{K}/L)^{ab} \arrow[r, no head, "\sim"] & L^*
\end{tikzcd}$$.

2.4. Soient K un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{F}_p$ et k son corps des constantes (fermeture algébrique de $\mathbb{F}_p$ dans K). Soient $\overline{K}$ une clôture séparable de K , $\overline{k}$ la clôture algébrique de k dans $\overline{K}$ et $\mathrm{Gal}^{\circ}(\overline{K}/K)$ le noyau de l'application de restriction de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Le <u>groupe de Weil global</u> (absolu) $W(\overline{K}/K)$ est, en analogie avec 2.2.4, défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}^{\circ}(\overline{K}/K) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & W(\overline{K}/K) \arrow[r] \arrow[dd, hook] & W(\overline{k}/k) \arrow[r] \arrow[dd, hook] \arrow[dr, equal] & 0 & \\
& & & & \mathbb{Z} \arrow[dd, hook] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}^{\circ}(\overline{K}/K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \arrow[r] \arrow[dr, equal] & 0 & \\
& & & & \hat{\mathbb{Z}} &
\end{tikzcd}$$

Soient v une place de K et supposons choisie une place de $\overline{K}$ au-dessus de v . On dispose alors d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_v \arrow[r] \arrow[dd, hook] & W(\overline{K}_v/K_v) \arrow[r] \arrow[dd, hook] & W(\overline{k}_v/k_v) \arrow[r] \arrow[dd, hook] \arrow[drr, equal] & 0 & \\
 & & & & & \mathbb{Z} \arrow[dd, "{[k_v:k]}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}^{\circ}(\overline{K}/K) \arrow[r] & W(\overline{K}/K) \arrow[r] & W(\overline{k}/k) \arrow[r] \arrow[drr, equal] & 0 & \\
 & & & & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

La <u>théorie du corps de classe global</u> fournit un isomorphisme

$$W(\overline{K}/K)^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_K^*/K^* \quad \text{(groupe des classes d'idèles)}$$

rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
W(\overline{K}_v/K_v)^{ab} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & W(\overline{K}/K) \arrow[d, "\wr"] \\
K_v^* \arrow[r] & \mathbb{A}_K^*/K^*
\end{tikzcd} .$$

2.5. Pour la définition des <u>groupes de Weil</u> globaux dans le cas des corps de nombres on renvoie à Weil [19] ou à [2] XIV. Nous ne nous en servirons qu'incidemment.

§ 3. RAPPELS SUR LES FONCTIONS L .

3.1. Soit K un corps local et reprenons les notations 2.2.1. On désignera par dx une mesure de Haar sur K, par d^*x une mesure de Haar sur K^* et par ψ un caractère additif non trivial de K .

3.2. Pour χ un quasi-caractère (= homomorphisme continu) $\chi : K^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, on définit comme suit $L(\chi) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(3.2.1) $K \simeq \mathbb{R}$. On pose $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, et, pour x le plongement de K dans $\mathbb{C}$ et $N = 0$ ou 1 ,

$$L(x^{-N} . \omega_s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \quad .$$

(3.2.2) $K \simeq \mathbb{C}$. On pose $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2.(2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)$, et, pour z un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et $N \geq 0$,

$$L(z^{-N} . \omega_s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \quad .$$

(3.2.3) K <u>non archimédien</u>. On pose

$$L(\chi) = 1 \qquad (\chi \text{ ramifié}) \quad ,$$

$$L(\chi) = \frac{1}{1-\chi(\pi)} \qquad (\chi \text{ non ramifié}) \quad .$$

3.3. ψ et dx étant donnés, on pose, pour f une fonction C^{∞} à support compact sur K

$$\hat{f}(y) = \int f(x)\ \psi(xy)\ dx \quad .$$

On définit $\epsilon(\chi,\psi,dx) \in \mathbb{C}^*$ par l'équation fonctionnelle locale de Tate (indépendante de f)

$$(3.3.1) \qquad \frac{\int \hat{f}(x)\, \omega_1\, \chi^{-1}(x)\ d^*x}{L(\omega_1 \chi^{-1})} = \epsilon(\chi,\psi,dx)\ \frac{\int f(x)\ \chi(x)\ d^*x}{L(\chi)}$$

(on prend la même mesure de Haar d^*x dans les deux membres). Les deux membres sont définis par prolongement analytique en χ dans les familles $\chi.\omega_s$ $(s \in \mathbb{C})$. Dans ces familles, ε est de la forme $A.e^{Bs}$.

On a

(3.3.2) $$\varepsilon(\chi,\psi,a\,dx) = a.\varepsilon(\chi,\psi,dx) \quad ,$$

(3.3.3) $$\varepsilon(\chi,\psi(ax),dx) = \chi(a).\|a\|^{-1}\,\varepsilon(\chi,\psi,dx) \quad .$$

3.4. Pour K non archimédien, nous poserons :

$n(\psi)$ = le plus grand entier n tel que $\psi|\pi^{-n}\mathcal{O} = 1$;

$a(\chi)$ = le conducteur de χ (0 si χ est non ramifié, le plus petit entier m tel que $\chi|(1+(\pi)^m) = 1$ si χ est ramifié) ;

$\mathrm{sw}(\chi) = 0$ pour χ non ou modérement ramifié, $a(\chi)-1$ pour χ ramifié

γ = un élément de K^* de valuation $n(\psi) + \mathrm{sw}(\chi)+1$.

La constante locale ε est donnée par (3.3.2), (3.3.3) et les formules suivantes.

(3.4.1) $K \simeq \mathbb{R}$.

Soient x le plongement de K dans $\mathbb{C}$ et $N = 0$ ou 1. Pour $\psi = \exp(2\pi\, ix)$ et dx la mesure de Lebesgue,

$$\varepsilon(x^{-N}\omega_s,\psi,dx) = i^N$$

(3.4.2) $K \simeq \mathbb{C}$. Soient z un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et $N \geq 0$. Pour $\psi = \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z))$ et $dx = |dz \wedge d\bar{z}| = 2\,da\,db$ (pour $z = a + bi$),

$$\varepsilon(z^{-N}\omega_s,\ \psi,\ dx) = i^N \quad .$$

3.4.3. K non archimédien.

Si χ est non ramifié, que $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$ et que $n(\psi) = 0$,

(3.4.3.1) $$\varepsilon(\chi,\psi,dx) = 1$$

Pour χ ramifié, on a

(3.4.3.2) $$\varepsilon(\chi,\psi,dx) = \int_{K^*} \chi^{-1}(x)\ \psi(x)\,dx \underset{\text{dfn}}{=} \sum_n \int_{v(x)=n} \chi^{-1}(x)\ \psi(x)\ dx$$

$$= \int_{\gamma^{-1}\mathcal{O}^*} \chi^{-1}(x)\ \psi(x)\ dx \quad .$$

On verra qu'il est naturel d'unifier ces deux formules de la façon suivante : si on définit $\varepsilon_o(\chi,\psi,dx)$ par les formules

(3.4.3.3)
$$\varepsilon(\chi,\psi,dx) = \varepsilon_o(\chi,\psi,dx) \qquad (\chi \text{ ramifié}), \text{ et}$$
$$\varepsilon(\chi,\psi,dx) = \varepsilon_o(\chi,\psi,dx).(-\chi(\pi))^{-1} \qquad (\chi \text{ non ramifié}),$$

on a

(3.4.3.4) $$\varepsilon_o(\chi,\psi,dx) = \int_{\gamma^{-1}\mathcal{O}^*} \chi^{-1}(x)\ \psi(x)\ dx \quad .$$

De (3.4.3.3) et (3.4.3.4), on déduit que pour ω non ramifié,

(3.4.3.5)
$$\varepsilon_o(\chi\omega\ ,\ \psi,\ dx) = \omega(\pi^{n(\psi)+sw(\chi)+1}) \quad \varepsilon_o(\chi\ ,\ \psi\ ,\ dx)$$
$$\varepsilon\ (\chi\omega,\ \psi,\ dx) = \omega(\pi^{n(\psi)+a(\chi)}). \quad \varepsilon(\chi\ ,\ \psi\ ,\ dx) \quad .$$

3.5. Supposons K non archimédien, et reprenons les notations 2.2.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps E de caractéristique 0 , ou sur $\mathbb{C}$. Les représentations $\rho : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(V)$ seront toujours supposées continues : un sous-groupe ouvert de I agit trivialement. Pour V l'espace d'une représentation et V^I le sous-espace des invariants sous l'inertie, on pose

(3.5.1) $$Z(V;t) = \det(1 - Ft^d,\ V^I)^{-1} \quad ,$$

(3.5.2) $$L(V) = Z(V;1) \qquad (\in E^* \cup \{\infty\})$$

Notons $\omega^t : W(\overline{K}/K) \longrightarrow E((t))^*$ le caractère non ramifié tel que $\omega^t(F) = t^d$ (en un sens évident, on a $\omega_s = \omega^{(p^{-s})}$). On a

(3.5.3) $$Z(V,t) = L(V \otimes \omega^t) \quad .$$

3.6. C'est pour que (3.2.3) et (3.5.2) soient compatibles que nous avons normalisés l'isomorphisme du corps de classe local de telle sorte que les Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes. Tant (3.2.3) que (3.5.2) sont très naturels : 3.2.3 s'impose du point de vue analytique (cf. 3.3.1), et 3.5.2 suit la tradition des géomètres: c'est le Frobenius <u>géométrique</u> qui tend à agir sur la cohomologie des variétés algébriques avec pour valeurs propres des entiers algébriques.

3.7. Les représentations (continues) complexes irréductibles de $W(\overline{K}/K)$ sont, pour K complexe, les quasi-caractères. Pour K réel, elles sont, outre les quasi-caractères de K^*, les représentations induites par les quasi-caractères χ de $\overline{K}^*$ tels que $\chi \neq \chi \circ \sigma$, pour σ la conjugaison complexe de $\overline{K}$.

Pour toute représentation complexe V, exprimée, dans le groupe de Grothendieck des représentations de $W(\overline{K}/K)$ comme somme de représentations simples, on définit $L(V)$ comme suit

1) $K \simeq \mathbb{R}$ et $V = \Sigma\,[\chi_i] + \Sigma\, \mathrm{Ind}_{\overline{K}^*}^{W}(\chi_j)$.

$$L(V) = \prod_i L_K(\chi_i) \prod_j L_{\overline{K}}(\chi_j) \quad .$$

2) $K \simeq \mathbb{C}$ et $V = \Sigma\,[\chi_i]$:

$$L(V) = \prod_i L(\chi_i) \quad .$$

<u>Proposition</u> 3.8. <u>Soient</u> K <u>un corps local et</u> $\overline{K}$ <u>une clôture algébrique de</u> K .

(i) <u>Pour toute suite exacte</u> $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$ <u>de représentations complexes de</u> $W(\overline{K}/K)$, <u>on a</u>

$$L(V) = L(V')\, L(V'') \qquad (3.8.1)$$

(ii) <u>Soient</u> L <u>une extension finie séparable de</u> K <u>dans</u> $\overline{K}$ <u>et</u> V_L <u>une représentation complexe de</u> $W(\overline{K}/L)$. <u>Soit</u> V_K <u>la représentation induite de</u> $W(\overline{K}/K)$. <u>On a</u>

$$L(V_K) = L(V_L) \qquad (3.8.2)$$

L'assertion (i) est triviale. Dans le cas archimédien, l'assertion (ii) résulte de la formule de duplication

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s).\, \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) \quad ,$$

correspondant à

$$\mathrm{Ind}([\omega_s]) = [\omega_s] + [x^{-1}.\omega_{s+1}] \quad .$$

Prouvons (ii) pour K non archimédien. Notant k et ℓ les corps résiduels de K et L, on a

$$V_K^{I_K} = \left[\mathrm{Ind}_{W(\overline{K}/L)}^{W(\overline{K}/K)} (V_L) \right]^{I_K} = \mathrm{Ind}_{W(\overline{k}/\ell)}^{W(\overline{k}/k)} (V_L^{I_L})$$

(isomorphisme de $W(\overline{k}/k)$-représentations), les deux membres s'identifiant à

$$\mathrm{Hom}_{W(\overline{K}/L)} (W(\overline{k}/k),\ V_L)$$

(fonctions covariantes de $W(\overline{k}/k)$ dans V_L , $W(\overline{K}/L)$ agissant sur $W(\overline{k}/k)$ par translation ; cf. le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W(\overline{K}/L) & \longrightarrow & W(\overline{k}/\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W(\overline{K}/K) & \longrightarrow & W(\overline{k}/\ell) \end{array} \quad) \ .$$

Ceci ramène (3.8.2) au lemme bien connu suivant.

Lemme 3.9. *Soient* F *un endomorphisme de* V, *n un entier et* F_n *l'endomorphisme de* $V^n = V \otimes \mathbb{C}^n$ *tel que* $F_n(v \otimes e_i) = v \otimes e_{i+1}$ $(0 \leq i < n-1)$ *et* $F_n(v \otimes e_{n-1}) = F(v) \otimes e_o$. *On a*

$$\det(1 - F_n t) = \det(1-F\, t^n) \quad .$$

Par le principe de prolongement des identités algébriques, on peut supposer F diagonal, dans une base convenable de V ; on se ramène dès lors aussitôt au cas où $\dim(V) = 1$, et où F est la multiplication par un nombre $a^n (a \neq 0)$. Dans la base $f_i = a^{-i}(v \otimes e_i)$, on a alors $F_n(f_i) = a\, f_{i+1}$ $(i \in \mathbb{Z}/n)$. Les vecteurs propres de F_n sont les $\Sigma\, \chi(i) f_i$ (χ caractère de $\mathbb{Z}/n$), et

$$\det(1-F_n t) = \prod_{\xi^n=1} (1-a\xi t) = 1 - a^n t^n \quad .$$

3.10. Soit K un corps global ($\mathbb{A}$-corps, au sens de [15]). Pour toute place v de K, on notera K_v le corps local complété de K en v. Les objets définis plus haut pour tout corps local seront, pour K_v, notés avec un indice v. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de K, $\| \ \|$ la valeur absolue (vérifiant $d(ax) = \|a\|\, dx$ pour une mesure de Haar dx sur $\mathbb{A}$), et ω_s le quasi-caractère $\|x\|^s$ de $\mathbb{A}^*$. Notant x_v la composante de $x \in \mathbb{A}$ dans K_v, on a donc

$$\|x\| = \prod_v \|x_v\|_v \quad .$$

On désignera par dx l'unique mesure de Haar sur $\mathbb{A}$ telle que

$$\int_{\mathbb{A}/K} dx = 1$$

(mesure de Tamagawa), par d^*x une mesure de Haar sur $\mathbb{A}^*$, et par ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}/K$, de composantes locales ψ_v. Pour f C^∞ à support compact sur $\mathbb{A}$, on pose

$$\hat{f}(y) = \int f(x)\ \psi(xy)\ dx \quad .$$

3.11. L'équation fonctionnelle globale de Tate [14] s'écrit, pour χ un quasi-caractère de $\mathbb{A}^*/K^*$ et $\chi' = \omega_1\chi^{-1}$

(3.11.1) $$\int \hat{f}(x)\ \chi'(x)\ dx^* = \int f(x)\ \chi(x)\ d^*x$$

(intégrales définies par prolongement analytique dans les familles $\chi.\omega_s$).

Posons

(3.11.2) $$L(\chi) = \prod_v L(\chi_v)$$

(défini par prolongement analytique), et, pour $dx = \otimes\, dx_v$,

(3.11.3) $$\varepsilon(\chi) = \prod_v \varepsilon(\chi_v,\ \psi_v,\ dx_v) \quad .$$

Le produit 3.11.3 est indépendant du choix de ψ et de celui de la décomposition de dx , comme on déduit de (3.3.2) et (3.3.3). Si, pour presque tout v , $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$, presque tous ses facteurs sont égaux à 1 .

Les formules (3.3.1) et (3.11.1) fournissent l'équation fonctionnelle globale des fonctions L de Hecke

(3.11.4) $$L(\chi) = \varepsilon(\chi)\ L(\chi') \quad .$$

3.12. Les résultats énoncés ci-dessous sont démontrés dans [1] et [19] .

Soient K un corps global, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et V une représentation complexe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$). (Toujours supposée continue : l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ se factorise par un groupe de Galois fini $\mathrm{Gal}(K'/K)$ Pour chaque place v de K, soit encore v une place de $\overline{K}$ au-dessus, et V_v la représentation déduite de V par restriction au sous-groupe $W(\overline{K}_v/K_v)$ du groupe de décomposition $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$.

(A) Pour χ un quasi-caractère de $\mathbb{A}^*/K^*$, de composantes locales χ_v , le produit infini

$$L(V,\chi) = \prod_v L(V_v \otimes \chi_v)$$

peut être défini par prolongement analytique en χ : dans les familles $\chi.\omega_s$, il converge pour $\mathrm{Re}(s)$ grand, et se prolonge en une fonction méromorphe de s.

(B) Notons V^* le dual de V . On a

$$L(V,\chi) = \varepsilon(V,\chi)\ L(V^*,\omega_1\,\chi^{-1}) .$$

avec $\varepsilon(V,\chi) \in \mathbb{C}^*$ de la forme $A.\,e^{Bs}$ pour χ variant dans les familles $\chi.\omega_s$.

(C) Soit L une extension finie de K dans $\overline{K}$, $N_{L/K}$ la norme, V_L une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, et $V_K = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)}^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}(V_L)$. Pour χ un quasi-caractère de $\mathbb{A}_K^*/K^*$, on a

$$\varepsilon(V_K,\psi) = \varepsilon(V_L,\ \chi\circ N_{L/K}) .$$

(A) et (B) se démontrent par réduction au cas où $\dim V = 1$, via le théorème de Brauer. (C) résulte de (B) et de ce que,

$$L(V_K,\chi) = L(V_L,\ \chi\circ N_{L/K})$$

(conséquence de 2.10).

On a aussi, de même,

$$\varepsilon(V' + V'', \chi) = \varepsilon(V',\chi).\varepsilon(V'',\chi) \quad , \tag{D}$$

ce qui permet de définir $\varepsilon(V,\chi)$ pour V seulement une représentation virtuelle.

§ 4. EXISTENCE DES CONSTANTES LOCALES

Théorème 4.1. Il existe une et une seule fonction ε , vérifiant les conditions (1) à (4) ci-dessous, qui associe un nombre $\varepsilon(V,\psi,dx) \in \mathbb{C}^*$ à chaque classe d'isomorphie de sextuples $(K, \overline{K}, \psi, dx, V, \rho)$ formés d'un corps local K , d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, d'un caractère additif non trivial $\psi : K \longrightarrow \mathbb{C}^*$, d'une mesure de Haar dx sur K , d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et d'une représentation $\rho : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(V)$.

(1) Pour toute suite exacte de représentations

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

on a $\varepsilon(V,\psi,dx) = \varepsilon(V',\psi,dx)\ \varepsilon(V'',\psi,dx)$.

Cette condition montre que $\varepsilon(V,\psi,dx)$ ne dépend que de la classe de V dans le groupe de Grothendieck des représentations de $W(\overline{K}/K)$ et permet de donner un sens à $\varepsilon(V,\psi,dx)$ pour V seulement une représentation virtuelle.

(2)
$$\varepsilon(V,\psi,a\ dx) = a^{\dim V}\ \varepsilon(V,\psi,dx)$$

En particulier, pour V virtuel de dimension 0, $\varepsilon(V,\psi,dx)$ est indépendant de dx. On le note $\varepsilon(V,\psi)$.

(3) Si L est une extension séparable finie de K dans $\overline{K}$ et que V_K est la représentation virtuelle de $W(\overline{K}/K)$ induite par une représentation virtuelle de dimension zéro V_L de $W(\overline{K}/L)$, on a

$$\varepsilon(V_K, \psi) = \varepsilon(V_L, \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K}) \quad .$$

(4) Si $\dim V = 1$, ρ étant défini par un quasi-caractère χ de K^* , on a

$$\varepsilon(V,\psi,dx) = \varepsilon(\chi,\psi, dx) \quad .$$

4.2. Soit $v = \sum_{i,j} n_{ij}(H_i, \chi_{ij}) \in R_+^o(W(\overline{K}/K))$ (1.10). On suppose les H_i deux à deux non conjugués. Soit K_i l'extension de K définie par H_i, et notons encore χ_i le quasi-caractère de K_i^* défini par χ_i. Pour un choix quelconque de mesures de Haar sur les K_i, et ψ un caractère additif de K, on pose

$$(4.2.1) \qquad \varepsilon(v,\psi) = \prod_{i,j} \varepsilon(\chi_{i,j}, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K_i/K}, dx_i) \quad .$$

Il résulte de (3.3.2) que ε est indépendant du choix des dx_i.

<u>Lemme</u> 4.3. <u>Avec la notation</u> 1.9.8, <u>pour</u> $v \in R_+^o(W(\overline{K}/K))$, <u>on a</u>

$$\varepsilon(v, \psi(ax)) = \det(v)(a) \; \varepsilon(v, \psi) \quad .$$

Il suffit de le vérifier pour v de la forme $(H,\chi) - (H,1)$, H correspondant à une extension L de K dans $\overline{K}$. Soit v_o la représentation virtuelle $[\chi] - [1]$ de $W(\overline{K}/L)$. La formule (3.3.3) fournit

$$\varepsilon(v, \psi(ax)) = \det(v_o)(a) \; \varepsilon(v,\psi) \quad .$$

On sait ([10] XII § 4) que l'inclusion de K^* dans L^* s'identifie au transfert $W(\overline{K}/K)^{ab} \longrightarrow W(\overline{K}/L)^{ab}$. Puisque $b(v) = \mathrm{Ind}(v_o)$, 4.3 résulte de 1.2.

<u>Lemme</u> 4.4. <u>Le théorème est vrai dans le cas archimédien</u>

Pour $K \simeq \mathbb{C}$, on définit ε par les formules (1) et (4), et (2) est automatique. Pour $K \simeq \mathbb{R}$, on vérifie sur 2.9 que l'application

$$b : R_+^o(W(\overline{K}/K) \longrightarrow R^o(W(\overline{K}/K))$$

est surjective, de noyau engendré par les $x_s - x_t$, pour

$$x_s = (\overline{K}^*, \omega_s) - [\omega_s] - [x^{-1}\omega_{s+1}] \quad .$$

Pour V une représentation virtuelle et $v \in R_+^o(W(\overline{K}/K))$ tel que $b(v) = V - \dim(V).[1]$, on pose

(4.4.1) $$\varepsilon(V,\psi,dx) = \varepsilon(v,\psi).\ \varepsilon(1,\psi,dx)^{\dim V} .$$

Vérifions que le second membre est indépendant du choix de v, i.e. que pour v vérifiant $b(v) = 0$, on a $\varepsilon(v,\psi) = 1$. D'après 4.3, il suffit le vérifier pour $\psi(x) = \exp(2\pi\, ix)$. Pour ce choix de ψ , l'assertion résulte de la détermination ci-dessus de $\mathrm{Ker}(b)$ et du fait que le second membre de (3.4.1), (3.4.2) soit indépendant de s .

Il est clair que ε défini par (4.4.1) vérifie (1) à (4).

On se restreint maintenant au cas non archimédien.

4.5. Soit K un corps local non archimédien, $\overline{K}$ une clôture séparable de K et $K_{nr} \subset \overline{K}$ l'extension non ramifiée maximale de K . Soit J un sous-groupe distingué ouvert du groupe d'inertie $I = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_{nr})$ et L l'extension correspondante de K_{nr} . Pour $\sigma \in I/J$, on pose

$$i_{I/J}(\sigma) = \inf\ (v_L(\sigma(x)-x)\ \mid x \text{ entier dans } L)$$

et on définit des fonctions $a_{I/J}$ et $sw_{I/J}$ par les formules

(4.5.1)
$$a_{I/J}(\sigma) = -i_{I/J}(\sigma) \qquad \text{pour } \sigma \neq e$$

$$sw_{I/J}(\sigma) = 1-i_{I/J}(\sigma) \qquad \text{pour } \sigma \neq e$$

$$\sum_\sigma a_{I/J}(\sigma) = \sum_\sigma sw_{I/J}(\sigma) = 0$$

D'après Artin (voir [10] VI § 2 Th. 1), $a_{I/J}$ est le caractère d'une représentation $A_{I/J}$ de I/J, la <u>représentation d'Artin</u>. D'après loc. cit. prop. 2, $sw_{I/J}$ est de même le caractère d'une représentation $Sw_{I/J}$, la <u>représentation de Swan</u>. Ces représentations ne sont définies qu'à isomorphisme près. $A_{I/J}$ est somme de $Sw_{I/J}$ et de la représentation d'augmentation de I/J . Pour $I \supset J \supset K$, on a (loc. cit. prop. 3)

(4.5.2) $$(A_{I/K})^{J/K} \xrightarrow{\sim} A_{I/J} \qquad \text{et donc}$$

$$(Sw_{I/K})^{J/K} \xrightarrow{\sim} Sw_{I/J} \quad .$$

Si d est la valuation du discriminant $\delta_{L/K_{nr}}$, i.e. la valuation de la différente $\mathfrak{D}_{L/K}$ ([10] III § 3 prop. 6) et que r désigne une représentation régulière, on a (loc. cit.prop. 4)

$$(4.5.3) \qquad A_{I/K} \mid J/K = d.\, r_{J/K} + A_{J/K} \quad .$$

Soit V une représentation de $W(\overline{K}/K)$, triviale sur $J \subset I$, et de caractère ψ. On définit les conducteurs d'Artin et de Swan de V par les formules

$$(4.5.4) \qquad a(V) = \dim \mathrm{Hom}_{I/J}(A_{I/J}, V) = sw(V) + \dim V - V^I$$

$$sw(V) = \dim \mathrm{Hom}_{I/J}(Sw_{I/J}, V) = \frac{1}{I/J} \Sigma\, sw_{I/J}(\sigma)\, \psi(\sigma) \quad .$$

D'après 4.5.2, ces conducteurs sont indépendants du choix de J.

Pour V de dimension 1, défini par un quasi-caractère χ, on a (loc. cit. prop. 5)

$$(4.5.5) \qquad a(V) = \text{conducteur } a(\chi) \text{ de } \chi \quad .$$

Les notations précédentes sont donc compatibles avec celles introduites en 3.4.

Avec la notation 1.9.8, on a

<u>Lemme</u> 4.5. <u>Pour</u> $v \in R_+^o(W(\overline{K}/K))$ <u>et</u> χ <u>un quasi-caractère non ramifié de</u> K^*, <u>on a</u>

$$\varepsilon(v.\chi,\psi) = \chi(\pi)^{a(v)}\, \varepsilon(v,\psi) \quad .$$

Il suffit de le vérifier pour v de la forme $(H,\lambda) - (H,\mu)$, H définissant une extension L de K et λ,μ étant deux quasi-caractères de L^*. Soit d la valuation de la différente de l'extension L/K, f le degré de l'extension résiduelle, $I \subset W(\overline{K}/K)$ et $J \subset W(\overline{K}/L)$ les groupes d'inertie et $K \subset J$ assez petit. Calculons $a(v)$. La formule d'adjonction pour les représentations induites, (4.5.3) et (4.5.5) fournissent, pour tout quasi-caractère ν de H (i.e. de L^*)

$$(4.5.1)\qquad a((H,\nu)) = \dim\ \mathrm{Hom}_{I/K}(A_{I/K},\ \mathrm{Ind}_H^W(\nu)) = f\ \dim\ \mathrm{Hom}_{I/K}(A_{I/K}, \mathrm{Ind}_J^I(\nu|J))$$

$$= f\ \dim\ \mathrm{Hom}_{J/K}(A_{J/K} + d\ r_{J/K},\ [\nu|J]))$$

$$= f\ a\ (\nu) + fd \qquad\qquad \text{d'où}$$

$$a(v) = f(a(\lambda) - a(\mu)) \quad .$$

Pour ν un quasi-caractère de L^*, χ_1 un quasi-caractère non ramifié de L^*, et $n = n\ \ (\psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K})$ comme en 3.4, on a d'après (3.4.3.1) ou (3.4.3.2),

$$\frac{\varepsilon(\nu.\chi_1,\ \psi \circ \mathrm{Tr},\ dx)}{\varepsilon(\nu\ ,\quad \psi \circ \mathrm{Tr},\ dx)} = \chi_1(\pi^{a(\nu)+n}) \qquad ,$$

d'où

$$\varepsilon(v.\chi,\ \psi)\ \ \varepsilon\ (v,\psi)^{-1} = \chi \circ N_{L/K}\ \ (\pi^{a(\lambda)\ -\ a(\mu)})$$

$$= \chi(\pi^{f(a(\lambda)\ -\ a(\mu))}) \qquad ,$$

ce qui est la formule annoncée.

Terminologie 4.6. Soient K_1 une extension galoisienne (finie ou non) de K, de groupe de Galois G , α un quasi-caractère de K^* et ψ un caractère additif non trivial de K . On dira qu'il existe une α, ψ - théorie des constantes pour K_1/K s'il existe $\varepsilon_{\alpha,\psi}$ du type suivant

(0) Pour H un sous-groupe ouvert de G, définissant une extension finie L de K , V une représentation de H, et dx une mesure de Haar sur L ,

$$\varepsilon_{\alpha,\psi}(V,\ dx)\ \in \mathbb{C}^* \qquad \text{est défini.}$$

(1) Pour une suite exacte de représentations $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$,

$$\varepsilon_{\alpha,\psi}(V,\ dx) = \varepsilon_{\alpha,\psi}(V',\ dx)\ \ \varepsilon_{\alpha,\psi}(V'',\ dx) \quad .$$

$\varepsilon_{\alpha,\psi}$ garde donc une sens pour les représentations virtuelles.

(2) On a

$$\varepsilon_{\alpha,\psi}(V,\ a\ dx) = a^{\dim V}\varepsilon_{\alpha,\psi}(V,dx) \quad .$$

En particulier, pour V virtuel de dimension 0, $\varepsilon_{\alpha,\psi}$ est indépendant de dx ; on le note $\varepsilon_{\alpha,\psi}(V)$.

(3) Pour $H_1 \subset H_2 \subsetneq G$, définissant $L_1 \supset L_2$, et V une représentation virtuelle de dimension 0 de H_1, on a

$$\varepsilon_{\alpha,\psi}(\mathrm{Ind}_{H_1}^{H_2}(V)) = \varepsilon_{\alpha,\psi}(V) \quad .$$

(4) Pour V de dimension 1, défini par un caractère χ de L^* ,

$$\varepsilon_{\alpha,\psi}(V,dx) = \varepsilon(\chi.\alpha\circ N_{L/K},\ \ \psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K},\ \ dx)$$

<u>Lemme</u> 4.7. <u>Soient</u> K_1/K <u>et</u> α <u>comme plus haut</u>, <u>et</u> ψ <u>un caractère additif non trivial de</u> K . <u>Il existe au plus une</u> α,ψ- <u>théorie des constantes pour</u> K_1/K . <u>Pour qu'il en existe une</u>, <u>il faut et suffit que pour tout</u> $v \in \mathrm{Ker}(R_+^o(G) \longrightarrow R(G))$, <u>on ait</u>

$$\varepsilon(v\ \alpha,\ \psi) = 1 \quad .$$

Soient $H \subset G$, L et V comme plus haut. D'après 1.5, il existe $v \in R_+^o(H)$ d'image $V - \dim(V).[1]$ dans $R(H)$. On a nécessairement

$$(4.7.1) \qquad \varepsilon_{\alpha,\psi}(V,dx) = \varepsilon(v.(\alpha\circ N_{L/K}),\ \psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K}).\ \varepsilon(\alpha\circ N_{L/K},\ \psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K},\ dx)^{\dim V} \quad ,$$

d'où l'unicité. L'hypothèse assure que $\varepsilon_{\alpha,\psi}$, défini par cette formule, est indépendant du choix de v ; on vérifie aisément les axiomes (0) à (4).

Lemme 4.8. (i) Soit β un quasi-caractère non ramifié de K^* (resp. $\psi' = \psi(ax)$ un caractère additif non trivial). Pour qu'il existe une α,ψ-théorie des constantes pour K_1/K, il faut et il suffit qu'il en existe une $\alpha.\beta,\psi$-théorie (resp. une α,ψ'-théorie). Pour H, L et V comme plus haut, $\psi_L = \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K}$, $\beta_L = \beta \circ N_{L/K}$ et $\alpha_L = \alpha \circ N_{L/K}$, on a alors

$$(4.8.1) \qquad \epsilon_{\alpha\beta,\psi}(V,dx) = \beta_L(\pi^{a(V\alpha_L) + \dim(V)n(\psi_L)}) \quad \epsilon_{\alpha,\psi}(V, dx)$$

$$(4.8.2) \qquad \epsilon_{\alpha,\psi'}(V,dx) = \|a\|_L^{-\dim(V)} \,.\, \det(V\alpha_L)(a). \quad \epsilon_{\alpha,\psi}(V, dx) \qquad .$$

La première assertion résulte du critère 4.7 et de 4.5 (resp. de 4.3). Il suffit de prouver (4.8.1) (4.8.2) pour $K = L$. De plus, on peut supposer que soit $V \in R^o(\mathrm{Gal}(K_1/K))$, soit $V = [1]$. Dans le premier cas, on applique 4.5 et 4.3. Dans le second, on utilise (4.7.1) et la définition 3.4.3.

On dira qu'il existe une α-théorie des constantes pour K_1/K si pour tout (pour un) ψ, il existe une α,ψ-théorie des constantes pour K_1/K. Pour $K_1 \supset L \supset K$, il existe alors une $\alpha \circ N_{L/K}$-théorie des constantes pour K_1/L.

Réduction 4.9. Le théorème 4.1 est impliqué par l'assertion suivante

(*) Pour tout corps local non archimédien K et toute extension galoisienne finie K_1/K, il existe un quasi-caractère non ramifié α de K^*, et une α-théorie des constantes pour K_1/K.

D'après 4.8, l'assertion (*) implique que, pour $\overline{K}$ une clôture séparable de K et α un quasi-caractère non ramifié quelconque de K^*, il existe une α-théorie des constantes pour $\overline{K}/K$. La discussion ci-dessous nous permettra de passer du groupe de Galois au groupe de Weil.

4.10. Toute représentation V de $W(\overline{K}/K)$ est triviale sur un sous-groupe d'indice fini convenable J de l'inertie I. Soit F un Frobenius géométrique. Puisque I/J est fini, une puissance convenable F^n de F agit trivialement sur I/J par conjugaison, donc est centrale dans $W(\overline{K}/K)/J$. On dira que V a un <u>type</u> si une puissance F^m de F^n n'a qu'une valeur propre a. Le <u>type</u> de V est alors l'élément de la limite inductive

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ n|m}} \{X_n, \varphi_{n,m}\} \qquad (X_n = \mathbb{C}^*, \quad \varphi_{n,m}(x) = x^{\frac{m}{n}})$$

défini par $a \in X_m = \mathbb{C}^*$. Toute représentation irréductible a un type.

Les représentations de $W(\overline{K}/K)$ de type donné τ formant une catégorie abélienne $\mathcal{R}_\tau$, et la catégorie de toutes les représentations de $W(\overline{K}/K)$ est somme de ces sous-catégories. Si $R_\tau(W(\overline{K}/K))$ est le groupe de Grothendieck de $\mathcal{R}_\tau$, on a donc

(4.10.1) $$R(W(\overline{K}/K)) = \bigoplus_\tau R_\tau(\overline{K}/K) \quad .$$

Les représentations semi-simples de type 1 sont exactement les représentations (continues) de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Si χ_τ est un quasi-caractère de type τ (il existe des quasi-caractères, même non ramifiés, de tous les types), la torsion par χ_τ définit donc un isomorphisme

(4.10.2) $$\otimes\, \chi_\tau : R(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)) \xrightarrow{\sim} R_\tau(W(\overline{K}/K)) \quad .$$

Soient L une extension séparable finie de K dans $\overline{K}$, et f le degré de l'extension résiduelle. Si une représentation V de $W(\overline{K}/L)$ est de type σ, la représentation induite de $W(\overline{K}/K)$ est de type σ^f. On dit que V est de K-type τ si $\sigma^f = \tau$. L'ensemble des représentations de K-type donné est donc stable par induction.

<u>Variante</u> 4.10.3. Les arguments précédents s'appliquent à tout groupe extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini, et aux limites projectives de telles extensions. Le

cas des groupes de Weil globaux nous sera utile plus tard.

4.11. Admettons (*). Pour tout type τ , soit χ_τ un caractère non ramifié de type τ . Puisqu'il existe une χ_τ -théorie des constantes, on peut définir ε sur $R_\tau(W(\overline{K}/K))$ par la formule

$$\varepsilon(V, \psi, dx) = \varepsilon_{\chi_\tau,\psi}(V \otimes \chi_\tau^{-1}, dx) \quad .$$

Il résulte de l'unicité 4.7. que cet ε est indépendant du choix de χ_τ .
On définit ensuite ε sur $R(W(\overline{K}/K))$ par additivité (4.10.1). D'après 4.7, s'il existe une théorie 4.1, elle est donnée par cet ε .
On a fait ce qu'il fallait pour que ε vérifie (1), (2), (4) et (3) lorsque V_L a un type. Il reste à vérifier (3) pour V_L de la forme $[\lambda \circ N_{L/K}]-[\mu \circ N_{L/K}]$, avec λ et μ deux quasi-caractères non ramifié de K^* , de types donnés.
On a, par (3.4.3.1), (3.3.2), (3.3.3)

$$\varepsilon([\lambda \circ N_{L/K}]-[\mu\circ N_{L/K}], \psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K}) = (\lambda\mu^{-1})\circ N_{L/K} (\pi_L^{n(\psi\circ\mathrm{Tr}_{L/K})}) \quad .$$

D'après 4.8, on a d'autre part

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}([\lambda\circ N_{L/K}]-[\mu\circ N_{L/K}]), \psi) = (\lambda\mu^{-1})(\pi_K^{a(\mathrm{Ind}(\mu\circ N_{L/K})) + [L:K]n(\psi)}) \quad .$$

Soient d la valuation de la différente de L/K, e l'indice de ramification et f le degré de l'extension résiduelle. La formule (4.5.1) fournit

$$a(\mathrm{Ind}(\mu\circ N_{L/K})) = fd$$

de sorte que la formule à démontrer se réduit à

$$f.n(\psi\circ\mathrm{Tr}_{L/K}) = f\, d + [L:K]\, n(\psi) , \quad \text{soit}$$

$$n(\psi\circ\mathrm{Tr}_{L/K}) = d + e.n(\psi) \quad ,$$

qui est essentiellement la définition de la différente ([10] III § 3).

Le point clef de la démonstration de (*) est le lemme suivant.

Lemme 4.12. Soit K'/K une extension galoisienne de corps globaux. Pour chaque place w de K, on choisit une place de K' au-dessus, et on la note encore w. Soient α un quasi-caractère du groupe des classes d'idèles de K, et v une place de K qui ne se décompose pas dans K'. Si, pour toute place finie $w \neq v$ de K, il existe une α_w-théorie des constantes pour K'_w/K_w, alors, il existe une α_v-théorie des constantes pour K'_v/K_v.

Soient ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$, et ψ_v sa v-composante. Nous allons construire une α_v, ψ_v-théorie des constantes pour K'_v/K_v.

On a $\mathrm{Gal}(K'/K) = \mathrm{Gal}(K'_v/K_v)$. Un sous-groupe H de $\mathrm{Gal}(K'_v/K_v)$ définit donc, outre une extension L_v de K_v, une extension L de K de complété L_v. Soit dx la mesure de Tamagawa sur $\mathbb{A}_L$ ($\mathbb{A}_L/L$ de volume 1), et posons $dx = \bigotimes_w dx_w$, avec dx_v choisi à l'avance. Toute représentation V_v de H définit une représentation V de $\mathrm{Gal}(K'/L)$ et, par restriction, des représentations V_w des groupes de décomposition $\mathrm{Gal}(K'_w/K_w)$. Une constante globale $\varepsilon(V,\alpha)$ a été définie en 3.12. Soit w une place de L, et notons encore w la place de K image. Pour w infinie, on dispose (4.4) de constantes locales $\varepsilon(V_w.(\alpha\circ N_{L/K})_w, (\psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K})_w, dx_w)$. Pour w finie autre que v, on dispose aussi par hypothèse de constantes $\varepsilon_{\alpha_w,\psi_w}(V_w, dx_w)$. Notant les unes et les autres $\varepsilon_\alpha(V_w, \psi, dx_w)$, on pose

$$\varepsilon_{\alpha_v,\psi_v}(V_v,dx_v) = \frac{\varepsilon(V,\alpha)}{\prod_{w\neq v} \varepsilon_\alpha(V_w,\psi,dx_w)} .$$

On vérifie que $\varepsilon_{\alpha_v,\psi_v}$ ne dépend pas du choix de la décomposition $dx = \bigotimes dx_w$, et vérifie les axiomes (0) à (4). Le point clef est 3.12(C).

Lemme 4.13. Soit K'/K une extension galoisienne de corps locaux. Il existe une extension galoisienne de corps globaux ${}_1K'/{}_1K$, et une place v de ${}_1K$ qui ne se décompose pas dans ${}_1K'$, telle que K s'identifie au complété de ${}_1K$ en v et K' à une sous-extension de ${}_1K'_v/{}_1K_v$.

C'est trivial : on prend d'abord ${}_1K'/{}_1K$ avec ${}_1K'_v \supset K' \supset K = {}_1K_v$, puis on remplace ${}_1K$ par l'extension définie par un groupe de décomposition en v .

Lemme 4.14. Soient K un corps global, S un ensemble fini de places finies de K et $m : S \longrightarrow \mathbb{N}$. Il existe un caractère α du groupe des classes d'idèles tel que, pour $w \in S$, le conducteur de α_w soit $\geq m(w)$, et que pour toute place finie hors de S, α_w soit non ramifié.

Si K est un corps de nombres, on peut en effet librement spécifier α sur $\prod_{w \text{ fini}} \mathcal{O}^*_w$, car ce sous-groupe compact de $\mathbb{A}^*$ ne rencontre K^* qu'en $\{1\}$.
Si K est un corps de fonctions, de corps de constantes k, on a

$$\prod_w \mathcal{O}^*_w \cap K^* = k^* \quad ,$$

et on remarque qu'il existe des caractères de $\mathcal{O}^*_w$, de conducteur arbitrairement grand, qui soient triviaux sur k^*.

D'après 4.12, 4.13 et 4.14, l'assertion 4.9 (*) et donc 4.1 résultent des deux lemmes suivants, où K'/K est une extension galoisienne finie de corps locaux non archimédien, de groupe de Galois G et α un quasi-caractère de K^*.

Lemme 4.15. Si α et K'/K sont non ramifiés, il existe une α-théorie des constantes pour K'/K .

Choisissons pour ψ un caractère de K tel que $n(\psi) = 0$. Il suffit alors de prendre $\epsilon_{\alpha,\psi}(V,dx) = \left(\int_{\mathcal{O}_L} dx\right)^{\dim(V)}$.

Lemme 4.16. Pour K'/K donné, il existe m tel que, si le conducteur m de α est $\geq m$, il existe une α-théorie des constantes pour K'/K.

Soit α de conducteur m et $n = [\frac{m+1}{2}]$. La fonction $\alpha(1+a)$ est alors additive en a pour $v(a) \geq m-n$. Si ψ est un caractère additif non trivial de K, il existe donc y, de valuation $-(m + n(\psi))$ et bien défini modulo

$(\pi^{-(n+x(\psi))})$, tel que

$$\alpha(1+a) = \psi(y\,a) \qquad \text{pour } v(a) \geqslant n.$$

Pour χ un quasi-caractère de K^*, de conducteur $\leq m-n$, on a alors

$$(4.16.1) \qquad \varepsilon(\chi\,\alpha,\ \psi,\ dx) = \sum_{u \in \mathcal{O}^*/(1+(\pi^n))} \int_{\pi^{-m-n(\psi)}u} \chi^{-1}(x)\alpha^{-1}(x)\psi(x)dx.$$

Pour $\pi^{-m-n(\psi)}u$ non contenu dans $y(1+(\pi^{m-n}))$, l'intégrale partielle correspondante est nulle : c'est l'intégrale d'un caractère additif non trivial. Puisque χ est constant de valeur $\chi(y)$ sur $y(1+(\pi^{m-n}))$, on a donc

$$\varepsilon(\chi\alpha,\ \psi,\ dx) = \chi^{-1}(y)\ \ \varepsilon(\alpha,\ \psi,\ dx) \quad .$$

Nous allons montrer que, pour m assez grand, on obtient une α,ψ-théorie des constantes pour K'/K en posant, pour $H \subset G$ définissant une extension L de K et V une représentation de H

$$\varepsilon_{\alpha,\psi}(V,dx) = \det(V)^{-1}(y).\ \ \varepsilon(\alpha\circ N_{L/K},\ \psi\circ Tr_{L/K}, dx)^{\dim V} \quad .$$

Les axiomes (0) (1) (2) sont triviaux. L'axiome (3) résulte de ce que l'inclusion de K^* dans L^* s'identifie au transfert $W(\overline{K}/K)^{ab} \longrightarrow W(\overline{K}/L)^{ab}$ ([10] XIII § 4) et de 1.2. Reste l'axiome (4).

Soit $H \subset G$ correspondant à L/K, et e l'indice de ramification. Rappelons que pour $u \in \mathcal{O}_L$ et n = le plus petit entier tel que $n\,e \geq 2v(u)$,

$$(4.16.2) \qquad N_{L/K}(1+u) = 1 + Tr_{L/K}(u) \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^n) \quad .$$

On le vérifie en écrivant la norme de (1+u) comme le produit de ses conjugués.

Nous noterons O(1) tout nombre borné en terme de K'/K seulement. D'après 4.16.2, si α est de conducteur m, $\alpha\circ N_{L/K}$ est de conducteur $em - O(1)$. De plus, pour $\dfrac{v(a)}{e} \geq \left[\dfrac{m+1}{2}\right] + O(1)$,

$$\alpha\circ N_{L/K}\,(1+a) = \alpha(1+\mathrm{Tr}(a)) = \psi\,(y\ \mathrm{Tra}) = \psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K}(ya) \quad .$$

Pour tout caractère χ de H , de conducteur $O(1)$, on peut refaire le raisonnement fait plus haut ; on obtient la formule voulue

$$\varepsilon(\chi.\alpha\circ N_{L/K}\,,\psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K},dx) = \chi^{-1}(y).\ \varepsilon(\alpha\circ N_{L/K},\ \psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K},\ dx) \quad .$$

§ 5. FORMULAIRE.

5. Formulaire.

(5.1) Outre la constante locale $\varepsilon(V,\psi,dx)$ définie par 4.1, nous considérerons aussi, dans le cas non archimédien, la constante ε_o définie par

$$\varepsilon(V,\psi,dx) = \varepsilon_o(V,\psi,dx).\ \det(-F,V^I)^{-1} \quad .$$

Les constantes ε et ε_o ont les propriétés suivantes.

(5.2) ε et ε_o sont additifs en V, donc gardent un sens pour V virtuel.

(5.3) ε et ε_o sont indépendant de dx pour V virtuel de dimension 0.

On les note $\varepsilon(V,\psi)$ et $\varepsilon_o(V,\psi)$. Plus précisément,

$$\varepsilon(V,\psi,a\ dx) = a^{\dim V}\ \varepsilon\ (V,\psi,\ dx)$$

et de même pour ε_o.

(5.4) $$\varepsilon(V,\psi(ax),\ dx) = \det(V)(a)\ \|a\|^{-\dim V}\ \varepsilon(V,\psi,dx) \quad ,$$

et de même pour ε_o.

(5.5) Pour K non archimédien et χ un quasi-caractère non ramifié de K^*, on a

(5.5.1) $$\varepsilon(V\chi,\psi,dx) = \chi(\pi^{a(V)+\dim(V).n(\psi)}).\ \varepsilon(V,\psi,dx)$$

et $$\varepsilon_o(V\chi,\Psi,dx) = \chi(\pi^{\dim(V)+sw(V)+\dim(V).n(\psi)})\ \varepsilon_o(V,\psi,dx) \quad .$$

En particulier, si on pose

$$\varepsilon(V,\psi,dx,s) = \varepsilon(V\,\omega_s,\ \psi,\ dx) \quad ,$$

et de même pour ε_o, on a

(5.5.2) $$\varepsilon(V,\psi,dx,s) = \varepsilon(V,\psi,dx).q^{-(a(V)+\dim(V).n(\psi)).s}$$

$$\varepsilon_o(V,\psi,dx,s) = \varepsilon_o(V,\psi,dx).\ q^{-(sw(V)+\dim(V)(n(\psi)+1)).s} .$$

Pour W une représentation non ramifiée, on a de même

(5.5.3) $$\varepsilon(V\otimes W,\psi,dx) = \det W(\pi^{a(V)+\dim(V).n(\psi)})\ \ \varepsilon(V,\psi,dx)^{\dim W}$$

$$\varepsilon_o(V\otimes W,\psi,dx) = \det W(\pi^{sw(V)+\dim(V).(n(\psi)+1)})\ \varepsilon_o(V,\psi,dx)^{\dim W} .$$

(5.6) Pour L/K une extension séparable finie, V_L une représentation virtuelle de dimension 0 de $W(\overline{K}/L)$ et V_K la représentation induite de $W(\overline{K}/K)$, on a

(5.6.1) $$\varepsilon(V_K,\psi) = \varepsilon(V_L,\psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K}) ,$$

et de même pour ε_o. En d'autres termes, il existe

$$\lambda(L/K,\ \psi,\ dx_L,\ dx_K) \in \mathbb{C}^*$$

tel que, pour V_L de dimension quelconque,

(5.6.2) $$\varepsilon(V_K,\psi,dx_K)=\lambda(L/K,\psi,dx_L,dx_K)^{\dim(V_L)}.\ \varepsilon(V_L,\psi\circ \mathrm{Tr}_{L/K},dx_L) .$$

La même formule vaut pour ε_o.

Dans Langlands [9], c'est (5.6.2) qui fournit le cadre de la théorie. De plus, il prend systématiquement pour dx la mesure de Haar autoduale pour ψ, et il l'omet de la notation. Les constantes sont de plus normalisées pour être de valeur absolue complexe 1. Tout ceci lui impose une autre formule (5.4).

5.7. Soient V^* le dual de V et dx' la mesure de Haar duale de dx, relativement à ψ. On a

(5.7.1) $$\varepsilon(V,\psi,dx).\ \varepsilon(V^*.\omega_1,\ \psi(-x),\ dx') = 1 .$$

En particulier, si K est non archimédien et que V est unitaire, de sorte que $V^* = \overline{V}$, on a

(5.7.2) $$|\varepsilon(V,\psi,dx)|^2 = \left(\frac{dx'}{dx}\right)^{-\dim(V)} . \; q^{a(V)+\dim(V).n(\psi)} .$$

5.8. ε apparaît dans l'équation fonctionnelle locale de Tate ; posant $\chi' = \omega_1\chi^{-1}$:

(5.8.1) $$\frac{\int \hat{f}(x)\chi'(x)d^*x}{L(\chi')} = \varepsilon(\chi,\psi,dx) \frac{\int f(x)\ \chi(x)\ d^*x}{L(\chi)} \qquad \text{(Tate)}.$$

Pour K non archimédien, $\gamma \in K^*$ de valuation $1+sw(\chi)+n(\psi)$, on a (3.4.3.4)

(5.8.2) $$\varepsilon_o(\chi,\psi,dx) = \int_{\gamma^{-1}\mathcal{O}^*} \chi^{-1}(x)\ \psi(x)\ dx$$

5.9. Pour K non archimédien, si χ est non ramifié on a $\varepsilon(\chi,\psi,dx) = \chi(\pi^{n(\psi)}).q^{n(\psi)}.\int_{\mathcal{O}} dx$. En particulier, si $n(\psi) = 0$ et que $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$, on a

$$\varepsilon(\chi,\psi,dx) = 1 .$$

5.10. Prenons K non archimédien, $a(\chi) \leq 1$, $n(\psi) = -1$ et $\int_{(\pi)} dx = 1$. Soient χ_k et ψ_k les caractères de k^* et k définis par χ et ψ . On a

(5.10.1) $$\varepsilon_o(\chi,\psi,dx) = -\tau(\chi_k,\psi_k) ,$$

où τ est la somme de Gauss

(5.10.2) $$\tau(\chi_k,\psi_k) = -\sum_{x\in k^*} \chi_k^{-1}(x)\ \psi_k(x) ,$$

égale à 1 pour χ_k trivial. En particulier,

(5.10.3) $$\varepsilon_o([\chi]-[1],\psi) = \tau(\chi_k,\psi_k) .$$

5.11. Soit K un corps global. Pour V une représentation du groupe de Weil global de K, ψ un caractère additif de non trivial de $\mathbb{A}_K/K$ et $dx = \bigotimes_v dx_v$ la mesure de Tamagawa sur $\mathbb{A}_K$, on pose

$$(5.11.1) \qquad L(V) = \prod_v L(V_v)$$

$$(5.11.2) \qquad \varepsilon(V) = \prod_v \varepsilon(V_v, \psi_v, dx_v) \quad .$$

L'équation fonctionnelle globale s'écrit

$$(5.11.3) \qquad L(V) = \varepsilon(V)\, L(V^* \omega_1)$$

<u>Démonstrations</u> : 5.2, 5.3, 5.6 et 5.8 sont 4.1 (1) et (2), (3), (4) (et 3.3) - 5.4 et 5.5 résultent de 4.8.

Il suffit de prouver (5.7.1) pour V défini par un caractère ; la formule résulte alors de (5.8.1) et de la formule d'inversion de Fourrier. (5.7.2) résulte de (5.7.1) et de (5.3) (5.4).

5.9 résulte de (3.4.3.1) et (5.10) de (5.8.2).

Enfin, 5.11 résulte de ce qui précède et de (3.11.4) par des arguments connus [1], [19].

La restriction de 4.1 au cas des extensions et des caractères modérement ramifiés équivaut aux identités suivantes sur les sommes de Gauss (5.10.2). On y désigne par k un corps fini à q éléments et par ψ un caractère additif non trivial de k .

5.12. (Hasse-Davenport). Soient k' une extension de k de degré n et χ un caractère de k^*. On a

$$\tau(\chi\circ N_{k'/k},\ \psi\circ Tr_{k'/k}) = \tau(\chi,\psi)^n \quad .$$

5.13. Soient χ un caractère de k^* et n un entier premier à q. Soit X un ensemble de représentants des classes d'isomorphie de couples (k',χ') formés d'une extension k' de k et d'un caractère χ' de k'^* tel que

(a) $\chi'(x^n) = \chi \circ N_{k'/k}(x)$ et

(b) χ' n'est pas de la forme $\chi'' \circ N_{k'/k''}$ pour k'' intermédiaire entre k et k', i.e. $\chi'^{q^{f'}} \neq \chi'$ pour $0 < f' < [k':k]$.

Posons

$$\tau(\chi,\psi^n) = \lambda_n(\chi,\psi) . \prod_{(k',\chi')\in X} \tau(\chi',\psi\circ \mathrm{Tr}_{k'/k}) .$$

Alors,

(5.13.1) $\lambda_n(\chi,\psi)$ est indépendant de χ .

Cette identité se dévisse en les deux suivantes.

5.14. (Langlands [9] 7.8). Soient ℓ un nombre premier à q, f l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/\ell)^*$, k' une extension de k de degré f, T un ensemble de représentants des orbites de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ dans les caractères (non triviaux) d'ordre ℓ de k'^* et χ un caractère de k^* . On a

$$\tau(\chi^\ell,\psi^\ell) . \prod_{\mu\in T} \tau(\mu,\psi\circ \mathrm{Tr}_{k'/k})$$
$$= \tau(\chi,\psi) . \prod_{\mu \in T} \tau(\chi\circ N_{k'/k}\cdot\mu, \psi\circ \mathrm{Tr}_{k'/k}) .$$

5.15 (Langlands [9] 7.9). Soient ℓ un nombre premier divisant q-1, T l'ensemble des caractères d'ordre ℓ de k^* , χ un caractère de k^* qui n'est pas une puissance $\ell^{\text{ième}}$, k' une extension de degré ℓ de k et χ' un caractère de k'^* tel que $\chi'(x^\ell) = \chi\circ N_{k'/k}(x)$. On a

$$\tau(\chi,\psi^\ell) . \prod_{\mu\in T} \tau(\mu,\psi) = \tau(\chi',\psi\circ \mathrm{Tr}_{k'/k}) .$$

5.16. <u>Démonstrations</u>. Si K'/K est une extension modérément ramifiée de corps locaux non archimédien et ψ un caractère additif de K tel que $n(\psi)$ -1, on a encore $n(\psi\circ Tr_{K'/K}) = -1$, de sorte que 5.10 s'applique tant à K qu'à K'.

Soit V une représentation modérément ramifiée $W(\overline{K}/K)$. On peut toujours l'écrire comme somme de représentations induites par des caractères modérés χ_i d'extensions <u>non ramifiées</u> K_i'/K.

$$V = \dim(V).[1] + \sum_i \operatorname{Ind}([\chi_i]-[1]) + \sum_i (\operatorname{Ind}([1])-[K_i:K][1]) \quad .$$

Soient k_i' le corps résiduel de K_i' et $\widetilde{\chi}_i$ le caractère de k^* défini par χ_i. Pour dx une mesure de Haar sur K telle que $\int_{(\pi)} dx = 1$, on trouve

$$\epsilon_o(V,\psi,dx) = (-1)^{\dim V} \, . \, \prod_i \tau(\widetilde{\chi}_i, \psi_k\circ Tr_{k_i'/k_i}) \quad . \tag{5.16.1}$$

La formule (5.12) s'obtient en prenant une extension non ramifiée K'/K, et en écrivant que, pour χ un caractère (ici modérément ramifié) de K^*, on a

$$\operatorname{Ind}(\chi\circ N_{K'/K} - [1]) = \sum_\mu [\chi\mu]-[\mu] \quad ,$$

où μ parcourt les caractères non ramifiés d'ordre divisant $[K':K]$. Cette formule (5.12) assure que le second membre de (5.16.1) ne dépend que de V.

Les identités 5.13 s'obtiennent en prenant une extension totalement ramifiée de degré n K'/K, et en conjugant 5.6.1 et (5.16.1) pour V induite par un caractère modéré χ de K'.

(5.14) et (5.15) sont le cas particulier de (5.13.1) où n est un nombre premier ℓ. Dans 5.14 (resp. 5.15), on suppose que le caractère χ de K'^* est (resp. n'est pas) une puissance $\ell^{\text{ième}}$.

§ 6. REDUCTION MODULO ℓ DES CONSTANTES LOCALES.

Soient K un corps local non archimédien, $\overline{K}$ une clôture séparable de K et reprenons les notations 2.2. Soit Λ un anneau commutatif dans lequel p soit inversible. On simplifierait l'exposé, sans perte de généralité, en supposant que Λ est local, voire un corps. Pour $x \in K$, $\|x\|$ a par hypothèse un sens dans Λ .

6.1. Une mesure de Haar μ sur K, à valeurs dans un $\mathbb{Z}[1/p]$-module M est une fonction simplement additive de parties compactes ouvertes de K, à valeurs dans M, et invariante par translation. La fonction additive définie par

$$\mu_o(a + x\,\mathcal{O}) = \|x\|$$

est l'unique mesure de Haar à valeurs dans $\mathbb{Z}[1/p]$ telle que $\mu_o(\mathcal{O}) = 1$, et toute mesure de Haar à valeurs dans M est de la forme $m.\mu_o$ $(m = \mu_o(\mathcal{O}) \in M)$.

On peut intégrer une fonction localement constante à support compact à valeurs dans Λ contre une mesure de Haar à valeurs dans Λ .

6.2. Soients $\rho : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL_\Lambda(V)$ une représentation du groupe de Weil sur un Λ-module libre (ou projectif) V, et J un sous-groupe distingué ouvert de I sur lequel ρ soit trivial. Pour tout nombre premier $\ell \neq p$, on sait que la représentation de Swan $Sw_{I/J}$ peut se réaliser comme un $\mathbb{Z}_\ell[I/J]$-module projectif. Si Λ est une $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre, $\mathrm{Hom}_{I/J}(Sw_{I/J}, V)$ est donc un Λ-module projectif. Si Λ est de plus local, il est libre ; son rang est le conducteur de Swan de V . Plus généralement, on vérifie qu'on peut toujours définir le conducteur de Swan de V comme une fonction localement constante à valeurs entières sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. Ce conducteur est invariant par extension de l'anneau des scalaires Λ .

6.3. Si ζ est une racine $(p^n)^{\text{ième}}$ de l'unité dans Λ , l'<u>ordre</u> de ζ est une fonction localement constante sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$: deux quelconques des polynômes cyclotomiques $\Phi_{p^i}(X)$ engendrent l'idéal trivial de $\Lambda[X]$ (puisque $p^{-1} \in \Lambda$), de sorte que Λ est produits d'anneaux Λ_i $(1 \leq i \leq n)$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de ζ vérifiant $\Phi_{p^i}(\zeta) = 0$. Sur $\mathrm{Spec}(\Lambda_i)$, ζ est d'ordre p^i .

Si ψ est un caractère additif (continu) de K à valeurs dans Λ^* , il est à valeurs dans les racines $(p^n)^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Ceci permet de définir $n(\psi)$ comme une fonction localement constante sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$; en un idéal premier λ , $n(\psi)$ est $+\infty$ si ψ est trivial mod λ , et le plus grand entier n tel que $\psi|\pi^{-n}\mathcal{O}$ soit trivial mod λ (ou dans le localisé Λ_λ, c'est pareil). Par abus de langage, on dit que $n(\psi)$ est non trivial si $n(\psi)$ n'est nulle part $+\infty$.

6.4. Pour ψ un caractère additif non trivial de K à valeurs dans Λ , $\chi \in \mathrm{Hom}(K^*,\Lambda^*)$, et dx une mesure de Haar à valeurs dans Λ , on peut maintenant définir

$$\varepsilon_o(\chi,\psi,\,dx) \in \Lambda^*$$

par la formule (3.4.3.4) (plus précisément, si $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ n'est pas connexe, on commence par écrire $\Lambda = \prod_i \Lambda_i$, avec $n(\psi)$ et $\mathrm{Sw}(\chi)$ constant sur $\mathrm{Spec}(\Lambda_i)$. On définit alors la $i^{\text{ème}}$ projection de ε_o par (3.4.3.4)).

<u>Théorème</u> 6.5. <u>Il existe une et une seule fonctions</u> ε_o <u>du type suivant</u>

(a) <u>Pour</u> K <u>un corps local non archimédien</u>, $\overline{K}$ <u>une clôture séparable de</u> K, Λ <u>un</u> corps <u>de caractéristique</u> $\neq p$, V <u>une représentation de</u> $W(\overline{K}/K)$ <u>dans un vectoriel de dimension finie sur</u> Λ , ψ <u>un caractère additif non trivial à valeurs dans</u> Λ <u>et</u> dx <u>une mesure de Haar</u> (<u>non nulle</u>) <u>à valeurs dans</u> Λ , <u>on a</u>

$$\varepsilon_o(V,\psi,dx) \quad \in \ \Lambda^* \qquad .$$

(b) ε_o <u>est invariant par extension du corps</u> Λ .

(c) <u>Soit</u> A <u>un anneau de valuation discrète de caractéristique résiduelle</u> $\neq p$, η <u>son corps des fractions et</u> $s = A/m$ <u>son corps résiduel</u>. <u>Pour</u> V <u>une représentation de</u> $W(\overline{K}/K)$ <u>dans un</u> A-<u>module libre de rang fini</u>, <u>et pour</u> ψ <u>et</u> dx <u>à valeurs dans</u> A, <u>on a</u> $\varepsilon_o(V_\eta, \psi, dx) \in A^*$, <u>et</u>

$$\varepsilon_o(V_s, \psi, dx) = \varepsilon_o(V_\eta, \psi, dx) \quad \bmod m .$$

(d) <u>Les conditions</u> (1) <u>à</u> (3) <u>de</u> 4.1 <u>sont vérifiées</u>

(e) <u>Pour</u> $\dim V = 1$, ε_o <u>est donné par</u> 6.4.

Par descente galoisienne, il suffit de traiter le cas où Λ est un corps séparablement clos. Si Λ est de caractéristique 0, l'énoncé, étant purement algébrique, résulte du cas $\Lambda = \mathbb{C}$ traité en 4.1. Supposons donc Λ de caractéristique $\ell \neq 0$.

Soient G un quotient fini de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et A un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique de corps résiduel $A/m = \Lambda$. On suppose ψ relevé en un caractère additif à valeurs dans A^* , dx en une mesure de Haar à valeurs dans A, et que le corps des fractions η de A est assez gros (1.4) relativement à G .

Pour tout caractère χ d'une sous-groupe de G à valeurs dans η^*, en fait dans A^* , la constante ε_o correspondante est clairement dans A . D'après 5.7.1, elle est même dans A^* . On en déduit que, pour toute représentation V_η de G sur η , on a $\varepsilon_o(V_\eta, \psi, dx) \in A^*$.

On sait que l'homomorphisme de décomposition $d : R_\eta(G) \longrightarrow R_\Lambda(G)$ est surjectif (les représentations virtuelles se relèvent). Pour $V \in R_\Lambda(G)$, et $V \in R_\eta(G)$ tel que $d(V) = V$, on pose

$$\varepsilon_o(V, \psi, dx) = \text{réduction } \bmod m \text{ de } \varepsilon_o(V, \psi, dx) \quad .$$

D'après 1.8, pour légitimer cette définition, il suffit de vérifier que

(*) Pour $H \subset G$ définissant une extension L de K, $\psi_L = \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K}$, et χ', χ'' deux caractères de H à valeurs dans η^*, si χ' est χ'' sont congrus mod m, on a

$$\varepsilon_o(\mathrm{Ind}_H^G([\chi']-[\chi'']), \psi_L) \equiv 1 \mod m \qquad .$$

Les conducteurs de Swan de χ' et χ'' sont tous deux égaux au conducteur de Swan de χ' mod m. Pour $\gamma = \pi^{1+\mathrm{Sw}(\chi')+n(\psi_L)}$, on a donc

$$\varepsilon_o = \int_{\gamma^{-1}\mathcal{O}_L^*} \chi'^{-1}(x) \quad \psi_L(x)\, dx \Bigg/ \int_{\gamma^{-1}\mathcal{O}_L^*} \chi''^{-1}(x) \quad \psi_L(x)\, dx \quad .$$

Numérateur et dénominateurs sont des unités, et sont clairement congrus mod m . On a donc $\varepsilon_o = 1$.

Pour V une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, on obtient ainsi une fonction ε_o ayant les propriétés annoncées. Ses propriétés formelles sont les mêmes que celles explicitées dans le formulaire 5.1 dans le cas $\Lambda = \mathbb{C}$. Pour passer de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ à $W(\overline{K}/K)$ on peut donc reprendre l'argument utilisé en 4.9, à l'aide de la deuxième formule (5.5.1).

Remarque 6.6. Dans tout ce numéro, il a été essentiel de travailler avec ε_o plutôt qu'avec ε . D'abord pour avoir à utiliser le conducteur de Swan (invariant par réduction mod ℓ) plutôt que le conducteur d'Artin, ensuite pour n'avoir pas à distinguer, dans la définition de $\varepsilon_o(\chi, \psi, dx)$, entre les cas non ramifié et modérément ramifié. La signification de ε_o apparaîtra plus clairement au numéro suivant

§ 7. FONCTIONS L MODULAIRES

7.1. Soit X une courbe projective non singulières sur $\mathbb{F}_p$. On suppose X irréductible, on note K son corps de fonctions rationnelles et on identifie points fermés de X et places de K . On ne suppose pas X géométriquement irréductible, i.e. $\mathbb{F}_p$ algébriquement fermé dans K .

7.2. Soit Λ un anneau noethérien. On sait ce qu'est un faisceau constructible de Λ-modules sur X_{et} (SGA 4 IX 2.3). Pour tout $x \in X$, et pour $k(\bar{x})$ une extension séparablement close de $k(x)$, un tel faisceau G a une fibre $G_{\bar{x}}$ en $\bar{x}$, qui est un Λ-module de type fini. Ce dernier ne dépend que de la clôture séparable de $\overline{k(x)}$ dans $k(\bar{x})$, et $\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$ agit sur $G_{\bar{x}}$ par transport de structure. De plus, pour v une place de K (point fermé de X), et $\bar{K}_v$ une clôture algébrique de K_v, on dispose d'une flèche de spécialisation

$$sp_v : G_{\overline{k(v)}} \longrightarrow G_{\bar{K}_v} .$$

Cette flèche est équivariante ; son image est donc contenue dans $G_{\bar{K}_v}^{I_v}$.
On dit que G est non ramifié en v si sp_v est un isomorphisme. Un faisceau constructible est presque partout non ramifié.

Une fois choisies une clôture séparable $\bar{K}$ de K et une place de $\bar{K}$ au-dessus de chaque place de K, on peut réciproquement définir un faisceau constructible de Λ-modules comme suit.

(a) On se donne les fibres $G_{\bar{K}}$ et $G_{\overline{k(v)}}$ (respectivement des Λ-$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ - ou Λ-$\mathrm{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$-modules, de type fini sur Λ).

(b) On se donne les flèches de spécialisation (équivariantes pour l'action des groupes de décomposition)

$$sp_v : G_{\overline{k(v)}} \longrightarrow G_{\bar{K}} .$$

Pour que (a) (b) définissent un faisceau, il suffit que les sp_v soient presque tous des isomorphismes.

7.3. Il nous sera commode de modifier la définition précédente en remplaçant les groupes de Galois par des groupes de Weil. Soit Y un schéma sur $\mathbb{F}_p$. Soient $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et $\overline{Y} = Y \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$. Un <u>faisceau de Weil</u> (resp. un faisceau de Weil de Λ-modules constructible) G sur Y est un faisceau (resp. un faisceau de Λ-modules constrcutible) $\overline{G}$ sur $\overline{Y}_{et}$, plus une action de Frobenius sur $\overline{G}$, au-dessus de son action sur $\overline{Y}$.

*<u>Remarque</u> (inutile) : Les faisceaux de Weil en ensembles sur Y forment un topos Y_{wet}. On peut le décrire comme un 2-produit fibré de topos : identifiant $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)_{et}$ au topos classifiant $B_{\hat{\mathbb{Z}}}$, on a

$$Y_{wet} = Y_{\acute{e}t} \times_{B_{\hat{\mathbb{Z}}}} B_{\mathbb{Z}} \quad . \quad *$$

Nous appellerons simplement <u>faisceaux</u> les faisceaux de Weil ; les faisceaux sur $\overline{Y}_{et}$ seront appelés <u>faisceaux étales</u>.

7.4. Un faisceau 7.3. de Λ-modules constructible peut se décrire en termes galoisien comme en 7.2, en ramplaçant partout $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v)$ par $W(\overline{K}/K)$, $W(\overline{K}_v/K_v)$ et $W(\overline{k}_v/k_v) = \mathbb{Z}$.

7.5. Soit K_v un corps local non archimédien. On définit un faisceau de Weil sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ en paraphrasant 7.3. Soit $\overline{K}_v$ une clôture séparable de K_v. Il revient au même de se donner un faisceau (de Weil) de Λ-modules constructible G sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ ou de se donner

a) la fibre $G_{\overline{K}_v}$, un Λ-$W(\overline{K}_v/k_v)$-module, de type fini sur Λ ;

b) la fibre $G_{\overline{k}_v}$, un Λ-$W(\overline{k}_v/k_v)$-module, de type fini sur Λ ;

c) la flèche de spécialisation, $W(\overline{K}_v/K_v)$-équivariante :

$$sp : G_{\overline{k}_v} \longrightarrow G_{\overline{K}_v} \quad .$$

Soient v une place de K et $X_v = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$. Par restriction, tout faisceau (de Weil) de Λ-modules constructible sur X en définit un sur X_v.

Un faisceau est <u>plat</u> si ses fibres sont des Λ-modules plats.

7.6. Soit K_v un corps local non archimédien. On pose $\deg(v) = [k_v : \mathbb{F}_p]$ et on note ω^t le quasi-caractère non ramifié de $W(\overline{K}_v/K_v)$, à valeurs dans $\Lambda(t)$, tel que $\omega^t(F_v) = t^{\deg(v)}$.

Soit G un faisceau constructible plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$. On pose

$$Z(G_v,t) = \det(1-F_v t^{\deg(v)}, G_{\overline{k}_v})^{-1} = \det(1-F_v, G_{\overline{k}_v} \otimes \omega^t)^{-1} \tag{7.6.1}$$

Pour p inversible dans Λ, on définit un conducteur

$$a(G) = sw(G_{\overline{K}_v}) + \dim(G_{\overline{K}_v}) - \dim(G_{\overline{k}_v}) \tag{7.6.2}$$

(un entier si Λ est local, une fonction localement constante sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ en général).

Supposons que Λ soit un corps de caractéristique $\neq p$. Soient ψ un caractère additif non trivial de K_v à valeurs dans Λ^*, et dx une mesure de Haar à valeurs dans Λ, comme en 6.5. On pose

$$\varepsilon(G_v,\psi,dx,t) = \varepsilon_0(G_{\overline{K}_v} \otimes \omega^t, \psi, dx) . \det(-F_v t^{\deg(v)}, G_{\overline{k}_v})^{-1} \tag{7.6.3}$$

ε est un monôme. D'après (5.5.2), son degré en t est $a(G).\deg(v)$.

<u>Remarque</u> 7.7. Soit M une représentation de $W(\overline{K}_v/K_v)$. En termes galoisiens, **on** définit des faisceaux $j_!M$ et j_*M sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ par les flèches de spécialisation

$$j_! M : 0 \longrightarrow M$$

$$j_* M : M^{I_v} \longrightarrow M .$$

Les quantités ε et ε_0 des § précédents s'identifient à la quantité (7.6.3) relative respectivement à j_*M et $j_!M$. Au contraire de j_*, le foncteur $j_!$ commute à la réduction mod ℓ. Ceci peut expliquer pourquoi, au § 6, nous n'avons considéré que ε_0.

7.8. Soit G un faisceau constructible de Λ-modules plats sur X. Pour chaque place v de K, G induit un faisceau G_v sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$. On pose

$$(7.8.1) \qquad Z(G,t) = \prod_v Z(G_v,t) \in \Lambda[[t]] \quad .$$

7.9. Supposons que Λ soit un corps de caractéristique $\neq p$. Il existe sur l'anneau des adèles de K une unique mesure de Haar à valeurs dans $\mathbb{Z}[1/p]$ telle que $\int_{A/K} dx = 1$. On peut écrire $dx = \otimes_v dx_v$ (dx_v = mesure de Haar sur K_v, à valeurs dans $\mathbb{Z}[1/p]$; pour presque tout v, $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$). Les dx_v définissent des mesures de Haar à valeurs dans Λ.

S'il existe un caractère non trivial ψ de A/K, à valeurs dans Λ^*, on pose

$$(7.9.1) \qquad \varepsilon(G,t) = \prod_v \varepsilon(G_v, \psi_v, dx_v, t) \quad .$$

Presque tous les termes du produit sont égaux à 1, et le produit ne dépend pas du choix de ψ ni de la décomposition choisie de dx.

Soit Λ' déduit de Λ par adjonction d'une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de 1. Il existe ψ à valeurs dans Λ'^*. La constante globale correspondante, étant indépendante de ψ, est invariante par $\mathrm{Gal}(\Lambda'/\Lambda)$, donc dans Λ. Ceci permet de définir ε même s'il n'existe pas de caractère ψ.

7.10. Notons i l'inclusion de $\mathrm{Spec}(K)$ dans X. Si V est une représentation de $W(\overline{K}/K)$, on note $i_* V$ le faisceau sur X de fibre en $\overline{K}$ égale à V, et pour lequel les sp_v sont : $sp_v : V^{I_v} \hookrightarrow V$.

<u>Théorème</u> 7.11. <u>Soit</u> Λ <u>un corps de caractéristique</u> $\ell \neq p$. <u>Soient</u> G <u>un faisceau constructible de</u> Λ-<u>vectoriels</u>, <u>et</u> V <u>la fibre de</u> G <u>en</u> $\overline{K}$

(i) $Z(G,t)$ <u>est une fraction rationnelle en</u> t.

(ii) <u>Pour</u> $t \longrightarrow \infty$, $Z(G,t)$ <u>est asymptotique à</u> $\varepsilon(G,t)$. <u>En d'autres termes</u>, $Z(G,t)/\varepsilon(G,t)$ <u>est une série formelle en</u> t^{-1}, <u>de terme constant</u> 1.

(iii) $\quad Z(i_*V,t) = \varepsilon(i_*V,t) \quad Z(i_* V^*, pt^{-1})$.

Soit S un ensemble fini de places contenant toutes les places où la représentation V est ramifiée. Soit j l'inclusion de $X-S$ dans X, et soit $j_!V$ le faisceau sur X, de fibre générale V, non ramifié en dehors de S, et de fibre nulle en $v \in S$. On vérifie aussitôt que (i) (ii) équivalent à

(i') $Z(j_!V,t)$ est fonction rationnelle de t,

(ii') Pour $t \longrightarrow \infty$, $Z(j_! V,t) \sim \varepsilon(j_!V,t)$.

Supposons que $\ell \neq 0$. Pour toute représentation W de $W(\overline{K}/K)$, non ramifiée en dehors de S (identifiée à un faisceau localement constant sur $X-S$), posons $R^oj_*W = j_*W = i_*W$, R^1j_*W = le faisceau nul en dehors de S, de fibre en $v \in S$ égale à $H^1(I_v,W)$, et

$$(7.11.1) \qquad Z(Rj_*W,t) = Z(R^oj_* W,t)\ Z(R^1j_*W,t)^{-1} .$$

Soit P' le noyau de $t_\ell : I_v \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$. Pour toute représentation W de I_v sur Λ, on a canoniquement

$$(7.11.2) \qquad H^i(I_v,W) = H^i(I_v/P',W^{P'}) .$$

Pour toute représentation W de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, on a canoniquement

$$(7.11.3) \qquad H^o(\mathbb{Z}_\ell(1),\ W) = W^{\mathbb{Z}_\ell(1)} \qquad \text{(invariants)}$$

$$H^1(\mathbb{Z}_\ell(1),\ W) = W_{\mathbb{Z}_\ell(1)}(-1) \qquad \text{(coinvariants tordu).}$$

$$H^i(\mathbb{Z}_\ell(1),\ W) = 0 \qquad (i \geq 2) .$$

Puisque la dualité échange invariants et coinvariants, on a (cf. 2.3).

__Lemme__ 7.11.4. __Pour__ $\ell \neq 0$, $H^o(I_v,W)$ __et__ $H^1(I_v, \omega_1 W^*)$ __sont canoniquement en dualité__.

Nous n'utiliserons pas que cette dualité peut s'interpréter comme un cup-produit à valeurs dans $H^1(I_v,\Lambda(1)) = \mathrm{Hom}(I_v, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} \Lambda$, engendré par t_ℓ mod ℓ.

Pour $\ell = 0$, dans le courant de cette démonstration, nous poserons

$$H^1(I_v,W) =_{\mathrm{dfn}} H^o(I_v, \omega_1 W^*)^* \quad ,$$

et définirons $Z(Rj_*W,t)$ par (7.11.1). Cette définition est justifiée par 7.11.5 et 7.11.6 ci-dessous. Pour W une représentation de $W(\overline{K}_v/K_v)$, nous poserons encore

$$Z_v(Rj_*W,t) = \det(1-Ft^{\deg(v)},H^o(I_v,W))^{-1}.\det(1-Ft^{\deg(v)},H^1(I_v,W)) \quad .$$

Soient A un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique $\ell \neq p$ et W un A-module libre sur lequel $W(\overline{K}_v/K_v)$ agit. Soient η le corps des fractions de A, $s = A/m$ le corps résiduel.

<u>Lemme</u> 7.11.5. $Z_v(Rj_*W_s,t) = Z_v(Rj_*W_\eta,t) \mod m$.

La démonstration ci-dessous perdra son mystère au § 10.

Soient $P' = \mathrm{Ker}(t_\ell : I \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1))$, σ un générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, F un Frobenius géométrique et K le complexe concentré en degrés 0 et 1

$$K : W^{P'} \xrightarrow{\sigma-1} W^{P'} \quad .$$

L'endomorphisme $\sum_{i=1}^{q-1} \sigma^i$ de $W^{P'}$ est inversible: il suffit de le voir après réduction modulo l'idéal maximal de A . Après réduction, puisqu'un σ^{ℓ^n} est l'identité, σ est unipotent et q est l'unique valeur propre de $\Sigma\, \sigma^i$.
Soit $\underline{F} = (F_o,F_1)$ l'endomorphisme de K de composantes $F_o = F$ et $F_1 = F \circ (\sum_1^{q-1} \sigma^i)^{-1}$. La quantité

$$Z = \det(1-F_o t^{\deg(v)}, W^{P'})^{-1} \det(1- F_1 t^{\deg(v)},W^{P'})$$

est de formation compatible à l'extension des scalaires à η ou s . Après extension des scalaires à η (resp s), on a
$Z = \det(1-\underline{F}t^{\deg(v)}, H_o(K))^{-1} \det(1-\underline{F}t^{\deg(v)}, H_1(K))$. On conclut en notant que

$$(H^i(K_\eta),\ H^i(\underline{F})) \sim (H^i(I_v,W_\eta),\ F) \qquad \text{et}$$

$$(H^i(K_s),\ H^i(\underline{F})) \sim (H^i(I_v,W_s),\ F) \quad .$$

<u>Variante</u> 7.11.6. Supposons A complet et soit W un A-module sur lequel $W(\overline{K}_v/K_v)$ agit continûment pour la topologie ℓ-adique (et non plus, comme auparavant, pour la topologie discrète). On pose encore

$$H^1(I_v,W_\eta) = (W_\eta^{\ P'})_{\mathbb{Z}_\ell(1)}(-1) \qquad \text{(coinvariants tordu).}$$

et on définit $Z_v(Rj_*W,t)$ comme auparavant.

Le H^1 défini plus haut peut s'interpréter comme un H^1 continu :

(7.11.6.1) $$H^1(I_v,W_\eta) = \varprojlim H^1(I_v,W/\ell^n) \otimes_A \eta \quad .$$

La formule de réduction 7.11.5 reste valable (avec la même démonstration).

<u>Lemme</u> 7.11.7. <u>La formule</u> (iii) <u>équivaut à</u>

(7.11.8) $$Z(j_!V,t) = \varepsilon(j_!V,t).\ Z(Rj_*V,pt^{-1}) \quad .$$

7.11.7 résulte de l'identité locale

$$\det(1-F_vt^{\deg(v)},H^o(I_v,V))^{-1} = \det(-F_vt^{\deg(v)},H^o(I_v,V))^{-1}.\det(1-F_v(pt^{-1})^{\deg(v)},H^1(I_v,V^*))^{-1}$$

Si on remplace V par la représentation $V\otimes\omega^t$ de $W(\overline{K}_v/K_v)$ sur $\Lambda((t))$, cette formule se simplifie en

$$\det(1-F_v^{-1},H^o(I_v,V)) = \det(-F_v,H^o(I_v,V)).\det(1-F_v,H^1(I_v,\omega_1\otimes V^*))$$

qui résulte de la dualité locale 7.11.4.

Prouvons 7.11. Si $\Lambda = \mathbb{C}$, le produit infini $Z(j_*V,t)$ converge pour $|t|$ assez petit, et

$$L(V,s) = Z(j_!V,q^{-s}) \quad .$$

Z est donc une fonction méromorphe de t ; l'équation fonctionnelle montre qu'elle est à croissance modérée pour $t \longrightarrow \infty$, donc une fonction rationnelle de t. L'équation fonctionnelle de la fonction L fournit (iii).

Les énoncés (i) et (iii) sont purement algébriques. Etant vrais pour $\Lambda = \mathbf{C}$ (ainsi que (i') et (7.11.8)), ils restent vrais pour Λ de caractéristique 0. Supposons maintenant Λ de caractéristique $\ell \neq 0$.

Soit J un sous-groupe ouvert distingué de $W(\overline{K}/K)$, contenant I_v pour $v \in S$. Si une représentation V de $W(\overline{K}/K)/J$ sur Λ se relève en caractéristique 0, les assertions (i') et (7.11.8) pour V s'obtiennent par réduction mod ℓ (compte tenu, pour (7.11.8), de 7.11.5). Les quantités $Z(j_! V, t)$, $Z(Rj_* V, t)$ et $\varepsilon(j_! V, t)$ dépendent additivement de V (une extension donne un produit). Pour obtenir (i) et (7.11.8) en général il suffit donc de savoir que, après extension des scalaires toute représentation de $W(\overline{K}/K)/J$ se relève virtuellement en caractéristique 0. La méthode de 4.10 (cf. 4.10.3) ramène cette question au cas des groupes finis, i.e. au théorème de Brauer.

L'énoncé (ii') résulte de (7.11.8) et ce que, pour $t = 0$, $Z = 1$.

<u>Proposition</u> 7.12. <u>Si</u> Λ <u>est un corps de caractéristique</u> p <u>et</u> G <u>un faisceau constructible de</u> Λ-<u>vectoriels</u>, $Z(G,t)$ <u>est encore une fraction rationnelle en</u> t.

Dans la démonstration de 7.11 (i) nous n'avons en effet pas fait usage de l'hypothèse $\ell \neq p$.

§ 8. <u>REPRESENTATIONS ℓ-ADIQUES DES GROUPES DE WEIL LOCAUX NON ARCHIMEDIENS. STRUCTURES DE HODGE ET GROUPES DE WEIL LOCAUX ARCHIMEDIENS</u>.

8.1. Soit K un corps local non archimédien. Nous utiliserons les notations 2.1 et 2.2.

Soient ℓ un nombre premier $\neq p$ et E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\lambda$ (on pourrait prendre pour E_λ, plus généralement, un corps valué extension de $\mathbb{Q}_\ell$). Une <u>représentation</u> λ-<u>adique</u> V de $W(\overline{K}/K)$ est une représentation continue pour la topologie λ-adique $\rho : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(V)$ de $W(\overline{K}/K)$ sur un E_λ-vectoriel de dimension finie.

Le résultat suivant est démontré dans [13].

<u>Théorème</u> 8.2. (Grothendieck). <u>Soit</u> (V,ρ) <u>une représentation</u> λ-<u>adique de</u> $W(\overline{K}/K)$. <u>Il existe</u> $N \in End(V)(-1)$, <u>nilpotent</u>, <u>tel que pour</u> σ <u>dans un sous-groupe d'indice fini de</u> I, <u>on ait</u>

$$\rho(\sigma) = \exp(N.t_\ell(\sigma))$$

Ce $N \in End(V)(-1)$ est unique, donc invariant par Galois : pour $w \in W(\overline{K}/K)$, on a

$$\rho(w)\ N\ \rho(w)^{-1} = q^{v'(w)}.N \quad .$$

Nous allons utiliser 8.2 pour décrire les représentations λ-adiques de $W(\overline{K}/K)$ en termes indépendants de la topologie de E_λ. Ce sera fait deux fois : 8.3 est plus intrinsèque, et 8.4, qui nous suffit, plus élémentaire.

8.3.1. A isomorphisme unique près, il existe un et un seul groupe algébrique G sur $\mathbb{Q}_\ell$, isomorphe à $\mathbb{G}_a$, et muni d'un isomorphisme $\mathbb{Q}_\ell(1) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q}_\ell)$. On le note $\mathbb{G}_a(1)$.

8.3.2. Soit $J \subset I$ un sous-groupe invariant ouvert de $W(\bar{K}/K)$, et $J' = J \cap \mathrm{Ker}(t_\ell)$. Le quotient $W(\bar{K}/K)/J'$ est extension du groupe discret $W(\bar{K}/K)/J$ par J/J' ; appliquant à cette extension $t_\ell : J/J' \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathbb{G}_a(1)$, on obtient une extension W_J^ℓ de $W(\bar{K}/K)/J)$ par $\mathbb{G}_a(1)$ (voir Serre [12] II 1.3).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J/J' \arrow[r] \arrow[d] & W(\bar{K}/K)/J' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & W(\bar{K}/K)/J \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_a(1) \arrow[r, "\iota"] & W_J^\ell \arrow[r] & W(\bar{K}/K)/J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

8.3.3. Les W_J^ℓ forment un système projectif, et 8.2 signifie que toute représentation λ-adique de $W(\bar{K}/K)$ se factorise par une représentation algébrique d'un W_J^ℓ , i.e. par une représentation du schéma en groupes

$$W^\ell(\bar{K}/K) = \varprojlim_J W_J^\ell \quad .$$

8.3.4. Soient I_J^ℓ l'image réciproque de $I/J \subset W(\bar{K}/K)/J$ et $I^\ell = \varprojlim_J I_J^\ell$.

Associons à $\sigma \in I/J$, image de $\sigma \in I/J$, l'élément $\alpha(\sigma)\, \iota(-t_\ell(\sigma))$ de W_J^ℓ . Cette section définit des scindages

$$I_J^\ell = \mathbb{G}_a(1) \times I/J \qquad \text{et}$$

$$I^\ell = \mathbb{G}_a(1) \times I \qquad .$$

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[u] & W(\bar{K}/K) \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \times \mathbb{G}_a(1) \arrow[r] \arrow[u] & W^\ell(\bar{K}/K) \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_a(1) \arrow[r, equal] \arrow[u] & G_a(1) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

8.3.5. Soit $'W^{\ell}$ le produit semi-direct de $W(\overline{K}/K)$ par $G_a(1)$, sur lequel $W(\overline{K}/K)$ agit par $w\,x\,w^{-1} = q^{v'(w)}.x$. Il existe des isomorphismes β entre $W^{\ell}(\overline{K}/K)$ et $'W^{\ell}$ qui rendent commutatif

$$\begin{array}{ccccc} I \times \mathbb{G}_a(1) & \longrightarrow & W^{\ell}(\overline{K}/K) & \longrightarrow & W(\overline{K}/K) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \| \\ I \times \mathbb{G}_a(1) & \longrightarrow & 'W^{\ell}(\overline{K}/K) & \longrightarrow & W(\overline{K}/K) \end{array}$$

et on vérifie facilement que deux quelconques sont conjugués par un élément de $\mathbb{G}_a(1)$ $(\mathbb{Q}_{\ell})$ (l'indétermination est dans le choix d'un relèvement d'un Frobenius $F \in W(\overline{K}/K)$, et on utilise que $q-1 \neq 0$; voir 8.4.3 ci-dessous).

8.3.6. Soit $'W$ le schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$, produit semi-direct de $W(\overline{K}/K)$ par $\mathbb{G}_a$, sur lequel $W(\overline{K}/K)$ agit par $w\,x\,w^{-1} = q^{v'(w)}.x$. Chaque isomorphisme $\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a(1)$ (i.e. $\mathbb{Q}_{\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_{\ell}(1)$) définit un isomorphisme $'W_{\mathbb{Q}_{\ell}} \xrightarrow{\sim} 'W^{\ell}$, d'où une classe de tels automorphismes modulo $\mathbb{Q}_{\ell}^{*}$ agissant sur $'W^{\ell}$ via son action sur $\mathbb{G}_a(1)$.

On vérifie (voir 8.4.3) ci-dessous) que ce groupe d'automorphismes agit trivialement sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de $'W^{\ell}$. Au total, on a obtenu que

(8.3.7). Les classes d'isomorphie de représentations λ-adiques de $W(\overline{K}/K)$ sont en correspondance bijective naturelle avec les classes d'isomorphie de représentations sur E_{λ} du schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$ $'W$.

<u>Définition</u> 8.4.1. <u>Soit</u> E <u>un corps de caractéristique</u> 0. <u>Une</u> représentation <u>de</u> <u>de</u> $'W(\overline{K}/k)$ <u>sur</u> E <u>est un couple</u> $\underline{\rho} = (\rho', N')$ <u>consistant en</u>

(a) <u>une représentation de dimension finie</u> $\rho' : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(V)$ <u>de</u> $W(\overline{K}/K)$ <u>sur</u> E

(b) <u>un endomorphisme nilpotent</u> N <u>de</u> V, <u>tel que</u>

(8.4.1.1) $$\rho'(w) N \rho'(w)^{-1} = q^{v'(w)} N \quad .$$

8.4.2. Choisissons un Frobenius géométrique $F \in W(\overline{K}/K)$ et un isomorphisme $\tau : \mathbb{Q}_\ell(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell$. On associe comme suit une représentation (ρ',N') de $'W(\overline{K}/K)$ sur E_λ à une représentation λ-adique (V,ρ) de $W(\overline{K}/K)$:

(a) Pour $\sigma \in I$, on pose (N étant défini par 8.2)

$$\rho'(F^n \sigma) = \rho(F^n\sigma).\ \exp(-t_\ell(\sigma).N)$$

(b) $N' \in \mathrm{End}(V)$ correspond à N, via τ .

<u>Lemme</u> 8.4.3. <u>La classe d'isomorphie de</u> (ρ',N') <u>ne dépend que de</u> ρ , <u>non des choix de</u> F <u>et</u> τ .

Changeons F en $F\rho$, pour obtenir (ρ'',N'). On a

$$\rho''(F^n\sigma) = \exp(n\ t_\ell(\rho))\ \rho'(F^n\sigma) = A\ \rho'(F^n\sigma)\ A^{-1} \quad \text{pour}$$

$$A = \exp((1-q^{-1})^{-1}\ t_\ell(\rho)) \qquad .$$

Changer τ en $a\tau$ change (ρ',N') en (ρ',aN'). Nous montrerons que pour toute représentation (ρ',N') de $'W(\overline{K}/K)$ sur un corps E, et tout $a \in E$, $(\rho',N') \xrightarrow{\sim} (\rho',a\,N')$.

Soient $I' = \mathrm{Ker}(\rho')$ et n tel que F^n sont central dans W/I' (par exemple, $\# \mathrm{Aut}(I/I')$). Pour α une classe de conjugaison dans une clôture algébrique de E , soit V^α le plus grand sous-espace de V, stable par F^n , tel que les valeurs propres de $F^n \mid V^\alpha$ soient dans α .

On vérifie que

(a) V^α est stable sous $\rho'(W(\overline{K}/K))$, et $V = \oplus V^\alpha$

(b) $N\,V^\alpha \subset V^{q^{-n}\alpha}$.

Si A est la transformation linéaire, laissant stable les V^α , et telle que $A|V^\alpha = \lambda(\alpha)$, avec $\lambda(q^{-n}\alpha) = a\,\lambda(\alpha)$, on a donc

$$A(\rho',N')\,A^{-1} = (\rho',\,a\,N') \qquad .$$

De 8.4.3 on déduit aussitôt la conclusion 8.3.7.

8.5. Soit (ρ',N') une représentation de $'W(\overline{K}/K)$ sur E. Soit u la composante unipotente de $\rho'(F)$: $\rho'(F) = \rho'(F)^{ss} . u$. Puisque $N' \in E\, d(V)$ est vecteur propre de $\rho'(F)$, u et N' commutent. Puisqu'une puissance de F est centrale dans $\mathrm{Im}(\rho')$, une puissance de u, donc u centralise $\mathrm{Im}(\rho')$. Si $w_1, w_2 \in W(\overline{K}/K)-I$, $\rho'(w_1)$ et $\rho'(w_2)$ ont une puissance commune. On en déduit que u^n est la composante unipotente de $\rho'(F^n\sigma)$ $(\sigma \in I)$, et, pour $n \neq 0$, aussi celle de

$$\rho'(F^n\,\sigma).\exp\,(a\,N)$$

qui en est le conjugué par $\exp((1-q^{-n})^{-1}.a.N)$. Posons

$$\rho'^{ss}(F^n\,\sigma) = \rho'(F^n\sigma)\; u^{-n} \quad . \tag{8.5.1}$$

<u>Définition</u> 8.6. (i) (ρ'^{ss}, N') <u>est la</u> F-<u>semi-simplifiée de</u> (ρ',N')

(ii) <u>On dit que</u> (ρ',N') <u>est</u> F-<u>semi-simple si</u> $\rho' = \rho'^{ss}$, <u>i</u>.<u>e</u>. <u>si pour un</u> (resp. <u>pour tout</u>) $w \in W(\overline{K}/K)-I$ <u>et un</u> (resp. <u>tout</u>) $a \in E$,

$$\rho'(w)\;\exp\,(aN)$$

<u>est semi-simple</u>.

Pour une représentation λ-adique, on définit encore sa F-semi-simplifiée par (8.5.1), et la F-semi-simplicité comme en (ii).

8.7. Le formalisme 8.3 ou 8.4 permet de comparer des représentations λ-adiques pour différents corps E_λ. Pour ce faire, introduisons la terminologie classique suivante

- Soit F une extension de E, et ρ une représentation de $'W(\overline{K}/K)$ sur F. On dit que ρ est <u>définie</u> sur E si, pour toute (pour une) extension algébriquement close $\overline{F}$ de F, $\rho_{\overline{F}}$ est isomorphe à ses conjugués sous $\mathrm{Aut}(\overline{F}/E)$.

- Soient F_1 et F_2 deux extensions de E, et ρ_i une représentation de $'W(\overline{K}/K)$ sur F_i. On dit que ρ_1 et ρ_2 sont <u>compatibles</u> si elles sont définies sur E et que, pour $\overline{F} \supset F_1, F_2 \supset E$ une extension algébriquement close commune de F_1 et F_2 , $\underline{\rho}_{1\overline{F}}$ et $\underline{\rho}_{2\overline{F}}$ sont isomorphes.

Définition 8.8. *Soient* E *un corps de nombre,* λ_1 *et* λ_2 *deux places finies ne divisant pas* p *de* E *et* ρ_1 , ρ_2 *des représentations* λ_1 *- et* λ_2*-adiques de* $W(\overline{K}/K)$. *On dit que* ρ_1 *et* ρ_2 *sont compatibles si les représentations correspondantes de* $'W(\overline{K}/K)$ *le sont* (8.7).

On laisse au lecteur la vérification du plaisant exercice suivant.

Proposition 8.9. *Supposons* (V_1,ρ_1) *et* (V_2,ρ_2) F-*semi-simples*. *Soit* W *l'unique filtration finie croissante de* V_i *telle que* $N\ W^k \subset W^{k-2}$ *et que* N *induise un isomorphisme*

$$\mathrm{Gr}_W^j\,(V_i) \xrightarrow{\ N^j\ } \mathrm{Gr}_W^{-j}(V_i) \quad .$$

Pour que ρ_1 *et* ρ_2 *sont compatibles, il faut et il suffit que les caractères des représentations de* $W(\overline{K}/K)$ *sur les* $\mathrm{Gr}_W^j(V_1)$ *et* $\mathrm{Gr}_W^j(V_2)$ *soient à valeurs dans* F *et respectivement égaux*.

Exemple 8.10 (on fait $E = \mathbb{Q}$). Soit A une variété abélienne sur K . Les représentations de $W(\overline{K}/K) \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur les $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ sont F-semi-simples et compatibles.

Variante 8.11. Soit G un groupe algébrique linéaire sur E de caractéristique 0. Une *représentation* de $'W$ dans G (sur E) est un couple (ρ',N') : $\rho' : W(\overline{K}/K) \longrightarrow G(E)$ (trivial sur un sous-groupe ouvert) et $N' \in \mathrm{Lie}(G)$, (8.4.1.1) étant vérifié. Pour $E = E_\lambda$, les formules (8.4.2) associent une représentation de $'W$ dans G à toute représentation continue pour la topologie λ-adique $\rho : W \longrightarrow G(E_\lambda)$. Sa classe d'isomorphie géométrique (après extension des scalaires à $\overline{F}_\lambda$) ne dépend pas des choix arbitraires faits : la première partie de la démonstration 8.4.3 s'applique encore, il reste à montrer que $(\rho',N') \simeq (\rho',a\,N')$. Pour ce, on note que le sous-groupe algébrique

H de G qui centralise $Im(\rho')$ et envoie N' sur un multiple contient un $\rho'(F^m)$, donc un élément g tel que $\mathrm{ad}\,g(N') = q^m N'$. Le caractère $\chi : H \longrightarrow \mathbb{G}_m$ de H donnant l'action sur N' ne peut donc qu'être surjectif.

Si G est défini sur un corps de nombres E, on définit la compatibilité de représentation λ-adiques $W(\overline{K}/K) \longrightarrow G(E_\lambda)$ comme en 8.7, 8.8.

Le sorite 8.5, 8.6 se généralise tel quel.

8.12. <u>Facteur locaux</u> : Soit (ρ',N') une représentation de $'W(\overline{K}/K)$ sur un E-vectoriel V . Par abus de notation, on pose

$$V^I = \mathrm{Ker}(N')^{\rho'(I)} \qquad ;$$

c'est une représentation de $W(\overline{k}/k)$. On définit un conducteur, un facteur L local et des constantes locales par les formules

(8.12.1) $$a(V) = sw(V,\rho') + \dim V - \dim V^I$$

(8.12.2) $$Z(V,t) = \det(1-Ft^d, V^I)^{-1}$$

(8.12.3) $$\varepsilon_o(V,t) = \varepsilon_o(\rho',t)$$

(8.12.4) $$\varepsilon(V,t) = \varepsilon_o(\rho',t).\ \det(-Ft, V^I)^{-1} \quad .$$

Pour $(\rho'N')$ définis par une représentation λ-adique ρ sur V, on a

$$V^I = V^{\rho(I)}$$

$$Z(V,t) = \det(1-Ft, V^{\rho(I)})$$

$$\varepsilon_o(V,t) = \varepsilon_o \text{ (semi-simplifiée de } V,t)$$

<u>Le cas archimédien</u> : Dans le cas non archimédien, ce que fournit la géométrie (la cohomologie ℓ-adique) sont des représentation λ-adiques, i.e. des représentations de $'W(\overline{K}/K)$, non des représentations de $W(\overline{K}/K)$.

Dans le cas archimédien, de même, la géométrie fournit non des représentations de $W(\overline{K}/K)$, mais des structures de Hodge. Voici la règle à utiliser pour passer des structures de Hodge aux représentations.

(A) K complexe. La géométrie fournit des vectoriels V sur K, munis d'une bigraduation de Hodge

$$V = \oplus V^{pq}$$

(par exemple, pour X une variété algébrique sur K, $H^n(X,K)$ est muni d'une telle décomposition). On en déduit une représentation (semi-simple) ρ de $W(\overline{K}/K) = K^*$ sur V en posant

$$\rho(z).v^{pq} = z^{-p}\,\bar{z}^{-q}\,v^{pq} \quad (v^{pq} \in V^{pq}) \quad .$$

(B) K réel La géométrie fournit des vectoriels V sur $\overline{K}$, munis d'une bigraduation de Hodge $V = \oplus V^{pq}$ et d'une involution F_∞ telle que $F_\infty(V^{pq}) = V^{qp}$. Par exemple, pour X une variété algébrique sur K, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) = \mathbb{Z}/2$ agit sur $X(\overline{K})$ et $H^n(X(\overline{K}),\overline{K})$ est muni d'une telle structure.

On en déduit une représentation (semi-simple) ρ de $W(\overline{K}/K)$ sur V en posant

$$\rho(z).v^{pq} = z^{-p}\,\bar{z}^{-q}\,v^{pq} \qquad (z \in \overline{K}^* \subset W(\overline{K}/K),\ \ v^{pq} \in V^{pq}) \quad \text{et}$$

$$\rho(F).v^{pq} = i^{p+q}\,F_\infty(v^{pq}) \quad .$$

Ces formules diffèrent de celles de [3] 1.12 (défiguré en outre par une faute "d'impression" p. 21 ℓ2), parce qu'aux places finies j'utilisais dans loc. cit. l'inverse de l'isomorphisme de la théorie du corps de classe local utilisé ici.

Aux places finies, $H_2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell(1)$ correspond au quasi-caractère ω_1. De même, $H_2(\mathbb{P}^1(\overline{K}),\overline{K})$, structure de Hodge de type $(-1,-1)$, avec $F_\infty = -1$ si $K = \mathbb{R}$, correspond au quasi-caractère ω_1 de $W(\overline{K}/K)$.

§ 9. SYSTEMES COMPATIBLES DE REPRESENTATIONS ℓ-ADIQUES.

Pour simplifier l'exposé, nous ne considérerons dans ce § que des représentations de groupes de Galois (plutôt que des représentations de groupes de Weil). Comme en 7.1, on note X une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}_p$, irréductible sur $\mathbb{F}_p$, de corps de fonctions K.

9.1. Soit E_λ un corps local extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, avec $\ell \neq p$. Soit W une représentation λ-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, i.e. une représentation continue pour la topologie de E_λ et presque partout non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans un vectoriel de dimension finie sur E_λ. Le groupe de Galois étant compact, il existe dans W un réseau invariant W^o (un <u>réseau</u> est un sous-$\mathcal{O}_\lambda$-module libre de W tel que $E_\lambda W^o = W$). Les facteurs locaux

$$Z_v(W,t) = \det(1-F_v t^{\deg(v)} \ , \ W^{I_v})^{-1}$$

sont donc dans $\mathcal{O}_\lambda[[t]]$, ainsi que leur produit $Z(W,t)$. Soit $\mathrm{Gal}^o(\overline{K}/K)$ le noyau de l'application de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. D'après un théorème de GROTHENDIECK, $Z(W,t)$ est une <u>fraction rationnelle</u>, est même un <u>polynôme</u> si

$$W^{\mathrm{Gal}^o(\overline{K}/K)} = W_{\mathrm{Gal}^o(\overline{K}/K)} = 0 \quad ,$$

et vérifie une <u>équation fonctionnelle</u>

$$Z(W,t) = \varepsilon_{Gr}(W,t)\ Z(W^*\omega_1, t^{-1}) \quad , \tag{9.1.1}$$

où ε_{Gr} est un monôme de degré $\sum_v \deg(v).a(i_* W_v)$ (8.12.1).

Le lecteur trouvera au § 10 un résumé de la théorie de Grothendieck.

9.2. Soient E un corps de nombre, $\mathbb{L}$ un ensemble <u>infini</u> de places finies ne divisant pas p de E et $\mathcal{O} \subset E$ l'anneau des éléments de E λ-entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{L}$. On désigne encore par λ l'idéal premier de $\mathcal{O}$ défini par λ. Supposons donné, pour chaque $\lambda \in \mathbb{L}$, une représentation λ-adique ${}_{\lambda}V$ de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On suppose que, pour toute place v de K, les représentations λ-adiques ${}_{\lambda}V_v$ de $W(\overline{K}_v/K_v)$ soient compatibles, au sens strict (8.8). Il nous suffirait en fait de savoir que leurs F-semi-simplifiées (8.6) sont compatibles (cf. aussi 9.8). La fraction rationnelle $Z({}_{\lambda}V,t) \in \mathcal{O}(t)$ et la "constante" (un monôme)

$$\varepsilon({}_{\lambda}V,t) = \prod_v \varepsilon({}_{\lambda}V_v, \psi_v, dx_v, t) \in \mathcal{O}(t)$$

sont donc indépendantes de λ (comme d'habitude, les ψ_v sont les composantes d'un caractère non trivial de $\mathbb{A}/K$ et $\otimes\, dx_v$ est une mesure de Tamagawa). On note ces fonction et constante $Z(V,t)$ et $\varepsilon(V,t)$.

<u>Théorème</u> 9.3. <u>Sous les hypothèses précédentes</u>,

$$Z(V,t) = \varepsilon(V,t)\; Z(V^*, pt^{-1}) \qquad . \tag{9.3.1}$$

Puisque $\mathbb{L}$ est infini, l'application $\mathcal{O} \longrightarrow \prod \mathcal{O}/\lambda$ est injective : il suffit de prouver 9.3.1 après réduction mod λ pour tout $\lambda \in \mathbb{L}$. Nous allons pour cela mettre 9.3.1 sous une forme compatible à la réduction mod λ, et justifiable, mod λ, de (7.11.8).

Soient S un ensemble fini de places de K, contenant toutes les places où V se ramifie et j l'inclusion de $X-S$ dans X. Pour toute représentation λ-adique W, non ramifiée en dehors de S, nous poserons

$$Z(j_!W,t) = \prod_{v \notin S} \det(1-F_v t^{\deg(v)}, W_v)^{-1}$$

$$Z(Rj_*W,t) = \prod_v \det(1-F_v t^{\deg(v)}, W_v^{I_v})^{-1} \Big/ \prod_{v\in S} \det(1-F_v t^{\deg(v)}, W_{vI_v}(-1))^{-1}$$

$$\varepsilon(j_!W,t) = \prod_{v\notin S} \varepsilon(W_v, \psi, dx, t) . \prod_{v\in S} \varepsilon_0(W_v, \psi, dx, t) \qquad .$$

Un calcul facile, déjà fait en 7.11.7, montre que (9.3.1) équivaut à

$$(9.3.2) \qquad Z(j_! W,t) = \varepsilon(j_! W,t)\ Z(Rj_* W,t) \quad .$$

On conclut par 7.11.6 et 7.11.8.

<u>Stabilité</u> 9.4. Soient F une extension de E et $\mathbb{L}_F$ l'image réciproque de $\mathbb{L}$.

Un système compatible de représentations λ-adiques $(\lambda \in \mathbb{L})$ définit par extension des scalaires un système compatible de représentations λ-adiques $(\lambda \in \mathbb{L}_F)$. Si χ est un caractère du groupe des classes d'idèles, à valeurs dans les racines de l'unité de F, les ${}_\lambda V.\chi$ forment encore un système compatible, justiciable de 9.3.

<u>Corollaire</u> 9.5. <u>Soit</u> χ <u>un caractère du groupe des classes d'idèles, à valeurs dans les racines de l'unité d'une extension finie de</u> E (cf. 9.4). <u>Soient</u> $S(\chi)$ (resp. $S(V)$) <u>l'ensemble des places de</u> K <u>où</u> χ (resp. V) <u>se ramifie</u>. <u>Supposons que</u> $S(V) \cap S(\chi) = \emptyset$. <u>On a</u>

$$\varepsilon((V-\dim V[1])([\chi]-[1]),t) \quad = \text{ par définition}$$

$$= \varepsilon(V\chi,t)\ \varepsilon\ (V,t)^{-1}\ \varepsilon(\chi,t)^{-\dim(V)}\ \varepsilon([1],t)^{\dim(V)} =$$

$$= \prod_{v \in S(V)} \chi_v(\pi_v^{a(V_v)}) \quad . \prod_{v \in S(\chi)} \det V_v(\pi_v^{a(\chi_v)}) \quad .$$

C'est un corollaire de 5.5.3.

<u>Exemple</u> 9.6. (pour $E = \mathbb{Q}$, $\mathbb{L}$ = les nombres premier autres que p). Si F est une courbe elliptique sur K, les $H^1(F,\mathbb{Q}_\ell)$ forment un système compatible de représentations ℓ-adiques. Si l'invariant modulaire j n'est pas constant, pour tout caractère χ comme en 9.5, les fractions rationnelles $Z(F\chi,t)$ correspondantes sont des polynômes, et vérifient 9.5.

9.7. On renvoie à Weil [16] pour la relation que 9.5 implique, lorsque $\dim(V) = 2$, entre $Z(V,t)$ et "formes modulaires" sur $GL(2,\mathbb{A})/GL(2,K)$. Le cas le plus intéressant est fourni par 9.6.

On obtient des résultats plus précis en invoquant Jacquet-Langlands. Soit par exemple E une courbe elliptique sur K, d'invariant modulaire non constant. D'après le dictionnaire de Langlands (voir [4] § 3), pour chaque place v de K, la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v) \supset W(\overline{K}_v/K_v)$ sur $H^1(E,\mathbb{Q}_\ell)$, définit une représentation admissible irréductible π_v de $GL_2(K_v)$. Les représentations $H^1(E,\mathbb{Q}_\ell)$, pour ℓ variable, étant compatibles, π_v peut être défini sur $\mathbb{Q}$ et est indépendant de ℓ. Nous considérerons la représentation complexe correspondante. La représentation π_v est de dimension infinie, de poids 2 (i.e. le centre K_v^* de $GL(2,K_v)$ agit par ω_2), et a presque toujours un vecteur $GL(2,\mathcal{O}_v)$-invariant. D'après 9.3, 9.6 et [8] 11.5 le produit tensoriel restreint $\pi(E) = \bigotimes_v \pi_v$ figure comme facteur direct dans la représentation admissible $L^o_{\omega_2}(GL(2,\mathbb{A})/(GL(2,K))$ de $GL(2,\mathbb{A})$ dans l'espace des fonctions localement constantes sur $GL(2,\mathbb{A})/GL(2,K)$, se transformant sous l'action du centre par le quasi-caractère ω_2, à support compact modulo le centre et cuspidales.

<u>Théorème</u> 9.8. <u>Soient</u> λ, μ <u>des places de</u> E <u>et</u> ${}_\lambda V$, ${}_\mu V$ <u>des représentations</u> λ- <u>et</u> μ-<u>adiques de</u> $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. <u>Soit</u> S <u>un ensemble fini de places de</u> K <u>et supposons que</u>, <u>pour</u> $v \notin S$, <u>les semi-simplifiées de</u> ${}_\lambda V_v$ <u>et</u> ${}_\mu V_v$ <u>soient compatibles</u>. <u>Alors</u>, <u>pour</u> toute <u>place</u> v, <u>les semi-simplifiées de</u> ${}_\lambda V_v$ <u>et</u> ${}_\mu V_v$ <u>sont compatibles</u>.

Si S est pris assez grand pour contenir toutes les places ramifiées pour ${}_\lambda V_v$ ou ${}_\mu V_v$, l'hypothèse se réduit à

(*) Pour $v \notin S$, les polynômes caractéristiques de F_v agissant dans ${}_\lambda V_v$ et ${}_\mu V_v$ sont dans $E[t]$ et égaux.

Le théorème 9.8 est donc une réponse partielle, dans le cas le moins intéressant des corps de fonctions, à la question 1 de Serre [12] I 12.

On prendra garde aux points suivants.

(a) La conclusion porte seulement sur les semi-simplifiées des représentations locales, <u>non</u> sur leur F-semi-simplifiée. En d'autres termes, avec les notations de 8.4.2, on considère seulement la semi-simplifiée de ρ' , et <u>non</u> N .

(b) Pour $\lambda = \mu$, ${}_\lambda V = {}_\mu V$, le théorème affirme que les semi-simplifiées des représentations locales ${}_\lambda V_v$ de $W(\overline{K}_v/K_v)$ sont définies sur E , i.e. ont un caractère à valeurs dans E .

On peut supposer, et on suppose que S contient toutes les places où I_v agit via un groupe infini. Pour $v \notin S$, il n'y a dès lors plus à distinguer entre semi-simplifiée de ${}_\lambda V_v$ et F-semi-simplifiée.

Appliquons le théorème de Grothendieck rappelé en 9.1

$$Z({}_\lambda V,t) = \varepsilon_{Gr}({}_\lambda V,t)\ \ Z({}_\lambda V^* \omega_1, t^{-1}) \quad ;$$

cette identité se récrit

$$\prod_{v\notin S} Z_v({}_\lambda V,t) . \prod_{v\notin S} Z_v({}_\lambda V^* \quad ,t^{-1})^{-1} = \varepsilon_{Gr} \frac{\prod_{v\in S} Z_v({}_\lambda V^* \omega_1, t^{-1})}{\prod_{v\in S} Z_v({}_\lambda V \omega_1, t)}$$

où le premier membre est dans $E(T)$ et le même pour ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$. Le second membre est donc dans $E(T)$, indépendant de λ . Décomposant le second membre en le produit d'un monôme et d'une fraction rationnelle valant 1 en $t = 0$, on trouve par le calcul local de 7.11.7 que

$$\prod_{v \in S} (\det(1-F_v t^{\deg(v)}, {}_\lambda V^{I_v}) / \det(1-F_v t^{\deg(v)}, {}_\lambda V_{I_v}(-1))$$

est le même pour ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$. Les facteurs de ce produit sont additifs en ${}_\lambda V_v$ (une extension donne un produit ; cela résulte de (7.11.6.1)), donc les mêmes pour ${}_\lambda V_v$ et sa semi-simplifiée ${}_\lambda V_v^{ss}$. Pour celle-ci, invariants de I_v et coinvariants de I_v sont pareils, et on trouve que

$$(9.8.1)\qquad \prod_{v\in S} (\det(1 - F_v t^{\deg(v)}, {}_\lambda V^{ss I_v})/\det(1-F_v (pt)^{\deg(v)}, {}_\lambda V^{ss I_v}))$$

est le même pour ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$.

Soit $v_o \in S$, et tordons ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$ par un caractère λ du groupe des classes d'idèles non ramifié en v_o et très ramifié en les $v \in S$ autres que v_o (χ est à valeurs dans une extension de E ; pour l'existence, cf. 4.14).
Les hypothèses faites sur $({}_\lambda V, {}_\mu V)$ sont stables par torsion. Pour χ convenable, après torsion, les facteurs de 9.8.1 relatifs aux $v \neq v_o$ deviennent 1.
Celui relatif à v_o subit une modification triviale, qui se lit sur $\chi(F_v)$.
Posons ${}_\lambda P_v(T) = \det(1-F_v T, ({}_\lambda V_v^{ss})^{I_v})$. Appliquant l'invariance de (9.8.1) à $({}_\lambda V\chi, {}_\mu V\chi)$, on trouve que, pour chaque $v \in S$, on a, dans $E(T)$,

$$(9.8.2)\qquad {}_\lambda P_v(T)/{}_\lambda P_v(qT) = {}_\mu P_v(T)/{}_\mu P_v(qT) \quad .$$

La transformation qui à une fraction rationnelle R valant 1 en 0 associe $R_q(T) = R(T)/R(qT)$ est injective : pour les diviseurs, on a

$$\operatorname{div}(R) = \lim \operatorname{div}(\prod_0^N R_q(qT)) \qquad \text{(limite simple).}$$

De 9.8.2, on déduit donc que ${}_\lambda P_v(T) \in E[T]$ et que

$$(9.8.3)\qquad {}_\lambda P_v(T) = {}_\mu P_v(T) \quad .$$

Les hypothèses faites sur ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$ sont respectées par passage de K à une extension finie K' (remplacer S par son image réciproque). Toute extension finie locale K'_v/K_v étant induite par une extension globale car $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$), on trouve que 9.8.3 vaut aussi pour les représentations de $W(\overline{K}_v/K'_v)$ définies par ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$.
Prenant pour K'_v les diverses extensions telles que les semi-simplifiées de ces représentations soient non ramifiée, on trouve que, pour tout $F \in W(\overline{K}_v/K_v)$, $F \notin I_v$, on a

$$\det(1-F_v t, {}_\lambda V) = \det(1-F_v t, {}_\mu V) \quad .$$

En dehors de I_v , les caractères des représentations ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$ coïncident donc.

Les mêmes arguments, où on ne retient de 9.8.3 que l'égalité des degrés, donnent que pour tout sous-groupe ouvert J de I_v et tout caractère χ de J ,

$$\dim(({}_\lambda V^{ss}.\chi)^J) = \dim(({}_\mu V^{ss}.\chi)^J) \quad .$$

D'après le théorème de Brauer, ceci implique que ${}_\lambda V^{ss}|I_v$ et ${}_\mu V^{ss}|I_v$ ont même caractère. Les caractères de ${}_\lambda V$ et ${}_\mu V$ coïncident donc sur tout $W(\overline{K}_v/K_v)$, et ceci achève la démonstration

<u>Proposition</u> 9.9. <u>Soit</u> $({}_\lambda V)_{\lambda\in\mathbb{L}}$ <u>un système infini de représentations</u> λ-<u>adiques</u>. <u>On suppose que pour toute</u> (<u>ou presque toute</u> : 9.8) <u>place</u> v <u>de</u> K, <u>les semi-simplifiées des</u> ${}_\lambda V_v$ <u>sont compatibles</u>. <u>Alors</u>, <u>pour chaque</u> λ ,

$$(9.9.1) \qquad Z({}_\lambda V,t) = \varepsilon({}_\lambda V,t)\ Z({}_\lambda V^*,\ pt^{-1}) \quad .$$

Posons

$$Z^{ss}({}_\lambda V,t) = \prod_v \det(1-F_v t^{\deg(v)},\ ({}_\lambda V_v^{ss})^{I_v})^{-1}$$

$$\varepsilon^{ss}({}_\lambda V,t) = \prod_v \varepsilon({}_\lambda V^{ss},\ \psi\ ,\ dx,\ t) \quad .$$

Un calcul local montre que (9.9.1) équivaut à

$$(9.9.2) \qquad Z^{ss}({}_\lambda V,t) = \varepsilon^{ss}({}_\lambda V,t)\ Z^{ss}({}_\lambda V^*,pt^{-1})$$

(le quotient des facteurs locaux en v des deux membres de (9.9.1) ou (9.9.2) est additif en ${}_\lambda V_v$, et ces quotients coïncident dans le cas semi-simple).

L'identité à prouver (9.9.2) est indépendante de λ . On la prouve mod λ pour chaque λ , et on conclut comme en 9.3.

§ 10. LA THEORIE DE GROTHENDIECK

10.1. Soient X une courbe projective non singulière sur le corps fini $\mathbb{F}_p$, $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, $\overline{X}$ déduit de X par extension des scalaires de $\mathbb{F}_p$ à $\overline{\mathbb{F}}_p$, ℓ un nombre premier premier à p et Λ un anneau noethérien tué par une puissance de ℓ.

Soit G un faisceau (de Weil : 7.3, 7.4) constructible de Λ-modules plats. Notons encore G le faisceau étale sur $\overline{X}$ qui s'en déduit.

10.2. Les groupes de cohomologie étale $H^i(\overline{X},G)$ sont des Λ-modules de type finis. N'étant pas projectifs, ils ne nous seront d'aucun usage. Nous devrons utiliser un objet plus fin $R\Gamma(\overline{X},G) \in \mathrm{Ob}\, D_{parf}(\Lambda)$ qui leur donne naissance. Rappelons que $D_{parf}(\Lambda)$ peut se définir comme la catégorie des complexes finis de Λ-modules projectifs de type fini, les morphismes étant les morphismes de complexes pris à homotopie près. $R\Gamma(\overline{X},G)$ est un complexe fini de Λ-modules projectifs de type fini, concentré en degrés 0,1 et 2 si on veut, bien défini à homotopie près, et dont les groupes de cohomologie sont les $H^i(\overline{X},G)$.

Par "transport de structure", la substitution de Frobenius $\varphi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ agit sur $R\Gamma(\overline{X},G)$; c'est un endomorphisme du complexe $R\Gamma(\overline{X},G)$, bien déterminé à homotopie près, et induisant sur la cohomologie l'automorphisme de Frobenius.

10.3. Pour K un complexe fini de Λ-modules projectifs et u un endomorphisme de K, on pose

$$\det(1-ut,K) = \prod_i \det(1-ut,K^i)^{(-1)^i} \in \Lambda(t) \quad . \tag{10.3.1}$$

Si u et v sont des endomorphismes homotopes, on a

$$\det(1-ut,K) = \det(1-vt,K) \quad ,$$

de sorte que $\det(1-ut,K)$ est bien défini pour $K \in \mathrm{Ob}\, D_{parf}(\Lambda)$ et $u \in \mathrm{End}(K)$. Prenant l'opposé du coefficient de t dans le développement en série formelle de $\det(1-ut,K)$, on définit la <u>trace</u>

$$\text{(10.3.2)} \qquad \mathrm{Tr}(u,\, K) \;=\; \Sigma(-1)^i\, \mathrm{Tr}(u,\, K^i) \qquad .$$

Si u est une auto-équivalence d'homotopie (i.e. induit un automorphisme sur la cohomologie), on peut trouver (K',u') isomorphe dans $D_{parf}(\Lambda)$ à (K,u), avec u' un automorphisme du complexe K. On pose alors

$$\text{(10.3.3)} \qquad \det(u,K) \;=\; \prod \det(u,K^i)^{(-1)^i} \qquad ,$$

et cette quantité ne dépend pas des choix arbitraires faits. Si u^{-1} est un inverse homotopique de u, on a

$$\text{(10.3.4)} \qquad \mathrm{der}(1-ut,\, K) = \det(-ut,\, K)\, \det(1-u^{-1}t^{-1},\, K) \qquad .$$

Si $D(K)$ est le dual de K (complexe de composantes les $D(K)^i = \mathrm{Hom}(K^{-i},\Lambda)$), et $\check{u}$ un contragrédient de u, on a aussi

$$\text{(10.3.5)} \qquad \det(1-ut,\, K) = \det(-ut,\, K)\, \det(1 - \check{u}t^{-1},\, D(K)).$$

Une esquisse de la démonstration du théorème suivant est donnée en 10.8.

<u>Théorème</u> 10.4. (Grothendieck). <u>On a</u>

$$\text{(10.4.1)} \qquad Z(G,t) \;=\; \det(1-Ft,\, R\Gamma(\overline{X},G))^{-1} \qquad .$$

Dans les applications, les hypothèses faites sur G sont trop restrictives. Il y a lieu de prendre comme "coefficients" un élément de $D_{parf}(X,\Lambda)$, i.e. un complexe fini G^* de faisceaux (de Weil) de Λ-modules sur X, qui localement pour la topologie étale sur $\overline{X}$ soit homotope à un complexe fini de faisceaux constructibles de Λ-modules plats. Utilisant 10.3, on peut, pour x un point fermé de X, définir

$$Z_x(G^*,t) \;=\; \det(1-F_x t^{\deg(x)},\, G^*_x)^{-1} \qquad .$$

On pose

$$Z(G^*, t) = \prod_x Z_x(G^*, t) \quad .$$

On définit encore $R\Gamma(\overline{X}, G^*)$, de groupes de cohomologie les groupes d'hypercohomologie de $\overline{X}$ à valeurs dans G^*, et on a

$$Z(G^*,t) = \det(1-Ft, R\Gamma(\overline{X}, G^*))^{-1} \quad . \tag{10.4.2}$$

10.5. Tout $G^* \in D_{parf}(X,\Lambda)$ a un "dual à valeur dans le complexe dualisant ($\Lambda(1)$ placé en degré -2)"

$$D(G^*) = \underline{RHom}_\Lambda(G^*, \Lambda(1)[2]) \in D_{parf}(X,\Lambda)$$

de $i^{\text{ème}}$ faisceau de cohomologie de $(2+i)^{\text{ième}}$ hyperext local de G^* avec $\Lambda(1)$. La <u>dualité de Poincaré</u> prend la forme

$$R\Gamma(X, D(G^*)) = D(R\Gamma(X,G^*)) \quad . \tag{10.5.1}$$

Appliquant 10.3.5, on obtient l'équation fonctionnelle

$$Z(G,t) = \det(-Ft, R\Gamma(G,t))^{-1}\, Z(D(G), t^{-1}) \tag{10.5.2}$$

10.6. Soient $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert de X (complément d'un ensemble fini S de points fermés) et $G^* \in D_{parf}(U,\Lambda)$. On note $j_!$ le foncteur dérivé du foncteur exact "prolongement par 0" et Rj_* le foncteur dérivé du foncteur image directe par j .

$$j_! \;:\; D_{parf}(U,\Lambda) \longrightarrow D_{parf}(X,\Lambda)$$

$$Rj_* \;:\; D_{parf}(U,\Lambda) \longrightarrow D_{parf}(X,\Lambda) \quad .$$

Le <u>théorème de dualité locale</u> (prouvé notamment en dimension un) donne

$$D(j_! G^*) = Rj_*(D(G^*)) \quad . \tag{10.6.1}$$

Pour G un faisceau localement constant de Λ-modules projectifs sur U , de dual $\check{G}$, on a $D(G) = \check{G}(1)[2]$ et (10.5.2) prend la forme

$$(10.6.2)\qquad Z(j_!G,t) = \det(-Ft,\ R\Gamma(j_!G)\ )^{-1}\ Z(Rj_*(\check{G})(1),\ t^{-1})\quad .$$

0.7. Nous allons expliciter cette formule. Les fonctions Z des deux membres sont produits de facteurs locaux. Pour le membre de gauche, le facteur local en x point fermé de X est

$$Z_x(j_!G,t) = \begin{cases} \det(1-F_x t^{\deg(x)},\ G_{\bar{x}})^{-1} & \text{si } x \notin S \\ 1 & \text{si } x \in S \end{cases}\quad .$$

Pour le membre de droite, c'est

$$Z_x(Rj_*\check{G}(1),t) = \begin{cases} \det(1-F_x t^{\deg(x)},\ \check{G}_{\bar{x}}(1))^{-1} & \text{si } x \notin S \\ \det(1-F_x t^{\deg(x)},\ R\Gamma(I_x,\check{G}_K(1)))^{-1} & \text{si } x \notin S \end{cases}\quad .$$

Cette dernière formule se lit ainsi : $\check{G}_K(1)$ définit une représentation de $W(\bar{K}_x/K_x)$, à laquelle on applique le foncteur dérivé du foncteur "invariants sous I" . On obtient ainsi un complexe de Λ-modules projectifs, sur lequel Frobenius agit, et on effectue la construction 10.3. Explicitons :

(a) le foncteur "invariants sous I" est composé du foncteur "invariants sous $P' = \mathrm{Ker}(t_\ell)$" : I-modules $\longrightarrow$ I/P'-modules et du foncteur "invariants sous $\mathbb{Z}_\ell(1)$" . Le premier foncteur est exact et transforme Λ-module projectif en Λ-module projectif ; pour tout I-module V, on a

$$R\Gamma(I,\ V) = R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1),\ V^{P'})\quad .$$

Pour tout $\mathbb{Z}_\ell(1)$ module W, on peut calculer $R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1),\ W)$ en prenant une résolution de W par des modules coinduits $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),M)$ = module des fonctions localement constantes de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ dans M, sur lequel $\mathbb{Z}_\ell(1)$ agit par $f(x) \overset{\tau}{\longmapsto} f(\tau x)$. Pour σ un générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),W) \xrightarrow[\alpha_\sigma]{} \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),\ W) \longrightarrow 0$$

flèches $m \longmapsto (i \longmapsto im)$ et $f \overset{\alpha_\sigma}{\longmapsto} (i \longmapsto f(\sigma i) - \sigma(f(i)))$. Passant aux invariants, on identifie $R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), W)$ au complexe

(10.7.1) $$W \xrightarrow{1-\sigma} W \quad .$$

Quant on change σ en σ^ν $(\nu \in \mathbb{Z}_\ell^*)$, l'unique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),W) \arrow[r, "\alpha_\sigma"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),W) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),W) \arrow[r, "\alpha_{\sigma^\nu}"] & \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_\ell(1),W) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

fournit par passage aux invariants

(10.7.2) $$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "1-\sigma"] \arrow[d, "1"'] & W \arrow[d, "\frac{1-\sigma^\nu}{1-\sigma}"] \\
W \arrow[r, "1-\sigma^\nu"] & W
\end{tikzcd}$$

où, pour n entier convergeant dans $\mathbb{Z}_\ell$ vers ν,

(10.7.3) $$\frac{1-\sigma^\nu}{1-\sigma} w = \lim \sum_0^{n-1} \sigma^i w \quad .$$

On conclut que $R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1),W)$ se représente comme étant n'importe lequel des complexes (10.7.1), ces complexes, pour σ variable, étant identifiés par les isomorphismes (10.7.2).

Quand on part d'un $W(\overline{K}/K)$-module V, Frobenius agit par "transport de structure" sur

$$R\Gamma(I, V) = [\, V^{P'} \xrightarrow{1-\sigma} V^{P'} \,] \quad .$$

Quel que soit le Frobenius géométrique F et σ engendrant $\mathbb{Z}_\ell(1)$, F définit

$$\begin{tikzcd}
{[V^{P'}} \arrow[r, "1-\sigma"] \arrow[d, "F"] & {V^{P'}]} \arrow[d, "F"] \\
{[V^{P'}} \arrow[r, "1-\sigma^q"] & {V^{P'}]}
\end{tikzcd}$$

qui, via (10.7.2), s'identifie à l'automorphisme du complexe $[V^{P'} \xrightarrow{1-\sigma} V^{P'}]$ de composantes $(F, \frac{1-\sigma}{1-\sigma^q} \circ F)$, où $\frac{1-\sigma}{1-\sigma^q} = \frac{1-(\sigma^q)^{1/q}}{1-\sigma^q}$

est défini comme en (10.7.3). On a donc

$$\det(1-Ft, R\Gamma(I,V)) = \det(1-Ft, V^{P'}). \det(1-\frac{1-\sigma}{1-\sigma^q} \circ Ft, V^{P'})^{-1} ,$$

où F désigne un quelconque Frobenius géométrique et σ un quelconque générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$.

La formule 10.6.2 se récrit

(10.7.4)

$$\prod_{x \notin S} \det(1-F_x t^{\deg(x)}, G_{\bar{x}}) = \det(-Ft, R\Gamma(j_! G))^{-1} .$$

$$\prod_{x \notin S} \det (1-F_x t^{-\deg(x)}, G_{\bar{x}}(1))^{-1} .$$

$$\prod_{x \in S} \det(1-F_x t^{-\deg(x)}, \check{G}^P_{\bar{x}}(1))^{-1}. \det(1-\frac{1-\sigma}{1-\sigma^q} Ft^{-\deg(x)}, \check{G}^P_{\bar{x}}(1)) .$$

10.8. Par passage à la limite projective, les résultats précédents se généralisent aux faisceaux ℓ-adiques (ou λ-adiques), et on obtient les énoncés de 9.1. La raison (cf. 10.5.2) de la formule simple (9.1.1) est le résultat local que, pour

G localement constant sur $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$, on a

$$j_* D(G) = D(j_* G) \quad .$$

Toutefois, la formule obtenue pour la "constante" (déterminant de $-Ft$ agissant sur la cohomologie) n'est pas très explicite, et on n'en a pas de théorie locale.

<u>Remarque</u> 10.9. Soient X une courbe projective non singulière sur un corps algébriquement clos $\bar{k}$ et V un faisceau localement constant de Λ-modules libres sur X_{et}. Pour simplifier, on suppose X connexe de genre $g \geq 1$ et Λ local. Voici deux méthodes pour attacher à V un Λ-module libre de rang 1.

(a) Ecrivons $R\Gamma(X,V)$ comme un complexe fini K de Λ-modules libres. Alors, $\det(R\Gamma(X,V)) = \bigotimes_i \det(K^i)^{(-1)^i}$ [où det = puissance extérieure maximale] ne dépend, à isomorphisme canonique près, que de $R\Gamma(X,V)$. On note $h(V)$ son dual.

(b) Soit $K = \Sigma\, n_i P_i$ un diviseur canonique $(\mathcal{O}(K) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_X)$, et $N_K(V) = \bigotimes_i \det(V_{P_i})^{\otimes n_i}$. L'ensemble des diviseurs canoniques positifs forme un espace projectif, et les $N_K(V)$ forment un système local nécessairement trivial sur cet espace projectif. Les $N_K(V)$ pour K variable sont donc canoniquement isomorphes, et on pose

$$< \Omega^1, V > \; = N_K(V) \quad .$$

Si (X,V) est défini sur $k \subset \bar{k}$, i.e. est donné comme provenant par extension des scalaires de (X_o, V_o) sur $\mathrm{Spec}(k)$, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit sur $h(V)$ et $< \Omega^1, V >$ par des caractères $\chi_k(V)$ et $\chi_\Omega(V)$ (à valeurs dans Λ^*).

Ces constructions se généralisent au cas λ-adique.

<u>Proposition</u> 10.9.1. <u>Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes</u>

(a) $\Lambda = \mathcal{O}_\lambda$ <u>et</u> V <u>se trivialise sur un revêtement fini de</u> X ;

(b) V <u>est de rang</u> 1 .

Alors, $\chi_h(V) = \chi_\Omega(V) . \ \omega_{(1-g)\dim(V)}$,

<u>où</u> ω_n <u>est le caractère donnant l'action de Galois sur</u> $\mathbb{Z}_\ell(n)$.

Un argument standard, utilisant Čebotarev, nous ramène au cas où k est un corps fini et où $\bar{k}$ est sa clôture algébrique. Il s'agit de montrer que χ_h et $\chi_\Omega \ \omega_{(1-g)\dim V}$ prennent la même valeur sur le Frobenius. Dans le cas (a), le groupe de Weil $W(\bar{K}_o/K_o)$ de X_o agit continûment, pour la topologie discrète, sur $(V_o)_{\bar{K}_o}$, de sorte qu'on peut appliquer 9.3.

Comparons (9.3) à (10.7.4) (pour $S = \emptyset$). Ce sont des équations fonctionnelles reliant les mêmes fonctions Z . Exprimant qu'elles ont la même constante, on trouve (10.9.1) (il peut être plus commode de ne faire ce calcul que pour V virtuel de dimension 0, et de vérifier (10.9.1) directement pour $V = \mathbb{Z}_\ell$).

Dans le cas (b), on procède de même en utilisant 10.12.1 ci-dessous.

Il serait très intéressant de préciser (10.9.1) en définissant un isomorphisme canonique entre $h(V)$ et $<\Omega^1, V> ((1-g)\dim(V))$, et de généraliser (10.9.1) au cas ramifié.

<u>Remarque</u> 10.10. Le théorème 10.4 est sans doute encore valable pour Λ un anneau noethérien de <u>caractéristique</u> p, i.e. tel que $p\Lambda = 0$. La formule de traces requise devrait résulter de la formule des traces en cohomologie cohérente (Woodshole trace formula). La démonstration n'a toutefois pas été rédigée.

10.11. <u>Démonstration de 10.4</u>.

Dans [7], 10.4 n'est démontré que pour des faisceaux ℓ-adiques, car la méthode de démonstration, basée sur la formule des traces de Lefschetz sur $\bar{X}$ pour les puissances de l'endomorphisme de Frobenius, requérait que l'on divise par un entier arbitraire pour passer de Lefschetz à (10.4.1) (passage par la dérivée logarithmique de Z).

Pour obtenir 10.4 tel quel, il faut utiliser SGA 4 XVII 5.5, la formule des traces de Lefschetz sur les $\mathrm{Sym}^n(X)$, et développer en série les deux membres de 10.4.1, le second se développant comme

$$\det(1-Ft,\ R\Gamma(\overline{X},G))^{-1} = \sum_n \mathrm{Tr}(F,\mathrm{Sym}^n(R\Gamma(\overline{X},G))\ t^n \quad ,$$

(Sym^n est le foncteur dérivé du foncteur (non additif) puissance symétrique $n^{\text{ième}}$). Par ailleurs, la méthode de démonstration de [7], par fibrations par courbes successives, ramène la formule des traces à démontrer au cas des courbes :

<u>Formule des Traces</u> 10.11.1. <u>Soient</u> X <u>une courbe projective et lisse sur</u> $\mathbb{F}_q$, U <u>un ouvert de</u> X <u>et</u> G <u>un faisceau</u> (<u>de Weil</u>) <u>localement constant de</u> Λ-<u>modules projectifs</u>. <u>On a</u>

$$\sum_{x\in U(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Tr}(F_x,\ G_x) = \mathrm{Tr}(F,R\Gamma(\overline{X},\ j_! G)) \quad .$$

Dans cette formule, les Frobenius sont relatifs à $\mathbb{F}_q$, et $\overline{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. On peut supposer que $\mathbb{F}_q$ est le sous-corps des constantes du corps des fonctions K de X, sans quoi les deux membres sont 0 .

La méthode de démonstration exposée par Grothendieck dans le séminaire oral SGA 5 consiste à se ramener à la formule de Lefschetz sur le nombre de points fixes d'endomorphismes de courbes complètes (déjà prouvé dans [17]), en étudiant la cohomologie de revêtements de $\overline{X}$ comme représentations du groupe du revêtement.

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , contenant le corps des fonctions de $\overline{X}$. Le faisceau G définit une représentation de $W(\overline{K}/K)$ sur le Λ-module projectif $G_{\overline{K}}$. L'intersection J de $\mathrm{Gal}^o(\overline{K}/K)$ et du noyau de cette représentation définit un revêtement étale connexe $f : \overline{U}' \longrightarrow \overline{U}$ de $\overline{U}$ sur lequel G devient trivial. Posons $H = W(\overline{K}/K)/J$: H est une extension de $\mathbb{Z}$ par le groupe H_o du revêtement $\overline{U}'/\overline{U}$, et $G_{\overline{K}}$ est une représentation de H .

Soit j' l'inclusion de $\overline{U}'$ dans une courbe projective non singulière $\overline{X}'$. La cohomologie ℓ-adique à support propre de $\overline{U}'$ est une représentation de H Des arguments standards permettent de faire mieux, et de définir

$R\Gamma_c(\overline{U}', \mathbb{Z}_\ell) = R\Gamma(\overline{X}', j_!' \mathbb{Z}_\ell) \in D_{parf}(\mathbb{Z}_\ell[H_o])$, sur lequel H agit (de façon semi-linéaire relativement à son action sur $\mathbb{Z}_\ell[H_o]$ et l'action de $H_o \subset H$ étant l'action évidente). On a canoniquement

$$(10.11.2) \qquad R\Gamma(\overline{X}, j_! G) = [R\Gamma(\overline{X}', j_!' \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} G_{\overline{K}}]^{H_o} ,$$

isomorphisme compatible à l'action de Frobenius sur les deux membres.

Ecrivons $R\Gamma(\overline{X}', j_! \mathbb{Z}_\ell)$ comme un complexe fini de $\mathbb{Z}_\ell[H_o]$-modules projectifs, sur lequel Frobenius agit. Les composantes de ce complexe apparaissent comme des $\mathbb{Z}_\ell[H^+]$-modules, pour H^+ le sous-monoide de H extension de $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ par H_o. On leur applique le lemme suivant.

<u>Lemme</u> 10.11.3. <u>Soient</u> H^+ <u>un produit semi-direct de</u> $\mathbb{N}$ <u>par un groupe fini</u> H_o, M <u>un</u> $\mathbb{Z}_\ell[H^+]$-<u>module</u>, <u>projectif de rang fini en tant que</u> $\mathbb{Z}_\ell[H_o]$-<u>module</u>, Λ <u>une</u> $\mathbb{Z}_\ell$-<u>algèbre et</u> V <u>un</u> $\Lambda[H^+]$-<u>module</u>, <u>projectif de rang fini comme</u> Λ-<u>module</u>. <u>Soient</u> χ_M <u>et</u> χ_V <u>les caractères de</u> M <u>et</u> V

(i) <u>il existe une fonction</u> χ_M^* <u>sur</u> H, <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{Z}_\ell$, <u>telle que</u>, <u>pour</u> $h \in H$ <u>et</u> $H_o(h)$ = <u>centralisateur de</u> h <u>dans</u> H_o, <u>on ait</u>

$$\chi_M(h) \underset{dfn}{=} \operatorname{Tr}(h,M) = |H_o(h)| \,.\, \chi^*(h)$$

(ii) <u>pour</u> $F \in H/H_o$,

$$\operatorname{Tr}(F, (M \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} V)^{H_o}) = \sum_{\substack{h \to F,\ \mathrm{mod} \\ H_o\text{-conjugaison}}} \chi_M^*(h)\, \chi_V(h) \,.$$

Appliquant Lefschetz, on calcule χ^* pour $R\Gamma(\overline{X}', j_!' \mathbb{Z}_\ell)$ (virtuellement la différence de $R\Gamma(\overline{X}', \mathbb{Z}_\ell)$ et d'une quantité élémentaire) et 10.11.2, 10.11.3 fournissent la formule voulue.

10.12. Le cas abélien, et une application farfelue.

Soit $\chi : W(\bar{K}/K) \longrightarrow \Lambda^*$ un quasi-caractère à valeurs dans Λ^*, non ramifié en dehors d'un ensemble fini S de places de K. Soit j l'inclusion de $U = X - S$ dans X, et $j_![\chi]$ le faisceau de rang un sur U défini par χ et prolongé par 0. Posons

$$\varepsilon(j_![\chi],t) = \prod_{v\in S} \varepsilon_o(\chi_v.\omega^t, \psi_v, dx_v) . \prod_{v\notin S} \varepsilon(\chi\omega^t, \psi_v, dx_v) \quad ,$$

ω^t est comme en 7.6 ; ε_o est défini en 6.4 ; ε, pour un caractère non ramifié, est défini par 3.4.3.3.

Proposition 10.12.1. On a

$$\det(-Ft, R\Gamma(j_![\chi])) = \varepsilon(j_![\chi],t) \quad .$$

Cette proposition précise 10.7.4.

Soit H le quotient de $W(\bar{K}/K)$ par $\mathrm{Ker}(\chi)$. Il suffit de traiter le cas universel où $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n[H]$. Ce cas se relève en caractéristique 0, et 10.12.1 s'obtient par réduction.

10.13. Prenons par exemple pour Λ les nombres duaux sur $\mathbb{Z}/\ell^n$: $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n[\varepsilon]$ $(\varepsilon^2 = 0)$, pour α un homomorphisme continu du groupe des classes d'idèles $\mathbb{A}^*/K^*$ dans le groupe additif $\mathbb{Z}/\ell^n$, et posons

$$\chi = 1 + \alpha.\varepsilon$$

La ramification de α est automatiquement modérée. Soit S un ensemble fini de places en dehors desquelles α est non ramifié. Appliquant 10.4 pour χ et pour le caractère trivial, et faisant le rapport, on trouve

(10.13.1) la série formelle

$$L_S^+(\alpha,t) = \sum_{v\notin S} \alpha_v(\pi_v) \frac{t^{\deg(v)}}{1-t^{\deg(v)}} = \sum_n t^n . \sum_{\deg(v)|n} \alpha_v(\pi_v)$$

est dans $\mathbb{Z}/\ell^n(t)$.

Pour toute place v de K, choisissons une uniformisante π_v. Adjoignons à $\mathbb{Z}/\ell^n$ une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité, et soit ψ un caractère additif non trivial de $\mathbb{A}/K$, à valeur dans les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Prenons le quotient de (10.7.4) pour χ et de (10.7.4) pour le caractère trivial, et utilisons (10.12.1). Après simplifications, on obtient l'identité suivante. Dans le premier membre, les deux premières sommes (infinies) sont sommées par (10.13.1). Les sommes portent toutes sur toutes les places de K .

(10.13.2) $$\sum \alpha_v(\pi_v) \frac{t^{\deg(v)}}{1-t^{\deg(v)}} + \sum \alpha_v(\pi_v) \frac{q_v t^{-\deg(v)}}{1-q_v t^{-\deg(v)}} + \sum \alpha_v(-1) \frac{1}{1-t^{\deg(v)}} =$$

$$= \sum n_v\, \alpha(\pi_v) - \sum \sum_{x \in k_v^*} \alpha_v(x)\ \psi_v(\pi_v^{1+n_v} .x) \qquad .$$

On vérifie de façon élémentaire que la validité de (10.13.2) ne dépend pad du choix des uniformisantes π_v (se rappeler que, pour $x \in k_v^*$, on a $(q-1)\ \alpha(x)=0$). Dans le premier membre, les $\alpha_v(-1)$ sont d'ordre 2, donc nuls si $\ell \neq 2$.

11. Appendice. Le calcul de ϵ modulo les racines de l'unité.

Cet appendice est une variation sur un thème de Lakkis et Dwork. Mon attention a été attirée sur leurs résultats par J.P. Serre.

Nous noterons $a \sim b$ la relation suivante entre nombres complexes inversibles:

$a \sim b$: a/b est produit d'une racine de l'unité par une puissance de $q^{1/2}$.

Soit K un corps local non archimédien et reprenons les notations de 2.2.1, 2.2.2 et 3.1. La mesure de Haar dx sera supposée telle que $\int_{\mathcal{O}} dx = q^{n/2}$, avec n entier. Soient V une représentation complexe (d'un quotient fini) de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, et V^P les invariants sous l'inertie sauvage. C'est une sous-représentation de V .

Théorème 11.1 *On a* $\epsilon(V, \psi, dx) \sim \epsilon(V^P, \psi, dx)$.

Lemme 11.2 *Modulo l'équivalence* $\sim$, $\epsilon(V, \psi, dx)$ *est indépendant de* ψ *et* dx .

Résulte aussitôt de 5.3 et 5.4.

Ce lemme nous permettra d'abréger $\epsilon(V, \psi, dx)$ en $\epsilon(V)$.

Lemme 11.3 *Si le caractère de* V *est réel*, i.e. *si* V *est isomorphe à* V^* , *alors* $\epsilon(V) \sim 1$.

On peut supposer que $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$ et que $n(\psi) = 0$. On applique alors 5.7.1, 5.4 et 5.5.

Soient L une extension finie de K dans $\overline{K}$, W une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ et $\mathrm{Ind}(W)$ la représentation induite de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Lemme 11.4 *On a* $\epsilon_L(W) \sim \epsilon_K(\mathrm{Ind}(W))$.

Soit W' la représentation triviale de même dimension que W . Pour

$\psi_L = \psi_K \circ \mathrm{Tr}_{L/K}$, on a (5.6.1)

$$\varepsilon(W-W', \psi_L) = \varepsilon(\mathrm{Ind}(W) - \mathrm{Ind}(W'), \psi_K)$$

et on conclut en appliquant 11.3 à W' et à $\mathrm{Ind}(W')$.

11.5. Soient L et W comme ci-dessus, P_L le groupe d'inertie sauvage de L et regardons W^{P_L} comme une représentation de $H = P.\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, triviale sur P. On a

$$\mathrm{Ind}(W)^P = \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Gal}}(W^{P_L}) \quad .$$

D'après 11.4, le théorème pour W équivaut donc au théorème pour $\mathrm{Ind}(W)$; par Brauer, ceci nous ramène au cas où V est de dimension un, défini par un caractère d'ordre fini χ de K^* . Si χ est modéré, $[\chi]^P = [\chi]$, et 11.1 est trivial. Si χ est sauvagement ramifié, $[\chi]^P = 0$ et 11.1 résulte du lemme suivant.

<u>Lemme</u> 11.6 <u>Pour</u> χ <u>sauvagement ramifié</u>, $\varepsilon(\chi, \psi, dx) \sim 1$.

Soient m le conducteur de χ , $n = [\frac{m+1}{2}]$ et y l'élément de K^* , de valuation $-m-n(\psi)$, bien défini modulo $(\pi^{-n-n(\psi)})$, tel que (cf 4.16)

$$\chi(1+a) = \psi(a\, y) \quad \text{pour} \quad v(a) \geq n \quad .$$

Décomposons χ en $\chi = \chi_1 \chi_2$, avec χ_1 d'ordre premier à p et χ_2 d'ordre une puissance de p . Comme en 4.16, on prouve que

$$(11.6.1) \qquad \varepsilon(\chi, \psi, dx) = \int \chi^{-1}(x)\, \psi(x) dx = \int_{y(1+(\pi^{m-n}))} \chi^{-1}(x)\, \psi(x)\, dx$$

$$= \chi_1(y) \int_{y(1+(\pi^{m-n}))} \chi_2^{-1}(x)\, \psi(x)\, dx$$

Si m est pair $(m=2n)$, la fonction intégrée est constante et 11.6 clair. Pour m impair $(m=2n-1)$, voici deux façons de procéder.

(a) $\chi^{-1}(x)\, \psi(x)$ est un caractère quadratique non dégénéré sur

$y(1+(\pi^{m-n}))/(1+(\pi^n))$; d'après Weil, la somme de ses valeurs est ~ 1 .

(b) D'après (11.6.1), il suffit de prouver que $\epsilon(\chi_2, \psi, dx) \sim 1$. Le carré de ce nombre, multiplié par une puissance convenable de q , appartient à un corps de racines p^N-ièmes de l'unité, et est de valuation 1 en toutes les places de ce corps, sauf peut-être en l'unique place divisant p . C'est donc une racine de l'unité.

Corollaire 11.7 Prenons ψ et dx tels que $n(\psi) = -1$ et que $\int_{(\pi)} dx = 1$. Alors, $\epsilon(V, \psi, dx)$ est un entier algébrique.

Décomposant V en $V^P + W$, on voit qu'il suffit de traiter les deux cas suivants.

(a) V est modérément ramifiée. Dans ce cas, V est une somme de représentations induites de représentations de dimension un de sous-groupes, et ϵ est, au signe près, un produit de sommes de Gauss (cf 5.10).

(b) $V^P = 0$. Dans ce cas, $\epsilon \sim 1$ et il suffit de prouver que la valeur absolue complexe $|\epsilon|$ est une puissance positive de q . Ceci résulte de 5.7.2 (où $dx'/dx = q$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN - Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren Hamb. Abh. 8 (1930) p. 292-306 (Collected Papers p. 165-179).

[2] E. ARTIN and J. TATE - Class field theory - Benjamin, N.Y.

[3] P. DELIGNE - Les constantes des équations fonctionnelles - Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1969/70, 19 bis

[4] P. DELIGNE - Formes modulaires et représentations de GL(2) ce volume

[5] H. DAVENPORT and H. HASSE - Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen. J. reine und angewandte Math 172 (1935) p. 151-182.

[6] B. DWORK - On the Artin root number - Amer. J. Math 78 (1956) p444-472.

[7] A. GROTHENDIECK - Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L Séminaire Bourbaki 279 (décembre 1964).

[8] H. JACQUET and R.P. LANGLANDS - Automorphic forms on GL(2). Lectures Notes in Math. 114, Springer-Verlag 1970.

[9] R.P. LANGLANDS - On the functional equation of the Artin L-functions. Notes polycopiées - Yale University (incomplet).

[10] J. P. SERRE - Corps locaux - Hermann - Paris 1962

[11] J.P. SERRE - Représentations linéaires des groupes finis - (2ième éd. refondue) - Hermann - Paris 1971.

[12] J.P. SERRE - Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves - N.Y.1968.

[13] J.P. SERRE and J. TATE - Good reduction of abelian varieties - Ann. of Math. 88 3 (1968) p. 492-517.

[14] J. TATE - Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions (thesis) in : Algebraic Number Theory - edited by Cassels and Fröhlich - Academic Press, 1967.

[15] A. WEIL - Basic Number Theory - Springer Verlag 1967.

[16] A. WEIL - Dirichlet series and automorphic forms - Lecture Notes in Math. 189 - Springer Verlag 1971.

[17] A. WEIL - Variétés abéliennes et courbes algébriques - Hermann - Paris 1948.

[18] A. WEIL - Number of solutions of equations in finite fields - Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) p.497-508.

[19] A. WEIL - Sur la théorie du corps de classes. J of the Math. Soc. of Japan - 3 (1951)

SGA - Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. SGA 4 est publié dans les Lecture Notes (269,270,305). SGA 5 est diffusé par l'IHES.

20] P. X. GALLAGHER - Determinants of representations of finite groups. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg 28 3/4 (1965), p. 162-167.

Le problème mentionné dans l'introduction (p. 4) de prouver la conclusion de 9.9 pour une représentation λ-adique a été résolu:

G. LAUMON - Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L sur un corps global de caractéristique positive. C.R. Acad. Sci. Paris 298 8 (1984), p. 181-184.

Un bel exposé du théorème d'existence des constantes locales est donné dans

J. TATE - Local constants - in: Algebraic Number Fields, edited by A. Fröhlich, Acad. Press, 1977, (p. 89-137).