Exposé V

CRISTAUX ORDINAIRES ET COORDONNÉES CANONIQUES

par P. DELIGNE

avec la collaboration de L. ILLUSIE (*)

SOMMAIRE

Dans tout l'exposé, k désigne un corps algébriquement clos de car. $p > 0$, et W l'anneau des vecteurs de Witt sur k.

(*) Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. n° 653

0. INTRODUCTION

Soit X_o/k une courbe elliptique ordinaire. D'après la théorie de Serre-Tate [14, V], la variété modulaire formelle M des déformations de X_o sur les W-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k est isomorphe au groupe multiplicatif formel $\hat{\mathbb{G}}_m/W$. Plus précisément, le groupe p-divisible $G_o = \cup \mathrm{Ker}(p^n : X_o \circlearrowleft)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \times \mu_{p^\infty}$, et le choix d'un isomorphisme α entre la partie étale de G_o et $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ permet d'identifier canoniquement, pour toute W-algèbre R artinienne locale de corps résiduel k, l'ensemble des relèvements de X_o sur R au groupe $\mathrm{Ext}^1((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_R, (\mu_{p^\infty})_R)$, à son tour isomorphe canoniquement au groupe des unités de R congrues à 1 modulo l'idéal maximal : on obtient donc ainsi un isomorphisme (ne dépendant que de α) entre M et $(\hat{\mathbb{G}}_m)_W$, et en particulier la déformation universelle X de X_o sur M définit une "coordonnée canonique" q sur M, telle que $M \simeq \mathrm{Spf}\, W[[q-1]]$. De ce paramètre q, qui décrit le groupe p-divisible G associé à X comme extension de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ par μ_{p^∞}, on peut donner une autre interprétation, en termes du module $H^1_{DR}(X/M)$, muni de sa structure de F-cristal et de sa filtration de Hodge $H^o(X,\Omega^1_{X/M}) \subset H^1_{DR}(X/M)$. La donnée d'un isomorphisme α comme ci-dessus fournit en effet par dualité un isomorphisme α' entre le groupe formel $X\hat{}/M$ associé à X et le groupe formel $(\hat{\mathbb{G}}_m)_M$, d'où une forme $b \in H^o(X,\Omega^1_{X/M})$, correspondant par α' à la forme invariante sur $(\hat{\mathbb{G}}_m)_M$. Soit $a \in H^1_{DR}(X/M)$ tel que $\nabla a = 0$ et (a,b) soit une base symplectique de $H^1_{DR}(X/M)$, i.e. $\langle a,b\rangle = 1$, $\langle a,a\rangle = 0$. Si $\nabla : H^1_{DR}(X/M) \to \Omega^1_{M/W} \otimes H^1_{DR}(X/M)$ désigne la connexion de Gauss-Manin, on a nécessairement

(0.1) $$\nabla b = \eta \otimes a ,$$

avec $\eta \in \Omega^1_{M/W}$. On peut montrer (voir Appendice et Exposé suivant, par N. Katz) que l'on a

(0.2) $$\eta = d \log q ,$$

où q est le paramètre défini plus haut, qui se trouve donc coïncider avec celui défini indépendamment par Dwork ([8], [6]) à l'aide de (0.2). La base (a,b) ci-dessus jouit par ailleurs de propriétés remarquables vis-à-vis de l'opération de Frobenius F sur $H^1_{DR}(X/M)$: si l'on choisit comme endomorphisme de M relevant le Frobenius de $M \otimes k$ celui donné par $q \mapsto q^p$, alors F s'exprime par

$$Fa = a \ , \ Fb = pb \ . \tag{0.3}$$

Les constructions précédentes se généralisent aux variétés abéliennes ordinaires [8], voir aussi [9], [11] pour des applications arithmétiques dans le cas des courbes elliptiques.

L'objet de l'exposé est de montrer qu'on peut développer une théorie analogue pour les surfaces K3 ordinaires, du moins si $p \neq 2$. Soit X_o/k une surface K3 ordinaire, i.e. telle que le Frobenius de $H^2(X_o, \mathcal{O})$ soit non nul, et soit S la variété modulaire formelle des déformations de X_o sur les W-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k (IV 1.2). Si $p \neq 2$, on prouve que S est munie canoniquement d'une structure de groupe formel, isomorphe à $(\hat{\mathbb{G}}_{m})^{20}_{W}$; en particulier, la déformation universelle X de X_o sur S définit des "coordonnées canoniques" q_i $(1 \leqslant i \leqslant 20)$ telles que $S \simeq \mathrm{Spf}\, W[[q_1 - 1, \ldots, q_{20} - 1]]$, formant une base des caractères de S. On montre de plus que, si L_o est un faisceau inversible non trivial sur X_o, l'hypersurface $\Sigma(L_o)$ de S telle que L_o se prolonge à $X \times_S \Sigma(L_o)$ (IV 1.5) est le noyau d'un caractère de S, défini de façon presque tautologique par la classe de Chern cristalline de L_o.

En l'absence d'une théorie de Serre-Tate pour les relèvements des surfaces K3, c'est en termes de la structure de F-cristal de $H^2_{DR}(X/S)$ que l'on définit la structure de groupe formel de S. En fait, on peut englober le cas des variétés abéliennes et celui des surfaces K3 dans un même théorème de structure pour une certaine classe de F-cristaux ordinaires. L'étude de ces cristaux fait l'objet du n° 1. Les applications géométriques sont données au n° 2. En ce qui concerne le théorème relatif aux hypersurfaces $\Sigma(L_o)$, l'ingrédient essentiel est l'utilisation de la classe de Chern cristalline pour contrôler l'obstruction au prolongement.

1. PARAMETRES CANONIQUES DES F-CRISTAUX DE HODGE ORDINAIRES

1.1. Rappels de définitions.

1.1.1. Pour les définitions et propriétés générales des F-cristaux, voir Katz [8], [10]. On fixe pour toute la suite du n° 1 des anneaux de séries formelles

$$A_o = k[[t_1,\ldots,t_n]] \quad , \quad A = W[[t_1,\ldots,t_n]] \ ,$$

où $(t_1,\ldots,t_n)$ est une suite finie d'indéterminées (pour $n=0$, on convient que $A_o = k$, $A = W$).

Un cristal (sous-entendu, en modules libres de type fini) sur A_o est par définition un A-module libre de type fini H , muni d'une connexion

$$\nabla : H \to \Omega^1_{A/W} \otimes H \ ,$$

intégrable et p-adiquement topologiquement nilpotente. Que ∇ soit intégrable signifie que, si l'on pose $D_i = d/dt_i$, on a

$$\nabla(D_i)\nabla(D_j) = \nabla(D_j)\nabla(D_i)$$

quels que soient $i \neq j$. Cela permet de faire opérer sur H les opérateurs PD-différentiels sur A , i.e. les polynômes en les D_i à coefficients dans A , par la formule

$$\nabla(\Sigma\ a_m D^m) = \Sigma\ a_m(\nabla(D))^m \ ,$$

avec les notations condensées habituelles $D^m = D_1^{m_1}\ldots D_n^{m_n}$, etc. Quant à la nilpotence topologique de ∇ , elle s'exprime par le fait que, pour tout i , $\nabla(D_i)^m$ tend vers zéro pour la topologie p-adique de $\mathrm{End}_W(H)$ quand m tend vers $+\infty$. D'après Berthelot [1, II 4], la donnée d'une connexion ∇ comme ci-dessus équivaut à la donnée, pour tout couple de W-homomorphismes (f,g) de A dans une W-algèbre B locale, noethérienne et complète, tels que f et g soient congrus modulo un idéal I de B muni de puissances divisées compatibles aux puissances divisées standard de p, d'un isomorphisme

$$\chi(f,g) : f^*H \xrightarrow{\sim} g^*H \quad , \; (^*)$$

ces isomorphismes étant assujettis à vérifier certaines conditions de transitivité explicitées dans [8, 1.2], i.e. $\chi(g,h)\chi(f,g) = \chi(f,h)$, $\chi(fk,gk) = k^*\chi(f,g)$, $\chi(id,id) = id$. La formule suivante décrit concrètement ce dictionnaire dans le sens qui nous intéresse :

LEMME 1.1.2. *Avec les notations ci-dessus, désignons par* $f^* : H \to f^*H$ *la flèche d'adjonction, où* $f^*H = f_*f^*H$ *par abus. L'homomorphisme* A-*linéaire composé*

$$\chi(f,g)f^* : H \xrightarrow{f^*} f^*H \xrightarrow{\chi(f,g)} g^*H$$

est donné par la formule

$$(1.1.2.1) \qquad \chi(f,g)f^*(x) = \sum_m (f(t)-g(t))^{[m]} g^*(\nabla(D)^m x) \ ,$$

la somme portant sur tous les multi-indices $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbf{N}^n$, *avec les notations condensées*

$$(f(t)-g(t))^{[m]} = (f(t_1)-g(t_1))^{[m_1]} \ldots (f(t_n)-g(t_n))^{[m_n]}$$

(*le crochet désignant une puissance divisée dans* I), *et*

$$\nabla(D)^m = \nabla(D_1)^{m_1} \ldots \nabla(D_n)^{m_n}$$

(N.B. *la série au second membre de* (1.1.2.1) *est convergente grâce à la nilpotence topologique de* ∇).

Cet énoncé est essentiellement contenu dans [1, II 4.3]. Il suffit de le vérifier après réduction mod p^r pour tout r. Nous noterons

---

$(^*)$ On note encore f (resp. g) : $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme de schémas correspondant.

encore par abus $(f,g) : A \rightrightarrows B$ les W_r-homomorphismes déduits de ceux donnés par réduction mod p^r. Soit $\underline{D}$ l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal d'augmentation J de $A \hat{\otimes}_{W_r} A$ $(= W_r[[t_1,\dots,t_n, u_1,\dots,u_n]])$, notons d_o (resp. d_1) : $A \to \underline{D}$ l'homomorphisme donné par $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $1 \otimes a$), définissant la structure de A-module "à gauche" (resp. "à droite") de $\underline{D}$. Comme J, engendré par les $t_i - u_i$, est régulier, il résulte de [1, I 4.5.1] que $\underline{D}$ s'identifie pour la structure gauche à l'algèbre à puissances divisées $A\langle \xi_1,\dots,\xi_n\rangle$, où $\xi_i = d_1 t_i - d_o t_i$ = image de $u_i - t_i$ dans $\underline{D}$. Par la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées, et du fait que B est complet, il existe un PD-morphisme $s : \underline{D} \to B$ tel que $sd_o = g$, $sd_1 = f$. D'autre part, d'après [1, II 4.3.8], la connexion ∇ définit une PD-stratification

$$\varepsilon : \underline{D} \otimes_A H \ (= d_1^* M) \xrightarrow{\sim} H \otimes_A \underline{D} \ (= d_o^* M)$$

telle que l'homomorphisme d_1-linéaire composé

$$\theta : H \xrightarrow{d_1^*} d_1^* H \xrightarrow{\varepsilon} d_o^* H$$

soit donné par la formule

$$(*) \qquad \theta(x) = \Sigma \nabla(D^m) x \otimes \xi^{[m]} ,$$

avec les notations condensées évidentes. Par définition, $\chi(f,g)$ est l'isomorphisme déduit de ε par image inverse par s :

$$\chi(f,g) = s^* \varepsilon : f^* H \xrightarrow{\sim} g^* H .$$

Si l'on convient de regarder f (resp. g) comme définissant une structure de A-module à droite (resp. gauche) sur B, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, equal] & \underline{D} \otimes_A H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "s \otimes 1"] & H \otimes_A \underline{D} \arrow[d, "1 \otimes s"] \\ H \arrow[r, "f^*"] & B \otimes_A H \arrow[r, "\chi(f,g)"] & H \otimes_A B \end{tikzcd} ,$$

qui montre, compte tenu de (*), que le composé horizontal inférieur est donné par

$$\chi(f,g)f^*(x) = \Sigma\ \nabla(D)^m x \otimes s(\xi)^{[m]} .$$

Mais

$$s(\xi_i) = s(d_1 t_i - d_o t_i) = f(t_i) - g(t_i) ,$$

donc

$$\begin{aligned}\chi(f,g)f^*(x) &= \Sigma\ \nabla(D)^m x \otimes (f(t)-g(t))^{[m]} \\ &= \Sigma(f(t)-g(t))^{[m]} g^*(\nabla(D)^m x) .\end{aligned}$$

1.1.3. Un F-<u>cristal</u> sur A_o est par définition un cristal (H,∇) sur A_o , muni, pour chaque relèvement $\varphi : A \to A$ du Frobenius de A_o compatible à l'endomorphisme de Frobenius σ de W , d'un homomorphisme horizontal

$$F(\varphi) : \varphi^* H \to H$$

($\varphi^* H$ étant muni de la connexion $\varphi^*\nabla$), tel que $F(\varphi)\otimes \mathbb{Q}_p$ soit un isomorphisme, et que, pour tout couple de relèvements (φ,ψ), on ait un triangle commutatif

$$(1.1.3.1)\qquad \begin{tikzcd} \varphi^* H \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\chi(\varphi,\psi)"'] & H \\ \psi^* H \arrow[ur, "F(\psi)"'] & \end{tikzcd} ,$$

où $\chi(\varphi,\psi)$ est l'isomorphisme canonique défini par ∇ grâce au fait que φ est congru à ψ modulo l'idéal à puissances divisées pA .

L'horizontalité de $F(\varphi)$ s'exprime par la commutativité du carré

$$(1.1.3.2)\qquad \begin{tikzcd} \varphi^* H \arrow[r, "\varphi^*\nabla"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & \Omega^1_{A/W}\otimes \varphi^* H \arrow[d, "1\otimes F(\varphi)"] \\ H \arrow[r, "\nabla"] & \Omega^1_{A/W}\otimes H \end{tikzcd} .$$

Comme par définition $\varphi^*\nabla$ rend commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \Omega^1_{A/W} \otimes H \\ {\scriptstyle\varphi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^*\otimes\varphi^*} \\ \varphi^*H & \xrightarrow{\varphi^*\nabla} & \Omega^1_{A/W}\otimes\varphi^*H \end{array} ,$$

on en déduit la formule

(1.1.3.3) $$\nabla F(\varphi)\varphi^*x = \Sigma\ \varphi^*\omega_i \otimes F(\varphi)\varphi^* h_i ,$$

pour $x \in H$ tel que $\nabla x = \Sigma\ \omega_i \otimes h_i$.

D'autre part, la loi de variation de $F(\varphi)$ (1.1.3.1) se traduit par la formule

(1.1.3.4) $$F(\psi)\psi^*x = F(\varphi)\varphi^*x + \sum_{|n|>0} (\psi(t)-\varphi(t))^{[n]}\ F(\varphi)\varphi^*(\nabla(D)^n x) ,$$

avec les notations de 1.1.2. On a en effet, d'après les conditions de transitivité vérifiées par χ ,

$$\begin{aligned} F(\psi)\psi^*x &= F(\psi)\chi(\varphi,\psi)\chi(\psi,\varphi)\psi^*x \\ &= F(\varphi)\chi(\psi,\varphi)\psi^*x \qquad (1.1.3.1) , \end{aligned}$$

d'où 1.1.3.4, grâce à 1.1.2.1 appliqué à $f=\psi$, $g=\varphi$.

1.1.4. Soit $s_o : A_o \to k'$ un point de $\mathrm{Spec}(A_o)$ à valeurs dans une extension algébriquement close de k . Si φ relève Frobenius comme ci-dessus, on sait [8, 1.1] qu'il existe un unique relèvement de s_o en $s : A \to W(k')$ tel que $s\varphi = \sigma s$ (σ désignant le Frobenius de $W(k')$), appelé <u>relèvement de Teichmüller</u> de s_o relatif à φ . Soit H un F-cristal sur A_o . Alors $F(\varphi)$ fournit un endomorphisme σ-linéaire de s^*H , d'où un F-cristal s^*H sur k' . Si φ' est un autre relèvement de Frobenius, et s' le relèvement de Teichmüller de s_o correspondant, les F-cristaux s^*H et s'^*H sont canoniquement isomorphes grâce à (1.1.3.1) (cf. [8, 1.4]). On écrira s_o^*H pour s^*H , et on dira que s_o^*H est le F-<u>cristal induit par</u> H <u>au point</u> s_o.

1.1.5. Rappelons enfin qu'à tout F-cristal sur k on associe un <u>polygone de Newton</u> et un <u>polygone de Hodge</u>, pour les définitions et propriétés desquels nous renvoyons le lecteur à [12], [8], et [10].

1.2. F-cristaux unités.

1.2.1. On dit qu'un F-cristal (H,∇) sur A_o est un F-cristal unité si, pour un relèvement φ à A du Frobenius de A_o, $F(\varphi)$ est un isomorphisme. D'après (1.1.3.1), il revient au même de dire que $F(\varphi)$ est un isomorphisme pour tout relèvement φ.

Tout $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini M fournit un F-cristal unité sur A_o, à savoir $(H = M \otimes A\ ,\ \nabla = 1 \otimes d\ ,\ F(\varphi) = 1 \otimes \varphi)$. En fait, tout F-cristal unité sur A_o est de ce type :

PROPOSITION 1.2.2 (cf. [8, §3]). Soit H un F-cristal unité sur A_o. Il existe une base (e_i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de H sur A telle que $\nabla e_i = 0$ et $F(\varphi)\varphi^* e_i = e_i$ pour tout relèvement φ du Frobenius de A_o.

Autrement dit, la base (e_i) définit un isomorphisme du F-cristal trivial $\mathbb{Z}_p^r \otimes A$ défini ci-dessus sur H.

Avant de démontrer 1.2.2, faisons d'abord deux remarques.

a) Si $x \in H$ est tel que, pour un relèvement φ, $F(\varphi)\varphi^* x = x$, alors $\nabla x = 0$. En effet, comme φ relève Frobenius, on a $\varphi^*(\Omega^1_{A/W}) \subset p\Omega^1_{A/W}$, donc p divise $\nabla x = \nabla F(\varphi)\varphi x$ d'après (1.1.3.3). Le même raisonnement montre, par récurrence, que ∇x est divisible par p^n pour tout n, donc que $\nabla x = 0$.

b) Si $x \in H$ est tel que $F(\varphi)\varphi^* x = x$ pour un relèvement φ, alors $F(\psi)\psi^* x = x$ pour tout relèvement ψ. Compte tenu de a), cela résulte en effet de la loi de variation de $F(\varphi)$ (1.1.3.4).

Il suffit donc de trouver une base (e_i) de H sur A telle que $F(\varphi)\varphi^* e_i = e_i$ pour un relèvement φ choisi, par exemple celui donné par $t_j \mapsto t_j^p$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Soit $s : A \to W$ l'augmentation donnée par $s(t_i) = 0$. Comme $s\varphi = \varphi\sigma$, $F(\varphi)\varphi^*$ induit sur s^*H un automorphisme σ-linéaire Φ. Le corps k étant algébriquement clos, il existe une base de s^*H fixe par Φ (partir d'une base fixe par Φ mod p, qui existe grâce au lemme de Lang, et la modifier de proche en proche pour la rendre fixe par Φ mod p^n pour tout n). Autrement dit, il existe une base (f_i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de H telle que, si l'on pose $F(\varphi)\varphi^* = F$, on ait

$$Ff = (I+M)f ,$$

avec $M \in M_r(A)$ tel que $M = 0 \bmod (t)$ $(= (t_1,\ldots,t_n)A)$. Il suffit de montrer qu'on peut remplacer f par $e = (I+N)f$, avec $N \in M_r(A)$ tel que $N = 0 \bmod (t)$, de manière à satisfaire à $Fe = e$. Explicitant, on trouve l'équation

$$(*) \qquad N = M + \varphi(N) + \varphi(N)M .$$

Or l'application $N \mapsto M + \varphi(N) + \varphi(N)M$ est contractante pour la topologie (t)-adique, car $\varphi((t)) \subset (t)^p$, donc $(*)$ possède une solution unique, ce qui achève la démonstration de 1.2.2.

1.2.3. Nous dirons qu'un F-cristal (H,∇) sur A_o est <u>topologiquement nilpotent</u> si, pour un relèvement φ du Frobenius de A_o, $F(\varphi)\varphi^*$ est p-adiquement topologiquement nilpotent ; cette condition ne dépend pas du choix de φ, comme le montre (1.1.3.4) (ou plus exactement l'analogue de (1.1.3.4) pour des itérés de $F(\varphi)\varphi^*$, $F(\psi)\psi^*$). Il n'est pas vrai que tout F-cristal sur A_o soit extension d'un F-cristal topologiquement nilpotent par un F-cristal unité. Plus précisément, on a le critère suivant, cas particulier d'un théorème de Katz [10, 2.4.2] :

PROPOSITION 1.2.4. <u>Soit</u> H <u>un</u> F-<u>cristal</u> <u>sur</u> A_o. <u>Notons</u> F_o <u>l'endomorphisme de</u> $H_o = H \otimes_A A_o$ <u>induit par</u> $F(\varphi)\varphi^*$, <u>où</u> φ <u>relève le Frobenius</u> F_{A_o} <u>de</u> A_o (F_o est F_{A_o}-linéaire, et indépendant de φ). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>Les rangs stables de</u> (H_o,F_o) <u>au point fermé et en un point géométrique algébriquement clos localisé au point générique de</u> Spec(A_o) <u>sont éqaux</u>.

(ii) <u>Il existe une extension de F-cristaux sur</u> A_o ,

$$0 \to U \to H \to E \to 0 ,$$

<u>où</u> U <u>est un F-cristal unité et</u> E <u>un F-cristal topologiquement nilpotent</u>.

Rappelons ce qu'on entend par "rang stable" : si L est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps parfait de car. p , muni d'un endomorphisme p-linéaire Φ , L se décompose canoniquement en $L = L^{ss} \oplus L^{nilp}$, où $L^{ss} = \bigcap \mathrm{Im}\, \Phi^n$, $L^{nilp} = \bigcup \mathrm{Ker}\, \Phi^n$; la dimension de L^{ss} est par définition le <u>rang stable</u> de (L, Φ).

Bien qu'il s'agisse d'un cas particulier de [10, 2.4.2], indiquons rapidement une démonstration de 1.2.4 (*), la situation envisagée ici étant nettement plus simple que celle de (loc. cit.). Il est clair que (ii) implique (i). Inversement, posons $\bar{H}_o = H_o \otimes_{A_o} k = H \otimes_A k$. Relevons dans H_o une base de $\bar{H}_o$ adaptée à la décomposition de $\bar{H}_o$ sous $F_o \otimes k$, $\bar{H}_o = \bar{H}_o^{ss} \oplus \bar{H}_o^{nilp}$: F_o est alors donné par une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, avec $b \equiv 0 \bmod (t)$, et a inversible de rang $r = \dim \bar{H}_o^{ss}$. Dans une nouvelle base de H_o , donnée par une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de F_o est $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} P^{(p)}$, et l'on peut déterminer $x \equiv 0 \bmod (t)$ de manière que $b' = 0$: en effet, on obtient pour x l'équation $x = f(x)$, où $f(x) = ba^{-1} - xcx^{(p)}a^{-1} + dx^{(p)}a^{-1}$, et cette équation possède une solution unique car f est une application contractante pour la topologie (t)-adique. Dans cette nouvelle base, la matrice de F_o prend donc la forme $\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$, avec a' inversible de rang r . L'hypothèse (i) entraîne alors que l'endomorphisme d' est nilpotent, car il en est ainsi de d' localisé en une extension algébriquement close du corps des fractions de A_o . Choisissons un relèvement φ de F_{A_o} . Dans une base de H relevant la base de H_o

---

(*) figurant dans des notes de Katz antérieures à (loc. cit.), non publiées.

choisie ci-dessus, la matrice de $F = F(\varphi)\varphi^*$ s'écrit (avec des notations changées) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, où $b \equiv 0 \bmod p$, et d topologiquement nilpotent. Appliquant à nouveau la méthode du point fixe (avec cette fois une application contractante pour la topologie p-adique), on voit qu'on peut trouver une nouvelle base $(e_1,\ldots,e_r, e_{r+1},\ldots,e_{r+s})$ de H, donnée par une matrice de passage $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ x & 1_s \end{pmatrix}$, avec $x \equiv 0 \bmod p$, de manière que dans cette nouvelle base, la matrice de F s'écrive $\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$, avec a' inversible (de rang r) et d' topologiquement nilpotent. Le sous-F-module $U = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} Ae_i$ est égal à $\bigcap_{n \geqslant 0} \operatorname{Im} F^n$, donc (grâce à (1.1.3.2)) horizontal, i.e. tel que $\nabla U \subset \Omega^1_{A/W} \otimes U$. D'après (1.1.3.1), U est donc un sous-F-cristal unité de H, et par construction le F-cristal H/U est topologiquement nilpotent, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 1.2.5. Sous les hypothèses de 1.2.4, le F-cristal U est caractérisé, en termes de H, par $U = \bigcap \operatorname{Im} F^n$ (où $F = F(\varphi)\varphi^*$). Nous dirons que U est <u>le</u> sous-F-cristal unité de H.

1.3. F-<u>cristaux ordinaires</u>.

1.3.1. Soient H un F-cristal sur A_o, $H_o = H \otimes_A A_o$. Soit φ un relèvement à A du Frobenius F_{A_o}, posons $H_o^{(p)} = F_{A_o}^* H_o = \varphi^* H \otimes_A A_o$, et, pour $i \in \mathbb{N}$,

(1.3.1.1) $M^i H_o^{(p)} = \{x \in H_o^{(p)} \mid$ il existe $y \in \varphi^* H$ relevant x et tel que $F(\varphi) y \in p^i H\}$,

(1.3.1.2) $\operatorname{Fil}^i H_o = H_o \cap M^i H_o^{(p)}$

(où H_o est considéré comme sous-module de $F_{A_o *} H_o^{(p)}$ par la flèche d'adjonction),

(1.3.1.3) $\operatorname{Fil}_i H_o = \{x \in H_o \mid$ il existe $y \in H$ relevant x et tel que $p^i y \in \operatorname{Im} F(\varphi)\}$.

D'après (1.1.3.1), les sous-modules $\mathrm{Fil}^i H_o$ (resp. $\mathrm{Fil}_i H_o$) ne dépendent pas du choix de φ ; ils forment une filtration décroissante (resp. croissante) de H_o, qu'on appelle <u>filtration de Hodge</u> (resp. <u>filtration conjuguée</u>), cf. [15, 1.9], où cette filtration est notée F^i_{Hodge} (resp. F^{-i}_{con}). On peut montrer [15, 2.2] que l'on a aussi

(1.3.1.4) $\mathrm{Fil}^i H_o = \{x \in H_o \mid$ il existe $y \in H$ relevant x et tel que $F(\varphi)\varphi^* y \in p^i H\}$.

La terminologie provient du <u>théorème de Mazur-Ogus</u> [3, 8.26] affirmant que si X_o/A_o est un schéma (ou schéma formel) propre et lisse tel que (i) la cohomologie cristalline $H^*(X_o/A)$ soit un A-module libre, (ii) la suite spectrale $E_1^{ij} = H^j(X_o, \Omega^i_{X_o/A_o}) \Longrightarrow H^*_{DR}(X_o/A_o)$ dégénère en E_1 et E_1 soit libre sur A_o et de formation compatible au changement de base, alors si l'on pose $H = H^n(X_o/A)$ (donc $H_o = H^n_{DR}(X_o/A_o)$) (n entier fixé) la filtration $\mathrm{Fil}^i H_o$ (resp. $\mathrm{Fil}_i H_o$) coïncide avec la filtration canonique sur l'aboutissement de la suite spectrale ci-dessus (resp. la suite spectrale conjuguée $E_2^{ij} = H^i(X_o, \underline{H}^j(\Omega^{\cdot}_{X_o/A_o})) \Longrightarrow H^*_{DR}(X_o/A_o))$.

Rappelons [15, 1.6] que les filtrations 1.3.1.2 et 1.3.1.3 sont finies, séparées et exhaustives, et que pour n donné les conditions $\mathrm{Fil}^{n+1} H_o = 0$ et $\mathrm{Fil}_n H_o = H_o$ sont équivalentes : on dit alors que H est de <u>niveau</u> $\leqslant n$.

On notera

(1.3.1.5) $$\mathrm{gr}^{\cdot} H_o \quad (\text{resp. } \mathrm{gr}_{\cdot} H_o)$$

le gradué associé à la filtration $\mathrm{Fil}^{\cdot} H_o$ (resp. $\mathrm{Fil}_{\cdot} H_o$). Si $\mathrm{gr}_{\cdot} H_o$ est libre sur A_o, il en est de même de $\mathrm{gr}^{\cdot} H_o$, la formation de $\mathrm{gr}_{\cdot} H_o$ et $\mathrm{gr}^{\cdot} H$ commute au changement de base, et, pour tout i, $\mathrm{gr}_i H_o$ et $\mathrm{gr}^i H_o$ sont canoniquement isomorphes, en particulier ont même rang h_i, qu'on appellera i-ième <u>nombre de Hodge</u> de H [15, 1.12, 2.3].

Rappelons d'autre part [15, 1.6, 2.6] que la filtration conjuguée est horizontale pour la connexion ∇_o induite sur H_o (et de gradué associé de p-courbure nulle), tandis que la filtration de Hodge vérifie la condition de transversalité de Griffiths

(1.3.1.6) $$\nabla_o \mathrm{Fil}^i H_o \subset \Omega^1_{A_o/k} \otimes \mathrm{Fil}^{i-1} H_o \ .$$

La notion de F-cristal ordinaire a été dégagée par Mazur [12] et Ogus, à qui est due la caractérisation suivante [15, 3.1.3] :

PROPOSITION 1.3.2. Soit H un F-cristal sur A_o tel que $gr.H_o$ soit libre sur A_o. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) les polygones de Newton et de Hodge du F-cristal $e_o^* H$ induit par H au point fermé $e_o : A_o \to k$ (1.1.4) coïncident ;

(i') pour tout point s_o de $\mathrm{Spec}(A_o)$ à valeurs dans une extension algébriquement close k' de k, les polygones de Newton et de Hodge du F-cristal $s_o^*(H)$ (1.1.4) coïncident ;

(ii) les filtrations de Hodge et conjuguée de H_o sont opposées, i.e. on a, pour tout i, $H_o = \mathrm{Fil}_i H_o \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} H_o$;

(iii) il existe une unique filtration de H par des sous-F-cristaux

(1.3.2.1) $$0 \subset U_o \subset U_1 \subset \ldots \subset U_i \subset U_{i+1} \subset \ldots$$

tels que U_i relève $\mathrm{Fil}_i H_o$, et que U_i/U_{i-1} soit de la forme $V_i(-i)$, où V_i est un F-cristal unité et $(-i)$ désigne la torsion à la Tate consistant à remplacer F par $p^i F$.

DÉFINITION 1.3.3. On dit qu'un F-cristal H sur A_o est ordinaire si $gr.H_o$ est libre et H vérifie les conditions équivalentes de 1.3.2.

Démontrons 1.3.2. L'implication (i') $\Longrightarrow$ (i) est triviale, et il est clair que (iii) entraîne (i'). Prouvons (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons H de niveau $\leqslant n$, et la conclusion établie pour les F-cristaux de niveau $\leqslant n-1$. Notons F l'endomorphisme p-linéaire de H_o induit par $F(\varphi)$ pour un relèvement φ (F ne dépend pas de ce choix). Par définition (1.3.1), on a

(1.3.3.1) $\mathrm{Fil}_o H_o = \mathrm{Im}\, F : H_o^{(p)} \to H_o$, $\mathrm{Fil}^1 H_o = \mathrm{Ker}\, F : H_o \to H_o$.

L'hypothèse (i) entraîne d'abord que le rang stable de $e_o^* H_o$ est $h_o = \mathrm{rg}\, \mathrm{Fil}_o H_o$ (coïncidence des parties de pente 0 des polygones de Newton et de Hodge de $e_o^* H$). Soit s_o un point de $\mathrm{Spec}(A_o)$ à valeurs dans une extension algébriquement close du corps des fractions de A_o . La démonstration de 1.2.4 montre que l'on a

$$\mathrm{rg.st}(s_o^* H_o) \geqslant \mathrm{rg.st}(e_o^* H_o)$$

(rg.st = rang stable), mais comme on a aussi

$$\mathrm{rg.st}(s_o^* H_o) \leqslant h_o$$

d'après (1.3.3.1), on en déduit

$$\mathrm{rg.st}(e_o^* H_o) = \mathrm{rg.st}(s_o^* H_o) = h_o \ .$$

Il en résulte d'une part que l'on a

$$\mathrm{Fil}_o(s_o^* H_o) = (s_o^* H_o)^{ss} \ , \ \mathrm{Fil}^1(s_o^* H_o) = (s_o^* H_o)^{nilp} \ ,$$

donc $s_o^* \mathrm{Fil}_o H_o \cap s_o^* \mathrm{Fil}^1 H_o = 0$, donc

(1.3.3.2) $$H_o = \mathrm{Fil}_o H_o \oplus \mathrm{Fil}^1 H_o \ .$$

D'autre part, d'après 1.2.4, on a une suite exacte de F-cristaux sur A_o ,

(1.3.3.3) $$0 \to U_o \to H \to E \to 0 \ ,$$

où U_o est le sous-F-cristal unité de H , et E un F-cristal topologiquement nilpotent. Comme par définition $\mathrm{rg}(U_o) = \mathrm{rg.st}(e_o^* H_o) = h_o$, U_o relève $\mathrm{Fil}_o H_o$, donc la projection $H \to E$ induit un isomorphisme $\mathrm{Fil}^1 H_o \xrightarrow{\sim} E_o$, ce qui signifie que $F(\varphi) : \varphi^* E \to E$ est divisible par p , donc que $E = E'(-1)$, où E' est un F-cristal de niveau $\leqslant n-1$. Il est clair que $e_o^* E$, donc aussi $e_o^* E'$, a mêmes polygones de Newton et de Hodge, donc par l'hypothèse de récurrence appliquée à E' , on en conclut que les filtrations de Hodge et conjuguée de $E_o = E \otimes A_o$ sont opposées. On aura donc prouvé (ii) si l'on vérifie que la projection $H \to E$ induit des isomorphismes (pour $i \geqslant 0$)

$$\mathrm{Fil}_i H_o / \mathrm{Fil}_o H_o \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}_i E_o \ , \ \mathrm{Fil}^{i+1} H_o \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^{i+1} E_o \ .$$

Or il est clair que ces flèches sont injectives, et leur surjectivité résulte aisément de ce que U_o est un F-cristal unité. Prouvons maintenant (ii) $\Longrightarrow$ (iii). On suppose à nouveau H de niveau $\leqslant n$, et la conclusion établie pour les F-cristaux de niveau $\leqslant n-1$. L'unicité de (1.3.2.1) est claire, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, car U_o est nécessairement le sous-F-cristal unité de H. Pour l'existence, notons qu'on a (1.3.3.2) par hypothèse. D'après (1.3.3.1), on en déduit

$$e_o^* \mathrm{Fil}_o H_o = (e_o^* H_o)^{ss} \ , \ s_o^* \mathrm{Fil}_o H_o = (s_o^* H_o)^{ss}$$

(car la décomposition en partie semi-simple et partie nilpotente est unique), donc les rangs stables de $e_o^* H_o$ et $s_o^* H_o$ sont égaux. Grâce à 1.2.4, on obtient donc encore une suite exacte 1.3.3.3. On a vu ci-dessus que les filtrations de Hodge et conjuguées de E_o se déduisent de celles de H_o par passage au quotient : elles sont donc opposées. Comme $E = E'(-1)$, avec E' de niveau $\leqslant n-1$, l'hypothèse de récurrence entraîne l'existence d'une filtration de E par des sous-F-cristaux

$$0 = W_o \subset W_1 \subset \ldots \subset W_i \subset W_{i+1} \subset \ldots$$

tels que W_i relève $\mathrm{Fil}_i E_o$, et W_i / W_{i-1} soit de la forme $T_i(-i)$, avec T_i un F-cristal unité. Pour $i \geqslant 1$, notons U_i l'image inverse de W_i dans H. Les U_i, pour $i \geqslant 1$, et U_o forment une filtration (1.3.2.1), qui satisfait visiblement aux conditions énoncées en (iii). Ceci achève la démonstration de 1.3.2.

REMARQUE 1.3.4. Si $A_o = k$, la filtration (1.3.2.1) admet un scindage unique

(1.3.4.1) $$U_i = \bigoplus_{j \leqslant i} V_j(-j) \ ,$$

où V_j est un F-cristal unité. C'est un cas particulier du théorème de Katz [10, 1.6.1], mais il est facile de vérifier ce point directement : l'unicité est claire, car, pour $j < i$, $\mathrm{Hom}(V_i(-i),V_j(-j)) = 0$, quant à l'existence du scindage, elle s'établit aisément par récurrence sur le niveau, à l'aide d'un argument de point fixe analogue à ceux utilisés dans la démonstration de 1.2.4.

1.3.5. Soit H un F-cristal sur A_o . On appellera <u>filtration de Hodge</u> sur H une filtration finie décroissante par des sous-A-modules libres

$$\mathrm{Fil}^o H = H \supset \mathrm{Fil}^1 H \supset \ldots \supset \mathrm{Fil}^i H \supset \mathrm{Fil}^{i+1} H \supset \ldots$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) pour tout i , $\mathrm{Fil}^i H$ relève $\mathrm{Fil}^i H_o$,

(ii) ("transversalité") pour tout i , on a

$$\nabla \mathrm{Fil}^i H \subset \Omega^1_{A/W} \otimes \mathrm{Fil}^{i-1} H \ . \tag{1.3.5.1}$$

On appellera F-<u>cristal de Hodge</u> sur A_o un F-cristal sur A_o muni d'une filtration de Hodge.

Un exemple standard est fourni, dans la situation géométrique envisagée en 1.3.1, par la donnée d'un relèvement de X_o/A_o en un schéma formel propre et lisse X/A tel que la suite spectrale de Hodge de X/A , $E_1^{ij} = H^j(X,\Omega^i_{X/A}) \Longrightarrow H^*_{DR}(X/A)$ $(= H^*(X_o/A))$, dégénère en E_1 , avec un terme E_1 libre sur A . La filtration de Hodge de $H^n_{DR}(X/A)$, aboutissement de cette suite spectrale, vérifie les conditions (i) et (ii) ci-dessus.

PROPOSITION 1.3.6. <u>Soit</u> $(H,\mathrm{Fil}^\cdot H)$ <u>un</u> F-<u>cristal de Hodge sur</u> A_o . <u>Si</u> H <u>est ordinaire</u> (1.3.3), <u>les filtrations</u> U_i (1.3.2.1) <u>et</u> $\mathrm{Fil}^\cdot H$ <u>sont opposées</u>, <u>i.e. on a</u>, <u>pour tout</u> i , $H = U_i \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} H$, <u>d'où une décomposition</u>

$$H = \bigoplus_i H^i \quad , \quad H^i = U_i \cap \mathrm{Fil}^i H \ , \tag{1.3.6.1}$$

<u>avec</u> H^i <u>de rang</u> h_i (1.3.1.5).

C'est une conséquence immédiate de 1.3.2 et 1.3.5 (i) (la condition (ii) ne sert pas).

Dans l'exemple ci-dessus, supposons le F-cristal $H = H^n_{DR}(X/A)$ ordinaire. Pour chaque $r \geqslant 1$, la suite spectrale conjuguée

$$(*)_r \qquad E_2^{ij} = H^i(X\otimes W_r, \underline{H}^j(\Omega^{\cdot}_{X\otimes W_r/A\otimes W_r})) \Longrightarrow H^*_{DR}(X\otimes W_r/A\otimes W_r)$$

définit une filtration $(U_{i,r})$ sur $H^n_{DR}(X\otimes W_r/A\otimes W_r)$. On peut espérer que la limite projective des suites spectrales $(*)_r$ est une suite spectrale, dont la filtration aboutissement sur H^n est la limite des $(U_{i,r})$ et coïncide avec la filtration (U_i).

1.4. F-<u>cristaux de Hodge ordinaires de niveau</u> $\leqslant 1$.

1.4.1. Soit H un F-cristal de Hodge ordinaire de niveau $\leqslant 1$ sur A_o. D'après 1.3.2, on a donc une extension de F-cristaux

$$(1.4.1.1) \qquad 0 \to U \to H \to V(-1) \to 0 ,$$

où U et V sont des F-cristaux unités, et U relève $\mathrm{Fil}_o H_o$. On notera r (resp. s) le rang de U (resp. V). D'autre part, H est muni du sous-module libre $\mathrm{Fil}^1 H$, qui relève $\mathrm{Fil}^1 H_o$, donc vérifie, d'après (1.3.1.4),

$$(1.4.1.2) \qquad F(\varphi)\varphi^* \mathrm{Fil}^1 H \subset pH$$

pour tout relèvement φ de Frobenius. De plus, d'après 1.3.6, H, en tant que A-module, se décompose en somme directe

$$(1.4.1.3) \qquad H = U \oplus \mathrm{Fil}^1 H .$$

En particulier, $\mathrm{Fil}^1 H$ est de rang s, et se projette isomorphiquement sur V.

THÉORÈME 1.4.2. <u>Avec les notations de</u> 1.4.1 : (i) <u>Il existe une base</u> $a = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ <u>du</u> A-<u>module</u> U <u>et</u> $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ <u>du</u> A-<u>module</u> $\mathrm{Fil}^1 H$ <u>vérifiant les conditions</u>

(1.4.2.1) $$\nabla a_i = 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r \ ,$$

(1.4.2.2) $$\nabla b_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \eta_{ij} \otimes a_j \quad , \quad \eta_{ij} \in \Omega^1_{A/W} \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant s \ ,$$

(1.4.2.3) $$F(\varphi)\varphi^* a_i = a_i \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r \ ,$$

(1.4.2.4) $$F(\varphi)\varphi^* b_i = pb_i + p \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} u_{ij}(\varphi) a_j \quad , \quad u_{ij}(\varphi) \in A \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant s \ ,$$

<u>pour tout relèvement</u> φ <u>de Frobenius</u>. <u>De plus</u>, <u>les formes</u> η_{ij} <u>sont fermées</u>, <u>et vérifient</u>, <u>pour tout relèvement</u> φ <u>de Frobenius</u>,

(1.4.2.5) $$\varphi^* \eta_{ij} = p\eta_{ij} + pdu_{ij}(\varphi) \ .$$

(ii) <u>Les bases</u> a <u>et</u> b <u>étant choisies comme en</u> (i), <u>il existe une unique famille de séries formelles</u> $\tau_{ij} \in K[[t]]$ (où K est le corps des fractions de W) <u>telles que</u>, <u>quels que soient</u> i <u>et</u> j,

(1.4.2.6) $$\eta_{ij} = d\tau_{ij} \ ,$$

(1.4.2.7) $$\varphi^* \tau_{ij} - p\tau_{ij} - pu_{ij}(\varphi) = 0$$

<u>pour tout relèvement</u> φ <u>de Frobenius</u>. <u>On a</u>

(1.4.2.8) $$\tau_{ij}(0) \in pW \ .$$

<u>De plus</u>, <u>si</u> $p \neq 2$, <u>les séries</u>

(1.4.2.9) $$q_{ij} = \exp(\tau_{ij})$$

<u>sont définies</u>, <u>appartiennent à</u> A , <u>et vérifient</u> $q_{ij}(0) = 1 \bmod pW$.

Prouvons (i). Vu la structure des F-cristaux unités (1.2.2), il existe une base $a = (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de U vérifiant (1.4.2.1) et (1.4.2.3), et une base $b = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ de $\mathrm{Fil}^1 H$ telle que, si b'_i désigne l'image de b_i dans $V(-1)$, on ait $\nabla b'_i = 0$ et $F(\varphi)\varphi^* b'_i = pb'_i$ pour tout i et tout relèvement φ de Frobenius. Par suite ∇b_i et $F(\varphi)\varphi^* b_i$ s'écrivent sous les formes (1.4.2.2) et (1.4.2.4). L'intégrabilité de ∇ entraîne, par application de ∇ à (1.4.2.2), que $d\eta_{ij} = 0$ quels que soient i et j . D'autre part, appliquant ∇ à (1.4.2.4), et utilisant l'horizontalité de F (1.1.3.3), on obtient les relations (1.4.2.5).

Prouvons (ii). Les formes η_{ij} étant fermées, il existe, en vertu du lemme de Poincaré, des séries $\tau_{ij} \in K[[t]]$, déterminées à une constante près, telles que l'on ait (1.4.2.6). La relation (1.4.2.5) entraîne alors que

$$\varphi^*\tau_{ij} - p\tau_{ij} - pu_{ij}(\varphi) \in K ,$$

donc

(1.4.2.10) $\varphi^*\tau_{ij} - p\tau_{ij} - pu_{ij}(\varphi) = (\varphi^*\tau_{ij})(0) - p\tau_{ij}(0) - pu_{ij}(\varphi)(0)$.

Notons $x \mapsto x^\sigma$ l'automorphisme de Frobenius de K . Fixons tout d'abord le relèvement φ de Frobenius tel que $\varphi(t_i) = t_i^p$, et normalisons τ_{ij} par la condition

(1.4.2.11) $$(\varphi^*\tau_{ij})(0) - p\tau_{ij}(0) - pu_{ij}(\varphi)(0) = 0 ,$$

qui s'écrit encore $(\mathrm{car}(\varphi^*\tau_{ij})(0) = \tau_{ij}(0)^\sigma)$

(1.4.2.12) $$\tau_{ij}(0) = \sum_{n\geqslant 1} V^n u_{ij}(\varphi)(0)$$

(où $Vx = pF^{-1}x = px^{\sigma^{-1}}$). En particulier, on a (1.4.2.8). Montrons que, si ψ est un relèvement quelconque de Frobenius, la condition (1.4.2.7), avec φ remplacé par ψ , est satisfaite. Compte tenu de (1.4.2.10) (avec φ remplacé par ψ), il revient au même de vérifier que l'on a

(1.4.2.13) $$(\psi^*\tau_{ij})(0) - p\tau_{ij}(0) - pu_{ij}(\psi)(0) = 0 .$$

Si $\psi(0) = 0$ (i.e. ψ est compatible à l'augmentation $e : W[[t]] \to W$), on a $(\psi^*\tau_{ij})(0) = \tau_{ij}(0)^\sigma$, et (1.4.2.13) équivaut à (1.4.2.12) avec φ remplacé par ψ . Il suffit donc de vérifier que $u_{ij}(\varphi)(0) = u_{ij}(\psi)(0)$. Or l'augmentation e est le relèvement de Teichmüller (1.1.4) de l'augmentation $k[[t]] \to k$ simultanément pour φ et pour ψ , donc $F(\varphi)\varphi^*$ et $F(\psi)\psi^*$ induisent le même endomorphisme σ-linéaire F de e^*H . Appliquant e^* à (1.4.2.4) écrit pour φ et pour ψ , on obtient donc

$$F(e^*b_i) = p(e^*b_i) + p \sum_{1\leqslant j\leqslant r} u_{ij}(\varphi)(0)(e^*a_j)$$
$$= p(e^*b_i) + p \sum_{1\leqslant j\leqslant r} u_{ij}(\psi)(0)(e^*a_j) \ ,$$

d'où $u_{ij}(\varphi)(0) = u_{ij}(\psi)(0)$, ce qui prouve (1.4.2.13) dans ce cas. Si maintenant ψ est un relèvement quelconque de Frobenius, on peut écrire

$$\psi(t_i) = \psi_o(t_i) + pw_i \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ ,$$

avec $w = (w_1,\dots,w_n) \in W^n$, où $\psi_o : A \to A$ est un relèvement de Frobenius tel que $\psi_o(0) = 0$. Appliquant (1.1.3.4), avec $\varphi = \psi_o$, à $x = b_i$, on obtient, compte tenu de (1.4.2.4),

$$(*) \quad \sum_{1\leqslant j\leqslant r} pu_{ij}(\psi)a_j = \sum_{1\leqslant j\leqslant r} pu_{ij}(\psi_o)a_j + \sum_{|n|>0} p^{[n]}(w^\sigma)^n F(\psi_o)\psi_o^*(\nabla(D)^n b_i) .$$

Calculons $\nabla(D)^n b_i$: si $D_k = \partial/\partial t_k$, on a, d'après (1.4.2.2),(1.4.2.6),

$$\nabla(D_k)b_i = \langle D_k , \sum_j d\tau_{ij} \otimes a_j \rangle = \sum_j (D_k\tau_{ij})a_j \ ,$$

d'où, comme $\nabla a_j = 0$,

$$\nabla(D^n)b_i = \sum_j (D^n\tau_{ij})a_j$$

pour tout multi-exposant n tel que $|n| > 0$. Reportant dans (*), on obtient

$$pu_{ij}(\psi) = pu_{ij}(\psi_o) + \sum_{|n|>0} p^{[n]}(w^\sigma)^n \psi_o^*(D^n\tau_{ij}) \ ,$$

et par suite la formule (1.4.2.13) à vérifier s'écrit

$$(**) \quad (\psi^*\tau_{ij})(0) - p\tau_{ij}(0) - pu_{ij}(\psi_o)(0) - \sum_{|n|>0} p^{[n]}(w^n(D^n\tau_{ij})(0))^\sigma = 0 .$$

Notons que $\psi = \psi_o \circ a$, où a est l'endomorphisme de W-algèbre de A tel que $a(t_i) = t_i + pw_i$, donc que

$$(\psi^*\tau_{ij})(0) = (\psi_o^*(a^*\tau_{ij}))(0) = (a^*\tau_{ij})(0)^\sigma = \tau_{ij}(pw)^\sigma .$$

D'autre part, ψ_o vérifie (1.4.2.13) comme on l'a vu plus haut, car $\psi_o(0) = 0$, et $(\psi_o^*\tau_{ij})(0) = \tau_{ij}(0)^\sigma$, donc

$$p\tau_{ij}(0) = \tau_{ij}(0)^\sigma - pu_{ij}(\psi_o)(0) .$$

On peut donc récrire (**) sous la forme

$$\tau_{ij}(pw)^{\sigma} = \tau_{ij}(0)^{\sigma} + \sum_{|n|>0} p^{[n]}(w^n(D^n\tau_{ij}(0))^{\sigma} ,$$

i.e.

$$\tau_{ij}(pw) = \tau_{ij}(0) + \sum_{|n|>0} p^{[n]}w^n(D^n\tau_{ij})(0) .$$

Or on reconnaît ici le développement de Taylor de $\tau_{ij}(pw)$. Cela établit (**), donc (1.4.2.13) dans tous les cas. Pour démontrer la dernière assertion de 1.4.2, nous aurons besoin du résultat suivant de Dwork :

LEMME 1.4.3 ([5], Lemma 1) (*). *Notons* φ *l'automorphisme* σ-*linéaire* *de* $K[[t]]$ (où $t = (t_1,\dots,t_n)$ et K est le corps des fractions de W) *donné par* $t_i \mapsto t_i^p$. *Soit* $f \in K[[t]]$ *tel que* $f(0) = 1$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $f \in W[[t]]$,

(ii) $(\varphi^* f)/f^p = 1 + pu$, *avec* $u \in W[[t]]$, $u(0) = 0$.

L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est immédiate. Rappelons la démonstration de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Ecrivons $f = \sum a_i t^i$ $(a_0 = 1)$, et supposons prouvé que $a_i \in W$ pour $|i| < r$ (où $|i| = i_1+\dots+i_n$). Notant $(\quad)_{\leq j}$ la partie de degré total $\leq j$, on calcule

$$\begin{aligned}((\sum_{|i|\geq 0} a_i t^i)^p)_{\leq r} &= ((\sum_{|i|\leq r-1} a_i t^i)^p)_{\leq r} + p \sum_{|i|=r} a_i t^i \\ &= (\sum_{|i|\leq r-1} a_i^p t^{pi})_{\leq r} + p \sum_{|i|=r} a_i t^i \bmod pW[[t]],\end{aligned}$$

puis, posant $f^p \neq \varphi^* f = 1 + p \sum_{|i|\geq 1} d_i t^i$ $\quad (d_i \in W)$,

$$\begin{aligned}((\sum_{|i|\geq 0} a_i^{\sigma} t^{pi})(1 + p \sum_{|i|\geq 1} d_i t^i))_{\leq r} &= ((\sum_{|i|\leq r-1} a_i^{\sigma} t^{pi}) \\ &\qquad (1 + p\sum_{|i|\geq 1} d_i t^i))_{\leq r} \\ &= (\sum_{|i|\leq r-1} a_i^{\sigma} t^{pi})_{\leq r} \bmod pW[[t]] \\ &= (\sum_{|i|\leq r-1} a_i^{p} t^{pi})_{\leq r} \bmod pW[[t]] .\end{aligned}$$

(*) Voir aussi Hazewinkel [7] pour une généralisation.

Comparant les deux expressions obtenues pour $(f^p)_{\leqslant r}$, on trouve

$$p \sum_{|i|=r} a_i t^i \in pW[[t]] \ ,$$

donc $a_i \in W$ pour tout i tel que $|i| = r$, ce qui prouve (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Avant de revenir à la démonstration de 1.4.2, indiquons deux conséquences immédiates de 1.4.3.

COROLLAIRE 1.4.4. _Soit_ $g \in K[[t]]$ _tel que_ $g(0) = 0$. _Les conditions suivantes sont équivalentes_ :

(i) $\exp(g) \in W[[t]]$,

(ii) $\varphi^* g - pg \in pW[[t]]$.

En effet, posons $f = \exp(g)$. Comme, pour $n \geqslant 1$, $p^n/n!$ (et a fortiori p^n/n) appartiennent à pW , la condition (ii) équivaut à dire que $\varphi^* f/f^p = 1 + pu$, avec $u \in W[[t]]$, $u(0) = 0$.

COROLLAIRE 1.4.5. _Supposons_ $p \neq 2$. _Soit_ $g \in K[[t]]$, _tel que_ $g(0) \in pW$, _et_ $\varphi^* g - pg \in pW[[t]]$. _Alors la série_ $f = \exp(g)$ _est définie, appartient à_ $W[[t]]$, _et vérifie_ $f(0) = 1 \bmod p$.

En effet, soit $h = g - g(0)$. Comme $p \neq 2$ et que $g(0) \in pW$, $\exp(g(0))$ est défini, donc aussi $\exp(g) = \exp(g(0))\exp(h)$. Posons $g(0) = a$ $(a \in W)$. On a

$$\varphi^* h - ph = \varphi^* g - pg - (a^\sigma - pa) \in pW[[t]]$$

(car $a^\sigma - pa \in pW$ et $\varphi^* g - pg \in pW[[t]]$). Donc, par 1.4.4 appliqué à h , on a $\exp(h) \in W[[t]]$, et comme $\exp(a) = 1 \bmod pW$, on en conclut que $f = \exp(g) \in W[[t]]$ et $f(0) = 1 \bmod pW$.

Fin de la démonstration de 1.4.2. Il suffit d'appliquer 1.4.5 à τ_{ij} : les hypothèses de 1.4.5 sont vérifiées en vertu de (1.4.2.7) et (1.4.2.8).

1.4.6. Si H est un F-cristal de Hodge, comme en 1.3.5, la connexion ∇ induit, grâce à (1.3.5.1), un homomorphisme A-linéaire

(1.4.6.1) $$\mathrm{gr}\,\nabla : \mathrm{gr}^i H \to \Omega^1_{A/W} \otimes \mathrm{gr}^{i-1} H$$

(où $\mathrm{gr}^i = \mathrm{Fil}^i/\mathrm{Fil}^{i+1}$). En particulier, dans la situation de 1.4.1, ∇ induit un homomorphisme A-linéaire

(1.4.6.2) $$\mathrm{gr}\,\nabla : \mathrm{Fil}^1 H \to \Omega^1_{A/W} \otimes U ,$$

puisque $U \xrightarrow{\sim} H/\mathrm{Fil}^1 H$ (1.4.1.3), d'où un homomorphisme A-linéaire

(1.4.6.3) $$\mathrm{gr}\,\nabla : T_{A/W} \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathrm{Fil}^1 H, U) ,$$

où $T_{A/W} = (\Omega^1_{A/W})^{\vee}$.

COROLLAIRE 1.4.7. *Sous les hypothèses de* 1.4.1, *supposons que* (1.4.6.3) *soit un isomorphisme, et que* p *soit différent de* 2 . *Alors les éléments* $q_{ij} - 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ *définis en* (1.4.2.9) *forment avec* p *un système régulier de paramètres de* $A = W[[t]]$, *i.e. le* W-*homomorphisme* $W[[x_{ij}]]_{(1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant x)} \to A$ *envoyant* x_{ij} *sur* $q_{ij} - 1$ *est un isomorphisme, et si l'on note* φ *le relèvement de Frobenius défini par* $\varphi(q_{ij}) = q_{ij}^p$, *on a*

(1.4.7.1) $$F(\varphi)\varphi^* b_i = p b_i$$

pour tout i (avec les notations de 1.4.2).

Notons $\underline{m} = (p, t_1, \ldots, t_n)$ l'idéal maximal de $A = W[[t]]$. Comme $q_{ij}(0) = 1 \bmod pW$, les q_{ij} sont des unités de A congrues à $1 \bmod \underline{m}$. Pour prouver la première assertion, il suffit de montrer que les formes $\eta_{ij} = d \log q_{ij}$ forment une base (sur A) de $\Omega^1_{A/W}$. Tout homomorphisme $f : \mathrm{Fil}^1 H \to U$ est déterminé par une matrice (f_{ij}) telle que $f(b_i) = \Sigma\, f_{ij} a_j$. Notons D_{ij} la base de $T_{A/W}$ telle que

$$(\mathrm{gr}\,\nabla)(D_{ij})_{k\ell} = \begin{cases} 0 \text{ si } (k,\ell) \neq (i,j) \\ 1 \text{ si } (k,\ell) = (i,j) \end{cases} .$$

Pour tout $D \in T_{A/W}$, on a, d'après (1.4.2.2),

$$(\mathrm{gr}\,\nabla)(D) b_i = \sum_j \eta_{ij}(D) a_j ,$$

donc

$$(\mathrm{gr}\ \nabla)(D_{ij})_{k\ell} = \eta_{k\ell}(D_{ij}) \ .$$

Les η_{ij} forment donc une base de $\Omega^1_{A/W}$, à savoir la base duale de la base D_{ij}. D'autre part, la relation $\varphi^* q_{ij} = q_{ij}^p$ entraîne $\varphi^* \log q_{ij} = p \log q_{ij}$, mais comme $\log q_{ij} = \tau_{ij}$, (1.4.2.7) entraîne $u_{ij}(\varphi) = 0$, donc (1.4.7.1) résulte de (1.4.2.4).

1.4.8. Soit, comme en 1.3.6, $(H, \mathrm{Fil}^{\cdot} H)$ un F-cristal de Hodge sur A_o $(= k[[t]])$ tel que H soit ordinaire. Supposons H de niveau $\leqslant N$, i.e. (1.3.1) $\mathrm{Fil}^i H_o = 0$ pour $i \geqslant n+1$, de sorte que la décomposition (1.3.6.1) s'écrit

(1.4.8.1) $$H = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant N} H^i \ , \ H^i = U_i \cap \mathrm{Fil}^i H \ , \ \mathrm{rg}(H^i) = h_i \ .$$

Supposons d'autre part $p \neq 2$. Appliquant 1.4.2 aux F-cristaux de Hodge ordinaires (de niveau $\leqslant 1$) $(U_{i+2}/U_i, (\mathrm{Fil}^{\cdot} H \cap U_{i+2})/(\mathrm{Fil}^{\cdot} H \cap U_i))$, on obtient :

COROLLAIRE 1.4.9. <u>Sous les hypothèses de</u> 1.4.8, <u>il existe une base</u> $(e_1^i, \ldots, e_{h_i}^i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ <u>de</u> H, <u>et des éléments</u> $q_{i;\alpha,\beta}$ <u>de</u> A $(i \leqslant N-1, \alpha \leqslant h_{i+1}, \beta \leqslant h_i)$ <u>tels que</u>

(1.4.9.1) $$\begin{cases} q_{i;\alpha,\beta}(0) \in 1+pW \ , \\ \nabla e_i^o = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant h_o) \\ \nabla e_i^m = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant h_{m-1}} (d \log q_{m-1;i,j}) e_j^{m-1} \qquad (1 \leqslant m \leqslant N \ , \ 0 \leqslant i \leqslant h_m) \ . \end{cases}$$

On peut utiliser 1.4.9 pour majorer la croissance des sections horizontales de H. Rappelons [8, 3.1] que celles-ci "convergent dans le polydisque unité ouvert", et plus précisément que le module $(H \otimes_A K\{\{t_1, \ldots, t_n\}\}, \nabla)$ possède une base de sections horizontales : il s'agit d'une propriété valable pour tout F-cristal, indépendamment de toute hypothèse d'ordinarité. Cela dit, il résulte aisément de 1.4.9 que, pour tout i, les sections horizontales de $U_i \otimes_A K\{\{t\}\}$ appartiennent à $U_i \otimes_A L_i$, où

$$0 = L_{-1} \subset L_o \subset \ldots \subset L_i \subset \ldots \subset$$

est la suite de sous-A-modules de $K\{\{t\}\}$ définie par récurrence par

$(f \in L_i) \Longleftrightarrow$ (f appartient au sous-A-module de $K\{\{t\}\}$ engendré par les séries g telles que $dg = \Sigma\, a_\alpha d \log u_\alpha$, avec $a_\alpha \in L_{i-1}$, et $u_\alpha \in A$, $u_\alpha(0) \in 1+pW$) .

Dans la situation de 1.4.8, on ne peut espérer toutefois d'énoncé analogue à 1.4.7 (l'hypothèse que (1.4.6.3) est un isomorphisme n'a pas de généralisation en niveau $\geqslant 2$).

2. APPLICATIONS GÉOMETRIQUES

On conserve les notations A_o, A de 1.1.1.

2.1. Coordonnées canoniques.

A) Variétés abéliennes (cf. [8, §8]).

2.1.1. Soit X/A un schéma abélien formel de dimension relative g. Le A-module

$$H = H^1_{DR}(X/A) ,$$

muni de la connexion de Gauss-Manin ∇, est un F-cristal sur A_o, de rang $2g$. On sait (voir par exemple [13, Addendum]) que la suite spectrale de Hodge

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/A}) \Longrightarrow H^*_{DR}(X/A)$$

dégénère en E_1, et que le terme E_1^{ij} est libre sur A, de formation compatible à tout changement de base. Il en résulte (1.3.5) que H, muni de la filtration de Hodge

$$H = \mathrm{Fil}^o H \supset \mathrm{Fil}^1 H \quad (= H^o(X, \Omega^1_A) \supset 0$$

est un F-cristal de Hodge sur A_o. Notons aussi que, si $X_o = X \otimes A_o$, la suite spectrale de Hodge et la suite spectrale conjuguée de X_o/A_o dégénèrent (en E_1 et E_2 resp.) et que leurs termes initiaux sont libres et de formation compatible à tout changement de base. En particulier, le gradué associé à la filtration conjuguée $\mathrm{gr}.(H\otimes A_o)$ est libre. D'autre part, si $e_o : A_o \to k$ est l'augmentation, le F-cristal $e_o^* H$ induit sur k (1.1.4) n'est autre que $H^1(X\otimes k/W)$, car si $e : A \to W$ est l'augmentation, $e^*H = H^1_{DR}(X\otimes W/W) = H^1(X\otimes k/W)$ par définition de la cohomologie cristalline.

2.1.2. Supposons la variété abélienne $X\otimes k$ <u>ordinaire</u>, ce qui signifie, au choix, que $(X\otimes k)(k) \simeq (\mathbb{Z}/p)^g$, ou que Frobenius sur $H^1(X\otimes k,\mathcal{O})$ est bijectif, ou que $H^1(X\otimes k/W)$ a mêmes polygones de Newton et de Hodge. D'après ce qu'on vient de rappeler, le F-cristal H est alors ordinaire au sens de 1.3.3, et comme il est de Hodge de niveau $\leqslant 1$, on peut lui appliquer 1.4.2. Notons que, dans la décomposition $H = U\oplus \mathrm{Fil}^1 H$, U et $\mathrm{Fil}^1 H$ sont libres de rang g . Il existe donc une base $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant g}$ de U , une base $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant g}$ de $\mathrm{Fil}^1 H$, et des séries $\tau_{ij}\in K[[t]]$ $(1\leqslant j\leqslant g\ ,\ 1\leqslant j\leqslant g)$ vérifiant les conditions (1.4.2.1) à (1.4.2.8). De plus, si $p\neq 2$, on dispose des séries $q_{ij} = \exp(\tau_{ij})\in A$, telles que $q_{ij}(0) = 1 \bmod pW$.

2.1.3. Supposons que X/A soit la déformation formelle verselle de $X\otimes k$, donc que $A = W[[t_1,\dots,t_{g^2}]]$. Alors (1.4.6.3) est un isomorphisme, qui s'identifie à l'isomorphisme de Kodaira-Spencer

$$T_{A/W} \xrightarrow{\sim} H^1(X,T_{X/A}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(H^0(X,\Omega^1_{X/A}),H^1(X,\mathcal{O}))$$

(cf. (IV 2.3)). Donc, si $p\neq 2$, les éléments $q_{ij}-1\in A$ forment, en vertu de 1.4.7, des <u>coordonnées "canoniques"</u> sur A (i.e. $A \simeq W[[q_{ij}-1]]$) , et, si l'on note φ le relèvement de Frobenius donné par $\varphi(q_{ij}) = q_{ij}^p$, on a, avec les notations de 2.1.2,

$$F(\varphi)\varphi^* a_i = a_i \quad , \quad F(\varphi)\varphi^* b_i = pb_i \qquad (1\leqslant i\leqslant g) .$$

Soit $e : A \to W$ le relèvement de Teichmüller de e_o correspondant à φ , i.e. tel que $e(q_{ij}) = 1$. Il n'est pas difficile de montrer - nous établirons un résultat analogue ci-dessous pour les surfaces K3 - que e est indépendant du choix de (a,b,q), et qu'on a un isomorphisme canonique (défini à l'aide de (a,b,q) mais n'en dépendant pas) entre S et G_W, où G est le tore formel sur $\mathbb{Z}_p$ de groupe de caractères $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}_p}(P_o,P_1)$, P_o (resp. P_1) désignant le sous-$\mathbb{Z}_p$-module (libre de rang g) de $H^1(X\otimes k/W)$ formé des x tels que $Fx=x$ (resp. $Fx=px$). Cet isomorphisme envoie e sur l'élément neutre de G_W. On peut montrer (voir Appendice et Exposé suivant, par N. Katz) que cette structure de groupe formel sur S coïncide avec celle définie, à la Serre-Tate, par le relèvement formel versel du groupe p-divisible associé à $X\otimes k$. En particulier, la variété abélienne e^*X/W est le <u>relèvement canonique</u> de $(X\otimes k)/k$ [14, V §3]. Rappelons que ce relèvement correspond au relèvement trivial (i.e. comme produit) du groupe p-divisible associé à $X\otimes k$, ou, ce qui revient au même, au relèvement de $\mathrm{Fil}^1_{\mathrm{Hdg}}H^1_{\mathrm{DR}}(X\otimes k/k)$ en le facteur direct $P_1\otimes W$ de pente 1 de $H^1(X\otimes k/W)$ (cf. 1.3.4).

2.1.4. <u>Variante</u>. Soit X/A une courbe propre et lisse à fibres géométriquement connexes de genre $g \geqslant 1$. Alors $H = H^1_{\mathrm{DR}}(X/A)$, muni de la connexion de Gauss-Manin ∇ et de la filtration de Hodge $\mathrm{Fil}^1H = H^o(X,\Omega^1_{X/A})$, est un F-cristal de Hodge de niveau 1. Si l'on suppose $X\otimes k$ ordinaire, on peut appliquer 1.4.2, et l'on obtient les résultats de Katz [8, §8] : si $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant g}$ est une base de sections horizontales fixes par F du sous-cristal unité U, on peut en effet prendre comme base $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant g}$ de Fil^1H la base duale de (a_i) pour la dualité de Poincaré ((a,b) est alors une base symplectique de H), car la compatibilité de la dualité à F et ∇ montre aussitôt que les conditions de (1.2.4 (i)) sont vérifiées.

B) <u>Surfaces</u> K3 .

2.1.5. Soit X/A un schéma formel propre et lisse tel que $X_k = X\otimes k$ soit une surface K3 . Alors, d'après (IV 2.2, 2.3), le

A-module

$$H = H^2_{DR}(X/A) \ ,$$

muni de la connexion de Gauss-Manin ∇ , et de la filtration de Hodge

$$H = \mathrm{Fil}^0 H \supset \mathrm{Fil}^1 H \supset \mathrm{Fil}^2 H \supset 0$$

est un F-cristal de Hodge sur A_o . Les sous-modules $\mathrm{Fil}^i H$ sont libres de rangs 22, 21 , 1 pour $i = 0,1,2$, et le gradué associé $\mathrm{gr}^{\cdot} H$ est libre. De plus, le cup-produit

$$\langle \ , \ \rangle : H \otimes H \to H^4_{DR}(X/A) \simeq A$$

est une dualité parfaite, horizontale pour ∇ , i.e. vérifiant

$$\langle \nabla x, y\rangle + \langle x, \nabla y\rangle = \nabla\langle x,y\rangle \ ,$$

et compatible à F , i.e. telle que, pour tout relèvement de Frobenius φ , on ait

$$\langle F(\varphi)\varphi^* x, F(\varphi)\varphi^* y\rangle = F(\varphi)\varphi^*\langle x,y\rangle \ .$$

Noter que $F(\varphi)\varphi^* | H^4_{DR}(X/A) = p^2\alpha$, où α est un automorphisme, i.e. $H^4_{DR}(X/A)(2)$ est un F-cristal unité (de rang 1), qu'on identifiera au F-cristal trivial A au moyen d'une base horizontale fixe par F . Rappelons d'autre part que l'on a

$$\mathrm{Fil}^1 H = (\mathrm{Fil}^2 H)^{\perp} \ .$$

Rappelons enfin que, si $e_o : A_o \to k$ est l'augmentation, le F-cristal $e_o^* H$ (1.1.4) n'est autre que la cohomologie cristalline $H^2(X_k/W)$.

2.1.6. Supposons maintenant X_k <u>ordinaire</u>, ce qui signifie, par définition, que le polygone de Newton de $H^2(X_k/W)$ coïncide avec le polygone de Hodge, i.e. a pour pentes $(0,1,2)$ avec les multiplicités $(1,20,1)$. Il revient au même de dire que Frobenius sur $H^2(X_k, \mathcal{O})$ est non nul. Du fait que $e_o^* H = H^2(X_k/W)$ et que $\mathrm{gr}^{\cdot} H$ est libre, le F-cristal H est alors ordinaire au sens de 1.3.3, et admet par conséquent une filtration par des sous-F-cristaux

$$0 \subset U_0 \subset U_1 \subset U_2 = H$$

tels que U_i/U_{i-1} soit de la forme $V_i(-i)$, où V_i est un F-cristal unité de rang 1 , 20 , 1 , pour $i = 0,1,2$. De plus, comme U_i relève $\mathrm{Fil}_i H_0$, la compatibilité de F à la dualité entraîne que l'on a

$$U_1 = U_0^{\perp} .$$

Enfin (1.3.6) les filtrations (U_i) et $(\mathrm{Fil}^i H)$ sont opposées, i.e. on a

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 ,$$

avec

$$H_0 = U_0 , \; H_1 = U_1 \cap \mathrm{Fil}^1 H , \; H_2 = \mathrm{Fil}^2 H , \; H_1 \xrightarrow{\sim} U_1/U_0 .$$

THÉORÈME 2.1.7. _On suppose_ $p \neq 2$. _Soit_ $X/A = W[[t_1,\dots,t_{20}]])$ _la déformation formelle universelle d'une surface_ K3 _ordinaire_ X_k/k (IV 1.3). _Alors, avec les notations de_ 2.1.5, 2.1.6, _il existe une base_ $(a,b_1,\dots,b_{20},c)$ _de_ H _adaptée à la décomposition_ $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$, _et telle que_ $\langle a,c \rangle = 1$, _et des éléments_ $q_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant 20)$ _possédant les propriétés suivantes_ :

(i) $q_i(0) = 1 \bmod pW$ _et les_ q_i _définissent un isomorphisme_ $A \simeq W[[q_1-1,\dots,q_{20}-1]]$ (i.e. les formes $d \log q_i$ forment une base de $\Omega^1_{A/W}$).

(ii) $$\begin{cases} \nabla a = 0 , \\ \nabla b_i = (d \log q_i) a \qquad (1 \leqslant i \leqslant 20) \\ \nabla c = - \Sigma \, (d \log q_i) b_i^{\vee} , \end{cases}$$

_où_ $(b_i^{\vee})$ _désigne la base de_ H_1 _duale de_ (b_i) (_pour la restriction à_ H_1 _de la forme cup-produit_).

(iii) _Si_ $\varphi : A \to A$ _désigne le relèvement de Frobenius tel que_ $\varphi(q_i) = q_i^p$, _alors_

$$\begin{cases} F(\varphi)\varphi^* a = a \ , \\ F(\varphi)\varphi^* b_i = p b_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant 20) \ , \\ F(\varphi)\varphi^* c = p^2 c \ . \end{cases}$$

D'après 2.1.6, le F-cristal U_1, muni de la filtration $\mathrm{Fil}^i H \cap U_1$, est un F-cristal de Hodge ordinaire de niveau 1. D'autre part, comme X/A est la déformation formelle universelle de X_k, l'application

$$\mathrm{gr}^1\nabla : T_{A/W} \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(H_1, H_o) = \underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathrm{gr}^1 H, \mathrm{gr}^o H)$$

est un isomorphisme d'après (IV 2.4). En vertu de 1.4.2 et 1.4.7 appliqués à U_1, il existe donc une base $(a, b_1, \ldots, b_{20})$ de U_1 adaptée à la décomposition $U_1 = H_o \oplus H_1$, et des éléments $q_i \in A$ vérifiant les conditions (i) à (iii) de 2.1.7. Il reste à montrer que, si l'on choisit la base c de H_2 telle que $\langle a, c\rangle = 1$, les dernières formules de (ii) et (iii) sont satisfaites. Tout d'abord, par la condition de transversalité (1.3.5.1), on a

$$\nabla c = \alpha \otimes c + \sum_{1 \leqslant i \leqslant 20} \beta_i \otimes b_i^\vee \ .$$

La relation

$$0 = \nabla\langle a, c\rangle = \langle \nabla a, c\rangle + \langle a, \nabla c\rangle = \langle a, \nabla c\rangle$$

entraîne $\alpha = 0$. Puis, de

$$0 = \nabla\langle b_i, c\rangle = \langle \nabla b_i, c\rangle + \langle b_i, \nabla c\rangle$$

et de la deuxième formule de (ii) on tire $\beta_i = -\,d \log q_i$, d'où la dernière formule de (ii). D'autre part, de la formule $F(\varphi)\varphi^* a = a$ et de la relation $\langle F(\varphi)\varphi^* a, F(\varphi)\varphi^* c\rangle = p^2\langle a, c\rangle = p^2$ on déduit $F(\varphi)\varphi^* c = p^2 c$, ce qui achève la démonstration de 2.1.7.

2.1.8. Soit X_k/k une surface K3 ordinaire. Posons

(2.1.8.1) $P_o = H^2(X_k/W)_{F=1}$, $P_1 = H^2(X_k/W)_{F=p}$, $P_2 = H^2(X_k/W)_{F=p^2}$, où la notation $M_{F=a}$ désigne $\{x \in M \mid Fx = ax\}$. D'après 1.3.4, P_i est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1 , 20 , 1 pour $i = 0,1,2$, et le F-cristal $H^2(X_k/W)$ admet une décomposition unique

(2.1.8.2) $H^2(X_k/W) = ((W,\sigma) \otimes P_o) \oplus ((W,p\sigma) \otimes P_1) \oplus ((W,p^2\sigma) \otimes P_2)$.

Supposons de plus $p \neq 2$. Avec les notations de 2.1.7, désignons par

(2.1.8.3) $$e_q : A \to W$$

le relèvement de Teichmüller de l'augmentation $e_o : A_o \to k$ correspondant au relèvement φ considéré en (iii), donc donné par $e_q(q_i) = 1$. Alors X induit un schéma formel e_q^*X/W et l'on a

(2.1.8.4) $$e_q^*H = H^2_{DR}(e_q^*X/W) = H^2(X_k/W) .$$

De plus, d'après (2.1.7 (iii)), e_q^*a est une base de P_o , $(e_q^*b_i)_{1\leqslant i\leqslant 20}$ une base de P_1 , et e_q^*c une base de P_2 , et $\langle e_q^*a, e_q^*c\rangle = 1$. En particulier, la filtration de Hodge de $H^2_{DR}(e_q^*X/W)$ est donnée par

(2.1.8.5) $\mathrm{Fil}^1 H^2_{DR}(e_q^*X/W) = (W\otimes P_1) \oplus (W\otimes P_2)$, $\mathrm{Fil}^2 H^2_{DR}(e_q^*X/W) = W\otimes P_2$.

Nous allons en déduire :

PROPOSITION 2.1.9. _Sous les hypothèses de_ 2.1.7, _le relèvement_ e_q (2.1.8.3) _est indépendant de la famille_ $q = (q_i)$ _définie en_ 2.1.7.

On écrira donc e au lieu de e_q . Par analogie avec la théorie du relèvement canonique des variétés abéliennes ordinaires [14, V §3], on dira que le schéma formel e^*X/W , qu'on notera simplement X_W , est le _relèvement canonique_ de X_k .

2.1.10. Pour démontrer 2.1.9, nous utiliserons une description "linéaire" des relèvements formels sur W d'une surface K3 sur k . Soit Y/W un schéma formel propre et plat tel que $Y_k = Y\otimes k$ soit une K3 . Alors $H^2_{DR}(Y/W)$ s'identifie canoniquement à $H = H^2(Y_k/W)$, et $\mathrm{Fil}^2H^2_{DR}(Y/W)$ est une droite ($\overset{\mathrm{dfn}}{=}$ facteur direct de rang 1) de H , isotrope (i.e. contenue dans son orthogonal), relevant $\mathrm{Fil}^2H^2_{DR}(Y_k/k)$.

THÉORÈME 2.1.11. <u>Supposons</u> $p \neq 2$. <u>Soit</u> Y_o <u>une surface</u> K3 <u>sur</u> k . <u>Posons</u> $H = H^2(Y_o/W)$. <u>L'application qui à un schéma formel propre et plat</u> Y/W <u>relevant</u> Y_o <u>associe la droite</u> $\mathrm{Fil}^2 H^2_{DR}(Y/W)$ <u>est une bijection de l'ensemble des relèvements de</u> Y_o <u>sur</u> W (<u>i.e. des points à valeurs dans</u> W <u>du schéma modulaire formel de</u> Y_o) <u>sur l'ensemble des relèvements de</u> $\mathrm{Fil}^2_{DR}(Y_o/k)$ <u>en une droite isotrope de</u> H .

Notons tout d'abord que les deux types de relèvements envisagés (relèvements de Y_o et relèvements de $\mathrm{Fil}^2 H^2_{DR}(Y_o/k)$) sont rigides, i.e. n'ont pas d'automorphismes infinitésimaux. Soit Y_n un relèvement de Y_o sur W_{n+1} . L'ensemble des relèvements de Y_n sur W_{n+2} est un torseur sous $H^1(Y_o, T_{Y_o/k})$. D'autre part, soit L_n une droite isotrope de $H \otimes W_{n+1}$ relevant $L_o = \mathrm{Fil}^2 H^2_{DR}(Y_o/k)$. Alors l'ensemble des relèvements de L_n en une droite isotrope de $H \otimes W_{n+2}$ est un torseur sous $\underline{\mathrm{Hom}}(L_o, L_o^{\perp}/L_o)$: sans condition d'isotropie, on trouverait un torseur sous $\underline{\mathrm{Hom}}(L_o, H_o/L_o)$ (où $H_o = H \otimes k = H^2_{DR}(Y_o/k)$) ; comme $p \neq 2$, la condition d'isotropie imposée au relèvement conduit au résultat indiqué (si $H \otimes W_{n+2} = L_{n+1} \oplus M_{n+1}$, avec L_{n+1} isotrope relevant L_n , une droite isotrope relevant L_n est engendrée par un vecteur $x + p^{n+1}y$, où x est une base de L_n , et l'on doit avoir $2\langle x,y\rangle = 0 \bmod p$). Or $L_o^{\perp} = \mathrm{Fil}^1 H^2(Y_o/k)$, donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}(L_o, L_o^{\perp}/L_o) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Fil}^2 H^2_{DR}(Y_o/k), \mathrm{gr}^1 H^2_{DR}(Y_o/k)) ,$$

et, d'après (IV 2.4), on a un isomorphisme canonique (donné par le cup-produit)

$$H^1(Y_o, T_{Y_o/k}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Fil}^2 H^2_{DR}(Y_o/k), \mathrm{gr}^1 H^2_{DR}(Y_o/k)) .$$

La conclusion de 2.1.11 en découle facilement.

REMARQUE 2.1.12. On notera l'analogie de 2.1.11 avec la théorie des relèvements des groupes p-divisibles et des variétés abéliennes (relèvement de la filtration de Hodge dans le "cristal" extension universelle) [14].

<u>Démonstration de</u> 2.1.9. Compte tenu de 2.1.11, il suffit d'observer que $e_q^* X$, donc e_q, est entièrement caractérisé par la seconde égalité de (2.1.8.5).

Nous allons voir maintenant qu'à l'aide de 2.1.7 on peut munir canoniquement la variété modulaire formelle $S = \mathrm{spf}(A)$ d'une structure de groupe formel sur W, d'origine le relèvement canonique X_W (2.1.9). Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

LEMME 2.1.13. <u>Soient</u> $(a', b'_1, \ldots, b'_{20}, c')$ <u>une base de</u> H <u>et</u> $(q'_i)_{1 \leqslant i \leqslant 20}$ <u>une famille d'éléments de</u> A <u>vérifiant les mêmes conditions</u> (i), (ii), (iii) <u>de</u> 2.1.7 <u>que</u> $(a, (b_i), c)$ <u>et</u> (q_i). <u>Il existe alors</u> $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ <u>et</u> $\beta = (\beta_{ij}) \in GL(20, \mathbb{Z}_p)$ <u>tels que</u>

$$(2.1.13.1) \qquad \begin{cases} a' = \alpha a \ , \quad c' = c/\alpha \ , \\ q'_i = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 20} q_j^{(\beta_{ji}/\alpha)} \ , \\ b'_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 20} \beta_{ji} b_j \ . \end{cases}$$

Tout d'abord, comme $(a', (b'_i), c')$ est une base de H adaptée à la décomposition $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$ et que $\langle a', c' \rangle = 1$, il existe $\alpha \in A^*$ et $\beta = (\beta_{ij}) \in GL(20, A)$ tels que

$$a' = \alpha a \ , \quad c' = c/\alpha \ , \quad b'_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 20} \beta_{ji} b_j \ .$$

Grâce à 2.1.9, notons $e = e_q = e_{q'} : A \to W$ le relèvement (2.1.8.3). Comme $\nabla a = \nabla a' = 0$, on a $d\alpha = 0$, donc α est "constant", de valeur $e^* \alpha \in W$. Soit φ' le relèvement de Frobenius tel que $\varphi'(q'_i) = q_i'^{p}$. On a

$$a' = F(\varphi') \varphi'^* a' = F(\varphi) \varphi^* a = \alpha^{\sigma} F(\varphi) \varphi^* a = \alpha^{\sigma} a = \alpha a$$

donc $\alpha^{\sigma} = \alpha$, i.e. $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \nabla b'_i &= \sum_j (d\beta_{ji}) \otimes b_j + \sum_j \beta_{ji} (d \log q_j) \otimes a \\ &= (d \log q'_i) \otimes a' = (d \log q'_i) \otimes \alpha a \ , \end{aligned}$$

donc

(*) $$d\beta_{ji} = 0 \qquad \forall i,j$$

et

(**) $$\alpha\, d \log q'_i = \sum_j \beta_{ji}\, d \log q_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant 20)\ .$$

La formule (*) signifie que β_{ji} est constant, de valeur $e^*\beta_{ji} \in W$. Mais

$$pb'_i = F(\varphi')\varphi'^*b'_i = \sum_j \beta^{\sigma}_{ji}\, F(\varphi')\varphi'^*b_j\ .$$

Appliquant e^* et tenant compte de ce que

$$e^*F(\varphi')\varphi'^*b_j = e^*F(\varphi)\varphi^*b_j = e^*pb_j\ ,$$

on obtient $\beta^{\sigma}_{ji} = \beta_{ji}$ $\forall i,j$, donc $\beta \in GL(20,\mathbb{Z}_p)$. De (**) on déduit qu'il existe $C \in W^*$ tel que

$$q'_i = C \prod_j q_j^{(\beta_{ji}/\alpha)}\ .$$

Mais comme $e^*q'_i = e^*q_i = 1$, on a $C = 1$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 2.1.14. <u>Supposons</u> $p \neq 2$. <u>Soient</u> X_k <u>une surface</u> K3 <u>ordinaire sur</u> k, <u>et</u> $S = \mathrm{Spf}(A)$ <u>la variété modulaire formelle sur</u> W <u>correspondante</u>. <u>Soit</u> G <u>le tore formel sur</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>de groupe de caractères</u> $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}_p}(P_o,P_1)$, <u>avec les notations de</u> 2.1.8. <u>Il existe un isomorphisme canonique entre</u> S <u>et</u> G_W, <u>par lequel le relèvement canonique</u> $X_W \in S$ (2.1.9) <u>correspond à l'élément neutre</u> $1 \in G_W$.

Soit $\underline{a} = (a,b,(q_i))$ comme en 2.1.7. La famille (q_i) fournit un isomorphisme $u_{\underline{a}} : S \xrightarrow{\sim} (\hat{\mathbb{G}}_m)^{20}_W = \mathrm{Spf}(W[[T_i - 1]])$, $T_i \mapsto q_i$, tandis que la base (a,b) fournit un isomorphisme $v_{\underline{a}} : \mathbb{Z}_p^{20} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(P_o,P_1)$, tel que $v_{\underline{a}}(x_1,\ldots,x_{20})(a) = \sum x_i b_i$. Si $\underline{a}' = (a',b',(q'_i))$ est un autre choix, alors, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ et $\beta = (\beta_{ij}) \in GL(20,\mathbb{Z}_p)$ vérifiant (2.1.13.1). Notons

$$f : (\hat{\mathbb{G}}_m)^{20}_{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\sim} (\hat{\mathbb{G}}_m)^{20}_{\mathbb{Z}_p}$$

l'isomorphisme donné par $T_i \mapsto \prod_j T_j^{(\beta_{ji}/\alpha)}$. L'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(f, \mathbb{G}_m^{\wedge}) : \mathbb{Z}_p^{20} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^{20}$$

induit par f sur les groupes de caractères est la multiplication par la matrice β/α . Les formules (2.1.13.1) entraînent qu'on a des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "u_{\underline{a}}", "\simeq"'] \arrow[d, equal] & (\mathbb{G}_m^{\wedge})^{20} \arrow[d, "f_W"] \\ S \arrow[r, "u_{\underline{a}'}", "\simeq"'] & (\mathbb{G}_m^{\wedge})^{20} \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z}_p^{20} \arrow[r, "v_{\underline{a}}", "\simeq"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(P_o, P_1) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z}_p^{20} \arrow[u, "\beta/\alpha"] \arrow[r, "v_{\underline{a}'}", "\simeq"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(P_o, P_1) \end{tikzcd} \quad .$$

En d'autres termes, l'isomorphisme $S \xrightarrow{\sim} G_W$ donné par $(u_{\underline{a}}, v_{\underline{a}})$ est indépendant de $\underline{a}$, c'est l'isomorphisme canonique annoncé. Comme par définition X_W correspond à l'augmentation $q_i \mapsto 1$, 2.1.14 est démontré.

DÉFINITION 2.1.15. Nous dirons qu'un système $\underline{a} = (a,b,c,q)$ vérifiant les conditions de 2.1.7 est un système de coordonnées (ou paramètres) canoniques sur S .

Noter que le choix de a correspond à celui d'une base de P_o (donc est défini à un facteur $\in \mathbb{Z}_p^*$ près) et détermine celui de c , et que, d'autre part, une fois a choisi, la donnée de b correspond à celle d'une base de P_1 (qui est donc définie à un facteur $\in GL(20, \mathbb{Z}_p)$ près) et détermine l'isomorphisme $(q_i) : S \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_m^{\wedge})_W^{20}$.

Problèmes 2.1.16. a) Peut-on donner une définition "intrinsèque" de la structure de groupe formel sur S construite en 2.1.14, par exemple comme représentant un foncteur convenable ? (*)

b) Etendre la théorie des coordonnées canoniques au cas $p = 2$. Cela présente plusieurs difficultés. Tout d'abord, bien entendu, trouver un substitut adéquat à la définition des q_{ij} de 1.4.2. D'autre part, dans le cas des K3, il y a des difficultés supplémentaires, liées au fait qu'on ignore, pour $p = 2$, si la forme quadra-

(*) (ajoutée en janvier 1981), cette question vient d'être résolue affirmativement par Nygaard.

tique $\langle x,x\rangle$ sur $H^2_{DR}(X_k/k)$ est identiquement nulle (rappelons que, si X est une surface K3 sur le corps des complexes, la forme $\langle x,x\rangle$ sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ est paire [17]). On peut montrer toutefois [4] que, pour Y_o/k ordinaire, ou plus généralement si le noyau de la forme $\langle x,x\rangle$ sur $H^2_{DR}(Y_o/k)$ n'est pas égal à $\mathrm{Fil}^1H^2_{DR}(Y_o/k)$, l'application envisagée en 2.1.11, associant à un relèvement formel Y la droite isotrope $\mathrm{Fil}^2H^2_{DR}(Y/W) \subset H^2(Y_o/W)$ est surjective et à fibres finies : pour Y_o ordinaire, la droite $W\otimes P_2$ de (2.1.8.5) définit alors une famille finie de "relèvements canoniques" de Y_o .

2.2. <u>Relèvements de faisceaux inversibles</u>.

2.2.1. Soit $X/S = \mathrm{Spf}(A)$ la déformation formelle universelle d'une surface K3 X_k/k , et soit L_o un faisceau inversible non trivial sur X_k . On sait (IV 1.6) qu'il existe un plus grand sous-schéma formel fermé $T = \Sigma(L_o) \subset S$ tel que L_o se prolonge en un faisceau inversible L sur X_T (*) et que T est défini par une équation $f=0$ telle que p ne divise pas f . <u>Supposons</u> $p\neq 2$ <u>et</u> X_k <u>ordinaire</u>. On va montrer qu'on peut alors expliciter f en termes de la classe de Chern cristalline

(2.2.1.1) $$c_1(L_o) \in H^2(X_k/k) \ .$$

Rappelons (IV 2.9) qu'avec les notations de (2.1.8.1) on a

(2.2.1.2) $$c_1(L_o) \in P_1 \ .$$

En particulier, si (a,b,c,q) est un système de coordonnées canoniques sur S (2.1.15), et $e : A \to W$ est l'augmentation donnée par $q_i \mapsto 1$, on peut écrire

(2.2.1.3) $$c_1(L_o) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 20} x_i(e^*b_i) \ ,$$

avec $x_i \in \mathbb{Z}_p$. On a alors le résultat suivant, dont la démonstration va occuper le reste de l'exposé :

(*) On note $X_{S'}$, le schéma formel déduit de X par un changement de base $S' \to S$.

THÉORÈME 2.2.2. <u>Avec les hypothèses et notations de</u> 2.2.1, T <u>est défini par l'équation</u>

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant 20} q_i^{x_i} = 1 . \tag{2.2.2.1}$$

En d'autres termes, si, grâce à la base e^*a de P_o, on identifie $c_1(L_o)$ à un caractère x du tore formel S (2.1.14), T est le sous-groupe formel défini par

$$T = \mathrm{Ker}(x) . \tag{2.2.2.2}$$

En particulier, si p ne divise pas $c_1(L_o)$ (ce qui signifie encore [16, 1.4] que p ne divise pas la classe de L_o dans $NS(X_k)$), T est un sous-tore formel lisse sur W de dimension relative 19.

2.2.3. Indiquons d'abord comment on peut, heuristiquement, se persuader de la validité de 2.2.2. Si l'on était sur le corps des complexes, on saurait que T est le lieu où la section horizontale de H^2_{DR} passant par $c_1(L_o)$ reste de type (1,1), i.e. dans $\mathrm{Fil}^1 H^2_{DR}$. Or, soit $\underline{x} \in H^2_{DR}(X/S) \otimes K[[q_i-1]]$ la section horizontale telle que $e^*\underline{x} = c_1(L_o)$. Un calcul immédiat, à partir de (2.1.7 (ii)), montre que l'on a

$$\underline{x} = (-\sum_{1\leqslant i\leqslant 20} x_i \log q_i)a + \sum_{1\leqslant i\leqslant 20} x_i b_i . \tag{2.2.3.1}$$

Donc, heuristiquement, $-\Sigma\, x_i \log q_i = 0$, "i.e." $\prod q_i^{x_i} = 1$ est l'équation cherchée. Naturellement, cet argument est insuffisant, mais on peut l'adapter en utilisant la classe de Chern cristalline pour contrôler, pas à pas, l'obstruction au prolongement de L_o.

Nous aurons besoin pour cela de quelques rappels sur les classes de Chern et les obstructions, complétant (IV 2.8, 2.9).

2.2.4. Soient $i : Y_o \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de schémas (ou schémas formels) définie par un idéal I, et E_o un faisceau inversible sur Y_o, de classe $c\ell(E_o) \in H^1(Y_o, \mathcal{O}^*_{Y_o})$. La suite exacte de faisceaux abéliens sur Y

$$(2.2.4.1) \qquad 0 \to (1+I)^* \to \mathcal{O}_Y^* \to \mathcal{O}_{Y_o}^* \to 0$$

montre que l'obstruction $\omega^*(E_o,i)$ à prolonger E_o en un faisceau inversible sur Y est l'image de $c\ell(E_o)$ par le cobord de la suite exacte de cohomologie déduite de (2.2.4.1)

$$(2.2.4.2) \qquad \omega^*(E_o,i) = d\, c\ell(E_o) \in H^2(Y,(1+I)^*) .$$

Si $Y \to Z$ est un morphisme, on peut considérer le complexe de de Rham "multiplicatif"

$$\Omega^{\cdot *}_{Y/Z} = (\mathcal{O}_Y^* \xrightarrow{\text{dlog}} \Omega^1_{Y/Z} \xrightarrow{d} \Omega^2_{Y/Z} \xrightarrow{d} \dots) ,$$

et (2.2.4.1) se raffine en une suite exacte de complexes

$$(2.2.4.3) \qquad 0 \to (1+I)\Omega^{\cdot *}_{Y/Z} \to \Omega^{\cdot *}_{Y/Z} \to \mathcal{O}_{Y_o}^* \to 0 ,$$

où

$$(1+I)\Omega^{\cdot *}_{Y/Z} \overset{\text{dfn}}{=} ((1+I)^* \xrightarrow{\text{dlog}} \Omega^1_{Y/Z} \xrightarrow{d} \Omega^2_{Y/Z} \xrightarrow{d} \dots) .$$

L'obstruction $\omega^*(E_o,i)$ est l'image, par la flèche naturelle, de la classe

$$(2.2.4.4) \qquad c^*(E_o,i,Y/Z) \in H^2(Y,(1+I)\Omega^{\cdot *}_{Y/Z})$$

obtenue à partir de $c\ell(E_o)$ comme cobord de la suite exacte de cohomologie associée à (2.2.4.3).

2.2.5. Supposons que $I^2 = 0$. Alors on a

$$(1+I)^* = 1+I \xrightarrow[\log(1+x)=x]{\sim} I ,$$

et, de la même manière, $(1+I)\Omega^{\cdot *}_{Y/Z}$ s'identifie à

$$I\Omega^{\cdot}_{Y/Z} \overset{\text{dfn}}{=} (I \xrightarrow{d} \Omega^1_{Y/Z} \xrightarrow{d} \Omega^2_{Y/Z} \xrightarrow{d} \dots) .$$

Notons

$$(2.2.5.1) \qquad \omega(E_o,i) \in H^2(Y,I) \quad , \quad c(E_o,i,Y/Z) \in H^2(Y,I\Omega^{\cdot}_{Y/Z})$$

les images de $\omega^*(E_o,i)$ et $c^*(E_o,i,Y/Z)$ définies par ces identifications. L'obstruction $\omega(E_o,i)$ est encore l'image de $c(E_o,i,Y/Z)$ par la flèche naturelle.

Supposons de plus que $Z = (Z,K,\delta)$ soit un PD-schéma où p est nilpotent [1], ou que Z soit une base P-adique (avec $p \in P$) au sens de [3, 7.17] : le cas qui nous intéresse en fait est celui où Z est un W-schéma formel p-adiquement complet, muni des puissances divisées standard sur $p\mathcal{O}_Z$. Alors, si Y est lisse sur Z , et si les puissances divisées γ triviales sur I (i.e. telles que $\gamma^i(x) = 0$ pour $i > 1$) sont compatibles à celles de Z , on a

$$H^2(Y, I\Omega^{\cdot}_{Y/Z}) = H^2(Y_o/Z, J_{Y_o/Z})$$

(où $J_{Y_o/Z}$ désigne, comme d'habitude, l'idéal cristallin noyau de $\mathcal{O}_{Y_o/Z} \to \mathcal{O}_{Y_o}$), et la classe $c(E_o, i, Y/Z)$ de (2.2.5.1) n'est autre que la classe de Chern cristalline de L_o relativement à Y_o/Z , définie dans [2] :

(2.2.5.2) $$c(E_o, i, Y/Z) = c_1(E_o)_{Y_o/Z} \in H^2(Y_o/Z, J_{Y_o/Z}) .$$

Nous appliquerons ces remarques au cas où l'on a des carrés cartésiens

(2.2.5.3) $$\begin{array}{ccccc} Y_o & \overset{i}{\hookrightarrow} & Y & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ Z_o & \overset{j}{\hookrightarrow} & Z & \longrightarrow & S \end{array} ,$$

X/S étant la déformation formelle universelle de X_k , Z désignant un W-schéma formel affine p-adiquement complet, j désignant une immersion fermée définie par un idéal J de carré nul, de sorte que $I = f^*(J)$. Comme $R^1 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o}) = 0$, donc $H^1(Y_o, \mathcal{O}) = 0$, les flèches canoniques

$$H^2(Y, I) \to H^2(Y, \mathcal{O}) \quad , \quad H^2(Y, I\Omega^{\cdot}_{Y/Z}) \to H^2_{DR}(Y/Z)$$

sont injectives, nous considérerons donc $\omega(E_o, i)$ (resp. $c(E_o, i, Y/Z)$) comme un élément de $H^2(Y, \mathcal{O})$ (resp. $H^2_{DR}(Y/Z)$). D'autre part, pour $p \neq 2$, ou si $p\mathcal{O}_Z = 0$, les puissances divisées triviales sur I sont compatibles aux puissances divisées standard sur $p\mathcal{O}_Z$. D'après ce qu'on vient de voir, l'obstruction $\omega(E_o,i)$ est alors donnée par la recette suivante :

LEMME 2.2.6. <u>Dans la situation de</u> (2.2.5.3), <u>si</u> $p \neq 2$, <u>ou si</u> $p\mathcal{O}_Z = 0$, <u>l'obstruction</u> $\omega(E_o,i)$ <u>à prolonger</u> E_o <u>en un faisceau inversible sur</u> Y <u>est l'image, par l'application canonique</u> $H^2_{DR}(Y/Z) \to H^2(Y,\mathcal{O}_Y)$ <u>de la classe de Chern cristalline de</u> E_o <u>relativement à</u> Z , $c_1(E_o)_{Y_o/Z} \in H^2_{DR}(Y/Z)$.

En d'autres termes, sous les hypothèses de 2.2.6, E_o se prolonge en un faisceau inversible sur Y si et seulement si $c_1(E_o)_{Y_o/Z} \in \mathrm{Fil}^1 H^2_{DR}(Y/Z)$.

2.2.7. L'intérêt de la recette 2.2.6 est qu'on dispose d'un principe de calcul pour la classe de Chern $c_1(E_o)_{Y_o/Z}$, que nous allons rappeler.

Sous les hypothèses de 2.2.6, on peut considérer la classe de Chern

$$c_1(E_o)_{f_o/W} \in H^2(Y_o/W) , \tag{2.2.7.1}$$

et son image

$$c_1(E_o)_{f_o/W} \in H^o(Z_o/W, R^2 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o/W})) \tag{2.2.7.2}$$

par l'application canonique

$$H^2(Y_o/W) \to H^o(Z_o/W, R^2 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o/W})) .$$

D'autre part, pour tout PD-épaississement Z_1 de Z_o on peut considérer la classe de Chern

$$c_1(E_o)_{Y_o/Z_1} \in H^2(Y_o/Z_1) . \tag{2.2.7.3}$$

Le lien entre les classes (2.2.7.2) et (2.2.7.3) est le suivant : le cristal $R^2 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o/W})$ a une "valeur" $R^2 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o/W})(Z_1)$ sur Z_1 , et, pour Z_1 affine, la section

$$c_1(E_o)_{f_o/W}(Z_1) \in H^o(Z_1, R^2 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o/W})(Z_1)) = H^2(Y_o/Z_1)$$

définie par (2.2.7.2) est (2.2.7.3). Supposons maintenant que l'on dispose d'une factorisation de la flèche $Z_o \to S$ de (2.2.5.3) en

(2.2.7.4) $$Z_o \overset{j'}{\hookrightarrow} Z' \longrightarrow S$$

où Z' est un W-schéma formel lisse, p-adiquement complet, et j' une immersion fermée. Soit $Z'^{\wedge} = D_{Z_o}(Z')$ la PD-enveloppe, p-complétée, de Z_o dans Z'. D'après Berthelot [1] (ou [3, §7]), on sait que le cristal $R^2 f_{o*}(\mathcal{O}_{Y_o/W})$ est décrit par un $\mathcal{O}_{Z'^{\wedge}}$-module à connexion intégrable relativement à W. Dans le cas présent, comme on a des carrés cartésiens

(2.2.7.5) $$\begin{array}{ccccc} Y_o & \longrightarrow & Y'^{\wedge} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z_o & \longrightarrow & Z'^{\wedge} & \longrightarrow & S \end{array},$$

on voit que ce module n'est autre que $H^2_{DR}(X/S) \otimes \mathcal{O}_{Z'^{\wedge}}$, muni de la connexion de Gauss-Manin. La classe (2.2.7.2) s'interprète comme une section horizontale de ce module. Quand, dans la situation de (2.2.5.3), Z est un sous-schéma fermé de Z', Z s'envoie dans $Z'^{\wedge}$ par la propriété universelle des PD-enveloppes, et la section de $H^2_{DR}(X/S) \otimes \mathcal{O}_Z = H^2_{DR}(Y/Z)$ induite par la classe (2.2.7.2) n'est autre que $c_1(E_o)_{Y_o/Z}$. Nous verrons plus loin comment exploiter l'horizontalité de la section (2.2.7.2) de $H^2_{DR}(X/S) \otimes \mathcal{O}_{Z'^{\wedge}}$ pour la calculer lorsque E_o prolonge le faisceau donné L_o sur X_k, en utilisant des plongements j' (2.2.7.4) bien choisis.

2.2.8. A cet effet, nous aurons besoin d'un dernier ingrédient, un peu technique, concernant les PD-enveloppes. Notons

(2.2.8.1) $$W\langle\langle t\rangle\rangle = W\langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle$$

la PD-enveloppe, p-complétée, de l'idéal $(t_1, \ldots, t_n)$ de $W[[t]] = W[[t_1, \ldots, t_n]]$: c'est le sous-anneau de $K[[t]]$ formé des séries $\Sigma\, a_i t^i/i!$ avec $a_i \in W$ tendant vers 0. Considérons maintenant l'idéal $t^r = (t_1^{r_1},\dots,t_n^{r_n})$ de $W[[t]]$, et la PD-enveloppe, p-complétée, de t^r dans $W[[t]]$:

(2.2.8.2) $$D_{(t^r)}(W[[t]]) \ .$$

Utilisant la compatibilité de la formation des PD-enveloppes aux extensions plates [1, I 2.7.4] dans le cas du morphisme fini et plat $W[[t]] \to W[[t]]$, $t_i \mapsto t_i^{r_i}$, on obtient pour (2.2.8.2) la description suivante : le groupe additif sous-jacent est celui des séries formelles à coefficients dans W , tendant vers 0 , en les $t^{(m)}$, où $t^{(m)} = t^s(t^r)^{[q]}$, si $m = rq+s$, $0 \leqslant s < r$, et la multiplication est la multiplication évidente donnée formellement par $(t^r)^{[q]} = t^{rq}/q!$. L'application

(2.2.8.3) $$D_{(t^r)}(W[[t]]) \to W\langle\langle t\rangle\rangle$$

définie par l'inclusion $(t^r) \subset (t)$ envoie l'élément de base $t^{(m)}$ de multi-degré m sur $(m!/q!)t^{[m]}$, en particulier est injective.

2.2.9. <u>Démonstration de</u> 2.2.2. Comme L_o est non trivial, on sait (IV 3.4) que $c_1(L_o) \neq 0$. Soit p^m la plus grande puissance de p divisant $x = c_1(L_o)$, de sorte que $x = p^m y$, avec $p \nmid y$. Donc y fait partie d'une base du groupe des caractères de S , et l'on peut supposer les coordonnées (a,b,q) choisies de manière que $y = (1,0,\dots,0)$, i.e. $x = p^m(e^* b_1)$. Posons

$$T' = \mathrm{Spf}(W[[q_i - 1]]/(q_1^{p^m} - 1)) \ .$$

Il s'agit de démontrer que $T = T'$. On va procéder en quatre étapes.

a) <u>Prolongement de</u> L_o <u>sur</u> $X_{\mathrm{Spec}(k[q_1-1]/(q_1^{p^m}-1))}$. On peut le faire de deux méthodes. La plus rapide consiste à observer que, d'après [16, 1.4], puisque p^m divise $c_1(L_o)$, p^m divise aussi la classe de L_o dans $NS(X_k)$. Si F désigne le Frobenius de X_k , L_o est donc l'image inverse par F^m d'un faisceau inversible L'_o , et par suite L_o se prolonge à tout k-voisinage infinitésimal de X_k d'ordre $\leqslant p^m-1$. On peut aussi procéder directement, en prolongeant L_o pas à pas sur X_{Y_n} , où $Y_n = \mathrm{Spec}(k[t_1]/t_1^n)$, $q_1-1=t_1$. Supposons en effet $m>0$ et L_o prolongé en un faisceau inversible L_{Y_n} sur X_{Y_n} pour $n<p^m$, et montrons que L_{Y_n} se prolonge en un faisceau inversible sur $X_{Y_{n+1}}$. Notons $c(L_{Y_n})_{Y_{n+1}} \in H^2_{DR}(X_{Y_{n+1}}/Y_{n+1})$ la classe de Chern cristalline de L_{Y_n} . D'après 2.2.6, il s'agit de voir que l'image de cette classe dans $H^2(X_{Y_{n+1}},\mathcal{O})$ est nulle. Or Y_n est le sous-schéma formel de $\mathrm{Spf}(W[[t_1]])$ défini par l'idéal (p,t_1^n) , et, d'après 2.2.7, si D_n désigne la PD-enveloppe, p-complétée, de cet idéal dans $W[[t_1]]$, i.e. $D_n = D_{(t_1^n)}(W[[t_1]])$, $c(L_{Y_n})_{Y_{n+1}}$ est induit par la section horizontale $c(L_{Y_n})_{D_n} \in H^2_{DR}(X/S)\otimes D_n$ du type (2.2.7.2). Comme, d'après 2.2.8, l'application $D_n \to D_1 = W\langle\langle t_1\rangle\rangle$ est injective, $c(L_{Y_n})_{D_n}$ est déterminé par son image dans $H^2_{DR}(X/S)\otimes D_1$. Or cette image n'est autre que la section horizontale $c(L_o)_{D_1}$ définie par L_o : cela résulte de la fonctorialité de la classe (2.2.7.1), compte tenu du fait que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_n \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Spf}(W[[t_1]]) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & \mathrm{Spec}(W) \end{tikzcd}$$

et que L_{Y_n} prolonge L_o . Comme $c(L_o)$ est <u>la</u> classe horizontale qui prolonge $c_1(L_o) = p^m e^* b_1$, un calcul immédiat (utilisant 2.1.7) montre que l'on a

$$c(L_o)_{D_1} = -(p^m \log q_1)a_{D_1} + p^m(b_1)_{D_1}$$

(où $(a_{S'},b_{S'})$ désigne l'image inverse de (a,b) sur S' pour $S' \to S$). Donc par l'injectivité de $D_n \to D_1$,

$$c(L_{Y_n})_{D_n} = -(\log q_1^{p^m})a_{D_n} + p^m(b_1)_{D_n}$$

(noter que $q_1^{p^m}-1$ appartient à l'idéal engendré par p et $t_1^n = (q_1-1)^n$, de sorte que le log a un sens grâce aux puissances divisées sur (p,t_1^n)). L'application $D_n \to \mathcal{O}_{Y_{n+1}}$ définie par la propriété universelle des PD-enveloppes envoie $x^{[i]}$ (pour $x \in (p,t_1^n)$) sur $x \bmod (p,t_1^{n+1})$ pour $i=1$ et sur 0 pour $i \geqslant 2$. En particulier, elle envoie $\log q_1^{p^m}$ sur $(q_1^{p^m}-1) \bmod (p,t_1^{n+1}) = 0$, puisque $n < p^m$. En d'autres termes, l'image $c(L_{Y_n})_{Y_{n+1}} \in H^2_{DR}(X/S) \otimes \mathcal{O}_{Y_{n+1}}$ de $c(L_{Y_n})_{D_n}$ appartient à Fil^1, donc, d'après ce qu'on a dit plus haut, L_{Y_n} se prolonge en un faisceau inversible sur $X_{Y_{n+1}}$.

b) <u>Prolongement de</u> L_o <u>sur</u> X_Z, <u>où</u> $Z = \mathrm{Spf}(W[[q_1-1]]/(q_1^{p^m}-1))$. Notons L_Y le prolongement, obtenu en a), de L_o sur X_Y. Posons

$$Z_n = \mathrm{Spec}(W_n[[q_1-1]]/(q_1^{p^m}-1)) .$$

Supposons L_Y prolongé en un faisceau inversible L_{Z_n} sur X_{Z_n}, et montrons que L_{Z_n} se prolonge en un faisceau inversible sur $X_{Z_{n+1}}$. D'après 2.2.6 (qui s'applique grâce à l'hypothèse $p \neq 2$), il suffit de vérifier que la classe de Chern $c(L_{Z_n})_{Z_{n+1}} \in H^2_{DR}(X_{Z_{n+1}}/Z_{n+1})$ appartient à Fil^1. Or celle-ci est induite par la classe $c(L_{Z_n})_D \in H^2_{DR}(X_D/D)$, où D est la PD-enveloppe, p-complétée, de Y_n dans $W[[q_1-1]]$. Si $D_I(\ )$ désigne la PD-enveloppe, p-complétée, de l'idéal I, on a

$$\begin{aligned} D &\overset{\mathrm{dfn}}{=} D_{(p^n,q_1^{p^m}-1)}(W[[q_1-1]]) \\ &= D_{(p,q_1^{p^m}-1)}(W[[q_1-1]]) \\ &= D_{(p,(q_1-1)^{p^m})}(W[[q_1-1]]) \\ &= D_{(t_1^{p^m})}(W[[t_1]]) \end{aligned}$$

où $t_1 = q_1-1$. D'après 2.2.8, l'application $D \to D_{(t_1)}(W[[t_1]]) = W\langle\langle t_1\rangle\rangle$ définie par l'inclusion $(p^n,q_1^{p^m}-1) \subset (p,q_1-1)$ est donc injective, et l'on voit, par le même argument qu'en a), que

$$c(L_{Z_n})_D = -(\log q_1^{p^m})a_D + p^m(b_1)_D .$$

Par suite, $c(L_{Z_n})_{Z_{n+1}}$, image de $c(L_{Z_n})_D$ par l'application $D \to \mathcal{O}_{Z_{n+1}}$ définie par la propriété universelle des PD-enveloppes (qui envoie $x^{[i]}$ (pour $x \in (p^n, q_1^{p^m}-1)$) sur l'image de x dans $\mathcal{O}_{Z_{n+1}}$ pour $i=1$ et sur 0 pour $i > 1$), est donnée par

$$\begin{aligned} c(L_{Z_n})_{Z_{n+1}} &= -(q_1^{p^m}-1)a_{Z_{n+1}} + p^m(b_1)_{Z_{n+1}} \\ &= p^m(b_1)_{Z_{n+1}} \end{aligned}$$

(car $q_1^{p^m}-1=0$ sur Z_{n+1}). Donc $c(L_{Z_n})_{Z_{n+1}}$ appartient à $\mathrm{Fil}^1 H^2_{DR}(X_{Z_{n+1}}/Z_{n+1})$, et par conséquent L_{Z_n} se prolonge en un faisceau inversible sur $X_{Z_{n+1}}$. Donc L_Y se prolonge en un faisceau inversible L_Z sur X_Z.

c) <u>Prolongement de</u> L_o <u>sur</u> $X_{T'}$. Posons $t_i = q_i - 1$. Soit $n = (n_2, \dots, n_{20})$ une suite d'entiers ≥ 1, posons

$$T'_n = \mathrm{Spf}(W[[t]]/(q_1^{p^m}-1, t_2^{n_2}, \dots, t_{20}^{n_{20}}))$$

(donc $T'_{(1,\dots,1)} = Z$). Supposons L_Z prolongé en un faisceau inversible $L_{T'_n}$ sur $X_{T'_n}$. Alors, par un argument analogue à celui utilisé en b), on voit que, si $2 \leq i \leq 20$, et $n+1_i = (n_2, \dots, n_{i-1}, n_i+1, n_{i+1}, \dots, n_{20})$, $L_{T'_n}$ se prolonge en un faisceau inversible sur $X_{T'_{(n+1_i)}}$. On en déduit, par récurrence, que L_Z se prolonge en un faisceau inversible $L_{T'}$ sur $X_{T'}$.

d) <u>Fin de la démonstration</u>. Pour prouver que $T' = T$, il reste à vérifier que, si $T'' \supset T'$ est un sous-schéma formel fermé de S, défini par un idéal I, tel que $L_{T'}$ se prolonge en un faisceau inversible sur $X_{T''}$, alors $T'' = T'$. Il revient au même de montrer que, si $T'' \neq T'$ et $I^2 = 0$, l'obstruction à prolonger $L_{T'}$ en un faisceau inversible sur $X_{T''}$ est non nulle, i.e. que la classe de Chern $c(L_{T'})_{T''} \in H^2_{DR}(X_{T''}/T'')$ n'appartient pas à Fil^1. Or, le même calcul que précédemment fournit

$$c(L_{T'})_{T''} = -(q_1^{p^m}-1)a_{T''} + p^m(b_1)_{T''} .$$

Comme $T'' \neq T'$, l'image de $q_1^{p^m}-1$ dans T'' est non nulle, donc $c(L_{T'})_{T''} \notin \mathrm{Fil}^1$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERTHELOT.- Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$. Lecture Notes in Math. 407, Springer-Verlag (1974).

[2] P. BERTHELOT et L. ILLUSIE.- Classes de Chern en cohomologie cristalline. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1695-1697 et 1750-1752 (1970).

[3] P. BERTHELOT et A. OGUS.- Notes on crystalline cohomology. Mathematical Notes 21, Princeton U. Press (1978).

[4] P. DELIGNE. Lettre à I. Shafarevitch, 7.10.1976.

[5] B. DWORK.- Norm residue symbol in local number fields. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 22, p. 180-190 (1958).

[6] B. DWORK.- Normalized Period Matrices. Ann. of Math., 94, p. 337-388 (1971).

[7] M. HAZEWINKEL.- On formal groups. The functional equation lemma and some of its applications, Journées de Géométrie algébrique de Rennes, juillet 78, S.M.F., Astérisque 63, p. 73-82 (1979).

[8] N. KATZ.- Travaux de Dwork, Séminaire Bourbaki, exp. 409, Lecture Notes in Math. 383, Springer-Verlag (1973).

[9] N. KATZ.- p-adic L-functions via moduli of elliptic curves. In Algebraic Geometry Arcata 1974, Proc. of Symp. in Pure Math. AMS 29 (1975).

[10] N. KATZ.- Slope filtration of F-crystals. Journées de Géométrie algébrique de Rennes, juillet 78, S.M.F., Astérisque 63, p. 113-163 (1979).

[11] N. KATZ.- p-adic L-functions. Cong. int. Math. Helsinki, 1978, p. 365-371.

[12] B. MAZUR.- Frobenius and the Hodge filtration. BAMS 78, p. 653-667 (1972).

[13] B. MAZUR et W. MESSING.- Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology. Lecture Notes in Math. 370, Springer-Verlag (1974).

[14] W. MESSING.- The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes. Lecture Notes in Math. 264, Springer-Verlag (1972).

[15] A. OGUS.- F-crystals and Griffiths transversality. Intl. Symp. on Alg. Geometry Kyoto, p. 15-44 (1977).

[16] A. OGUS.- Supersingular K3 crystals. Journées de Géométrie algébrique de Rennes, juillet 1978, S.M.F., Astérisque 64, p. 3-86 (1979).

[17] I. SHAFAREVITCH.- Algebraic surfaces. Proc. Steklov Inst. of Math. 75 (1965).

P. DELIGNE
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, Route de Chartres
91440 BURES/YVETTE (France)

L. ILLUSIE
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY (France)

APPENDIX TO EXPOSE V

Nicholas M. Katz

A1. UNIQUENESS OF GROUP STRUCTURES

Let k be a perfect field, $W = W(k)$ its ring of Witt vectors, and $\sigma : W \xrightarrow{\sim} W$ the absolute Frobenius automorphism of W. Let M be a finite-dimensional formal Lie variety over W, i.e. $M = \mathrm{Spf}(A)$ with A non-canonically isomorphic to $W[[T_1,\ldots,T_n]]$, $n = \dim M$. Suppose we are given a W-morphism of formal Lie varieties

$$\Phi : M \longrightarrow M^{(\sigma)}$$

whose reduction modulo p is the absolute Frobenius endomorphism

$$\mathrm{Frob} : M \underset{W}{\otimes} k \longrightarrow (M \underset{W}{\otimes} k)^{(\sigma)} .$$

UNIQUENESS LEMMA A1.1.(1) *Given (M,Φ) as above, there exists at most one structure of commutative formal Lie group over W on the formal Lie variety M for which the given map $\Phi : M \longrightarrow M^{(\sigma)}$ is a group homomorphism.* (2) *If this structure exists, it makes M into a toroidal formal group, and the given $\Phi : M \longrightarrow M^{(\sigma)}$ is the unique group homomorphism lifting Frobenius.* (3) If (M_1,Φ_1) *and* (M_2,Φ_2) *both admit group structures as in* (2) *above, then a morphism*

$$f : M_1 \longrightarrow M_2$$

of formal Lie varieties over W is a group homomorphism if and only if the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_2} \\ M_1^{(\sigma)} & \xrightarrow{f^{(\sigma)}} & M_2^{(\sigma)} \end{array}$$

commutes.

PROOF. We begin by proving (2). Thus let G be a finite-dimensional commutative formal Lie group over W, together with a homomorphism

$$\Phi : G \longrightarrow G^{(\sigma)}$$

which lifts Frobenius. We must show that G is toroidal, and that Φ is unique. By the rigidity of toroidal groups, it suffices to show that $G \otimes k$ is toroidal, and for this it suffices to show that $\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob})$ is toroidal. For this, we first observe that $\Phi : G \longrightarrow G^{(\sigma)}$ is finite (because it is finite modulo p, being a lifting of Frobenius) and flat (because it is a finite morphism between regular local rings of the same dimension). Therefore $\mathrm{Ker}(\Phi)$ is a finite flat commutative group-scheme over W whose reduction mod p is $\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob})$. According to Fontaine, if we denote by N the contravariant Dieudonné module of $\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob})$, then the lifting $\mathrm{Ker}(\Phi)$ is described by a W-submodule $L \subset N$ which satisfies

a) $L/pL \xrightarrow{\sim} N/FN$

b) $V|L$ is injective.

But N is killed by F, and is of finite length over W. Therefore a) implies that $L = N$, and b) then shows that V is injective, and hence bijective on N. Therefore $\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob})$ is toroidal, as required. We next prove (3). By extending scalars $W(k) \longrightarrow W(\bar{k})$, we may suppose k algebraically closed. Then M_1 and M_2 become isomorphic to products of $\hat{\mathbb{G}}_m$, and our commutative diagram - in the category of formal Lie varieties - becomes

$$\begin{array}{ccc}
(\hat{\mathbb{G}}_m)^{n_1} & \xrightarrow{f} & (\hat{\mathbb{G}}_m)^{n_2} \\
\downarrow p & & \downarrow p \\
(\hat{\mathbb{G}}_m)^{n_1} & \xrightarrow{f^{(\sigma)}} & (\hat{\mathbb{G}}_m)^{n_2}
\end{array} .$$

If f is a group homomorphism, then $f = f^{(\sigma)}$, and the diagram commutes. To prove the converse, we argue as follows.

In terms of "multiplicative" coordinates T on $(\hat{\mathbb{G}}_m)^{h_i}$, $i = 1,2$, our hypothesis on f is :

$$f^{(\sigma)}(T^p) = (f(T))^p \ , \ f(1) \equiv 1 \bmod p \ .$$

Iterating, we find

$$f^{(\sigma^n)}(T^{p^n}) = (f(T))^{p^n} \ ,$$

so in particular

$$f^{(\sigma^n)}(1) = (f(1))^{p^n} \longrightarrow 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty \ .$$

Therefore $f(1) = 1$. Now take logarithms, i.e. let

$$F : (\hat{\mathbb{G}}_a)^{n_1} \longrightarrow (\hat{\mathbb{G}}_a)^{n_2}$$

be the unique pointed morphism (over the fraction field of W) for which

$$F(\log T) = \log(f(T)) \ ;$$

then we have

$$F^{(\sigma)}(pX) = pF(X) \ .$$

Therefore F is <u>linear</u>, and has coefficients in $\mathbb{Q}_p$. As these coefficients are intrinsically the matrix entries of the tangent map of f at the origin, they lie in W as well, hence F is a linear map with coefficients in $\mathbb{Z}_p = W \cap \mathbb{Q}_p$. Therefore $f(T) = \exp(F(\log T))$ is a homomorphism.

Finally, we obtain (1) as the special case $(M_1, \Phi_1) = (M_2, \Phi_2)$, $f = \mathrm{id}$, of (3). Q.E.D.

COROLLARY A1.2. *Suppose that* k *is algebraically closed, and that* (M, Φ) *admits a group structure as above. Then*

(1) *The character group* $X(M) = \mathrm{Hom}_{W\text{-gp}}(M, \hat{\mathbb{G}}_m)$ *is a free* $\mathbb{Z}_p$*-module of rank* $n = \dim M$, *and the natural map (of functors in* $\mathbb{Z}_p$*-modules)*

$$M \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X(M), \hat{\mathbb{G}}_m)$$

is an isomorphism.

(2) Let q be a function on M (i.e. $q \in A$ where $M = \mathrm{Spf}(A)$) with $q \equiv 1$ modulo the maximal ideal of A. Then $q \in X(M)$ if and only if transforms under Φ by

$$\Phi^*(q^{(\sigma)}) = q^p .$$

(3) Let ω be a (continuous) one-form on A, i.e. $\omega \in (\Omega^1_{A/W})^{\text{contin}}$. Then $\omega = dq/q$ with $q \in X(M) = \mathrm{Hom}(M, \hat{G}_m)$ if and only if

$$\Phi^*(\omega^{(\sigma)}) = p\omega .$$

If ω satisfies this, the associated $q \in X(M)$ is unique ; it is given by the formula

$$q(X) = \exp\left(\int_0^X \omega\right) , \quad 0 = \text{the origin in } M .$$

(4) Let $\tau \in A \hat{\otimes}_W (W[1/p])$ be a function on $M \otimes_W W[1/p]$. Then $\tau = \log(q)$ for some $q \in X(M)$ if and only if τ satisfies

$$\tau(0) = 0 , \quad \Phi^*(\tau^{(\sigma)}) = p\tau .$$

If τ satisfies this, then the associated q is unique ; it is given by the formula

$$q = \exp(\tau) .$$

(5) Let $q_1, \ldots, q_n$ be $n = \dim M$ elements of $X(M)$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ the corresponding differentials $\omega_i = dq_i/q_i$ and $\tau_1, \ldots, \tau_n$ the corresponding "functions with denominators" $\tau_i = \log q_i$. Then the following conditions are equivalent :

a) $q_1, \ldots, q_n$ form a $\mathbb{Z}_p$ base of $X(M)$

b) the natural map

$$M \longrightarrow \mathrm{Spf}(W[[q_1 - 1, \ldots, q_n - 1]])$$

is an isomorphism

c) $\omega_1, \ldots, \omega_n$ form an A-base of $(\Omega^1_{A/W})^{\text{contin}}$

d) $\omega_1,\ldots,\omega_n$ <u>form a</u> $\mathbb{Z}_p$<u>-base of</u>
$$\{\omega\in\Omega^1 \mid \Phi^*(\omega^{(\sigma)}) = p\omega\}$$

e) $\tau_1,\ldots,\tau_n$ <u>form a</u> $\mathbb{Z}_p$<u>-base of</u>
$$\{\tau\in A\hat{\otimes} W[1/p] \,\Big|\, \tau(0) = 0 \ , \ \Phi^*(\tau^{(\sigma)}) = p\tau\} \ .$$

PROOF. Because M is toroidal, and k is algebraically closed, M is (non-canonically) isomorphic to $(\hat{\mathbb{G}}_m)^n$. This makes (1) obvious. Assertion (2) is a particular case of part (3) of the uniqueness lemma, namely $M_1 = M$, $M_2 = \hat{\mathbb{G}}_m$. Assertion (3) becomes obvious if we choose a $\mathbb{Z}_p$-basis $q_1,\ldots,q_n$ of $X(M)$, i.e. if we choose an isomorphism

$$M \xrightarrow{\sim} (\hat{\mathbb{G}}_m)^n \ ,$$

and write ω as an A-linear combination of the differentials dq_i/q_i :

$$\omega = \Sigma\ f_i\ dq_i/q_i \ .$$

The condition

$$\Phi^*(\omega^{(\sigma)}) = p\omega$$

means precisely that the coefficient functions f_i each satisfy

$$\Phi^*(f_i^{(\sigma)}) = f_i \ ,$$

which in turn implies that each coefficient function f_i is simply a <u>constant</u> in $\mathbb{Z}_p$. Therefore

$$\omega = dq/q \quad \text{for} \quad q = \Pi(q_i)^{f_i} \ ;$$

because $q(0) = 1$, we obtain by integration the formula

$$\exp\left(\int_0^X \omega\right) = q(X) \ .$$

For assertion (4), first note that the Dieudonné-Dwork integrality criterion (cf. 1.4.4) guarantees that the series q, defined as

$$q \overset{\text{dfn}}{=\!=} \exp(\tau)$$

is integral (i.e. lies in A) and lies $q(0) = 1$. From the <u>equality</u>

$$\Phi^*(\tau^{(\sigma)}) = p\tau$$

(and not simply their congruence modulo pA) we see that

$$\Phi^*(q^{(\sigma)}) = q^p ,$$

and we conclude by (2) that q lies in X(M).

In assertion (5), the equivalence of a), b) and c) is physically obvious for $(\hat{\mathbb{G}}_m)^r$, and the equivalence of a) with d) and e) is obvious from parts 3) and 4) above. Q.E.D.

A2. SHARPENINGS OF 1.4

COROLLARY A2.1 OF 1.4.2. <u>With the hypotheses and notations of 1.4.2, suppose that there exists a lifting</u> Φ_{can} <u>of Frobenius on</u> Spf(A) <u>such that</u>

$$F(\Phi_{can})(\Phi^*_{can}(\mathrm{Fil}^1)^{(\sigma)}) \subset \mathrm{Fil}^1 .$$

<u>Let</u> $\underline{0}$ <u>denote the</u> W-<u>valued point of</u> Spf(A) <u>which is the</u> Φ_{can}-<u>Teichmuller representative of the augmentation</u> $A \twoheadrightarrow k$. <u>Then in formulaire</u> 1.4.2.1-7 <u>we have the further precisions</u>

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla a_i = 0 \\ \nabla b_i = \sum_j \eta_{ij} \otimes a_j \\ F(\Phi_{can})(\Phi^*_{can}(a_i^{(\sigma)})) = a_i \\ F(\Phi_{can})(\Phi^*_{can}(b_i^{(\sigma)})) = pb_i \\ \Phi^*_{can}(\eta_{ij}^{(\sigma)}) = p\eta_{ij} , \ d\eta_{ij} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} d\tau_{ij} = \eta_{ij} \\ \Phi^*(T_{i,j}^{(\sigma)}) = p\tau_{ij} \\ \tau_{ij}(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} q_{ij} = \exp(\tau_{ij}) \ \text{ is defined, lies in } A \text{, and} \\ q_{ij}(\underline{0}) = 1 \\ \Phi^*_{can}(q_{ij}^{(\sigma)}) = q_{ij}^p . \end{array}\right.$$

FURTHER COROLLARY A2.2. (Analogue of (4.7)(1) <u>Given</u> Φ_{can} <u>as above, suppose in addition that</u> (1.4.6.3) : $T_{A/W} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Fil}^1, U)$ <u>is an isomorphism. Then</u> $(\mathrm{Spf}(A), \Phi_{can})$ <u>admits a group structure, and the morphism</u>

$$\mathrm{Spf}(A) \longrightarrow \prod_{i,j} \hat{\mathbb{G}}_m$$

<u>defined by the</u> $q_{i,j}$ <u>is an isomorphism of groups</u>.

(2) <u>If</u> $p \neq 2$, <u>then</u> Φ_{can} <u>is the unique lifting of Frobenius such that</u>

$$F(\Phi_{can})(\Phi^*_{can}(\mathrm{Fil}^1)^{(\sigma)}) \subset \mathrm{Fil}^1 .$$

PROOF. The formulaire is simply obtained from the one given in 1.4.2.1-7 by noting that the $u_{ij}(\Phi_{can})$ all vanish. The first assertion of the further corollary has already been proven when $p \neq 2$, but the condition $p \neq 2$ was used only to assure that $\exp(\tau_{ij}(\underline{\underline{0}}))$ make sense. As our hypotheses on Φ_{can} give $\tau_{ij}(\underline{\underline{0}}) = 0$, this problem will not arise, and the proof given goes through tel quel. The unicity of Φ_{can} in case $p \neq 2$ resulte from the observation that the series $q_{ij} = \exp(\tau_{ij})$ are then definible without reference to a particular choice of Φ , and furnish an isomorphism

$$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spf}(W[[q_{ij}-1]]) ;$$

our Φ_{can} is <u>the</u> lifting of Frobenius given by

$$\Phi_{can}(q_{ij}^{(\sigma)}) = (q_{ij})^p . \quad \text{Q.E.D.}$$

A3. FORMAL MODULI OF ORDINARY ABELIAN VARIETIES ; THE SERRE-TATE & DWORK GROUP STRUCTURES

Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$, and X_o/k an ordinary abelian variety over k. Let M be its formal deformation space, and X/M the corresponding formal abelian scheme. One knows that M is a g^2-dimensional formal Lie variety over $W = W(k)$. Because X_o/k is ordinary, the formal group $\hat{X}$ of X/M is non-canonically isomorphic to $(\hat{\mathbb{G}}_m)^g$ over M. The "canonical subgroup" $H_{can} \subset X$ is defined to be the kernel of $[p]$ in $\hat{X}$; it is the unique finite flat subgroup-scheme of X/M which mod p becomes the kernel of the relative Frobenius endomorphism of $X \underset{W}{\otimes} k/M \underset{W}{\otimes} k$. We denote by

$$F_{can} : X \longrightarrow X/H_{can}$$

the projection onto the quotient by H_{can}. The quotient X/H_{can} over M is a deformation of $X_o^{(p)}/k$, so its "classifying map" is a morphism of formal Lie varieties

$$\Phi_{can} : M \longrightarrow M^{(\sigma)} ,$$

"defined by" an isomorphism of formal abelian schemes over M

$$\Phi^*_{can}(X^{(\sigma)}) \simeq X/H_{can} .$$

Thus Φ_{can} is a lifting of the absolute Frobenius endomorphism of $M \otimes k$, and

$$\begin{tikzcd} F_{can} : X \arrow[r] \arrow[dr] & X/H_{can} \simeq \Phi^*_{can}(X^{(\sigma)}) \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

is a lifting of the relative (to $M \otimes k$) Frobenius endomorphism of $X \otimes k/M \otimes k$. Therefore this morphism induces on H^1_{DR} an M-linear map

$$F^*_{can} : \Phi^*_{can}\, \sigma^*\, H^1_{DR}(X/M) \longrightarrow H^1_{DR}(X/M)$$

which is none other than the crystalline map $F(\Phi_{can})$. Because F_{can} is a physical morphism, the induced map F^*_{can} respects the Hodge filtration of H^1_{DR}'s . Therefore we have

$$F(\Phi_{can})(\Phi^*_{can}(Fil^1)^{(\sigma)}) \subset Fil^1 .$$

THEOREM A3.1. The structure of group imposed on M by the Serre-Tate description of M as

$$Ext(X_o(p^\infty)^{et} , X_o(p^\infty)^{conn})$$

coincides with the structure of group on M for which the $q_{ij} = \exp(\tau_{ij})$ define an isomorphism of groups

$$M \xrightarrow{\sim} \prod_{i,j} \hat{\mathbb{G}}_m .$$

PROOF. The morphism $\Phi_{can} : M \longrightarrow M^{(\sigma)}$ is also a group homomorphism for the Serre-Tate group structure on M . Q.E.D.

A4. FORMAL MODULI OF ORDINARY K3 SURFACES ; SHARPENING OF 2.1.7, 2.1.14

COROLLARY A4.1 (of 2.1.7, 2.1.14). With the hypotheses and notations of 2.1.7 and 2.1.14, there exists a unique morphism

$$\Phi_{can} : Spf(A) \longrightarrow Spf(A)^{(\sigma)}$$

lifting Frobenius for which the induced crystalline map $F(\Phi_{can})$ on $H^2_{DR}(X/A)$

$$F(\Phi_{can}) : \Phi^*_{can}\ \sigma^*\ H^2_{DR}(X/A) \longrightarrow H^2_{DR}(X/A)$$

preserves the Hodge filtration, i.e. satisfies

$$\begin{cases} F(\Phi_{can})\Phi^*_{can}((Fil^2)^{(\sigma)}) \subset Fil^2 \\ F(\Phi_{can})\Phi^*_{can}((Fil^2)^{(\sigma)}) \subset Fil^1 . \end{cases}$$

The group structure on $Spf(A)$ defined by $q_1,\ldots,q_{20}$ is the unique one for which Φ_{can} is a group homomorphism.

PROOF. The proof of 2.1.7 shows that any Φ_{can} whose associated $F(\Phi_{\mathrm{can}})$ preserves the Hodge filtration satisfies

$$\Phi^*_{\mathrm{can}}(q_i^{(\sigma)}) = (q_i)^p \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, 20 \ .$$

Therefore Φ_{can} is a group homomorphism ; as it is completely specified by its effect on the q_i , it is unique. Part (iii) of 2.1.7 shows that such a Φ_{can} , preserving the Hodge filtration, does in fact exist. Q.E.D.