LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE

[d'après M. R. HERMAN]

par Pierre DELIGNE

Soit f un difféomorphisme, respectant l'orientation, du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si le nombre de rotation $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de f est irrationnel (i.e. si f n'a pas de point périodique) et que la dérivée Df de f est à variation bornée (i.e. que la dérivée seconde D^2f – prise au sens des distributions – est une mesure), Denjoy a montré que f est topologiquement conjugué à la rotation $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$: il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, respectant l'orientation, tel que $hfh^{-1} = R_\alpha$. Cet homéomorphisme est unique à composition à gauche par une rotation près car le centralisateur d'une rotation irrationnelle est réduit aux rotations.

Il revient à peu près au meme de prouver une propriété de régularité pour h, ou la même propriété, uniformément, pour tous les itérés f^n de f. Pour passer de h aux f^n, on écrit $f^n = (h^{-1}R_\alpha h)^n = h^{-1}R_{n\alpha}h$. Dans l'autre sens, il est utile de changer le notations et de passer au revêtement universel $\mathbb{R}$ du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: f devient un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$, h un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$, défini à l'addition d'une constante près, ils sont tous deux de la forme $x + \varphi(x)$ avec φ périodique de période 1, et $hfh^{-1} = R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (le nombre de rotation). Posons $h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^i - i\alpha$. On verra que h, convenablement normalisé, est la limite des h_n (3.1). Supposons maintenant que les f^n soient uniformément $C^{r+\beta}$, i.e. que f soit C^r et que les dérivées r-ièmes D^rf^n vérifient uniformément en n une condition de Hölder d'exposant β $(0 < \beta \leq 1)$ ·

$$|D^rf^n(x) - D^rf^n(y)| \leq A|x - y|^\beta .$$

Les $f^i - R_{i\alpha}$ vérifient la même condition, et sont de plus bornés (par un). De même pour les $h_n - \mathrm{Id}$, qui en sont des barycentres. Les $h_n - \mathrm{Id}$ forment donc un ensemble relativement compact de fonctions sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, pour la topologie C^r, et on peut extraire de la suite des h_n une sous-suite convergente. La conjugaison h est donc C^r, et on vérifie par passage à la limite que $D^r h$ vérifie la même condition de Hölder que les $D^r f^n$.

Herman a prouvé un théorème un peu meilleur que le suivant.

THÉORÈME.- Si le développement en fraction continue de α est à coefficients bornés, et que f est C^∞, alors h est C^∞.

On montre d'abord (§§ 1 à 6) que, pour q parcourant les dénominateurs des réduites p_n/q_n du développement de α en fraction continue, $|Df^q|$ tend rapidement vers 0 (en $1/q^\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$). Un tel résultat est plausible : la rotation $R_{q\alpha}$ est proche de l'identité, et $f^q = h^{-1}R_{q\alpha}h$.

On en déduit que h est $C^{1+\varepsilon'}$, avec $\varepsilon' > 0$, puis, du fait que f est $C^{1+\varepsilon'}$ conjugué à R_α, on déduit que les conjugués $f_n = h_n f h_n^{-1}$ de f tendant vers R_α dans une $C^{2+\varepsilon''}$ topologie $(\varepsilon'' > 0)$ (§§ 7 et 8).

Un théorème de fonctions implicites de Arnold-Moser ([1], [3]), amélioré par Herman en s'inspirant de Rüssmann[4], montre enfin que si f est assez proche de R_α, dans une $C^{2+\varepsilon}$ topologie $(\varepsilon > 0)$, alors f est C^∞-conjugué à une rotation.

Terminologie et notations

On note $\|\psi\|_\infty$ et $\|\psi\|_1$ les normes L^∞ et L^1 d'une fonction ψ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$: $\sup|\psi(x)|$ et $\int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} |\psi(x)|dx$. Pour $0 \leq \beta \leq 1$, on note $|\psi|_\beta$ sa norme höldérienne d'exposant β

$$|\psi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x-y|^\beta} .$$

On note $\mathrm{Var}(\psi)$ la variation totale de ψ . Si ψ est C^1 , c'est $\|D\psi\|_1$.

R_s = la "rotation" $x \longmapsto x + s$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme croissant de la forme $x + \varphi(x)$, avec φ périodique de période 1 . On note f^n $(n \in \mathbb{Z})$ ses itérés. Par hypothèse, f et f^{-1} sont C^1 ; on suppose de plus Df (donc $\log Df$) à variation bornée.

$V = \mathrm{Var}(\log Df)$.

α = nombre de rotation de f . On a $\|f^n - R_{n\alpha}\|_\infty < 1$. On suppose α irrationnel.

μ = la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ invariante par f . Si h conjugue f en R_α , il transforme μ en dx : $\mu = dh$ (dérivée au sens des distributions, ou intégrale de Stieltjes).

h = l'homéomorphisme croissant de $R/\mathbb{Z}$ qui conjugue f en R_α , normalisé par la condition que $\int (h(x) - x)\mu = 0$.

$h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^i - i\alpha$. C'est un barycentre de difféomorphismes croissants, donc un difféomorphisme croissant. On a $h = \lim h_n$ (3.1).

$f_n = h_n f h_n^{-1}$.

Une <u>approximation rationnelle</u> de $s \in R$ est une fraction irréductible p/q telle que $|s - p/q| < 1/q^2$, i.e. $|qs - p| < 1/q$. Tout nombre irrationnel a une infinité d'approximations rationnelles (Dirichlet).

q désigne le dénominateur d'une approximation rationnelle de α (et p le numérateur).

§ 1. <u>Première majoration de</u> $|Df^q|$; <u>inégalité de Denjoy-Koksma</u>

THÉORÈME 1.1 (Denjoy-Koksma).- <u>Soient</u> $s \in \mathbb{R}$, m <u>le dénominateur d'une approximation rationnelle de</u> s <u>et</u> ψ <u>une fonction à variation bornée sur</u> $R/\mathbb{Z}$. <u>On a</u>

$$\Big|\sum_{i=0}^{m-1} \psi(x + is) - m \int_{R/Z} \psi(t)\, dt\Big| \leq \mathrm{Var}(\psi) .$$

Par un changement de variable $t \mapsto \pm(t-x)$, on se ramène à supposer que $x = 0$ et que $n/m \le s \le n/m + 1/m^2$ (avec $(n,m) = 1$). Pour $0 \le i \le m-1$, on a $in/m \le is < in/m + 1/m$, et les in/m parcourent $\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. On a donc (les sommes vont de $i = 0$ à $i = m-1$)

$$\Sigma\, \psi(is) - m \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(x)\, dx = \Sigma \left(\psi(is) - m \int_{in/m}^{in/m + 1/m} \psi(x)\, dx\right)$$

et $\left|\psi(is) - \int_{in/m}^{in/m+1/m} \psi(x).(m\, dx)\right|$ est majoré par la variation de ψ entre in/m et $in/m + 1/m$, d'où le théorème.

Rappelons que la variation $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |d\psi|$ est invariante par changement de variable. Prenons $s = \alpha$, et faisons le changement de variable qui conjugue la rotation R_α en f ; il transforme dx en la mesure μ , et on trouve

COROLLAIRE 1.2.- <u>Pour</u> ψ <u>une fonction variation bornée sur</u> $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$\left|\sum_{i=0}^{q-1} \psi \circ f^i - q \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(x)\mu\right| \le \mathrm{Var}(\psi) .$$

1.3. On a $Df^n = Df \circ f^{n-1} \cdot Df^{n-1} = Df \circ f^{n-1} \cdot Df \circ f^{n-2} \cdot \ldots \cdot Df$, d'où

(1.3.1) $$\log Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} \log Df \circ f^i .$$

La majoration 1.2, pour $\psi = \log Df$, donne

$$\left|\log Df^q - q \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \log Df \cdot \mu\right| \le V .$$

Si l'intégrale n'était pas nulle, $\log Df^q$ tendrait uniformément vers $\pm\infty$ pour $q \to \infty$, et Df^q tendrait uniformément vers 0 ou ∞ . Puisque $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} Df^q(x)dx = 1$, cela est absurde et on a

COROLLAIRE 1.4 $$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \log Df \cdot \mu = 0 .$$

COROLLAIRE 1.5 $$e^{-V} \le Df^q \le e^V \qquad \left(\text{pour } |\alpha - p/q| < 1/q^2\right) .$$

Remarque 1.6.- La méthode de démonstration du théorème 1.1 permet de prouver directement 1.2 pour tout homéomorphisme croissant f (et pour μ une mesure invariante). Si $V = \int |d \log Df| < \infty$, on en déduit 1.5. Dans sa note [2], c'est à partir de 1.5 que Denjoy prouve que f est topologiquement conjugué à une rotation.

1.7. Soient s un nombre irrationnel, q_i $(i \geq 0)$ une suite croissante d'approximations rationnelles de s et a_i la partie entière de q_i/q_{i-1} $(i \geq 1)$. On suppose que $q_o = 1$. Tout entier $N < q_n$ peut s'écrire

$$N = \sum_{i<n} b_i q_i \qquad \text{avec } b_i \leq a_{i+1} \quad :$$

si $n = 0$, c'est clair ; si $n > 0$, on écrit $N = b_{n-1}q_{n-1} + N'$ avec $N' < q_{n-1}$ et on conclut par récurrence. La somme $\sum_{i<N} \psi(x + is)$ se décompose alors en (Σb_i) sommes partielles, chacune de longueur l'un des q_i , et (1.1) donne

$$(1.7.1) \qquad \left|\sum_{i=0}^{N-1} \psi(x+is) - N \int_{R/\mathbb{Z}} \psi(t)\, dt\right| \leq \Sigma b_i \cdot \mathrm{Var}(\psi) \leq \sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \cdot \mathrm{Var}(\psi) \ ,$$

et, pour $s = \alpha$, (1.2) et (1.3) donnent

$$(1.7.2) \qquad \left\|\sum_{i=0}^{N-1} \psi \circ f^i - N \int \psi \mu \right\|_\infty \leq \sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \cdot \mathrm{Var}(\psi)$$

$$(1.7.3) \qquad \|\log Df^N\|_\infty \leq \sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \cdot V \quad .$$

§ 2. Majoration de $|D^2 f^q|$

2.1. Dérivons deux fois la formule (1.3.1)

$$\log Df^n = \sum_{i<n} \log Df \circ f^i \quad :$$

$$(2.1.1) \qquad D \log Df^n = \sum_{i<n} D \log Df \circ f^i . Df^i \ ,$$

soit

$$(2.1.2) \qquad D^2 f^n = Df^n . \sum_{i<n} D \log Df \circ f^i . Df^i$$

$$(2.1.3)\qquad D^2 \log Df^n = \sum_{i<n} (D^2 \log Df \circ f^i \cdot (Df^i)^2 + D \log \ Df \circ f^i \cdot D^2 f^i)$$

$$= \sum_{i<n} D^2 \log Df \circ f^i \cdot (Df^i)^2 + \sum_{j<i<n} D \log Df \circ f^i \cdot Df^i \cdot D \log Df \circ f^j \cdot Df^j \ .$$

Dans le dernier terme, on reconnaît (Oh ! miracle) les termes croisés du développement du carré du second membre de (2.1.1). Complétant le carré, on trouve

$$(2.1.4)\quad D^2 \log Df^n = \tfrac{1}{2}(D \log Df^n)^2 - \tfrac{1}{2} \sum_{i<n} (D \log Df \circ f^i \,.\, Df^i)^2 + \\ + \sum_{i<n} D^2 \log Df \circ f^i \cdot (Df^i)^2 \ .$$

Si on majore dans (2.1.4) les $|Df^i|$ par $\sup\limits_{i<n} \|Df^i\|_\infty$, on trouve

$$(2.1.5)\qquad \|D^2 \log Df^n\|_\infty \leq \tfrac{1}{2} \| D \log Df^n\|_\infty^2 + \tfrac{1}{2} An \sup_{i<n} \|Df^i\|_\infty^2 \ ,$$

pour

$$(2.1.6)\qquad A = \|D \log Df\|_\infty^2 + 2 \| D^2 \log Df \|_\infty \ .$$

2.2. D'après Hadamard, pour ψ une fonction C^2 sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on a (cf. 7.1.4)

$$(2.2.1)\qquad \|D\psi\|_\infty \leq (2\|\psi\|_\infty \|D^2\psi\|_\infty)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Supposons f C^3 , et appliquons cette inégalité d'interpolation à $\psi = \log Df^q$, en tenant compte de (1.5) et (2.1.5) :

$$(2.2.2)\qquad \|D \log Df^q\|_\infty \leq (V \|D \log Df^q\|_\infty^2 + qAV \sup_{i<q} \|Df^i\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Si $V < 1$, ceci fournit une estimation pour $\|D \log Df^q\|_\infty$ (qui figure dans les deux membres de la formule) : élevant au carré, on trouve

$$\|D \log Df^q\|_\infty^2 \leq \frac{AV}{1-V} \cdot q \cdot \sup_{i<q} \|Df^i\|_\infty^2 \ .$$

Ecrivant que $D \log Df^q = D^2 f^q / Df^q$, et réappliquant 1.5, on trouve enfin le

THÉORÈME 2.3.- _Supposons_ f C^3 , _et que_ $V < 1$. _Soit_ $B = \left(\frac{AV}{1-V}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^V$ _où_ A _est défini par_ (2.1.6). _Si_ q _est le dénominateur d'une approximation ration-_

<u>nelle de</u> α , <u>on a</u>

$$\|D^2 f^q\|_\infty \le B \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{i<q} \|Df^i\|_\infty \ .$$

Le gain essentiel dans cette majoration est qu'on a obtenu un facteur $\sqrt{q}$, plutôt que q .

§ 3. $\mathrm{Var}(\log Df_n)$ <u>tend vers</u> 0

Pour pouvoir appliquer 2.3, il est nécessaire de se ramener au cas où $V < 1$. Plus tard, pour contrôler les $\|Df^i\|_\infty$, $(i < q)$, on aura même besoin de se ramener au cas où V est petit. Le résultat principal 3.3 de ce paragraphe le permettra.

PROPOSITION 3.1.- <u>Les</u> h_n <u>convergent uniformément vers</u> h .

Posons $\psi(x) = h(x) - x$. Par définition, h est normalisé de telle sorte que $\int_{R/\mathbb{Z}} \psi(x)\mu = 0$. La formule $R_\alpha h = hf$ s'écrit $h = h \circ f - \alpha = f - \alpha + \psi \circ f$. De même, puisque h conjugue f^i en $R_{i\alpha}$, on a $h = f^i - i\alpha + \psi \circ f^i$. Prenons la moyenne de ces identités, pour $0 \le i < n$:

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i<n} (f^i - i\alpha) + \frac{1}{n} \sum_{i<n} \psi \circ f^i = h_n + \frac{1}{n} \sum_{i<n} \psi \circ f^i \ .$$

Il reste à montrer que $\frac{1}{n} \sum_{i<n} \psi \circ f^i$ converge uniformément vers $\int \psi\, \mu = 0$. On peut le déduire de 1.7 (ψ est de variation ≤ 2) , ou, par un changement de variable (par h) ramener cette convergence à un théorème d'H. Weyl :

<u>Rappel</u> 3.2 (H. Weyl).- <u>Soient</u> φ <u>une fonction continue sur</u> $R/\mathbb{Z}$, <u>et</u> α <u>un nombre irrationnel. Les sommes</u> $S_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i<n} \varphi(x + i\alpha)$ <u>convergent uniformément vers</u> $\int_{R/\mathbb{Z}} \varphi(x)\, dx$.

On le voit en approchant φ par des polynômes trigonométriques P . On vérifie directement que, pour un polynôme trigonométrique, $S_n(P)$ tend vers $\int_{R/\mathbb{Z}} P(x)dx$. Puisque $|S_n(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty$, on a donc

$$\limsup \| S_n(\varphi) - \int_{R/\mathbb{Z}} \varphi(x)dx \|_\infty = \limsup \| S_n(\varphi - P) - \int_{R/\mathbb{Z}} (\varphi(x) - P(x))dx \|_\infty$$

$$\leq 2 \| \varphi - P \|_\infty \quad , \text{ arbitrairement petit.}$$

THÉORÈME 3.3.- Si f est C^2, la variation $V_n = \| D \log D f_n \|_1$ tend vers 0 pour $n \to \infty$.

Calculons Df_n. On a

$$h_n \circ f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^{i+1} - i\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (f^i - i\alpha) + \alpha$$

$$= h_n + \alpha + \frac{1}{n} (f^n - x - n\alpha) \quad , \qquad \text{d'où}$$

$$f_n = R_\alpha + \frac{1}{n} (f^n - x - n\alpha) \circ h_n^{-1} \qquad \text{et}$$

$$Df_n = 1 + \left[\frac{1}{n} (Df^n - 1).(Dh_n)^{-1} \right] \circ h_n^{-1}$$

$$Df_n - 1 = \frac{Df^n - 1}{\sum_{i<n} Df^i} \circ h_n^{-1} \quad .$$

Par ailleurs, puisque $Df^n = Df \circ f^{n-1} \cdot Df^{n-1}$ et que $(Df^{n-1})^{-1} \circ f^{1-n} = D(f^{1-n})$,

$$\frac{Df^n}{\sum_{i<n} Df^i} \circ f^{1-n} = \frac{Df}{\sum_{i<n} Df^i \circ f^{1-n} \cdot D(f^{1-n})} = \frac{Df}{\sum_{i<n} Df^{-i}} \quad , \text{ soit}$$

$$(3.3.1) \qquad Df_n - 1 = \left(\frac{Df}{\sum_{i<n} Df^{-i}} \circ f^{n-1} - \frac{1}{\sum_{i<n} Df^i} \right) \circ h_n^{-1} \quad .$$

Lemme 3.4.- La somme $\sum_{i<n} Df^i$ tend uniformément vers ∞.

Les Df^i sont en effet tous positifs, et une infinité d'entre eux est $\geq e^{-V}$ (1.5). Appliquant ce lemme à f et f^{-1}, on déduit de 3.4 que

Lemme 3.5.- Les Df_n tendent uniformément vers 1 ; il revient donc au même de prouver que les V_n tendent vers 0, ou que la variation de Df_n tend vers 0.

La variation étant invariante par changement de variable, on a

$$\mathrm{Var}(Df_n) = \mathrm{Var}(Df_n - 1) \leq \mathrm{Var}\left(\frac{Df}{\sum_{i<n} Df^{-i}}\right) + \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sum_{i<n} Df^{i}}\right)$$

$$= \left\| D\,\frac{Df}{\sum_{i<n} Df^{-i}} \right\|_1 + \left\| D\,\frac{1}{\sum_{i<n} Df^{i}} \right\|_1 \leq$$

$$\left\| \frac{D^2 f}{\sum_{i<n} Df^{-i}} \right\|_1 + \|Df\|_\infty \left\| D\,\frac{1}{\sum_{i<n} Df^{-i}} \right\|_1 + \left\| D\,\frac{1}{\sum_{i<n} Df^{i}} \right\|_1 .$$

D'après 3.4, la fonction dans le premier terme tend uniformément vers 0 . Le théorème 3.1 résulte donc du résultat suivant appliqué à f et f^{-1} .

THÉORÈME 3.6.- <u>Si</u> f <u>est</u> C^2 , $D\left(\frac{1}{\sum_{i<n} Df^{i}}\right)$ <u>est uniformément borné, et tend presque partout vers</u> 0 . <u>Cette fonction tend donc vers</u> 0 <u>en norme</u> L_1 .

Soit G l'automorphisme $\varphi \mapsto \varphi \circ f \cdot Df = f^*(\varphi\, dx)/dx$ de $L^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$. Il respecte la norme L^1 et transforme fonctions positives en fonctions positives. On peut donc lui appliquer le théorème ergodique de Chacon-Ornstein (voir par exemple, Garsia, Topics in almost everywhere convergence): pour tout φ dans L^1 , les

$$\psi_n(\varphi) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(\varphi)}{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(1)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \cdot Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}$$

tendent presque partout vers une limite $\psi(\varphi)$.

On appliquera ce théorème à $\varphi = D \log Df$. On pose

$$\psi_n = \frac{\sum_{i<n} D \log Df \circ f^i \cdot Df^i}{\sum_{i<n} Df^i} ,$$

et on note ψ la limite presque sure des ψ_n . Les $|\psi_n|$, donc $|\psi|$, sont majorés par $\|D \log Df\|_\infty$.

<u>Lemme</u> 3.7.- $D\left(\frac{1}{\sum_{i<n} Df^i}\right)$ <u>est uniformément borné, et tend presque partout (donc aussi en norme</u> L^1) <u>vers</u> $-\frac{1}{2}\psi$.

Les indices de sommation allant de 0 à $n-1$, on a

$$-D\left(\frac{1}{\Sigma Df^i}\right) = \frac{\Sigma D^2 f^i}{(\Sigma Df^i)^2} = \frac{\sum_{i>j} Df^i \cdot D \log Df \circ f^j \cdot Df^j}{(\Sigma Df^i)^2} .$$

Les $\lambda_{ij} = \frac{Df^i Df^j}{(\sum_{i<n} Df^i)^2}$ $(j < i < n)$ étant positifs, de somme ≤ 1 , on voit déjà que

$$-D\left(\frac{1}{\Sigma Df^i}\right) = \Sigma \lambda_{ij}\, D \log Df \circ f^j$$

est majoré, en valeur absolue, par $\|D \log Df\|_\infty$.

Les indices de sommation allant toujours de 0 à $n-1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i>j} Df^i \cdot D \log Df \circ f^i . Df^j &= \sum Df^i \cdot \psi_i \cdot \sum_{j<i} Df^j \\ &= \psi \cdot \sum_{j<i} Df^i Df^j + \sum (\psi - \psi_i)\, Df^i \sum_{j<i} Df^j \\ &= \tfrac{1}{2}\psi \cdot (\sum Df^i)^2 - \tfrac{1}{2}\psi \sum (Df^i)^2 + \sum (\psi - \psi_i) Df^i \sum_{j<i} Df^j ,\end{aligned}$$

$$D\left(\frac{1}{\Sigma Df^i}\right) + \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\psi \cdot \frac{\sum (Df^i)^2}{(\Sigma Df^i)^2} + \frac{\sum (\psi - \psi_i)\, Df^i \sum_{j<i} Df^j}{(\Sigma\ Df^i)^2} .$$

Majorons $\Sigma (Df^i)^2 = \Sigma Df^i . Df^i$ par $\sup Df^i . \Sigma Df^i$ et $\sum_{j<i} Df^j$ par ΣDf^j . On trouve

$$\left|D\left(\frac{1}{\Sigma Df^i}\right) + \frac{1}{2}\psi\right| \leq \frac{1}{2}|\psi| \frac{\sup Df^i}{\Sigma\ Df^i} + \frac{\Sigma\, |\psi - \psi_i|\, Df^i}{\Sigma Df^i} = A_n + B_n .$$

Quel que soit j entre 0 et $n-1$,

$$\frac{Df^j}{\Sigma Df^i} = (\Sigma Df^i.(Df^j)^{-1})^{-1} = (\Sigma Df^{i-j} \circ f^j)^{-1} \leq \inf\left(\frac{1}{\sum\limits_{i<n-j} Df^i} \circ f^j , \frac{1}{\sum\limits_{i\leq j} Df^{-i}} \circ f^j\right)$$

D'après 3.4, A_n tend donc uniformément vers 0 . Quant à B_n , le lemme suivant, de vérification laissée au lecteur, montre que B_n tend vers 0 en tout point où ψ_n tend vers ψ .

Lemme 3.8.- Soient a_n une suite qui tend vers 0 , et b_n une série positive divergente. Alors, $\sum\limits_{i<n} a_i b_i / \sum\limits_{i<n} b_i$ tend vers 0 .

Déduisons enfin 3.6 de 3.7 : puisque $1/\sum\limits_{i<n} Df^i$ tend vers 0 , $D(1/\sum\limits_{i<n} Df^i)$ tend vers 0 , au sens des distributions. D'après 3.7, cette suite tend L^1 vers $-\frac{1}{2}\psi$. On a donc $\psi = 0$, et on applique 3.7.

Complément 3.9.- Herman sait déduire de 3.7 qu'un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, C^2 et à nombre de rotation irrationnel, est dx-ergodique : toute partie borélienne (voire dx-mesurable) de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ stable par f est de mesure de Lebesgue 0 ou 1.

Remarque 3.10.- Le théorème de Chacon-Ornstein n'est pas effectif : il ne fournit pas d'estimation quant à la rapidité avec laquelle, pour chaque ε , les ψ_n tendent uniformément vers ψ en dehors d'un ensemble de mesure ε . De ce fait, je ne sais pas déduire de la démonstration ci-dessus une majoration effective des V_n .

§ 4. Approximation d'un nombre par les rationnels

Sauf en 4.5, les conventions générales sur α , p , q sont suspendues dans ce paragraphe. Nous commençons par des rappels sur les fractions continues, pour lesquelles on peut consulter Hardy and Wright.

4.1. Soit $[a_0,\ldots,a_n,\ldots] = a_0 + 1/(a_1 + 1/\ldots$ $(a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i > 0$ pour

$i > 0$) le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel α . Soit $p_n/q_n = [a_o,\dots,a_n]$ la n-ième réduite. On a $p_n/q_n < \alpha$ pour n pair, $p_n/q_n > \alpha$ pour n impair. Si, pour $i = -1$, -2 , on définit (p_i , q_i) par

$$\begin{pmatrix} p_{-2} & p_{-1} \\ q_{-2} & q_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a pour tout $n \geq 0$

$$(4.1.1) \qquad \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} ,$$

soit

$$(4.1.2) \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} . \end{cases}$$

De (4.1.2), il résulte que

$$(4.1.3) \qquad a_{n+1} q_n \leq q_{n+1} \leq (a_{n+1} + 1) q_n$$

$$(4.1.4) \qquad 2q_n \leq (a_{n+1} a_{n+2} + 1) q_n \leq q_{n+2}$$

$$(4.1.5) \qquad q_n \geq \sqrt{2}^{\,n} \quad \text{pour } n \geq 2 \quad (\text{car } q_o = 1 \ , \ q_3 \geq 3 > 2^{3/2}) .$$

De (4.1.1), on déduit par récurrence que $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = \pm 1$, i.e.

$$(4.1.6) \qquad \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} .$$

Puisque α est entre p_n/q_n et p_{n+1}/q_{n+1} , il résulte de (4.1.6) que les p_n/q_n sont des approximations rationnelles de α , par défaut pour n pair, par excès pour n impair.

4.2. On a entre réduites et approximations rationnelles les relations suivantes :

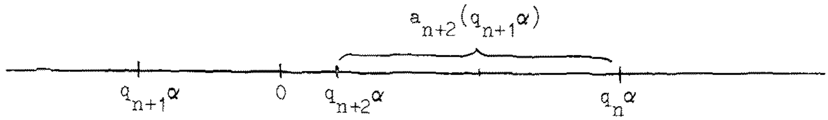
(4.2.1) Toute approximation rationnelle de s est soit une réduite, soit de la forme $[a_o,\dots,a_{n-1} , a_n \pm 1]$. Si on range les approximations rationnelles par dénominateurs croissants, de 3 successives, l'une au moins est une réduite.

(4.2.2) De deux réduites successives, l'une au moins vérifie

$|\alpha - p/q| < 1/2q^2$. Une approximation rationnelle telle que $|s - p/q| < 1/2q^2$ est une réduite.

4.3. Posons $|||x||| = \inf\limits_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$. Les dénominateurs q_n sont les nombres q tels que $|||q\alpha||| < |||q'\alpha|||$ pour tout $q' < q$. Sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, trois $q_n\alpha$ successifs sont disposés ainsi (le dessin est pour $a_{n+2} = 2$)

(4.3.1)



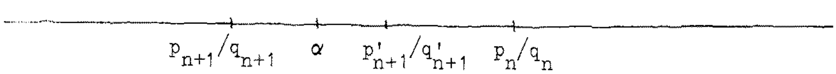
Si on exclut le cas où $n = 0$, $a_1 = q_1 = 1$, $|||q_n\alpha|||$ est la distance de 0 à $q_n\alpha$, telle qu'elle apparaît sur cette figure, et

(4.3.2) $\quad a_{n+2}$ est la partie entière de $|||q_n\alpha||| \,/\, |||q_{n+1}\alpha|||$ (pour $n \geq 1$) ,

(4.3.3) $\quad |||q_{n+2}\alpha||| \leq \dfrac{1}{a_{n+2}+1} |||q_n\alpha||| \leq \frac{1}{2} |||q_n\alpha|||$.

Posons $p'_n/q'_n = [a_0, \ldots, a_n + 1]$. On a la disposition

(4.3.4)



d'où par (4.1.6) et (4.1.3)

(4.3.5) $$\frac{1}{q_n q'_{n+1}} \leq |\alpha - p_n/q_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad ,$$

soit

(4.3.6) $$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n} \leq |||q_n\alpha||| \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n} \qquad \text{(sauf pour } n=0 \text{ , } q_0 = q_1 = 1\text{)}$$

Comparant (4.1.3) et (4.3.6), et tenant compte de (4.2.2), on voit qu'il revient au même d'exiger

(a) que $|||q\alpha|||$ ne soit jamais trop petit ;

(b) que a_n ne soit jamais trop grand ;

(c) que les dénominateurs des approximations rationnelles de α ne croissent pas trop vite.

DÉFINITION 4.4.- <u>Un nombre irrationnel</u> α <u>est de</u> densité bornée <u>si sa densité</u>

$$d = \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$ <u>est finie</u>.

Appliquons 1.7, pour $s = \alpha$ de densité $d < \infty$, en prenant pour q_i les dénominateurs des réduites successives. Pour $n \geq 2^{N/2}$, on a $N \leq q_n$ (4.1.5) et $\sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \leq nd$. La formule 1.7.3 nous fournit la

PROPOSITION 4.5.- <u>Il existe des constantes universelles</u> C , D <u>telles que</u>, <u>pour</u> α <u>de densité bornée</u> d , <u>on ait</u>

$$\|D^N f\|_\infty \leq C^{dV} . N^{DdV} .$$

4.6. Soit $T : [0,1[\to [0,1[$, $x \mapsto$ partie fractionnaire de x^{-1} . La mesure de probabilité $\nu = \frac{1}{\log 2} \frac{dx}{1+x}$ sur $[0,1[$ vérifie $T_* \nu = \nu$. Khintchine a montré que T est ν-ergodique. Le n-ième coefficient du développement en fraction continue de x irrationnel dans $[0,1]$ est

$$a_n(x) = [(T^{n-1}(x))^{-1}] \qquad (n \geq 1) .$$

Pour presque tout x (au sens de la mesure ν - ou de celle de Lebesgue, c'est pareil) un entier k apparaît donc dans la suite des $a_n(x)$ $(n \geq 1)$ avec une fréquence

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} (\#\{n \leq N \mid a_n(x) = k\}) = \int_{[x^{-1}]=k} \nu \asymp 1/k^2 .$$

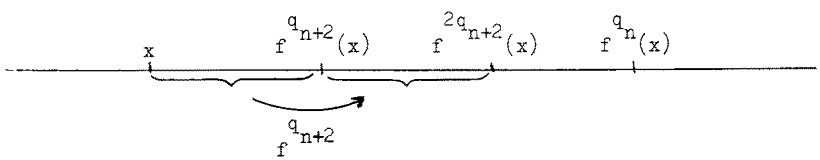
Puisque la somme $\Sigma \frac{1}{k^2} \cdot k$ diverge, l'ensemble des nombres de densité bornée est de mesure de Lebesgue nulle.

La proposition 4.5 est la seule étape de la démonstration d'Herman où l'on doive faire sur α une hypothèse qui n'est pas vérifiée par presque tout nombre.

§ 5. Majoration de $|f^{q_n} - x - p_n|$

On notera par p_n/q_n la n-ième réduite de α . D'après 4.3.3., on a sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la disposition

Par conjugaison, la même disposition vaut pour les itérés de f :



Sur $\mathbb{R}$, la même disposition vaut si on remplace f^{q_i} par $f^{q_i} - p_i$. L'axe doit être orienté de gauche à droite pour n impair, de droite à gauche pour n pair. Puisque $Df^{q_i} \geq e^{-V}$, on en déduit que

$$(1 + e^{-V})|f^{q_{n+2}}(x) - p_{n+2} - x| \leq |f^{q_n}(x) - p_n - x| ,$$

d'où la

PROPOSITION 5.1.- <u>Les</u> $\|f^{q_n} - x - p_n\|_\infty$ <u>décroissent au moins aussi vite qu'une progression géométrique</u>.

Cet argument, un peu affiné, permet de prouver le théorème suivant

THÉORÈME 5.2.- <u>Supposons que</u> α <u>vérifie la condition</u>

$$(*) \quad \lim_{A\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \sum_{\substack{a_i > A \\ 1\leq i\leq N}} \log(a_i + 1) \Big/ \sum_{1\leq i\leq N} \log(a_i + 1) = 0 ,$$

<u>soit, ce qui revient au même</u>

(*)' <u>Pour tout</u> ε , <u>il existe</u> A <u>tel que</u>

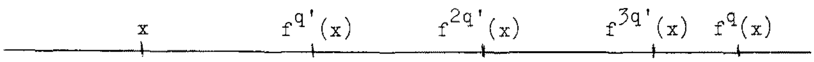
$$\prod_{\substack{a_i > A \\ 1\leq i\leq N}} (a_i + 1) \leq O(q_N^{\varepsilon}) .$$

<u>Il existe alors une fonction</u> $V \mapsto \varepsilon(V)$, <u>tendant vers</u> 0 <u>avec</u> V , <u>telle que</u>

$$|f^{q_n}(x) - p_n - x| \leq O(q_n^{-1+\varepsilon(V)}) \quad .$$

Esquisse de démonstration.

a) Soient p/q et p'/q' deux approximations rationnelles par excès de α , $a = q\alpha - p$, $b = q'\alpha - p'$ et $c = a/b$. Si $0 \leq rb \leq a$ (r entier ≥ 1), on a sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la disposition (dessin pour $r = 3$)



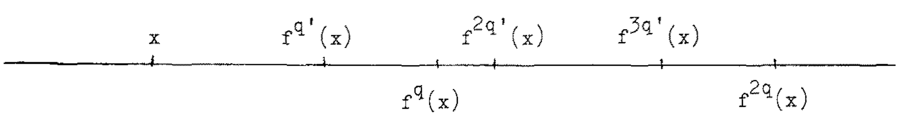
et, puisque $Df^{q'} \geq e^{-V}$,

$$\left(\sum_{i=0}^{r-1} e^{-iV}\right) |f^{q'}(x) - p' - x| \leq |f^{q}(x) - p - x| \quad .$$

b) Plus généralement, si $rb \leq sa$, i.e. si $\frac{r}{s} \leq c$, on a

$$(5.2.1) \qquad \left(\sum_{i=0}^{r-1} e^{-iV}\right) |f^{q'}(x) - p' - x| \leq \left(\sum_{i=0}^{s-1} e^{iV}\right) |f^{q}(x) - p - x| \quad .$$

Pour $r = 3$, $s = 2$, on a le dessin



c) Quels que soient ε et A , il existe B tel que

$$\forall\, x\ (2 \leq x \leq A) \quad \exists\, r, s \quad (r \leq B\ ,\ s \leq B\ ,\ x^{1-\varepsilon} < r/s < x) \quad .$$

Il existe ensuite V_o tel que si $V < V_o$, on ait pour tout $r, s < B$, avec $r \geq 2s$,

$$\sum_{i=0}^{s-1} e^{iV} \Big/ \sum_{i=0}^{r-1} e^{-iV} \leq (s/r)^{1-\varepsilon} \quad .$$

d) Si $V < V_o$, et que $2 \leq c \leq A$, (5.2.1) donne

$$(5.2.2) \qquad |f^{q'}(x) - p' - x| \leq c^{-1+\varepsilon'}\, |f^{q}(x) - p - x| \quad ,$$

avec $(1 - \varepsilon') = (1 - \varepsilon)^2$.

e) Prenons la suite des approximations rationnelles p_{2n+1}/q_{2n+1} , et soit $b_n = |q_{2n+1}\alpha - p_{2n+1}| = |||q_{2n+1}\alpha|||$. On a

$$2 \leq \frac{b_n}{b_{n+1}} \leq (a_{2n+2} + 1)(a_{2n+3} + 1) .$$

Si $V < V_o$, on a donc

$$\begin{cases} |f^{q_{2n+3}}(x) - p_{2n+3} - x| \leq \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{1-\varepsilon'} |f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| & (1) \\ \qquad \text{si } (a_{2n+2}+1)(a_{2n+3}+1) \leq A & \\ |f^{q_{2n+3}}(x) - p_{2n+3} - x| \leq |f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| & (2) \\ \qquad \text{en tout cas.} & \end{cases}$$

Mettant bout à bout ces inégalités, on trouve que $|f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| \leq O([\Pi\,(a_{2i} + 1)(a_{2i+1} + 1)]^{1-\varepsilon'} . b_n^{1-\varepsilon'})$, où le produit est étendu aux $i \leq n$ tels que $(a_{2i} + 1)(a_{2i+1} + 1) \geq A$.

On le majore par le produit $B_n = \Pi\,(a_j + 1)^2$ étendu aux $j \leq 2n + 1$ tels que $a_j + 1 \geq A^{\frac{1}{2}}$, et on majore b_n par $1/q_{2n+1}$:

$$|f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| \leq O(B_n\, q_{2n+1}^{-1+\varepsilon'}) .$$

L'hypothèse sur α permet de faire rentrer B_n dans le ε' , et de conclure.

<u>Remarque</u> 5.3.- La condition (*) est vérifiée par presque tout nombre, et par les nombres de densité bornée.

<u>Remarque</u> 5.4.- Sauf si les a_i sont bornés, cette méthode ne permet malheureusement pas d'obtenir une minoration de $|f^{q_n}(x) - p_n - x|$.

§ 6. Majoration de $|Df^{q_n} - 1|$

Soit $\varphi_n = f^{q_n} - p_n - x$. Nous allons majorer $|Df^{q_n} - 1| = |D\varphi_n|$ par la formule d'interpolation de Hadamard (2.2.1). On a, pour α de densité bornée, et f C^3

$$\|\varphi_n\|_\infty \le O(q_n^{-1+\varepsilon(V)}) \quad \text{avec } \varepsilon(V) \to 0 \text{ pour } V \to 0 \tag{5.2}$$

$$\|D^2\varphi_n\|_\infty \le O(q_n^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{i < q_n} \|Df^i\|_\infty) \quad \text{pour } V < 1 \tag{2.3}$$

$$\sup_{i < q_n} \|Df^i\|_\infty \le O(q_n^{\varepsilon'(V)}) \text{ avec } \varepsilon'(V) \to 0 \text{ pour } V \to 0 \tag{4.5}$$

On a donc

$$\|D\varphi_n\|_\infty \le O(q_n^{-1/4 + \varepsilon''(V)}) , \qquad (\varepsilon''(V) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon(V) + \varepsilon'(V)) .$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe m tel que

$$\varepsilon''(\mathrm{Var}\log D\, f_m) < \varepsilon \tag{3.3}$$

d'où

$$\|Df_m^{q_n} - 1\|_\infty \le O(q_n^{-1/4+\varepsilon}) .$$

Par conjugaison $(f^{q_n} = h_m f_m^{q_n} h_m^{-1}$, $f_m^{q_n}$ est proche de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par 5.2, et h_m est C^3), on obtient enfin le

THÉORÈME 6.1.- *Si f est C^3 , et α de densité bornée, on a pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\|Df^{q_n} - 1\|_\infty \le O(q_n^{-1/4+\varepsilon}) .$$

§ 7. h est $C^{1+\beta}$ pour $\beta < 1/3$

7.1. Nous aurons à utiliser les propriétés suivantes de la norme höldérienne $|\varphi|_\beta$.

(7.1.1) Pour φ périodique de période 1 , et $g : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on a

$$|\varphi \circ g|_\beta \le |\varphi|_\beta \, \|Dg\|_\infty^\beta .$$

(7.1.2) $|\varphi|_\beta$ est une fonction croissante logarithmiquement convexe de β

$\log|\varphi|_\beta$ est en effet la borne supérieure des fonctions linéaires croissantes $\log \dfrac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\beta}$.

(7.1.3) $\quad |\varphi|_0 \le 2\,\|\varphi\|_\infty \quad$ et $\quad |\varphi|_1 = \|D\varphi\|_\infty$.

(7.1.4) $\quad \|D\varphi\|_\infty \le \left(\dfrac{1+\beta}{2\beta}\right)^{\beta/\beta+1} . \left(|\varphi|_0^\beta \; |D\varphi|_\beta\right)^{1/1+\beta}$.

Supposons que le maximum de $|D\varphi|$ soit atteint en x_0 , et pour fixer les idées, que $D\varphi(x_0) \ge 0$. On a alors $D\varphi(x) \ge \|D\varphi\|_\infty - |D\varphi|_\beta (x-x_0)^\beta$ et

$\varphi(x) - \varphi(x_0) \ge \|D\varphi\|_\infty (x - x_0) - |D\varphi|_\beta \dfrac{(x-x_0)^{1+\beta}}{1+\beta}$, pour $x \ge x_0$. On évalue cette minoration en x telle que $\|D\varphi\|_\infty - |D\varphi|_\beta (x - x_0)^\beta = 0$. Joignant le résultat au résultat symétrique, pour $x < x_0$, on trouve que

$$\tfrac{1}{2}|\varphi|_0 \ge \|D\varphi\|_\infty X - |D\varphi|_\beta \frac{X^{1+\beta}}{1+\beta} = X\left(\|D\varphi\|_\infty - \frac{|D\varphi|_\beta X^\beta}{1+\beta}\right)$$

pour X tel que $\|D\varphi\|_\infty = |D\varphi|_\beta X^\beta$. La formule d'interpolation (7.1.4), dont la formule d'Hadamard (2.2.1) est le cas particulier $\beta = 1$, en résulte.

(7.1.5) $\quad \|\varphi\|_\beta = \|\varphi\|_\infty + |\varphi|_\beta$ est une norme d'algèbre de Banach sur l'algèbre des fonctions C^β. La formule $\|\varphi_1\varphi_2\|_\beta \le \|\varphi_1\|_\beta \|\varphi_2\|_\beta$ se déduit de l'identité

$$\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(y)\varphi_2(y) = \varphi_1(x)(\varphi_2(x) - \varphi_2(y)) + (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))\varphi_2(y) .$$

7.2. On suppose α de densité bornée et f C^3 . Soit $\varepsilon < 1/4$. D'après 6.1, on a une majoration

(7.2.1) $\quad |\log Df^{q_n}| \le A \cdot q_n^{-\varepsilon}$.

Soit N un entier, et écrivons $N = \Sigma\, b_i q_i$ comme en 1.7. Si on brise la somme $\log Df^N = \sum_{i<N} \log Df \circ f^i$ en sommes partielles comme en 1.7, on trouve

(7.2.2) $\quad \log Df^N = \Sigma_i$ (Σ de b_i termes de la forme $\log Df^{q_i} \circ f^j$).

Appliquons (7.2.1) :

$$(7.2.3) \qquad \|\log Df^N\|_\infty \le A \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} q_i^{-\varepsilon} .$$

Cette somme converge si α est à densité bornée (et pour presque tout nombre), d'où la

PROPOSITION 7.3. $\|\log Df^n\|_\infty$ <u>est uniformément borné</u>.

7.4. Supposons que $V < 1$, et interpolons par 7.1.2 entre l'estimation 6.1 de $\|Df^{q_n} - 1\|_\infty$ et l'estimation 2.3 de $\|D(Df^{q_n} - 1)\|_\infty$. On trouve, pour $\beta < 1/3$, une majoration

$$(7.4.1) \qquad |Df^{q_n}|_\beta \le O(q_n^{-\varepsilon}) \qquad \text{avec } \varepsilon > 0 .$$

Prenons $|\ |_\beta$ de (7.2.2). Les $\circ f^j$ y sont sans importance par (7.1.1) et 7.3, d'où

$$|Df^n|_\beta \le O(\Sigma a_{i+1} q_i^{-\varepsilon}) = O(1) :$$

les f^n sont uniformément $C^{1+\beta}$, les h_n le sont aussi, et h est donc $C^{1+\beta}$, comme expliqué dans l'introduction. On se débarrasse enfin de l'hypothèse $V < 1$ par 3.3.

PROPOSITION 7.5.- <u>Pour tout</u> $\beta < 1/3$, h <u>est</u> $C^{1+\beta}$.

§ 8. $C^{2+\beta}$ <u>convergence des</u> f_n

THÉORÈME 8.1.- <u>Soit</u> $0 < \beta' < \beta \le 1$. <u>On suppose que</u> f <u>est</u> $C^{2+\beta}$ <u>et que</u> h <u>est</u> $C^{1+\beta}$. <u>Alors, les</u> f_n <u>convergent vers</u> R_α <u>dans la</u> $C^{2+\beta'}$ <u>- topologie</u>.

On sait déjà que la convergence est C^1 (3.5). C'est d'ailleurs ici évident sur (3.3.1) puisque les Df^i sont bornés inférieurement : $Df^i > A > 0$. Les formules d'interpolation (7.1.2) et (7.1.4) nous ramènent donc à montrer que les f_n restent bornés dans la $C^{2+\beta}$ - topologie, i.e. que les $|D^2 f_n|_\beta$ restent bornés.

Les f^n sont uniformément $C^{1+\beta}$. Les $|\frac{1}{n} \sum_{i<n} Df^i|_\beta$ sont donc bornés. Puisque les Df^i sont bornés inférieurement, et que $|\varphi^{-1}|_\beta \le |\varphi|_\beta / (\inf |\varphi|)^2$,

les $\left|n\Big/\sum_{i<n} Df^i\right|_\beta$ sont également bornés.

Par la même méthode qu'en 3.6, compte tenu de ce que les h_n et f^n sont uniformément C^1 (ce qui justifie les changements de variable), on se ramène à majorer uniformément en norme $\| \ \|_\beta$ (7.1.5) les fonctions

$$-D\left(\frac{1}{\sum_{i<n} Df^i}\right) = \sum_{j<i<n} \lambda_{ij} \ D \log Df \circ f^j \qquad \text{pour}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{Df^i Df^j}{\left(\sum_{i<n} Df^i\right)^2} = \frac{1}{n^2}\left[Df^i \cdot Df^j \cdot \left(n\Big/\sum_{i<n} Df^i\right)^2\right] \qquad \text{(preuve de (3.7).}$$

L'expression entre crochets, et les $D \log Df \circ f^j$, étant uniformément bornés en norme $\| \ \|_\beta$, c'est immédiat.

§ 9. Application d'un théorème des fonctions implicites

Le résultat final d'Herman est le suivant.

THÉORÈME 9.1.- Si α est de densité bornée, et que f est C^r, $r \geq 3$ ($r = n + \beta$, n entier, $0 \leq \beta < 1$), alors h est $C^{r-1-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Il l'obtient en conjuguant 7.5 et 8.1 avec un théorème des fonctions implicites :

THÉORÈME 9.2.- Soient α un nombre irrationnel, et $1 \leq \theta < \theta'$. On suppose qu'il existe C tel que $|q\alpha - p| \geq C \cdot q^{-\theta}$ pour tous entiers p, q. Il existe alors un voisinage V de R_α dans la $C^{2\theta'}$-topologie tel que pour f dans ce voisinage et C^r (resp. C^∞, C^ω), l'équation

$$f = R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$$

($\lambda \in \mathbf{R}$, g homéomorphisme croissant) admette une solution $C^{r-\theta'}$ (resp. C^∞, C^ω).

Pour obtenir 9.1, on prend $1 < \theta < \theta' = 1 + \varepsilon$, on prend pour α le nombre de rotation de f , on se ramène à supposer f dans V par 7.5 et 8.1 et on observe que le nombre de rotation de $R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$ ne peut être α que pour $\lambda = 0$.

Comme nous l'avons déjà dit, la preuve de 9.2 est inspirée de [1], [3] et [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARNOLD - Small denominators I, Transl. A.M.S., 2e série, 46 (1965), 213-284.

[2] A. DENJOY - Les trajectoires à la surface du tore, C.R. Acad. Sci. Paris, 1946, vol. 223, 5-8.

[3] J. MOSER - A rapidly convergent iteration method II, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 20 (1966), 499-535.

[4] H. RÜSSMANN - Kleine Nenner II, Bemerkungen zur Newtonschen Methode, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., 1972.