Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Volume 55 (1994), Part 1

Structures de Hodge mixtes réelles

PIERRE DELIGNE

Les structures de Hodge mixtes réelles (§2) forment une $\otimes$-catégorie abélienne rigide et le foncteur "espace vectoriel réel sous-jacent" est un foncteur fibre. Le foncteur Gr^W est un autre. Nous nous proposons de calculer ce que donne la théorie générale des catégories tannakiennes dans ce cas particulier.

1. Trois filtrations opposées

1.1. Ce numéro est une variation sur le numéro 1.2 de P. Deligne, *Théorie de Hodge* II, Publ. Math. IHES **40**, pp. 5–58. Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne, et A un objet de $\mathfrak{A}$ muni de trois filtrations W, F, $\overline{F}$ opposées. "Filtration" signifie ici "filtration finie" (loc. cit. 1.1.4), la filtration W est supposée croissante, et les filtrations F, $\overline{F}$ décroissantes. La condition d'opposition s'écrit $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q \mathrm{Gr}_n^W A = 0$ pour $n \neq p+q$ (loc. cit. 1.2.7, 1.2.13).

Pour tout objet bigradué $B = \bigoplus B^{p,q}$, nous noterons W, F_W, et $\overline{F}_W$ les trois filtrations opposées:

$$W_n = \bigoplus_{p+q \leq n} B^{p,q},$$

$$F_W^i = \bigoplus_{p \geq i} B^{p,q},$$

$$\overline{F}_W^i = \bigoplus_{q \geq i} B^{p,q}.$$

Avec cette notation, que trois filtrations W, F, et $\overline{F}$ de A soient opposées signifie encore (loc. cit. 1.2.6) que chaque $\mathrm{Gr}_n^W A$ admet une (unique)

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14Fxx.

Le présent article reproduit avec des changements minimes, l'appendice portant le même titre au preprint de E. Cattani et A. Kaplan: "On the SL(2)-orbits in Hodge theory" (IHES 1982). Une présentation différente d'une partie des résultats est donnée aux pages 470–473 de l'article de E. Cattani, A. Kaplan, et W. Schmid: "Degeneration of Hodge structures" (Annals of Math. 123 (1986), 457–535).

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

©1994 American Mathematical Society
0082-0717/94 $1.00 + $.25 per page

décomposition

$$\mathrm{Gr}_n^W A = \bigoplus_{p+q=n} A_W^{p,q}$$

telle que les filtrations de $\mathrm{Gr}_n^W A$ induites par F et $\overline{F}$ soient données par

$$F^i \mathrm{Gr}_n^W A = \bigoplus_{p+q=n,\, p\geq i} A_W^{p,q},$$

$$\overline{F}^i \mathrm{Gr}_n^W A = \bigoplus_{p+q=n,\, q\geq i} A_W^{p,q}.$$

En d'autres termes, F et $\overline{F}$ induisent sur $\mathrm{Gr}^W A$ les filtrations F_W et $\overline{F}_W$.

Posons

$$A_F^{p,q} := (W_{p+q} \cap F^p) \cap ((W_{p+q} \cap \overline{F}^q) + \sum_{i\geq 0} (W_{p+q-i} \cap \overline{F}^{q-i+1}))$$

et, échangeant les rôles de F et $\overline{F}$, et de p et q,

$$A_{\overline{F}}^{p,q} := (W_{p+q} \cap \overline{F}^q) \cap ((W_{p+q} \cap F^p) + \sum_{i\geq 0} (W_{p+q-i} \cap F^{p-i+1})).$$

Pour $p+q=n$, la projection de W_n sur $\mathrm{Gr}_n^W A$ induit un isomorphisme de A_F^{pq} avec A_W^{pq} : loc. cit. 1.2.8, restreint au cas particulier 1.2.11 (où $A_F^{p,q}$ est noté A_0^{pq} ; noter que dans la formule définissant A_F^{pq}, on peut remplacer la somme sur $i \geq 0$ par la même somme sur $i \geq 2$). On en déduit (loc. cit.) que les A_F^{pq} (resp. $A_{\overline{F}}^{pq}$) forment une bigraduation de A, et que la somme a_F (resp. $a_{\overline{F}}$) des isomorphismes $A_F^{pq} \xrightarrow{\sim} A_W^{pq}$ (resp. $A_{\overline{F}}^{pq} \xrightarrow{\sim} A_W^{pq}$) est un isomorphisme bifiltré de $(A; W, F)$ avec $(\mathrm{Gr}^W A; W, F_W)$ (resp. de $(A; W, \overline{F})$ avec $(\mathrm{Gr}^W A; W, \overline{F}_W)$).

LEMME. *L'automorphisme* $d = a_{\overline{F}} a_F^{-1}$ *de* $\mathrm{Gr}^W A$ *vérifie*

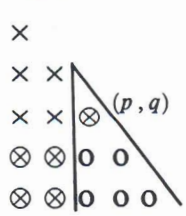
$$(d-1)(A_W^{pq}) \subset \bigoplus_{r<p,\, s<q} A_W^{rs}. \tag{1.1.1}$$

Par passage au gradué, les isomorphismes a_F et $a_{\overline{F}}$ induisent l'identité de $\mathrm{Gr}^W A$. On a donc $\mathrm{Gr}^W(d) = 1$.

Pour chaque partie I de $\mathbb{Z}^2$, et pour B un objet bigradué, posons $B^I = \bigoplus_{(r,s)\in I} B^{rs}$. Posons

$$I(p,q) = \{(r,s) \mid r+s \leq p+q \text{ et } (r,s) = (p,q) \text{ ou } r < p\},$$
$$J(p,q) = \{(r,s) \mid r+s \leq p+q \text{ et } (r,s) = (p,q) \text{ ou } s < q\},$$
$$K(p,q) = \{(r,s) \mid r+s \leq p+q \text{ et } r \geq p\}:$$

$I(p,q)$: ×
$J(p,q)$: o
$K(p,q)$: entouré



Dans la définition de A_F^{pq} comme intersection de deux sous-objets de A, le premier sous-objet est $A_F^{K(p,q)}$ et le second est $A_{\overline{F}}^{I(p,q)}$. Cela résulte de ce que a_F (resp. $a_{\overline{F}}$) est un isomorphisme bifiltré. On a donc $A_F^{pq} \subset A_{\overline{F}}^{I(p,q)}$, d'où $dA_W^{pq} = a_{\overline{F}} A_F^{pq} \subset A_W^{I(p,q)}$, et $dA_W^{I(p,q)} \subset A_W^{I(p,q)}$. Parce que $\mathrm{Gr}^W(d) = 1$, on a égalité: $dA_W^{I(p,q)} = A_W^{I(p,q)}$. Echangeant F et $\overline{F}$, on trouve de même que $d^{-1}A_W^{J(p,q)} = A_W^{J(p,q)}$, donc que $dA_W^{J(p,q)} = A_W^{J(p,q)}$, et

$$dA_W^{pq} \subset A_W^{I(p,q)} \cap A_W^{J(p,q)} = A_W^{I(p,q)\cap J(p,q)} = A_W^{p,q} \oplus \bigoplus_{r<p,\, s<q} A_W^{p,q}.$$

On conclut en utilisant que $\mathrm{Gr}_W(d) = 1$:

PROPOSITION 1.2. *Le foncteur $A \to \mathrm{Gr}^W A$ est une équivalence de la catégorie des objets de $\mathfrak{A}$, munis de trois filtrations opposées W, F, $\overline{F}$, avec la catégorie des objets de $\mathfrak{A}$, munis d'une bigraduation (sous-entendu: finie) et d'un automorphisme d vérifiant* (1.1.1).

L'isomorphisme $a_F : A \to \mathrm{Gr}^W A$ respecte la filtration W, et transforme F en F_W, et $\overline{F}$ en $d^{-1}(\overline{F}_W)$: on a $a_F = d^{-1}a_{\overline{F}}$. Le foncteur Gr^W admet donc pour inverse à gauche le foncteur $s : (B = \bigoplus B_W^{pq}, d) \mapsto (B, W, F_W, d^{-1}(\overline{F}_W))$ muni de l'isomorphisme fonctoriel $a_F : A \xrightarrow{\sim} s\mathrm{Gr}^W A$.

Réciproquement, partons d'un objet bigradué B, muni d'un automorphisme d, et définissons W, F, et $\overline{F}$ comme ci-dessus. Ces filtrations sont opposées dès que $\mathrm{Gr}^W(d) = 1$. Pour ces filtrations, $B_F^{pq} = B^{K(p,q)} \cap d^{-1}(B^{I(p,q)})$. Si d vérifie (1.1.1), on a $dB^{pq} \subset B^{I(p,q)}$, et $B^{pq} \subset B_F^{pq}$. Puisque (B^{pq}) et (B_F^{pq}) sont des bigraduations de B, on a égalité: $B^{pq} = B_F^{pq}$. Le même argument, appliqué à d^{-1} et à la bigraduation $\overline{B}^{pq} = d^{-1}B^{pq}$, montre que $d^{-1}B^{pq} = B_{\overline{F}}^{pq}$. On en déduit que l'isomorphisme évident de B avec $\mathrm{Gr}^W B$ est un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^W \circ s$.

REMARQUE 1.3. Si 2 est inversible, d admet une unique racine carré $d^{1/2}$ vérifiant encore (1.1.1). Posons $a := d^{1/2}a_F = d^{-1/2}a_{\overline{F}}$. On a $a_{\overline{F}} = d^{1/2}a$ et $a_F = d^{-1/2}a$, de sorte que a transforme F (resp. $\overline{F}$) en la filtration $d^{1/2}(F_W)$ (resp. $d^{-1/2}(\overline{F}_W)$) de $\mathrm{Gr}^W A$. L'isomorphisme a est le même pour A muni de W, F, et $\overline{F}$ ou de W, $\overline{F}$, et F.

1.4. Ces constructions sont compatibles au produit tensoriel: si $\otimes : \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}$ est un foncteur biadditif exact, on l'étend aux objets filtrés en posant

$$F^n(A_1 \otimes A_2) = \sum_{a+b=n} F^a(A_1) \otimes F^b(A_2) \subset A_1 \otimes A_2.$$

Le foncteur "gradué associé" est compatible à $\otimes$ et, pour les objets bifiltrés, l'isomorphisme $\mathrm{Gr}^{W_1 \otimes W_2}(A_1 \otimes A_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^{W_1}(A_1) \otimes \mathrm{Gr}^{W_2}(A_2)$ transforme la filtration induite par $F_1 \otimes F_2$ en le $\otimes$ de celles induites par F_1 et F_2.

Pour les espaces vectoriels sur un corps, cela peut se déduire de ce qu'une bifiltration est toujours sous-jacente à une bigraduation. On en déduit que si W_i, F_i, et $\overline{F}_i$ sont trois filtrations opposées sur $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$, alors les filtrations $W_1 \otimes W_2$, $F_1 \otimes F_2$, et $\overline{F}_1 \otimes \overline{F}_2$ de $A_1 \otimes A_2$ sont encore opposées. La formation des bigraduations A_F^{pq} et $A_{\overline{F}}^{pq}$ de A et A_W^{pq} de $\mathrm{Gr}^W(A)$, ainsi que celle des isomorphismes a_F, $a_{\overline{F}} : A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^W(A)$ et de l'automorphisme d de $\mathrm{Gr}^W(A)$ est compatible à $\otimes$.

1.5. Soient k un corps commutatif, $\mathfrak{A}$ la catégorie des espaces vectoriels (sous-entendu: de dimension finie) sur k et $\mathscr{O}$ la catégorie des espaces vectoriels munis de trois filtrations opposées W, F, et $\overline{F}$. C'est une $\otimes$-catégorie abélienne rigide, avec $\mathrm{End}(1) = k$. Elle admet le foncteur fibre ω_0: "espace vectoriel sous-jacent", donc est tannakienne et neutre. On dispose aussi du foncteur fibre $\mathrm{Gr}^W =: \omega_W$. Les isomorphismes a_F et $a_{\overline{F}}$ sont des isomorphismes de foncteurs fibres: $\omega_0 \to \omega_W$. Posons $\mathfrak{G} = \mathrm{Aut}(\omega_W)$. L'automorphisme fonctoriel d définit un point du groupe pro-algébrique $\mathfrak{G}$ sur k.

A la bigraduation fonctorielle de $\mathrm{Gr}^W(V)$ par les $V_W^{p,q}$ correspond un homomorphisme

$$\alpha : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathfrak{G}.$$

C'est une section de la projection

$$\mathrm{pr} : \mathfrak{G} \to \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$$

correspondant à l'inclusion dans $\mathscr{O}$ de la catégorie des espaces vectoriels bigradués (par $B \mapsto (B, W, F_W, \overline{F}_W)$). Je désire normaliser α de sorte que $\alpha(\lambda, \mu) \cdot v = \lambda^{-p}\mu^{-q}v$ pour $v \in V_W^{p,q}$.

D'après la proposition 1.2, $\mathfrak{G}$ est aussi le groupe algébrique des automorphismes du foncteur fibre "espace vectoriel sous-jacent" sur la catégorie des espaces vectoriels bigradués munis d'un automorphisme d vérifiant (1.1.1). Nous allons le "calculer" lorsque k est de caractéristique 0.

Soit $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie sur k, librement engendrée par des éléments $D^{i,j}$ $(i, j < 0)$, et munissons-la de l'unique bigraduation pour laquelle $D^{i,j}$ est de bidegré (i, j). Les $W_n(\mathfrak{L})$ sont des idéaux de $\mathfrak{L}$, et les quotients $\mathfrak{L}/W_n(\mathfrak{L})$ sont des algèbres de Lie nilpotentes. Nous noterons $\mathfrak{U}$ le groupe pro-algébrique limite projective des groupes algébriques unipotents $\exp(\mathfrak{L}/W_n(\mathfrak{L}))$ d'algèbre de Lie les $\mathfrak{L}/W_n(\mathfrak{L})$. Faisons agir le groupe $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ sur $\mathfrak{L}$, de sorte que (λ, μ) agisse sur l de degré (i, j) par multiplication par $\lambda^{-i}\mu^{-j}$. Cette action respecte la filtration W, et fournit donc une action de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ sur $\mathfrak{U}$.

CONSTRUCTION 1.6. *$\mathfrak{G}$ est le produit semi-direct* $(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \ltimes \mathfrak{U}$.

Faire agir le produit semi-direct sur un espace vectoriel V de dimension finie revient à faire agir $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, et $\mathfrak{U}$, avec une condition de compatibilité

reliant ces deux actions. L'action de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ correspond à une bigraduation (celle pour laquelle $(\lambda, \mu) * v^{p,q} = \lambda^{-p}\mu^{-q}v^{p,q}$). Celle de $\mathfrak{U}$ à une action de $\mathfrak{L}$, nulle sur un $W_n\mathfrak{L}$ et nilpotente, i.e., à la donnée d'endomorphismes $D^{i,j}$, pour $i, j < 0$, tels que tout composé de $D^{i,j}$ de poids assez grand en valeur absolue soit nul. La compatibilité est que $D^{i,j}$ soit de bidegré (i, j), et cette propriété entraîne les annulations requises ci-dessus. La donnée des $D^{i,j}$ équivaut à celle de $D := \sum D_{ij}$: au total, l'action du produit semi-direct sur V s'identifie à la donnée d'une bigraduation, et d'un endomorphisme vérifiant $DV^{p,q} \subset \bigoplus_{i<p, j<q} V^{i,j}$. Posant $d = \exp(D)$, on l'identifie encore à la donnée d'une bigraduation, et d'un automorphisme d vérifiant (1.1.1). Cette construction est compatible au produit tensoriel, d'où l'isomorphisme voulu $(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \ltimes \mathfrak{U} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{G} = \mathrm{Aut}(\omega_W)$. Cet isomorphisme est bien sûr compatible à α et pr ci-dessus.

2. Structures de Hodge mixtes

Rappelons qu'une structure de Hodge mixte réelle est un espace vectoriel réel (sous-entendu: de dimension finie) muni d'une filtration croissante W et dont le complexifié $V_{\mathbb{C}}$ est muni d'une filtration décroissante F. On exige que sur $V_{\mathbb{C}}$ la filtration $W_{\mathbb{C}}$—souvent notée simplement W—déduite de W par extension des scalaires, la filtration F et sa complexe conjuguée $\overline{F}$ forment un système de trois filtrations opposées.

Il revient au même de se donner un espace vectoriel réel ou un espace vectoriel complexe muni d'une structure réelle, i.e., d'une conjugaison complexe (= une involution antilinéaire). Via ce dictionnaire, il revient au même de se donner une structure de Hodge mixte réelle, ou un espace vectoriel complexe muni de trois filtrations opposées W, F, et $\overline{F}$, et d'une conjugaison complexe qui respecte W et échange F et $\overline{F}$. D'après la proposition 1.2, le foncteur Gr^W induit une équivalence de la catégorie de ces objets avec celle des espaces vectoriels complexes bigradués $V = \bigoplus V^{p,q}$, munis d'un automorphisme d vérifiant (1.1.1) et d'une conjugaison complexe σ qui échange $V^{p,q}$ et $V^{q,p}$, et pour laquelle le complexe conjugué $\bar{d}$ de d est $d^{-1} : \sigma d \sigma^{-1} = d^{-1}$.

La catégorie $\mathscr{M}$ des structures de Hodge mixtes réelles est une $\otimes$-catégorie abélienne rigide, avec $\mathrm{End}(1) = \mathbb{R}$. Elle admet le foncteur fibre ω_0: "espace vectoriel sous-jacent", donc est tannakienne et neutre. On dispose aussi du foncteur fibre $\mathrm{Gr}^W =: \omega_W$. Avec les notations de la remarque 1.3, le morphisme fonctoriel

$$a : V_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Gr}^W(V_{\mathbb{C}})$$

respecte la structure réelle des deux membres (car il dépend symétriquement de F et $\overline{F}$). Il induit un isomorphisme de foncteurs fibres, encore noté $a : \omega_0 \to \omega_W$.

Avec les notations du numéro 1, faisons $k = \mathbb{C}$, et soit $\mathfrak{M}$ la forme réelle de $\mathfrak{G}$ définie par la conjugaison complexe suivante:

a) Sur $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, c'est $(\lambda, \mu) \to (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$.

b) Sur $\mathfrak{U}$, c'est celle qui est compatible à la conjugaison complexe de $\mathfrak{L}$ donnée par

$$D^{i,j} \mapsto -D^{j,i}.$$

Comme en 1.1, on voit qu'il revient au même de faire agir $\mathfrak{M}$ sur un espace vectoriel réel V, ou de se donner

a) un bigraduation $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus V^{p,q}$ de $V_{\mathbb{C}}$, telle que $V^{p,q}$ et $V^{q,p}$ soient complexes conjugués l'un de l'autre, et

b) un automorphisme d de $V_{\mathbb{C}}$, tel que $\bar{d} = d^{-1}$, et que

$$(d-1)V^{p,q} \subset \bigoplus_{i<p,\, j<q} V^{i,j}.$$

Dès lors,

PROPOSITION 2.1. *Le foncteur fibre ω_W induit une équivalence de $\mathscr{M}$ avec la catégorie des représentations de $\mathfrak{M}$: on a $\mathfrak{M} = \mathrm{Aut}(\omega_W)$.*

Le foncteur inverse ϕ est

(V, muni de l'action de $\mathfrak{M}$) $\leftrightarrow$

(V, muni d'une bigraduation de $V_{\mathbb{C}}$, et de d) $\leftrightarrow$

(V, muni de la filtration W de complexifiée la filtration W attachée à la bigraduation de $V_{\mathbb{C}}$, et de la filtration $F := d^{-1/2}(F_W)$ de son complexifié), avec pour isomorphisme $\phi \circ \mathrm{Gr}^W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$ l'isomorphisme fonctoriel a.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, NEW JERSEY