http://dx.doi.org/10.1090/conm/067/902592

Contemporary Mathematics
Volume 67, 1987

Le déterminant de la cohomologie

par P. Deligne

Le présent article a pour origine une lettre à D. Quillen, datée du 20 juin 1985. Dans cette lettre, j'exploitais la philosophie d'Arakelov pour "calculer" la torsion analytique d'un fibré vectoriel métrisé sur une surface de Riemann (avec métrique) en terme d'intégrales de quantités élémentaires - tout au moins dans le cas plus facile des fibrés virtuels de dimension 0. Une description de l'énoncé obtenu est donnée au paragraphe 1.

En essayant de comprendre la démonstration, ainsi que G. Faltings [5], H. Gillet et C. Soulé [7], je me suis aperçu que cette lettre établit des bribes d'un programme peut-être plus intéressant que le théorème, dont il éclaire la démonstration. Ce programme est exposé au paragraphe 2. Pour $f : X \to Y$ un morphisme projectif d'intersection complète relative, la formule de Riemann-Roch donne des informations sur l'image directe $f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$. En particulier, elle donne une formule pour $c^1 Rf_* E = c^1 \det Rf_* E$, pour E un fibré vectoriel sur X. Un fibré en droite est connu quand il est connu (à isomorphisme unique près) localement. Si on peut "préciser" la formule de Riemann-Roch pour $c^1 \det Rf_* E$ en un isomorphisme canonique entre $\det Rf_* E$ (ou une puissance tensorielle fixe de $\det Rf_* E$) et un autre fibré en droite, le problème de construire cet isomorphisme est local. On acquiert le droit de se localiser sur Y au prix de travailler avec des objets à isomorphisme unique près plutôt qu'à isomorphisme près. Les résultats plus précis obtenus coûtent aussi une débauche de diagrammes commutatifs et des cauchemars de signes. Ils ne s'appliquent qu'à la première classe de Chern. Pour interpréter de même Riemann-Roch pour $ch^n Rf_*$, il faudrait sans doute se battre avec des n-champs. Je recule devant cette idée mais j'espère que la philosophie de Grothendieck [9] et le cas $n = 1$ peuvent être un guide heuristique utile. De même: en K-théorie, le langage des espaces de lacets infinis est plus efficace que celui des n-catégories de Picard commutatives qu'envisage Grothendieck, mais une variante catégorique des deux premiers étages

© 1987 American Mathematical Society

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

de la tour de Postnikov de BQA (§4) peut aider à comprendre ce qui se passe.

Le paragraphe 2 expose ces idées, et un analogue à la Arakelov, avec métriques.

Dans l'analogie entre "métrique hermitienne sur un fibré vectoriel" et "structure entière", je tiens, au contraire de S. Arakelov [1][2] et G. Faltings [5], à pouvoir travailler avec des structures hermitiennes quelconques. Le paragraphe 3 fait de la propagande pour ce point de vue.

Le paragraphe 4 étudie la catégorie $V(A)$ des objets virtuels d'une catégorie exacte A. Cette catégorie est un avatar des deux premiers étages de la tour de Postnikov de BQA. Son introduction nous permettra de cacher de nombreux signes. Au paragraphe 5, on en introduit un analogue à la Arakelov, pour les fibrés métrisés sur un espace analytique complexe X. Cette catégorie incarne une théorie de classes de Chern secondaires à la Bott-Chern [4] et fournit des applications R_p du K_1 de la catégorie des fibrés holomorphes sur X dans l'espace des $(p-1, p-1)$ formes $d'd''$-fermées modulo formes d' ou d'' exactes.

Enfin, les paragraphes 6 à 11 donnent la preuve du théorème décrit au paragraphe 1, selon les lignes indiquées au paragraphe 2, avec quelques disgressions.

Exposer l'heuristique des paragraphes 2 et 3 est mon excuse pour présenter des résultats incomplets, avec des démonstrations qui ne sont parfois que des esquisses et une généralité pas toujours optimale.

Le présent texte doit beaucoup à l'influence de nombreux mathématiciens. Je suis particulièrement conscient de celles de A. Grothendieck et D. Quillen (§4, d'anciennes conversations à Bures), D. Quillen [13], C. Soulé (§5) et S. Arakelov (§3). Je prie ceux que j'oublie de m'en excuser. Dans la lettre à D. Quillen, je n'utilisais que D. Quillen [13]. La démonstration donnée ici est simplifiée et rendue plus naturelle par l'usage des résultats plus forts de J. Bismuth et D. Freed [3] and D. Freed [6] (1.22).

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

1. Description du théorème principal 96

2. Programme 100

3. Analogies 108

4. Objets virtuels 113

5. Fibrés métriques virtuels 126

6. Intégrale d'un produit de premières classes de Chern 141

7. $\langle L , M \rangle$ et cohomologie 146

8. Intégrale d'un produit de premières classes de Chern. Cas général (esquisse) 152

9. IC^2 et isomorphisme de Riemann-Roch 155

10. Métriser IC^2 171

11. Le théorème 174

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

1. Description du théorème principal.

1.1 Rappels: déterminants ([10]).

Pour V un espace vectoriel, on pose

$$\det V := \overset{\dim V}{\Lambda} V .$$

Pour V^* un espace vectoriel $\mathbb{Z}/(2)$-gradué, on pose

$$\det(V^*) := (\det V^+) \otimes (\det V^-)^\vee .$$

On applique la même règle aux espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués, en posant $V^+ = \sum V^{2i}$, $V^- = \sum V^{2i+1}$. Il nous sera commode de noter $L^{\otimes(-1)}$ le dual d'un espace vectoriel de rang un. Avec cette règle,

$$\det V^* = \bigotimes_i (\det V^i)^{(-1)^i} .$$

Pour éviter les problèmes de signes, il est préférable de définir $\det V$ comme l'espace vectoriel gradué $\overset{\dim V}{\Lambda} V$ placé en degré $\dim V$, et de définir l'isomorphisme de symétrie

$$L_1 \otimes L_2 \xrightarrow{\sim} L_2 \otimes L_1$$

par la règle de Koszul (l'isomorphisme naïf fois $(-1)^{d_1 d_2}$, pour L_i en degré d_i) . L'isomorphisme

$$\det(V) \otimes \det(W) \xrightarrow{\sim} \det(V \oplus W) :$$

$$(e_1 \wedge \ldots \wedge e_m) \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_m) \mapsto e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$$

donne alors lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V \oplus W & \det(V \oplus W) \xrightarrow{\sim} & \det(V) \otimes \det(W) \\ \downarrow\wr & \downarrow\wr & \downarrow\wr \\ W \oplus V & \det(W \oplus V) \xrightarrow{\sim} & \det(W) \otimes \det(V) \end{array} .$$

Notons 1 l'espace vectoriel gradué de rang 1 et degré 0 trivial. On définit L^{-1} comme un espace vectoriel gradué de rang 1 muni d'un isomorphisme $L \otimes L^{-1} \simeq 1$. Ceci définit L^{-1} à isomorphisme unique près. L'isomorphisme $L^{-1} \otimes L \simeq L \otimes L^{-1} \simeq 1$ fait de L l'inverse $(L^{-1})^{-1}$ de L^{-1} . Pour plus de détails, cf 4.1. Pour un complexe K , la définition de l'isomorphisme

$$\det K \simeq \det H^* K$$

et ses propriétés ne posent avec ces règles aucun cauchemar de signes.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

1.2 Rappels: torsion analytique ([14]).

Soient X une surface de Riemann compacte, munie d'une métrique hermitienne g, et V un fibré vectoriel holomorphe sur X, muni d'une structure hermitienne h. Notons Ω^1_X le fibré en droites de sections locales holomorphes les 1-formes holomorphes et $\Omega^{0,q}(V)$ le faisceau des (0,q)-formes C^∞ à valeurs dans V. Nous normaliserons comme suit la structure préhilbertienne sur $\Gamma(X, \Omega^{0,q}(V))$ définie par g et h. (a) On regarde g comme la donnée d'une structure hermitienne sur Ω^1_X. (b) Le produit scalaire est l'intégrale d'une densité sur X. (c) Localement, si α est une section C^∞ de longueur un de Ω^1_X et que v_i est une section de $\Omega^{00}(V)$ (resp $\beta_i = \gamma_i v_i$ une section de $\Omega^{01}(V)$), cette densité est

pour $\langle v_1, v_2\rangle$: $\frac{-1}{2\pi i} \langle v_1, v_2\rangle_h \, \alpha \wedge \bar{\alpha}$,

pour $\langle \beta_1, \beta_2\rangle$: $\frac{-1}{2\pi i} \langle v_1, v_2\rangle_h \, \bar{\gamma}_2 \wedge \gamma_1$.

Rappelons que pour $z = x + iy$, on a $\frac{-1}{2\pi i} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{\pi} dx \wedge dy$.

Les groupes de cohomologie de V sont ceux du complexe $\bar{\partial}$ de V :

$$\bar{\partial} : \Gamma(X, \Omega^{00}(V)) \longrightarrow \Gamma(X, \Omega^{01}(V)) .$$

Les structures préhilbertiennes des $\Gamma(X, \Omega^{0q}(V))$ induisent des structures hermitiennes sur $H^0(X,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\bar{\partial})$ et $H^1(X,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coKer}(\bar{\partial}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\bar{\partial})^\perp = \mathrm{Ker}(\bar{\partial}^*)$. De là, une structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle_0$ sur $\det H^*(X,V)$. Soient λ_i les valeurs propres $\neq 0$ de $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$, comptées avec leur multiplicité, et $\det'(\bar{\partial}^*\bar{\partial}) := \Pi\lambda_i := \exp(-\zeta'(0))$, où $\zeta(s)$ est le prolongement analytique de $\sum \lambda_i^{-s}$. La torsion analytique de V est la structure hermitienne

$$\langle\ ,\ \rangle_{t.a.} := \det'(\bar{\partial}^*\bar{\partial})^{-1} \langle\ ,\ \rangle_0$$

sur $\det H^*(X,V)$. On veut la calculer.

Un facteur π a été introduit dans la définition de la structure préhilbertienne de $\Gamma(X, \Omega^{0q}(V))$ pour assurer la validité du lemme suivant.

Lemme 1.3 La torsion analytique est compatible à la dualité de Serre.

Soit $V' := \underline{\mathrm{Hom}}(V, \Omega^1_X)$. La dualité de Serre est une dualité entre $H^q(X,V)$ et $H^{1-q}(X,V')$. Elle induit un isomorphisme

(1.3.1) $\det H^*(X,V) \simeq \det H^*(X,V')$

qu'on veut prouver être une isométrie.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Le morphisme

$$H^q(X,V) \otimes H^{1-q}(X,V') \longrightarrow \mathbb{C}$$

est le composé du cup-produit et du morphisme trace $H^q(X,V) \otimes H^{1-q}(X,V') \to H^1(X\ ,\ V \otimes V') \to H^1(X\ ,\ \Omega^1_X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{C}$. Si $H^*(X\ ,\ \Omega^1_X)$ est calculé par le complexe $\bar\partial$, Tr est $\frac{1}{2\pi i}$ fois l'intégration sur X (à un signe dépendant des conventions près, sans importance pour 1.3). La dualité de Serre est donc induite par la dualité $\pm \frac{1}{2\pi i}\int_X \alpha\wedge\beta$ entre les complexes $\bar\partial$ de V et V' et 1.3 en résulte.

1.4 <u>Calculer det $H^*(X,L)$</u> .

La règle suivante permet d'attacher à deux fibrés en droite L et M sur X un espace vectoriel de rang un $\langle L\ ,\ M\rangle$. (a) Deux sections méromorphes à diviseurs disjoints ℓ et m de L et M définissent un élément non nul $\langle \ell\ ,\ m\rangle$ de $\langle L\ ,\ M\rangle$. (b) Quand on change ℓ ou m , on a

$$\langle f\ell\ ,\ m\rangle = f(\mathrm{div}\ m)\ \langle \ell\ ,\ m\rangle \tag{1.4.1}$$
$$\langle \ell\ ,\ fm\rangle = f(\mathrm{div}\ \ell)\ \langle \ell\ ,\ m\rangle\ .$$

Si $v_P(\ell)$ est la valuation de ℓ en P (i.e l'ordre du zéro, ou -l'ordre du pôle), on a $\mathrm{div}\ \ell := \sum_P v_P(\ell)\ .\ P$; on a posé

$$f(\sum n_P\ .\ P) := \prod f(P)^{n_P}\ .$$

Que les règles (a) (b) soient cohérentes équivaut au théorème de A. Weil que pour deux fonctions méromorphes à diviseurs disjoints, on a $f(\mathrm{div}\ g) = g(\mathrm{div}\ f)$.

Pour L un fibré en droite sur X , posons

$$\det H^*(X\ ,\ L - O) := \det H^*(X,L) \otimes (\det H^*(X,O))^{-1}\ .$$

De façon purement algébrique, on définit un isomorphisme

$$(\det H^*(X\ ,\ L - O))^{\otimes 2} \simeq \langle L\ ,L \otimes (\Omega^1_X)^\vee\rangle\ . \tag{1.4.2}$$

Ces constructions sont valables sur un corps de base quelconque, voire sur une base quelconque.

1.5 <u>Calculer la torsion analytique</u>.

Si les fibrés en droites L et M sur X sont munis de métriques hermitiennes, on définit comme suit une structure hermitienne sur $\langle L\ ,\ M\rangle$. Notons $\|\ \|$ une longueur carrée et posons $f[\sum n_i\ P_i] = \sum n_i\ f[P_i]$. Pour des sections méromorphes ℓ et m comme en 1.4, on définit

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$(1.5.1) \qquad \log \|\langle \ell , m\rangle\| = \int \frac{1}{2\pi i} d'd'' \log \|\ell\| \,.\, \log \|m\| + \log \|\ell\| \,[\operatorname{div} m] + \log \|m\| \,[\operatorname{div} \ell] \,,$$

où $d'd''$ est pris au sens des distributions.

Supposons X et L munis de métriques hermitiennes g et h comme en 0.1. On munit $\mathcal{O}$ de la structure hermitienne triviale $(\langle 1 , 1\rangle = 1)$. On dispose d'une structure hermitienne "torsion analytique" sur $\det H^*(X , L - \mathcal{O})^{\otimes 2}$, déduite de celles de $\det H^*(X,L)$ et $\det H^*(X,\mathcal{O})$.

Notre résultat principal est que (1.4.2) est une isométrie, le membre de gauche étant muni de la structure hermitienne torsion analytique et celui de droite de la structure (1.5.1). Rappelons qu'une métrique sur X est vue comme une structure hermitienne sur Ω^1_X.

Concrètement, ceci signifie qu'une construction purement algébrique permet d'attacher à des sections méromorphes à diviseurs disjoints ℓ et m de L et $L \otimes (\Omega^1)^{-1}$ un élément non nul $\langle \ell , m\rangle$ de $(\det H^*(X , L - \mathcal{O}))^{\otimes 2}$, avec une variance (1.4.1), et que la longueur carrée de cet élément, pour la métrique torsion analytique, est donnée par (1.5.1).

1.6 Pour prouver 1.5, nous utilisons le calcul par D. Quillen [13] et D. Freed [6] de dérivées logarithmiques secondes de la torsion analytique en fonction de paramètres. Quand L est une déformation de $\mathcal{O}$, i.e. est de degré 0, un argument direct, ne requéront pas la normalisation 1.2, est possible.

Pour traiter le cas des fibrés de degré $\neq 0$, il nous faut prouver un résultat analogue à 1.4, 1.5, plus compliqué, pour les fibrés vectoriels de dimension quelconque. Un fibré vectoriel a deux invariants discrets: sa dimension et son degré. Ces invariants sont additifs par somme directe. Traiter le cas des fibrés vectoriels permet de prouver 1.5 à une constante $A(X,g)^{\deg L}$ près, où $A(X,g)$ ne dépend que de la surface de Riemann X et de sa métrique g. La compatibilité à la dualité de Serre donne $A(X,g) = 1$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

2. Programme.

2.1 Incarner une intégrale de classes de Chern.

Soit $f: X \to S$ un morphisme de schémas, propre, plat et purement d'une dimension relative N. Soient I un ensemble fini d'indices, C_i^p $(p > 0 , i \in I)$ des indéterminées, avec C_i^p de poids p, P un polynôme isobare de poids $N + 1$ en les C_i^p à coefficients entiers, V_i des fibrés vectoriels sur X, de classes de Chern $c_i^p := c^p(V_i)$ et intégrons sur les fibrés de f le polynôme $P(c_i^p)$ en les classes de Chern des V_i pour obtenir sur S

$$c := \int_{X/S} P(c^p(V_i)) . \tag{2.1.1}$$

La définition (2.1.1) a un sens dans divers contextes. En cohomologie ℓ-adique (ℓ inversible sur S), on a

$$c \in H^2(S , \mathbb{Z}_\ell(1)) .$$

Pour S séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, et en théorie de Hodge mixte, c est une classe de cohomologie entière purement de type (1,1) [mise en garde: je n'en ai pas de démonstration avec la généralité dite; que $P(c^p(V_i))$ est purement de type $(N + 1 , N + 1)$ résulte de (P. Deligne, théorie de Hodge III, Publ. Math. IHES 44 (1974) p 5-78, 9.1.1 et 9.1.2); reste à voir que le morphisme de Gysin $\int_{X/S}$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes de $H^{2n+k}(X , \mathbb{Z}(n))$ dans $H^k(S,\mathbb{Z})$; pour X et S lisses, la dualité de Poincaré ramène les propriétés de $\int_{X/S}$ à celles, connues, de l'image inverse].

Pour X et S quasi-projectifs et lisses sur un corps algébriquement clos, on peut travailler dans les anneaux de Chow. Dans ce cas, c est une classe d'équivalence linéaire de diviseurs.

Dans tous les cas, la classe c est candidate à être la première classe de Chern d'un fibré en droites sur S. Quand on peut travailler dans les anneaux de Chow, c est déjà la classe d'isomorphie d'un fibré en droite.

Problème 2.1.2. Dans la situation 2.1, construire "fonctoriellement" un faisceau inversible $I_{X/S}{}^P(V_i , i \in I)$ sur S, ayant c comme première classe de Chern.

A cause des difficultés de signes auxquelles donne lieu ce problème, je préférerais y supposer I totalement ordonné. Parmi les fonctorialités voulues, on a :

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

(2.1.3) Soit $(\mathrm{Vect\ is})_X$ la catégorie des fibrés vectoriels sur X et des isomorphismes de fibrés vectoriels. Alors, $I_{X/S}\,P$ est un foncteur de la catégorie $(\mathrm{Vect\ is})_X^I$ dans la catégorie $\underline{\underline{\mathrm{Pic}}}\,(S)$ des faisceaux inversibles sur S et de leurs isomorphismes. Il est compatible aux changements de base $S' \to S$.

(2.1.4) Soient $j \in I$, P_j le polynôme de poids N

$$P_j := \sum_{p \geq 1} (\mathrm{rg}\ V_j - p + 1)\, C_j^{p-1}\, \partial_{C_j^p} P$$

(localement constant sur X) et n_j l'entier (localement constant sur S)

$$n_j := \int_{X/S} P_j(c^p(V_i)) .$$

Pour L_i des faisceaux inversibles sur S, on a

$$P(c^p(V_i \otimes f^*L_i)) = P(c^p(V_i)) + \sum P_j(c^p(V_i)) \,.\, f^*c^1(L_j)$$

modulo le carré de l'idéal engendré par les $f^*(c^1(L_j))$, d'où

$$\int_{X/S} P(c^p(V_i \otimes f^*L_i)) = \int_{X/S} P(c^p(V_i) + \sum n_j\, c^1(L_j) .$$

Pour λ une section sur S de $\mathcal{O}_S^*$, ceci amène à demander que l'automorphisme de multiplication par λ sur V_j agisse sur $I_{X/S}\,P(V_i)$ par λ^{n_j}.

(2.1.5) Additivité en P. Pour $P = P' + P''$, on veut un isomorphisme canonique $I_{X/S}\,P \simeq I_{X/S}\,P' \otimes I_{X/S}\,P''$.

(2.1.6) Additivité par suites exactes. Pour l'énoncer, il sera commode de poser $C_i^0 = 1$. Pour $a \in I$, soit I_1 déduit de I en dédoublant a en a' et a''. Soit P_1 le polynôme en des C_i^p $(i \in I_1)$ obtenu en remplaçant dans P chaque C_a^p par $\sum_{r+s=p} C_{a'}^r\, C_{a''}^s$ $(r, s \geq 0)$. Soit enfin une suite exacte

$$0 \to V'_a \to V_a \to V''_a \to 0$$

et posons $V_{a'} := V'_a$, $V_{a''} := V''_a$. On veut un isomorphisme canonique entre $I_{X/S}P(V_i\ ,\ i \in I)$ et $I_{X/S}P_1(V_i\ ,\ i \in I_1)$.

Dans les cas qu'on sait traiter, la définition de cet isomorphisme pose des problèmes de signes. Ils disparaissent dans la version affaiblie suivante, relative à un seul des foncteurs $I_{X/S}\,P$.

(2.1.7) Invariance par semi-simplification. Soient des suites exactes $0 \to V'_i \to V_i \to V''_i \to 0$ et $sV_i := V'_i \oplus V''_i$. On veut un isomorphisme canonique

$$I_{X/S}\,P(V_i\ ,\ i \in I) \simeq I_{X/S}(sV_i\ ,\ i \in I) .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Plus précisément, on définira au paragraphe 4 la catégorie des <u>fibrés virtuels</u>; chaque fibré V définit un fibré virtuel $[V]$, chaque suite exacte courte $V' \to V \to V''$ définit un isomorphisme $[V] \simeq [V' \oplus V'']$ et on veut que le foncteur $I_{X/S}P$ se factorise par un foncteur $i_{X/S}\ P$ défini sur la catégorie des fibrés virtuels:

$$I_{X/S}\ P\ (V_i) = i_{X/S}\ P\ ([V_i])$$

(2.1.8) Identités entre classes de Chern.

L'exigence "additivité par suites exactes" combine l'invariance par semi-simplification et une formule pour $I_{X/S}\ P$ appliqué à des V_i dont l'un est une somme directe. Cette formule relève la formule donnant les classes de Chern d'une somme directe. De même, les formules pour les classes de Chern d'un produit tensoriel, d'un dual ou d'une puissance extérieure devraient se relever en isomorphismes canoniques. Pour qu'un tel formalisme soit utile, il faudrait aussi déterminer les diagrammes commutatifs auxquels ces isomorphismes donnent lieu.

2.2 <u>Incarner la composante de degré 2 de Riemann-Roch</u>

Soient $f\colon X \to S$ un morphisme propre et lisse, purement d'une dimension relative N, V un fibré vectoriel sur X et $T_{X/S}$ le fibré tangent relatif. La formule de Riemann-Roch s'énonce

$$\text{(2.2.1)} \qquad \mathrm{ch}\ Rf_*\ V = \int_{X/S} \mathrm{ch}\ (V)\ .\ \mathrm{Td}\ (T_{X/S})\ .$$

La composante de degré deux au membre de gauche est la première classe de Chern du faisceau inversible $\det Rf_*\ V$ sur S. Soit RR_{N+1} la composante de degré $2(N+1)$ de $\mathrm{ch}(V)\ .\ \mathrm{Td}(T_{X/S})$. C'est un polynôme universel de poids $(N+1)$ en les classes de Chern de V et de $T_{X/S}$. Il est à coefficients rationnels. Si le problème 0.1.2 était résolu, on pourrait poser le

<u>Problème</u> 2.2.2 Trouver un entier M (tel que $M.RR_{N+1}$ soit un polynôme à coefficients entier en les classes de Chern de V et $T_{X/S}$) et construire un isomorphisme canonique de fibrés en droites sur S

$$\text{(2.2.2.1)} \qquad (\det Rf_*\ V)^{\otimes M} \simeq I_{X/S}(M.RR_{N+1})(V\ ,\ T_{X/S})\ .$$

Un tel isomorphisme préciserait la composante de degré deux de (2.2.1).

Pour $V = V' \oplus V''$, l'additivité (2.1.6) doit fournir pour le second membre $II(V)$ de (2.2.2.1) que

$$II(V) \simeq II(V') \otimes II(V'')\ .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

On veut que

(2.2.3) cette additivité est compatible à celle du premier membre de (2.2.2.1).

Il n'est pas nécessaire d'attendre la solution de (2.1.2) pour se poser des cas particuliers de 2.2.2. Par ailleurs, pour V de forme particulière, on peut donner un sens à la question 2.2.2 pour M un entier tel que $M.RR_{N+1}$ ne soit pas à coefficients entiers. Voici des exemples

2.2.3. Soient V_i $(1 \leq i \leq N+2)$ des fibrés virtuels de dimension 0 : $V_i = V_i' - V_i''$ avec V_i' et V_i'' de même dimension. On a $ch^0(V_i) = 0$ et

$$ch(\oplus V_i) = \Pi ch\,(V_i)$$

est un polynôme en les classes de Chern des V_i' et des V_i'' de poids $\geq N+2$. Comme polynôme de poids $N+1$ en les classes de Chern des V_i', V_i'' et $T_{X/S}$, la composante de degré $2(N+1)$ de $ch(\oplus V_i) \cdot Td(T_{X/S})$ est identiquement nulle. Ceci amène à désirer une trivialisation canonique de

$$\det Rf_* \oplus V_i \ .$$

En d'autres termes, et sans mentionner de fibré virtuel: pour $P \subset [1, N+2]$, soit $\mathcal{D}_P$ le fibré en droites

$$\mathcal{D}_P := \det Rf_* \left(\bigotimes_{i \in P} V_i' \oplus \bigotimes_{i \notin P} V_i''\right)$$

On veut un isomorphisme canonique entre le produit tensoriel des $\mathcal{D}_P$ pour $\#P$ pair et le produit tensoriel des $\mathcal{D}_P$ pour $\#P$ impair.

Dans le même esprit, si $I = I_0 \amalg I_1 \amalg I_2$ est un ensemble fini d'indices, que les $V_i = V_i' - V_i''$ sont des fibrés vectoriels virtuels sur X $(i \in I)$, que $\dim V_i' = \dim V_i''$ pour $i \in I_1$ ou I_2 et qu'un isomorphisme $\alpha_i : \det V_i' \xrightarrow{\sim} \det V_i''$ est donné pour $i \in I_2$, on désire une trivialisation canonique de $\det Rf_* (\oplus V_i)$ dès que $\#I_1 + 2.\#I_2 > N+1$. En effet, on a $ch^1(V_i) = c^1(V_i) = 0$ pour $i \in I_2$.

Prendre garde que la définition de $\det Rf_* V$ pose des problèmes de signes; les compatibilités désirées pour les isomorphismes canoniques conjectures ci-dessus en donnent lieu à de pires.

2.3 <u>Métriser</u>.

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$, la façon la plus simple de se donner une norme sur V est de se donner un $\mathbb{Z}_p$-module libre $V_0 \subset V$, tel que le morphisme

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_0 \to V$ soit un isomorphisme. On pose

$$\|v\| = \inf \{\|\lambda\| \mid \lambda^{-1} v \in V_0\} .$$

En termes géométriques, V est un fibré vectoriel sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ et V_0 un prolongement de ce fibré sur le schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$.

D'après Arakelov, si V est un espace vectoriel complexe, il y a lieu par analogie de regarder une structure hermitienne sur V comme un prolongement de V -fibré vectoriel sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$- à un objet mythique qu'il ne coûte rien de nommer $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})^-$. Si S est un schéma lisse sur $\mathbb{C}$, une métrique kahlérienne sur S est à regarder comme un prolongement S^- de S sur "$\mathrm{Spec}(\mathbb{C})^-$". Si $\mathcal{V}$ est un fibré vectoriel sur S, une structure hermitienne sur $\mathcal{V}$ est à regarder comme un prolongement de $\mathcal{V}$ de S à S^-. J'omet des grains de sels.

Appliquons cette philosophie à 2.1 et 2.2.

2.4 Soit $f: X \to S$ un morphisme propre et lisse entre schémas lisses sur $\mathbb{C}$, purement d'une dimension relative N. Soient I et P comme en 2.1. Si le problème 2.1.2 est résolu, on dispose d'un foncteur $I_{X/S}\, P$ attachant à une famille de fibrés vectoriels $\mathcal{V}_i$ sur X un fibré en droite $I_{X/S}\, P\,(\mathcal{V}_i\,,\ i \in I)$ sur S.

<u>Problème</u> 2.4.1 Si les $\mathcal{V}_i$ sont munis de métriques hermitiennes g_i, définir une métrique hermitienne sur le fibré en droites $I_{X/S}\, P\,(\mathcal{V}_i\,,\ i \in I)$.

Soit $\mathcal{V}$ un fibré vectoriel holomorphe. Pour g une structure hermitienne sur $\mathcal{V}$, <u>les formes de Chern</u> $\underline{c}^p(\mathcal{V},g)$ sont des (p,p)-formes formées de classes de cohomologie les classes de Chern $c^p(\mathcal{V})$. Les exemples qui peuvent être traités conduisent à exiger:

<u>Exigence</u> 2.4.2 La métrique 2.4.1 vérifie

$$\underline{c}^1\, I_{X/S}\, P\,(\mathcal{V}_i\,,\ i \in I) = \int_{X/S} P\,(\underline{c}^p(\mathcal{V}_i\,,\ g_i)) .$$

On notera que X et S n'ont pas été supposés munis de métriques. Pour définir une métrique sur $I_{X/S}\, P\,(\mathcal{V}_i\,,\ i \in I)$, seule doit importer la donnée de métriques sur les $\mathcal{V}_i$.

<u>Remarque</u> 2.4.3 On exige bien sûr que la métrique 2.4.1 soit de formation compatible à tout changement de base $S' \to S$. Prenant pour S' un point, on voit que le essentiel est celui d'une base réduite à un point. Ecrivons I_X ou simplement

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

I pour $I_{X/\mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$. Pour X propre et lisse de dimension N et les V_i des fibrés vectoriels sur X, $I\,P(V_i\,,\ i \in I)$ est un espace vectoriel complexe de rang un, canoniquement attaché aux V_i. Il s'agit d'attacher à des structures hermitiennes sur les V_i une structure hermitienne sur cet espace vectoriel. On se restreint à ce cas $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ dans la fin de 2.4.

<u>Remarque</u> 2.4.4 Prenons S réduit à un point et fixons X et les V_i. L'exigence (2.4.2) impose comment la métrique sur $I\,P(V_i\,,\ i \in I)$ change quand on change la structure hermitienne sur les V_i. Supposons en effet que des structures hermitiennes $g_i(t)$ sur les V_i dépendent d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$. Fixons $e \neq 0$ dans $I\,P(V_i\,,\ i \in I)$ et soit $h(t)$ la longueur carrée $\|e\|$ de e pour la métrique définie par les structures hermitiennes $g_i(t)$ sur les V_i. Soit A la droite affine standard, de coordonnée z, et soit sur A le fibré trivial $X_A := X \times A$ de fibre X. Soit V_{i_A} le fibré sur X_A image inverse de V_i. On munit V_{i_A} de la métrique qui au-dessus de $z \in A$ est $g_i(z\bar{z})$. Appliquant (2.4.2) à cette famille, on obtient une formule pour $\partial\bar{\partial} \log h(z\bar{z})$. On a

$$\partial\bar{\partial} \log h(z\bar{z}) \mid_{z=0} = \partial_t \log h \mid_{t=0}$$

et (2.4.2) détermine donc la dérivée de $\log h$ en $t = 0$. Translatant en t, on obtient la dérivée de $\log h$ en tout point. Intégrant, on détermine le rapport $h(1)/h(0)$. On vérifie que le nombre obtenu ne dépend pas des chemins $g_i(t)$ reliant les $g_i(0)$ aux $g_i(1)$.

<u>Remarque</u> 2.4.5 Soit $a \in I$ et supposons que V_a soit une extension:

$$0 \to V'_a \to V_a \to V''_a \to 0\ .$$

Une structure hermitienne g sur V_a en détermine alors sur V'_a : la structure induite g', et sur V''_a : la structure quotient g''. Il n'y a <u>pas</u> lieu de considérer $(V'_a\,,\ g'_a)$, $(V_a\,,\ g_a)$, $(V''_a\,,\ g''_a)$ comme une suite exacte "sur X^- au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})^-$" au sens d'Arakelov. Modèle: pour S^- un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, de fibre générale S sur $\mathbb{Q}_p$, une suite de fibrés vectoriels sur S^- $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ peut être exacte sur S sans l'être sur S^-, même si elle l'est aux points génériques de la fibre spéciale.

Si les V_i sont munis de métriques, et que $sV_i := V_i$ pour $i \neq a$, $sV_a := V'_a \oplus V''_a$, il n'y a <u>pas</u> lieu d'espérer que l'isomorphisme (2.1.7) entre $I\,P\,(V_i\,,\ i \in I)$ et $I\,P\,(sV_i\,,\ i \in I)$ soit une isométrie, pour sV_a muni de la métrique $g'_a \oplus g''_a$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Les exigences (2.1.3) à (2.1.6), (2.4.2) déterminent uniquement le rapport entre les métriques de $\mathrm{IP}(V_i, i \in I)$ et de $\mathrm{IP}(sV_i, i \in I)$. Fixons en effet $a \in I$ et considérons la famille algébrique d'extensions de V''_a par V'_a déduite de V_a par image inverse par $\lambda : V''_a \to V''_a$ $(\lambda \in \mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V'_a & \to & V_a & \to & V''_a & \to & 0 \\ & & \| & & \uparrow\varphi[\lambda] & & \uparrow\lambda & & \\ 0 & \to & V'_a & \to & V_a[\lambda] & \to & V''_a & \to & 0 . \end{array}$$

Par 2.1.7, $\mathrm{IP}(V_i, i \in I) \simeq \mathrm{IP}(sV_i, i \in I)$ ne change pas pour V_a remplacé par $V_a[\lambda]$. Pour $\lambda \neq 0$, $\varphi[\lambda]$ est un isomorphisme de $V_a[\lambda]$ avec V_a. L'automorphisme correspondant de $\mathrm{IP}(V_i, i \in I)$ se calcule par 2.1.6, 2.1.4. Si $g_a[\lambda]$ est une métrique sur $V_a[\lambda]$, 2.4.4 permet alors de calculer comment varie avec λ la métrique correspondante de $\mathrm{IP}(V_i, i \in I)$, tant que $\lambda \neq 0$. On récupère le cas $\lambda = 0$ par passage à la limite et, pour $\lambda = 0$, $V_a[\lambda]$ est $V'_a \oplus V''_a$.

2.5 Soient $f: X \to S$ un morphisme propre et lisse entre schémas lisses sur $\mathbb{C}$, purement d'une dimension relative N, V un fibré vectoriel sur X et $T_{X/S}$ le fibré tangent relatif. On suppose V et $T_{X/S}$ munis de structures hermitiennes. Il y a peut-être lieu de supposer que la structure hermitienne de $T_{X/S}$ fournit une structure kahlérienne sur chaque fibre $X_s := f^{-1}(s)$ de f. La réponse à (2.5.2) ci-dessous dictera la bonne hypothèse.

Sous ces hypothèses, on dispose ([14]) d'une métrique (la "torsion analytique") sur le fibré vectoriel $\det Rf_* V$. Elle est de formation compatible à tout changement de base. On la suppose correctement normalisée, cf 1.2, 1.3.

Si les problèmes 2.1, 2.2, 2.4 sont supposés résolus, on peut poser le

<u>Problème</u> 2.5.1 L'isomorphisme 2.2.2 est-il une isométrie?

On notera que pour ce problème, l'exposant M de 2.2.2 est sans importance. Remplacer M par $2.M$ libère 2.5.1 des questions de signes qui hantent 2.1 et 2.2.

Notons $\underline{c}^i(V)$ et $\underline{c}^i(T_{X/S})$ les <u>formes</u> de Chern de V et de $T_{X/S}$ définies par les métriques données. Avec les notations de (2.2.2), une réponse positive à (2.5.1) implique, par 2.4.2, une réponse positive à la

<u>Question</u> 2.5.2 A-t-on

$$\underline{c}^1 \det Rf_* V = \int_{X/S} RR_{N+1}(\underline{c}^*(V), \underline{c}^*(T_{X/S})) \quad ?$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Si j'ai bien compris, 2.5.2 a été prouvé par J.M. Bismut et D.S. Freed lorsque $N = 1$ ([3], [6]), i.e. pour X une famille de courbes paramétrées par S. Ils ont obtenus des résultats analogues en toute dimension (et dans des situations non holomorphes), mais j'ignore si leurs résultats couvrent 2.5.2.

Inversément, si l'égalité 2.5.2 vaut universellement (pour N fixé), l'argument 2.4.4 montre que la validité de 2.5.1 est indépendante des métriques sur V et $T_{X/S}$: le logarithme du rapport de similitude de l'isomorphisme 2.2.2 est une fonction F sur S, indépendante des métriques de V et $T_{X/S}$, de formation compatible à tout changement de base. Toujours sous l'hypothèse 2.5.2, on a

— $d'd'' F = 0$ (de sorte que F est constante si S est compacte connexe, ou si S, supposée algébrique, est connexe et qu'on peut prouver F bornée).

— Si V est une extension : $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$, F pour V est la somme de F pour V' et V'' (cf 2.4.5).

Une compatibilité à la dualité de Serre assurera que pour X connexe de dimension N et $V' := \underline{\mathrm{Hom}}(V, \Omega_X^N)$ le dual de Serre de V

$$F(X,V) = (-1)^{N+1} F(X,V') .$$

Dans le cas des courbes $(N = 1)$, ces propriétés suffisent à assurer que la fonction F est de la forme

$$F(X,V) = \mathrm{rg}(V) \,.\, G(X) ,$$

donc nulle sur les fibrés virtuels de rang 0, comme annoncé en 1.5.

2.6 Soulé me dit que 2.5.1 est trop optimiste. Il espère seulement l'existence d'une classe caractéristique correction $(T_{X/S})$ de $T_{X/S}$ telle que le rapport des métriques soit localement constant sur S, donné par

$$\exp(\textstyle\int_{X/S} \text{correction } (T_{X/S}) \,.\, \mathrm{ch}(V)) .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

3. Analogies.

3.1 La théorie d'Arakelov est basée sur l'analogie entre
(a) $\mathbb{C}$, muni de sa valeur absolue $\|z\| = z\bar{z}$, et
(b) un corps valué complet non archimédien non discret K . On note A l'anneau de valuation de K (c'est à dire l'ensemble des $x \in K$ tels que $\|x\| \leq 1$) . On suppose la valuation v discrète, d'ensemble de valeurs $\mathbb{Z}$, on note t une uniformisante $(v(t) = 1)$ et on définit le nombre q par $\|x\| = q^{-v(x)}$. L'analogie fait correspondre à $v(x)$ la quantité $\log \|z\|$. Parfois, il faut supposer le corps résiduel fini, de nombre d'éléments q . On veut remplir la case "?" du tableau

Schéma sur $\mathbb{C}$, éventuellement muni de données auxiliaires (fibré vectoriel, ...) .	Schéma sur K , éventuellement muni des mêmes données auxiliaires.
?	Schéma sur $\mathrm{Spec}(V)$, prolongeant le précédent.

Le cas particulier $K = \mathbb{C}[[t]]$ suggère une troisième colonne: famille analytique de schémas, paramétrée par un petit disque épointé D^* , et extension de cette famille au-dessus du disque D .

On explique ci-dessous, sous la forme d'un texte sur deux colonnes, comment parfois remplir la case "?". Dans la première (resp seconde) colonne, le corps de base est $\mathbb{C}$ (resp K).

3.2 Soit V un espace vectoriel de dimension finie.

On suppose V muni d'une structure hermitienne. On pose $\|v\| = \langle v,v \rangle$.	On suppose V muni d'une A-structure (un A-module libre $V_A \subset V$ avec $V_A \otimes_A K \xrightarrow{\sim} V$) . On pose $\|v\| = \inf \{\|\lambda\| \mid v \in \lambda V_A\}$.

On a
$$\|\lambda v\| = \|\lambda\| . \|v\| .$$

Il y a parfois lieu de regarder une norme ultramétrique $\|v\|$ quelconque comme l'analogue d'une structure hermitienne. Dans une base convenable et pour

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

des réels $a_i > 0$ convenables, une telle norme s'écrit

$$\|v\| = \sup(a_i \|v_i\|) .$$

Pour qu'elle corresponde à une A-structure, il faut et il suffit qu'elle soit à valeurs dans $\|K\| \subset \mathbb{R}$. Pour K' une extension galoisienne finie de K ,la restriction à V est une bijection des normes ultramétriques sur $V' := V \otimes_K K'$, invariantes par $\mathrm{Gal}(K'/K)$, avec les normes ultramétriques sur V . Ceci permet d'interpréter une norme ultramétrique sur V avec $\log \|v\| \in \mathbb{Q} . \log q$ pour tout $v \in V$ comme la donnée d'une A'-structure $\mathrm{Gal}(K'/K)$-invariante sur V' , pour K' assez grand.

3.3 Soit X un schéma propre et lisse sur $\mathbb{C}$ (resp K) .

La donnée d'une structure hermitienne sur le fibré tangent de X fait de X une variété riemannienne et permet de définir une distance $d(x,y)$.

La donnée d'un schéma propre X_A sur $\mathrm{Spec}(A)$ de fibre générale X définit une distance d sur $X(K)$: si x et y n'ont pas même réduction modulo (t) , $d(x,y) = 1$. Si x et y ont même réduction, on prend leur distance dans une carte affine $Y \subset \mathbb{A}^n$ les contenants.

A droite, une A-structure en fournit une après toute extension finie K' de K , d'où une métrique sur $X(\overline{K})$. Pour X une courbe et X_A normal, l'important n'est pas cette métrique, mais le nombre d'intersection de deux sections (fractionnaire, cf Mumford, Publ. Math. IHES 9 (1961) p 5-22, II(b) p 17).

Une A-structure normale X_A en définit une après toute extension finie des scalaires (normaliser $X_A \otimes_A A'$) et pour $s_1 , s_2 \in X(K') = X_{A'}(A')$, on pose $(s_1 , s_2)_K = 1/[K':K] . (s_1 , s_2)$. Ce nombre est indépendant de K' (assez grand pour que les s_i soient dans $X(K')$) et définit $(s_1 , s_2)_K$ pour $s_i \in X(\overline{K})$. On a $(s_1 , s_2)_K \geq 0$, avec $(s_1 , s_2)_K > 0$ si et seulement si les s_i ont même réduction.

3.4 Soit E un fibré vectoriel sur X .

Une structure hermitienne sur E définit, pour chaque $x \in X$, une structure hermitienne sur la fibre E_x de E en x .

Soit X_A propre sur $\mathrm{Spec}(A)$ prolongeant X et E_A un fibré vectoriel sur X_A prolongeant E . Soit $x \in X(K)$. C'est l'image de $x_A \in X_A(A) \xrightarrow{\sim} X(K)$ et $x_A^* E_A$ est une A-structure sur E_x .

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

De même pour $x \in X(K')$, K' une extension finie de K . Si le prolongement X'_A domine X_A et que $\mathcal{E}'_A$ est l'image inverse de $\mathcal{E}_A$, $(X_A , \mathcal{E}_A)$ et $(X'_A , \mathcal{E}'_A)$ définissent les mêmes structures entières sur les $\mathcal{E}_x$ ($x \ni X(K)$, ou $X(K')$, ou $X(\bar{K})$) . Soit I l'ensemble ordonné filtrant des prolongements propres de X sur $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Ent}(\mathcal{E},i)$ l'ensemble des prolongements de $\mathcal{E}$ sur i (pris à un isomorphisme qui est l'identité sur $\mathcal{E}$ près) . On définit une A-structure sur $\mathcal{E}$ comme un élément de la limite inductive $\mathrm{Ent}(\mathcal{E})$ des $\mathrm{Ent}(\mathcal{E}, i)$. C'est l'analogue d'une structure hermitienne C^∞ .

Soit I^* l'ensemble des prolongements propres normaux. Disons qu'un ouvert U de X_A dans I^* est <u>gros</u> s'il contient X et les points génériques de la fibre spéciale. Si X'_A et X_A sont dans I^* et que X'_A domine X_A , il existe un gros ouvert $U_A \subset X_A$ tel que $\varphi: X'_A \to X_A$ induise un isomorphisme de $\varphi^{-1}(U_A)$ avec U_A . Soit $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{E},i)$ l'ensemble des germes de prolongement de $\mathcal{E}$ sur un gros ouvert de $i \in I^*$ (germe selon le filtre des gros ouverts). Si X'_A domine X_A et que U'_A est un gros ouvert de X'_A , il existe un gros ouvert U_A de X_A avec $U'_A \supset \varphi^{-1}(U_A) \xrightarrow{\sim} U_A$ et la restriction définit $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{E} , X'_A) \to \mathrm{Ent}^*(\mathcal{E} , X_A)$. Certaines métriques hermitiennes singulières ont pour analogue des éléments de la limite projective $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{E})$ des $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{E},i)$. Pour X connexe, soit $X(1)$ l'ensemble des anneaux de valuation discrètes B du corps des fonctions rationnelles sur X qui sont anneau local d'un X_A propre normal en un point générique de la fibre spéciale. Un élément de $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{E})$ équivaut à la donnée, pour chaque B dans $X(1)$, d'une B-structure sur la fibre générique $\mathcal{E}_\eta$ de $\mathcal{E}/X$.

<u>Exemple</u> 3.4.1 Soit D un diviseur sur X .

Sur $\mathcal{O}(D)$, on définit une structure hermitienne singulière par $\|1\| = 1$

Prolongeons $\mathcal{O}(D)$ de X à $X \cup (X_A - D^-)$ en recollant $\mathcal{O}(D)$ sur X à $\mathcal{O}$ sur $X_A - D^-$ (ils sont égaux à $\mathcal{O}$ sur l'intersection $X - D$) . Ces prolongements définissent un élément de $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{O}(D))$.

Un élément E de $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{E})$ sera dit régulier sur un ouvert U de X_A contenant X s'il existe un prolongement $\mathcal{E}_U$ de $\mathcal{E}$ sur U telle que, pour tout $\varphi: X'_A \to X_A$ dominant X_A , E et $\varphi^*\mathcal{E}$ coïncident sur l'intersection de $\varphi^{-1}U$ avec un gros ouvert. L'élément ci-dessus de $\mathrm{Ent}^*(\mathcal{O}(D))$ est régulier sur $X_A - D^-$.

3.5 Dans la fin de ce paragraphe, X est une courbe propre et lisse. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X .

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Supposons L muni d'une structure hermitienne h. La forme de Chern $F_{L,h}$, ou F_h, ou simplement F est localement

$$F := \frac{1}{2\pi i} d'd'' \log \|s\|$$

pour s une section locale holomorphe inversible.

Soit L_A un prolongement de L à X_A, propre et plat sur $\mathrm{Spec}(A)$, prolongeant X, supposé normal. Soit $\underline{\underline{C}}$ l'ensemble de composantes irréductibles de la fibre spéciale réduite et, pour $D \in \underline{\underline{C}}$, soit $n(D)$ la multiplicité de D dans la fibre spéciale. Soit F_L, ou simplement F, la fonction $n(D) \deg_D (L|D)$ sur $\underline{\underline{C}}$.

On a

$$\deg L = \int_X F .$$

$$\deg L = \sum_{D \in \underline{\underline{C}}} F(D) .$$

Pour simplifier, on supposera dorénavant X_A régulier.

Se donner une structure hermitienne sur le fibré en droites trivial $\mathcal{O}$ revient à se donner la fonction réelle sur X

$$L := -\log \|1\| .$$

Les prolongements de $\mathcal{O}$ à X_A s'identifient, par $E \longmapsto \mathcal{O}(E)$, aux diviseurs concentrés sur la fibre spéciale. Pour $E = \sum m(D)D$, notons L_E la fonction sur $\underline{\underline{C}}$: $L_E(D) = m(D)/n(D)$. La fonction constante $L = 1$ correspond au diviseur "fibre spéciale".

Par analogie, sur $\mathbb{C}$, on appellera encore <u>diviseur E concentré sur la fibre spéciale</u> une métrique L_E sur $\mathcal{O}$, ou la fonction L_E correspondante, et <u>multiple de la fibre</u> une métrique constante sur $\mathcal{O}$.

3.6 Soient E et F deux diviseurs concentrés sur la fibre spéciale. Leur <u>nombre d'intersection</u> (E,F) :=

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_X \log \|1\|_E . d'd'' \log \|1\|_F$$

$$= \int_X L_E F_F$$

Intégrant par partie, on obtient $(E,F) =$

$$\sum (-1)^{i+j} \lg_A H^i(X_A , \mathrm{Tor}^j(\mathcal{O}_E , \mathcal{O}_F))$$
$$= \chi(\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_F) = \chi(\mathcal{O}_E) - \chi(\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}(-F))$$
$$= \sum L_E(D) F_{\mathcal{O}(F)}(D)$$

Soit $<$ un ordre total sur $\underline{\underline{C}}$ et, pour $D' \neq D''$ dans $\underline{\underline{C}}$, soit $c(D',D'') := (n(D')D' , n(D'')D'') \geq 0$. Utilisant que $F_{\mathcal{O}(F)}$ est nul pour un diviseur F multiple de la fibre, on obtient $(E,F) =$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$\frac{1}{2\pi i}\int d' \log \|1\|_E \, (d' \log \|1\|_F)^- \qquad - \sum_{i<j} c(i,j)\,(L_E(i) - L_E(j))(L_F(i) - L_F(j)) \; .$$

De là résulte que la forme $(\, , \,)$ est symétrique semi-définie négative et que, si X est connexe, son noyau est réduit aux multiples de la fibre spéciale.

3.7 Un <u>diviseur compactifié</u> E est la donnée d'un diviseur $E_{\mathbb{C}}$ sur X et d'une structure hermitienne sur $\mathcal{O}(E_{\mathbb{C}})$. Soit encore $L_E := -\log \|1\|$. Deux diviseurs compactifiés E et F sont <u>disjoints</u> si L_E et L_F sont à supports disjoints.

La construction $E \mapsto$(diviseur E_K sur X, prolongement $\mathcal{O}(E)$ de $\mathcal{O}(E_K)$) identifie un diviseur sur X_A à un diviseur E_K sur X muni d'un prolongement à X_A du faisceau inversible $\mathcal{O}(E_K)$ sur X.

Si $E_{\mathbb{C}} = \sum n_i P_i$, la fonction réelle L_E est C^∞ hors des P_i, avec une singularité en $n_i \log z\bar{z}$ en chaque P_i. Si $d'd''$ est pris au sens des distributions, la forme de Chern F_E de $\mathcal{O}(E_{\mathbb{C}})$ est

$$F = \frac{-1}{2\pi i}\, d'd'' L_E + \sum n_i \, \delta_{P_i} \; .$$

Si E et F sont deux diviseurs compactifiés avec $E_{\mathbb{C}}$ et $F_{\mathbb{C}}$ disjoints, on définit leur <u>nombre d'intersection</u> par

$$\begin{aligned}(E,F) &:= \frac{-1}{2\pi i}\int d'd'' L_E \cdot L_F \;+\; L_E\,[F_{\mathbb{C}}] \;+\; L_F\,[E_{\mathbb{C}}] \\ &= \int F_{\mathcal{O}(E)} \cdot L_F \;+\; L_E\,[F_{\mathbb{C}}]\end{aligned}$$

(notation [ ] de 1.5.1). Ce produit d'intersection est caractérisé par sa symétrie, son additivité, le fait qu'il est donné par $\int F_E L_F$ pour F à support dans la fibre spéciale et que $(E,F) = 0$ pour E et F disjoints.

Analogue: Si les diviseurs E et F sur X_A ne se coupent que sur la fibre spéciale, le nombre d'intersection (E,F) est encore défini. Si F est à support dans la fibre spéciale, on a

$$(E,F) = \sum F_{\mathcal{O}(E)}(C) \cdot L_F(C) \; .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

4. Objets virtuels.

Dans ce paragraphe nous montrons comment attacher à chaque catégorie exacte A([12] p91) la catégorie de ses objets virtuels $V(A)$. Cette catégorie est un avatar, à la Grothendieck [9], des deux premiers étages de la tour de Postnikov de l'espace de lacets infinis de groupes d'homotopie les $K_i(A)$ de Quillen.

4.1 Rappelons qu'une catégorie de Picard est une catégorie $\mathcal{P}$, non vide, dont toute flèche est un isomorphisme, munie d'un foncteur $+ : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et d'une contrainte d'associativité pour $+$ (Saavedra [15] I 1.1., Mac Lane [11]) et telle que pour chaque objet P les foncteurs $X \mapsto P + X$ et $X \mapsto X + P$ soient des autoéquivalences de $\mathcal{P}$. Ces axiomes impliquent l'existence d'un objet unité 0 . (Saavedra [15] I 1.3), unique à isomorphisme unique près, et que chaque objet X admet un opposé: un objet $-X$ muni d'un isomorphisme $X + (-X) \xrightarrow{\sim} 0$. Un tel objet est unique à isomorphisme unique près.

Une catégorie de Picard commutative est une catégorie de Picard munie d'une contrainte de commutativité compatible à la contrainte d'associativité (Saavedra [15], I 1.2, Mac Lane [11]). Dans une telle catégorie, on sait définir la "somme" d'une famille finie $(X_i)_{i \in I}$ d'objets, avec les propriétés habituelles. Mise en garde: pour $X = Y$, l'isomorphisme de symétrie $X + Y \to Y + X$ n'est en général pas l'identité. Ce n'est pas inquiétant: on a la même chose pour la somme directe d'espaces vectoriels.

Le foncteur $X \mapsto -X$ est muni de la donnée de compatibilité à $+$ suivante: l'isomorphisme $(X + Y) + ((-X) + (-Y)) = (X + (-X)) + (Y + (-Y)) = 0 + 0 = 0$ fait de $(-X) + (-Y)$ un opposé de $X + Y$. Cette donnée est compatible à l'associativité et à la commutativité. Le foncteur $X \mapsto -X$ est involutif: par symétrie de $+$, l'isomorphisme $X + (-X) = 0$ définit un isomorphisme $(-X) + X = 0$ qui fait de X l'opposé de $-X$: $X \xrightarrow{\sim} -(-X)$.

Mise en garde: le diagramme

$$\begin{tikzcd} ((-X) + X) + (-X) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & (-X) + (X + (-X) \arrow[d, equal] \\ 0 + (-X) \arrow[r, equal] & (-X) \arrow[r, equal] & (-X) + 0 \end{tikzcd} \tag{4.1.1}$$

n'est en général pas commutatif. A cause de (4.1.1), il faut être prudent quand on écrit un isomorphisme par = et qu'on soumet ce = aux règles du calcul algébrique.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Posons $A - B := A + (-B)$. D'un isomorphisme φ_1 entre A et $B + X$, noté $A = B + X$, on déduit par addition de $(-X)$ aux deux membres un isomorphisme $A - X = B + X - X = B$. Ajoutant X , on trouve un isomorphisme $\varphi_2 : A = B + X$ qui diffère en général de l'original. Par la suite, nous attacherons en principe à un isomorphisme $A - X = B$ l'isomorphisme $A = B + X$ qui lui donne naissance par addition de $(-X)$.

Soit $\mathcal{P}$ une catégorie de Picard commutative. Nous noterons $\pi_0(\mathcal{P})$ (resp $\pi_1(\mathcal{P})$) le groupe commutatif des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{P}$ (resp le groupe commutatif des automorphismes de 0) . Le foncteur $Y \mapsto X + Y$, évalué en $Y = 0$, identifie $\pi_1(\mathcal{P})$ au groupe des automorphismes d'un quelconque objet X de $\mathcal{P}$. En particulier, chaque objet X définit $\varepsilon(X) \in \pi_1(\mathcal{P})$: l'automorphisme de symétrie de $X + X$. On vérifie que $\varepsilon : \pi_0(\mathcal{P}) \to \pi_1(\mathcal{P})$ est additif. Le défaut de commutativité du diagramme (4.1.1) ci-dessus est $\varepsilon(X)$ et les isomorphismes φ_1 et φ_2 ci-dessus diffèrent par $\varepsilon(X)$. Du point de vue de [9], $\mathcal{P}$ correspond à un espace de lacets infini n'ayant que deux groupes d'homotopie consécutifs non nuls et ε est l'action du générateur du groupe d'homotopie stable $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbf{Z}/(2)$.

<u>Exemple</u>. La catégorie $\mathcal{P}$ des fibrés en droites gradués sur un schéma S , avec la contrainte de commutativité donnée par la règle de Koszul. Les objets de $\mathcal{P}$ s'identifient aux paires $(a,\mathcal{L})$, a un entier localement constant sur S (i.e. $a \in \Gamma(S,\mathbf{Z})$) , $\mathcal{L}$ un faisceau inversible. On a $(a,\mathcal{L}) + (b,\mathcal{M}) = (a + b , \mathcal{L} \otimes \mathcal{M})$ et le morphisme de symétrie est $\ell m \mapsto (-1)^{ab}\, m\ell$. On a $\pi_0 = \Gamma(S,\mathbf{Z}) \times \mathrm{Pic}(S)$, $\pi_1 = \Gamma(S,\mathcal{O}^*)$ et $\varepsilon((a,\mathcal{L})) = (-1)^a$. L'objet 0 est $(0,\mathcal{O})$. L'opposé de A dans $\mathcal{P}$ se notera A^{-1} . Pour $A = (a,\mathcal{L})$, on l'identifiera à $(-a,\mathcal{L}^\vee)$ par la donnée de l'isomorphisme évident

$$(-a,\mathcal{L}^\vee) + (a,\mathcal{L}) = (0 \ , \ \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L}) = (0,\mathcal{O}) \ ,$$

i.e. par $(-1)^a$ fois la donnée de l'isomorphisme évident

$$(a,\mathcal{L}) \oplus (-a,\mathcal{L}^\vee) \xrightarrow{\sim} (0,\mathcal{O}) \ .$$

4.2 Soit $\mathcal{A}$ une catégorie exacte. Pour définir les groupes $K_i\mathcal{A}$, Quillen [12] construit une catégorie $Q\mathcal{A}$ de mêmes objets que $\mathcal{A}$. En terme de la réalisation géométrique $BQ\mathcal{A}$ de $Q\mathcal{A}$ ([12] §1) , munie du point base 0 définit par un objet zéro 0 de $\mathcal{A}$, la <u>catégorie</u> $V(\mathcal{A})$ <u>des objets virtuels de</u> $\mathcal{A}$ admet la description suivante:

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

(a) un objet de $V(A)$ est un lacet de point base 0 de BQA ;
(b) une flèche de γ_1 à γ_2 est une classe d'homotopie d'homomotopies de γ_1 à γ_2 (avec respect du point base).

La composition des lacets fait de $V(A)$ une catégorie de Picard. La somme directe dans A induit une opération $\oplus$ dans QA et $\oplus : BQA \times BQA \to BQA$ fait de BQA un H-espace associatif et commutatif. De là, une contrainte de commutativité pour $+$: notant 0 le lacet trivial, on a un isomorphisme dans $V(A)$

$$(4.2.1) \quad \gamma_1 \oplus \gamma_2 = (\gamma_1 + 0) \oplus (0 + \gamma_2) = (\gamma_1 \oplus 0) + (0 \oplus \gamma_2) = \gamma_1 + \gamma_2$$

et la commutativité de $\oplus$ fournit la contrainte

$$(4.2.2) \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 \oplus \gamma_2 = \gamma_2 \oplus \gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_1 .$$

Elle fait de $V(A)$ une catégorie de Picard commutative, avec pour $i = 0 , 1$ $\pi_i(V(A)) = K_i(A)$.

4.3 Voici une description plus algébrique de $V(A)$. Soit (A , is) la catégorie d'objets ceux de A , et de flèches les isomorphismes de A . Pour P une catégorie de Picard, considérons les foncteurs $[\ ]: (A , is) \to P$, munis de données (a) (b) ci-dessous soumises aux axiomes (c) (d).

(a) (<u>donnée d'additivité</u>) la donnée pour toute suite exacte courte $\Sigma : A' \to A \to A''$ ($A' \to A$ monomorphisme admissible, $A \to A''$ épimorphisme admissible) d'un isomorphisme $\{\Sigma\} : [A] \to [A'] + [A'']$, fonctoriel pour les isomorphismes de suites exactes.

(b) pour les objets zéro de A , un isomorphisme $[0] \to 0$.

(c) Soit $\varphi: A \to B$ un isomorphisme, et Σ la suite exacte $0 \to A \to B$ (resp $A \to B \to 0$) . Alors, $[\varphi]$ (resp $[\varphi]^{-1}$) est le composé

$$[A] \xrightarrow[\{\Sigma\}]{} [0] + [B] \xrightarrow[(b)]{} [B]$$

$$(\text{resp} \quad [B] \xrightarrow[\{\Sigma\}]{} [A] + [0] \xrightarrow[(b)]{} [A]) .$$

(d) (<u>associativité</u>) Pour C muni d'une filtration admissible à trois crans: $C \supset B \supset A \supset 0$, le diagramme d'isomorphismes (a)

$$\begin{array}{ccc} [C] & \longrightarrow & [A] + [C/A] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [B] + [C/B] & \longrightarrow & [A] + [B/A] + [C/B] \end{array}$$

est commutatif.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

On notera que (c) détermine uniquement la donnée (b). Il nous sera souvent commode d'omettre (b) et de modifier (c) en

(c') (<u>compatibilité aux zéros</u>) il existe une donnée (b) vérifiant (c).

Si la catégorie de Picard $\mathcal{P}$ est commutative, nous dirons qu'une donnée d'additivité (a) est <u>commutative</u>, ou <u>compatible à la commutativité</u> si pour $A = A' \oplus A''$, les suites exactes courtes $\Sigma : A' \to A \to A''$ et $\Sigma' : A'' \to A \to A'$ donnent lieu à un triangle commutatif

(4.3.1)
$$\begin{tikzcd} {[A']+[A'']} \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash, "\{\Sigma\}"'] & & {[A'']+[A']} \arrow[dl, dash, "\{\Sigma'\}"] \\ & {[A'\oplus A'']} & \end{tikzcd}$$

Pour chaque catégorie de Picard $\mathcal{P}$, les foncteurs $[\ ] : (A,is) \to \mathcal{P}$ munis d'une donnée d'additivité $\{\}$ vérifiant (c') (d) forment une catégorie. Un argument standard montre qu'il existe un système $(\mathcal{P}, [\ ], \{\ \})$ universel, noté $(\mathcal{P}^{un}, [\ ], \{\ \})$, tel que pour chaque $\mathcal{P}$, cette catégorie de foncteurs $[\ ]$ soit équivalente à celle des foncteurs additifs $\mathcal{P}^{un} \to \mathcal{P}$. Nous allons esquisser la vérification de ce que la catégorie $\mathcal{P}^{un}$ universelle est $V(A)$. La donnée de commutativité de $V(A)$ sera caracterisée par la compatiblité de $[\ ]$ à la commutativité.

4.4 <u>Esquisse</u>. Appelons <u>groupoïde de Picard</u> indexé par un ensemble I la donnée de

(a) pour $x,y \in I$, une catégorie $\mathcal{P}_{y,x}$ dont toute flèche soit un isomorphisme;

(b) Pour $x,y,z \in I$, une composition $\circ$: $\mathcal{P}_{z,y} \times \mathcal{P}_{y,x} \to \mathcal{P}_{z,x}$ telle que tout P dans $\mathcal{P}_{z,y}$ (resp $\mathcal{P}_{y,x}$) le foncteur $X \longmapsto P\circ X$ (resp $X \longmapsto X\circ P$) soit une équivalence;

(c) une donnée d'associativité pour $\circ$ (vérifiant l'axiome du pentagone).

Soit Q une catégorie. Considérons les groupoïdes de Picard $\mathcal{P}$ indexés par $Ob(Q)$, munis des données suivantes: (e) pour toute flèche φ: $x \to y$, $[\varphi]$ dans $\mathcal{P}_{y,x}$ est donné; (f) pour toute paire de flèches composables $\Sigma = (\varphi_1, \varphi_2)$, un isomorphisme $\{\Sigma\}$: $[\varphi_2 \circ \varphi_1] \simeq [\varphi_2] \circ [\varphi_1]$ est donné; on exige qe pour trois flèches composables, le diagramme

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$[\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1] \simeq [\varphi_3 \circ \varphi_2] \circ [\varphi_1]$$

$$[\varphi_3] \circ [\varphi_2 \circ \varphi_1] \simeq [\varphi_3] \circ [\varphi_2] \circ [\varphi_1]$$

soit commutatif (compatibilité entre associativités).

Pour $\mathcal{P}$ un groupoïde de Picard sur $Ob(Q)$, les données (e) vérifiant (f) forment une catégorie. Un argument standard assure l'existence de $(\mathcal{P}^{un}, [\ ], \{\ \})$ universel, i.e. tel que pour tout $\mathcal{P}$ la catégorie des foncteurs T compatibles à 0 de $\mathcal{P}^u$ dans $\mathcal{P}$ soit équivalente par $T \longmapsto T[\ ]$, à celle des données (e) vérifiant (f). Notons Π ce groupoïde de Picard universel.

La description simpliciale de π_1 et π_2 montre que pour tout objet q de Q, $\Pi_{q,q}$ est la catégorie de Picard des lacets de point base q dans BQ, et des classes d'homotopie d'homotopies entre lacets.

Supposons donné un objet q de Q et, pour chaque objet x, une flèche α_x de q vers x. Pour tout système $(\mathcal{P}, [\ ], \{\ \})$, les foncteurs $[\alpha_y]^{-1} \circ u \circ [\alpha_x]$ identifient les $\mathcal{P}_{y,x}$ à $\mathcal{P}_{q,q}$, et il revient au même (équivalence de 2-catégories) de se donner un système $(\mathcal{P}, [\ ], \{\ \})$ ou un système du type suivant. Une catégorie de Picard $\mathcal{P}$, munie de: (i) pour tout $\varphi: x \to y$, un objet $[\varphi]$ de $\mathcal{P}$; (ii) pour toute paire $\xi = (\varphi_1, \varphi_2)$ de morphismes composables, un isomorphisme $\{\xi\} : [\varphi_2 \circ \varphi_1] \xrightarrow{\sim} [\varphi_2] \circ [\varphi_1]$. Cette donnée est supposée compatible à l'associativité. Enfin (iii) des isomorphismes $[\alpha_x] \sim 0$.

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie exacte et $Q = Q(\mathcal{A})$. Pour tout monomorphisme admissible $i : A \to B$ (resp épimorphisme admissible $j : B \to A$) notons comme dans [12] $\iota_!$ (resp $j^!$) la flèche correspondante, dans $Q(\mathcal{A})$, de A dans B. Pour φ un isomorphisme, on écrit simplement $\varphi := \varphi_! = (\varphi^{-1})^!$. Fixons un objet zéro 0 et notons z_A et z^A les morphismes $A \to 0$ et $0 \to A$. Il reste à vérifier que pour $Q = Q(\mathcal{A})$ muni de $q := 0$ et des $\alpha_x := z^x_!$, une donnée $(\mathcal{P}$, (i) à (iii)) comme ci-dessus équivaut à une donnée $(\mathcal{P}$, (a) à (d)) comme en 4.3. Rigoureusement, "vérifier" signifie "construire une équivalence de 2-catégories".

4.5 Soit $(\mathcal{P}$, (i) à (iii)). Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, posons $[A] = [z^!_A]$. Pour tout isomorphisme $\varphi: A \to B$, on a $\varphi z^A_! = z^B_!$ et $\varphi z^!_A = z^!_B$. La première égalité fournit par (ii) un isomorphisme $[\varphi][z^A_!] = [z^B_!]$ et par (iii) un isomorphisme $[\varphi] \sim 0$. La deuxième égalité fournit alors par (ii) un isomorphisme encore noté φ de $[A]$ avec $[B]$. On vérifie que cette construction définit un foncteur de $(\mathcal{A}, is)$ dans $\mathcal{P}$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Soit $u : A \to B$ dans $Q(\mathcal{A})$, i.e. un isomorphisme de A avec un sous-quotient B_2/B_1 de B. Pour i l'inclusion de B_1 dans B, le diagramme de $Q(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ 0 \arrow[u, "z_!^A"] \arrow[r, "z_{B_1}^!"] & B_1 \arrow[u, "i_!"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, et $i_! z_!^{B_1} = z_!^B$. Ce diagramme fournit donc dans $BQ\mathcal{A}$ une homotopie du lacet $(z_!^B)^{-1} u z_!^A$ avec le lacet $(z_!^{B_1})^{-1} z_B^!$, i.e un isomorphisme $[u] \simeq [B_1]$. Si on remplace (B_1, i) par (B_1', i') représentant le même sous-objet de B, et que $\varphi : B_1 \to B_1'$ est l'unique isomorphisme tel que $i'\varphi = i$, on vérifie que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & {[u]} \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ {[B_1]} \arrow[rr, "\varphi"] & & {[B_1']} \end{tikzcd}$$

est commutatif. La construction $u \longmapsto [u]$ est ainsi déterminée à isomorphisme unique près par le foncteur $[\ ] : (\mathcal{A}, is) \to \mathcal{P}$. Pour $u = z_!^B : 0 \to B$, on a $B_1 = 0$ et les isomorphismes (iii) proviennent d'un isomorphisme $[0] \sim 0$.

Soit dans $\mathcal{A}$ une suite exacte courte admissible Σ :

$$A \xleftarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ j\ } C .$$

Elle définit dans $Q\mathcal{A}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "j^!"] & B \\ 0 \arrow[u, "z_!^C"] \arrow[r, "z_A^!"] & A \arrow[u, "i_!"'] \end{tikzcd}$$

et $i_! z_!^A = z_!^B$ et $j^! z_C^! = z_!^!$. De là une homotopie dans $BQ\mathcal{A}$ entre les lacets $(z_!^B)^{-1} z_B^!$ et $(z_!^A)^{-1} z_A^! (z_!^C)^{-1} z_C^!$, i.e. un isomorphisme $\{\Sigma\} : [B] \sim [A] + [C]$. On vérifie que les conditions (c') (d) de 4.3 sont vérifiées par $\mathcal{P}$, le foncteur $A \longmapsto [A]$ et les isomorphismes $\{\Sigma\}$.

Réciproquement, soit $(\mathcal{P}, [\ ], \{\ \})$ comme en 4.3. Pour $u : A \to B$ un morphisme dans $Q(\mathcal{A})$, i.e un isomorphisme de A avec un sous-quotient B_2/B_1 de B, on pose $[u] := [B_1]$. On dispose d'un isomorphisme $[z_!^A] = [0] = 0$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Soit un morphisme composé

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \quad :$$

u (resp v) est un isomorphisme de A (resp B) avec un sous-quotient B_2/B_1 (resp C_3/C_0) de B (resp C). Soit C_i l'image inverse dans $C_3 \subset C$ de $B_i \subset B \sim C_3/C_0$, de sorte que vu est l'isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} B_2/B_1 \xrightarrow{\sim} C_2/C_1$. On a $[u] = [B_1]$, $[v] = [C_0]$, $[vu] = [C_1]$ et la suite exacte courte $0 \to C_0 \to C_1 \to B_1 \to 0$ fournit un isomorphisme $[vu] = [C_1] = [C_0][B_1] = [v][u]$. Les conditions de (i) à (iii) sont vérifiées, et cette construction est inverse de la précédente.

4.6 <u>Variante</u>. On peut encore définir $V(A)$ par le problème universel suivant, variante de celui considéré en 4.3. On veut une catégorie de Picard munie de (a') la donnée pour tout objet A de $\mathcal{A}$ d'un objet $[A]$ de $\mathcal{P}$; (b') la donnée pour chaque suite exacte courte admissible Σ : $A' \hookrightarrow A \longrightarrow A''$ d'un isomorphisme $[\Sigma]$: $[A] \to [A'] + [A'']$, ces données satisfaisant à l'axiome: (c') pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow] & C' \arrow[dl] \\
 & C \arrow[dr] \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[ur] & B'
\end{tikzcd}$$

avec (A, B, C'), (B, C, A'), (A, C, B') (et donc (C', B', A')) des suites exactes courtes admissibles, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{[C]} \arrow[r] \arrow[d] & {[A] + [B']} \arrow[d] \\
{[B] + [A']} \arrow[r] & {[A] + [C'] + [A']}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

C'est apparemment plus simple que 4.3, mais il est périlleux de ne pas imposer a priori la fonctorialité pour les isomorphismes. Avec cette définition, il ne serait pas évident d'emblée que des catégories équivalentes donnent lieu à des catégories d'objets virtuels équivalentes. On ne pourrait plus appliquer [ ] à un objet défini à un isomorphisme unique près. C'est pourquoi dans (c') apparaît C', non B/A, ... On vérifie toutefois que (a') - (c') équivaut à (a) - (d) :

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

pour Z un objet zéro, on reconstitue (b) : $[Z] \to 0$ en considérant la suite exacte courte $Z \to Z \to Z$ et pour φ: $A \to B$ un isomorphisme, on reconstitue $[\varphi]$ en considérant la suite exacte $Z \to A \to B$. On vérifie (a) - (d) .

4.7 Pour X muni d'une filtration admissible finie F , un usage itéré de 4.3 (a) fournit un isomorphisme dans $V(A)$: $[X] \xrightarrow{\sim} \sum[Gr_F^i(X)]$. Pour X muni d'une bifiltration admissible, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\sum[Gr_G^j(X)] \arrow[d] & {[X]} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \sum[Gr_F^i(X)] \arrow[d] \\
\sum[Gr_F^i\, Gr_G^j(X)] \arrow[rr, equal] & & \sum[Gr_G^j\, Gr_F^i(X)]
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On le déduit par récurrence sur la longueur des filtrations du lemme suivant

<u>Lemme</u> 4.8 Soit un diagramme commutatif à lignes et colonnes des suites exactes courtes admissibles

$$\begin{tikzcd}
X_1^1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X^1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & X_2^1 \arrow[d, hook] \\
X_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\
X_1^2 \arrow[r] & X^2 \arrow[r, two heads] & X_2^2
\end{tikzcd}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\sum[X^j] \arrow[d] & {[X]} \arrow[l, dash] \arrow[r, dash] & \sum[X_i] \arrow[d] \\
\sum[X_i^j] \arrow[rr, equal] & & \sum[X_i^j]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Preuve</u>: Si $X_1^1 = X_2^2 = 0$, on a $X = X_2^1 \oplus X_1^2$ et le lemme se réduit à (4.3.1). Dans le cas général, il s'agit de comparer les isomorphismes de $[X]$ avec la somme des $[X_i^j]$ définis par les filtrations

$$X_1^1 \subset X^1 \subset X^1 + X_1 \subset X \qquad \text{et}$$
$$X_1^1 \subset X_1 \subset X^1 + X_1 \subset X \ ,$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

de quotients successifs les X_i^j . Ces filtrations commençant toutes deux par $X_1^1 = X^1 \cap X_1$ et finissant par $X^1 + X_1$, on se ramène au même problème pour $X^1 + X_1/X^1 \cap X_1$, i.e. au cas où $X_1^1 = X_2^2 = 0$.

4.9 Pour A dans $\mathcal{A}$, soit u le morphisme diagonal de A dans $A \oplus A$, et v: $(a,b) \longmapsto a-b$ de $A \oplus A$ dans A . La suite $0 \to A \xrightarrow{u} A \oplus A \xrightarrow{v} A \to 0$ est exacte admissible et l'automorphisme de symétrie de $A \oplus A$ induit l'identité (resp -1) sur le sous-objet (resp le quotient) A de $A \oplus A$. On en déduit que $\varepsilon(A)$ est défini par l'automorphisme de $[A]$ induit par -1 .

4.10 La catégorie dérivée $D^b(\mathcal{A})$ est le quotient de la catégorie triangulée des complexes bornés à homotopie près $K^b(\mathcal{A})$ par la sous-catégorie épaisse des complexes acycliques. Si $\mathcal{P}$ est une catégorie de Picard commutative, munie de $[\ ] : (\mathcal{A},is) \to \mathcal{P}$ vérifiant 4.3 (a) à (d) et (4.3.1), les arguments de [10] fournissent une extension encore notée $[\ ]$ de $D^b(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{P}$. Le cas universel fournit

$$[\ ] : (D^b(\mathcal{A}) , is) \longrightarrow V(\mathcal{A})$$

4.11 Un foncteur exact $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induit $T: Q\mathcal{A} \to Q\mathcal{B}$. La définition topologique de $V(\mathcal{A})$ (4.2) fournit donc $T: V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{B})$. En termes catégoriques, $[\ ] \circ T : (\mathcal{A},is) \to V(\mathcal{B})$ est muni de données 4.3 (a) à (d), donc défini un morphisme de catégories de Picard $V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{B})$. Ce morphisme induit les morphismes définis par $T: K_i(\mathcal{A}) = \pi_i(V(\mathcal{A})) \to K_i(\mathcal{B}) = \pi_i(V(\mathcal{B}))$ pour $i = 0, 1$. En particulier, si T induit des isomorphismes $K_i(\mathcal{A}) \to K_i(\mathcal{B})$ pour $i = 0, 1$, T induit une équivalence $V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{B})$.

Une catégorie exacte et sa duale ont même catégorie Q , donc mêmes catégories d'objets virtuels. En termes catégoriques: un foncteur exact contravariant $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ définit encore $T: (\mathcal{A},is) \to V(\mathcal{B})$ muni de donnée (4.3 (c) à (f), d'où encore $T: V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{B})$. Pour $u: X \to Y$ un isomorphisme, $Tu: [TX] \to [TY]$ est $[Tu^{-1}]$.

Un foncteur biexact $\Theta: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ définit

$$V(\mathcal{A}) \times V(\mathcal{B}) \to V(\mathcal{C}) ,$$

distributif par rapport à $+$. On prendra garde à la trappe suivante.
(a) Soit $\Theta: \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}$ un foncteur distributif par rapport à $+$ entre catégories de Picard commutative. Par définition, celà signifie que, à X ou Y fixe,

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$X \otimes Y$ est un morphisme de catégories de Picard commutatives, et que tout diagramme

$$\begin{tikzcd} \sum X_i \otimes \sum Y_j \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \sum(X_i \otimes \sum Y_j) \arrow[d, dash] \\ \sum(\sum X_i \otimes Y_j) \arrow[r, dash] & \sum_{i,j} X_i \otimes Y_j \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Si $-Y$ est l'opposé de Y, l'isomorphisme

$$X \otimes Y + X \otimes -Y = X \otimes (Y + -Y) = X \otimes 0 = 0$$

fait de $X \otimes -Y$ l'opposé de $X \otimes Y$: $X \otimes (-Y) \xrightarrow{\sim} -(X \otimes Y)$. De même, $(-X) \otimes Y \xrightarrow{\sim} -(X \otimes Y)$.

(b) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (-X) \otimes (-Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & -((-X) \otimes Y) \arrow[d, "\wr"] \\ -(X \otimes (-Y)) \arrow[r, "\sim"] & --(X \otimes Y) = X \otimes Y \end{tikzcd}$$

n'est en général pas commutatif. Son défaut de commutativité est $\varepsilon(X \otimes Y)$. La vérification est laissée au lecteur.

4.12 Comme illustré par 4.11, les fonctorialités connues pour les K_i fournissent en général -avec la même construction- une fonctorialité pour les catégories d'objets virtuels.

Pour S un schéma, soit $\mathrm{Vect}(S)$ la catégorie exacte des fibrés vectoriels sur S . Pour S noethérien, soit $\mathrm{Coh}(S)$ la catégorie abélienne des faisceaux cohérents sur S . On pose $\underline{K}(S) = V(\mathrm{Vect}(S))$ et $\underline{K}'(S) = V(\mathrm{Coh}(S))$. Le résultat analogue pour les K_i ([12] 7.1) montre que $\underline{K}(S) \to \underline{K}'(S)$ est une équivalence pour S régulier (et séparé). De même, si $f\colon X \to S$ est un morphisme lisse, ou simplement à fibres régulières, et que X est quasi-projectif, la catégorie des faisceaux cohérents sur X plats sur S (ou simplement de Tor-dimension finie sur S) donne lieu aux mêmes groupes K , et aux mêmes objets virtuels, que $\mathrm{Vect}(S)$.

Un morphisme de schémas $f\colon X \to S$ définit $f^*\colon \underline{K}(S) \to \underline{K}(X)$. Si f est propre et plat et X quasi-projectif, il définit aussi $f_*\colon \underline{K}(X) \to \underline{K}(S)$. Si $\mathrm{Vect}'(X)$ est la catégorie exacte des fibrés vectoriels sur X avec $R^i f_* V = 0$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

pour $i > 0$, il résulte en effet du dual de [12] §4 cor.3 que $K_i(\mathrm{Vect}'(S)) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathrm{Vect}(S))$. Le foncteur f_* induit un foncteur exact de $\mathrm{Vect}'(X)$ dans $\mathrm{Vect}(S)$ et on définit f_* comme le composé

$$\underline{K}(X) = V(\mathrm{Vect}(X)) \xleftarrow{\sim} V(\mathrm{Vect}'(X)) \xrightarrow{f_*} V(\mathrm{Vect}(S)) = \underline{K}(S)$$

(cf [12] 7.2.7).

4.13 <u>Exemple</u> Soit X un schéma. Le rang $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$ d'un fibré vectoriel $\mathcal{V}$ sur X est un entier localement constant sur X , i.e. une section de $\Gamma(X,\mathbf{Z})$. Le <u>déterminant</u> $\det(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$ est le fibré en droites gradué puissance extérieure maximale de $\mathcal{V}$, en degré $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$, i.e, avec les notations de 4.1 (exemple), $\det(V) := (\mathrm{rg}(V)\ ,\ \bigwedge^{\mathrm{rg}\mathcal{V}} \mathcal{V})$. Pour chaque suite exacte courte

$$V' \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V'' \quad ,$$

on dispose d'un isomorphisme

$$\det(\mathcal{V}') \otimes \det(\mathcal{V}'') \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{V}) :$$

localement, pour (e'_i) $(1 \leq i \leq n)$ une base de $\mathcal{V}'$ et (e''_i) $(1 \leq i \leq m)$ une base de $\mathcal{V}''$, avec e''_i relevé en $\tilde{e}''_i$ dans $\mathcal{V}''$,

$$(e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n) \otimes (e''_1 \wedge \ldots \wedge e''_m) \longmapsto e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n \wedge \tilde{e}''_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{e}''_m \ .$$

Les conditions de 4.3 sont vérifiées. La propriété universelle de $\underline{K}(X) = \mathrm{Vect}(X))$ assure donc une factorisation de det par un foncteur, encore noté det , de $\underline{K}(X)$ dans la catégorie de Picard $\mathcal{P}$ des fibrés en droites gradués. Si $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$, les suites exactes $\mathcal{V}' \hookrightarrow \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{V}''$ et $\mathcal{V}'' \hookrightarrow \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{V}'$ donnent lieu à un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\det(\mathcal{V}') \otimes \det(\mathcal{V}'') \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Koszul}"] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \det(\mathcal{V}'') \otimes \det(\mathcal{V}') \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \det(\mathcal{V}) &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur det est donc compatible à la commutativité. C'est ce qui justifie de définir la contrainte de commutativité de $\mathcal{P}$ par la règle de Koszul.

Si X est le spectre d'un anneau local A , on a $K_0(A) = \mathbf{Z}$ et $K_1(A) = A^*$. Il en résulte que dans ce cas $\det \underline{K}(X) \to \mathcal{P}$ est une équivalence.

Si X est régulier, le foncteur $\underline{K}(X) \to \underline{K}'(X)$ est une équivalence (4.12). De là, une extension du foncteur det de $\mathrm{Vect}(X)$ à $\mathrm{Coh}(X)$:

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$\mathrm{Coh}(X) \longrightarrow \underline{K}'(X) \xleftarrow{\sim} \underline{K}(X) \longrightarrow P \quad .$$

Plus généralement, sur X quelconque, on dispose ([10]) d'une extension de det à la sous-catégorie $D^b_{ctf}(X)$ de la catégorie dérivée $D(X,\mathcal{O})$: complexes bornés, de tor dimension finie et d'∞-présentation finie (= sur X noethérien: à cohomologie cohérente).

4.14 La catégorie de Picard P des fibrés en droites gradués est un quotient de la catégorie de Picard des fibrés virtuels, et les foncteurs $\otimes$ et dual passent au quotient. Pour le dual, on définit le foncteur dual par

$$\mathrm{dual}\ (n,L) = (n,L^\vee)\ ,$$

avec la compatibilité évidente à la somme

$$\mathrm{dual}\ (A + B) \simeq \mathrm{dual}\ (A) + \mathrm{dual}\ (B)\ .$$

Pour V un fibré vectoriel, l'isomorphisme

$$\det(V^\vee) \simeq \mathrm{dual}\ (\det(V))$$

est défini par la condition que des bases duales locales $e_1, \ldots, e_n$ et $e'_1, \ldots, e'_n$ de V et $V^\vee$ définissent des bases duales $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ et $e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n$ de $\overset{n}{\wedge} V$ et $\overset{n}{\wedge} V^\vee$. Pour toute suite exacte $V' \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V''$ de suite exacte transposée $V''^\vee \longrightarrow V^\vee \longrightarrow V'^\vee$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det(V^\vee) & \text{———} & \det(V''^\vee) \otimes \det(V'^\vee) \text{———} \det(V'^\vee) \otimes \det(V''^\vee) \\ \Big| & & \Big| \\ \mathrm{dual}\ \det(V) & - & \mathrm{dual}\ (\det V' \otimes \det V'') - \mathrm{dual}\ \det(V') \otimes \mathrm{dual}\ \det(V'') \end{array}$$

(où en première ligne apparaît Koszul) est commutatif.

Pour le produit tensoriel, on pose

$$(a,L) \underline{\otimes} (b,M) = (ab\ , L^{\otimes b} \otimes M^{\otimes a})\ ,$$

on définit $\det(V) \underline{\otimes} \det(W) \xrightarrow{\sim} \det(V \otimes W)$ par

$$(e_1 \wedge \ldots e_a)^{\otimes b} \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_b)^{\otimes a} \longmapsto \wedge \text{ des } e_i \otimes f_j \text{ en ordre lexicographique.}$$

Il faut alors définir

$$A \underline{\otimes} (B + C) \simeq A \underline{\otimes} B + A \underline{\otimes} C$$

par l'isomorphisme évident,

$$(A + B) \underline{\otimes} C \simeq A \underline{\otimes} C + B \underline{\otimes} C$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

avec un signe $(-1)^N$, $N = ab\,\frac{c(c-1)}{2}$, et

$$A \underline{\otimes} B \xrightarrow{\sim} B \underline{\otimes} A$$

avec un signe $(-1)^N$, $N = \frac{a(a-1)}{2}\,\frac{b(b-1)}{2}$.

Les foncteurs $\overset{i}{\Lambda}$ passent aussi au quotient.

Pour K dans la catégorie dérivée, de tor-dimension finie et de dual $K^\vee$, on a encore

$$\det(K^\vee) = \text{dual}\ \det(K)\ .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

5. Fibrés métriques virtuels.

5.1 Soit X un schéma lisse de type fini sur $\mathbb{C}$. Pour abréger, on appellera métrique sur un fibré vectoriel V sur X une structure hermitienne sur V. On se propose de définir la catégorie $\underline{KM}(X)$ des fibrés métriques virtuels sur X. Trois définitions, avant d'énoncer ses propriétés essentielles. On notera $\underline{K}(X)$ la catégorie des objets virtuels de la catégorie exacte des fibrés vectoriels sur X. On notera $M(X)$ la somme sur p des groupes

$$M^p(X) := \frac{\{(p-1\ ,\ p-1) - \text{forme réelle sur } X\}}{\{\text{celles dans } \operatorname{Im}(d') + \operatorname{Im}(d'')\}} .$$

La fibre d'un morphisme de catégories de Picard commutatives $f\colon \underline{A} \to \underline{B}$ est la catégorie des objets de $\underline{A}$ munis d'un isomorphisme $f(a) \sim 0$. Si f est fidèle, les objets de cette catégorie fibre n'ont pas d'automorphismes non triviaux et on appelle encore fibre le groupe des classes d'isomorphie d'objets de la catégorie fibre.

(i) On veut disposer d'un foncteur d'oubli

$$\omega : \underline{KM}(X) \to \underline{K}(X)$$

(un morphisme de catégories de Picard commutatives) fidèle, surjectif sur les classes d'isomorphie d'objets et de fibre $M(X)$.

La donnée de $\underline{KM}(X)$ muni d'un tel foncteur d'oubli équivaut à celle d'un morphisme μ de catégorie de Picard commutative de $\underline{K}(X)$ dans la catégorie de Picard commutative des $M(X)$-torseurs. Voici comment. Etant donnés $\underline{KM}(X)$ et ω, on attache à x dans $\underline{K}(X)$ l'ensemble $\mu(x)$ des classes d'isomorphie d'objets v de $\underline{KM}(X)$, munis d'un isomorphisme $\omega(v) \sim x$. C'est un $M(X)$-torseur. Réciproquement, si μ est donné, on définit un objet de $\underline{KM}(X)$ comme étant une paire (x,g) d'un objet x de $\underline{K}(X)$ et d'une métrique virtuelle $g \in \mu(x)$ sur x.

Vu la définition de $\underline{K}(X)$ comme solution d'un problème universel, il suffit, pour construire μ, d'attacher à chaque fibré vectoriel V sur X un $M(X)$-torseur $\mu(V)$, et de construire pour μ des isomorphismes 4.3 (a) obéissant au formalisme de 4.3.

(ii) Un fibré métrique (V,g) doit définir un fibré métrique virtuel $[V,g]$ avec $\omega([V,g]) = [V]$. En d'autre termes, une métrique g sur V doit définir une métrique virtuelle $[g]$ sur $[V]$. Si V est une somme directe: $V = V' + V''$,

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

on a $[V] = [V'] + [V'']$, $\mu([V]) = \mu([V']) + \mu([V''])$ et la métrique virtuelle définie par g , somme directe orthogonale de g' et g'' , doit être la somme de $[g']$ et $[g'']$.

(iii) Un fibré métrique virtuel v doit définir une forme de Chern $ch(v)$, avec les propriétés suivantes.

(a) $$ch([V,g]) = ch(V,g) ,$$

avec au second membre la forme définie par [4] représentant la classe de cohomologie $ch(V)$ (caractère de Chern).

(b) $$ch(v_1 + v_2) = ch(v_1) + ch(v_2) .$$

(c) Pour v muni de $\omega(v) \sim 0$, défini par $\alpha \in M(X)$,

$$ch(v) = \frac{1}{2\pi i} d'd''\alpha .$$

5.2 Une théorie 5.1 équivaut à une théorie secondaire à la Chern Bott [4]. Expliquons ce qui est requis.

Supposons donnée une théorie 5.1. Si g et h sont deux métriques sur un fibré V , par (II), elles définissent $[g]$ et $[h]$ dans $\mu([V])$. Définissons $\delta(g ; h) \in M(X)$ par

(5.2.1) $$[g] = [h] + \delta(g ; h) \quad \text{dans } \mu([V]) .$$

Si V est extension de V'' par V' et que g , g' , g'' sont des métriques sur V , V' et V'' , définissons $\delta(g ; g' , g'') \in M(X)$ par

(5.2.2) $$[g] = [g'] + [g''] + \delta(g ; g' , g'') \quad \text{dans } \mu([V]) .$$

On a

(5.2.3) $$\delta(g_1 ; g_2) + \delta(g_2 ; g_3) = \delta(g_1 ; g_3)$$

(5.2.4) $$\delta(g_1 ; g_1' , g_1'') - \delta(g_2 ; g_2' , g_2'') =$$

$$\delta(g_1 ; g_2) - \delta(g_1' ; g_2') - \delta(g_1'' , g_2'')$$

(5.2.5) Soient $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 = \{0\}$ et $g(i,j)$ une métrique sur V_i/V_j $(i < j)$. On a

$$\delta(g(0,3) ; g(0,2) , g(2,3)) + \delta(g(0,2) ; g(0,1) , g(1,2))$$
$$= \delta(g(0,3) ; g(0,1) , g(1,3)) + \delta(g(1,3) ; g(1,2) , g(2,3))$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

(les deux membres valant $[g(0,3)] - [g(0,1)] - [g(1,2)] - [g(2,3)]$)

(5.2.6) pour $V = V' \oplus V''$,

$$\delta(g' \oplus g'' \; ; \; g' \; , \; g'') = 0$$

(5.2.7) $\mathrm{ch}(V,g) = \mathrm{ch}(V,h) + \frac{1}{2\pi i} d'd'' \, \delta(g,h)$

(5.2.8) $\mathrm{ch}(V,g) = \mathrm{ch}(V',g') + \mathrm{ch}(V'',g'') + \frac{1}{2\pi i} d'd'' \, \delta(g \; ; \; g',g'')$.

Réciproquement, des fonctions δ vérifiant (5.2.3) à (5.2.8) fournissent une théorie 5.1. Pour V un fibré vectoriel, on définit $\mu(V)$ comme étant le $M(X)$-torseur, unique à isomorphisme unique près, muni de

$$\{\text{métriques sur } V\} \xrightarrow{[\;]} \mu(V)$$

vérifiant (5.2.1). L'existance est garantie par (5.2.3).

Pour V extension de V'' par V' , on définit

$$\mu(V') + \mu(V'') \xrightarrow{\sim} \mu(V)$$

comme étant l'unique isomorphisme pour lequel (5.2.2) est vrai. L'existence est garantie par (5.2.4). Que ces isomorphismes obéissent au formalisme 4.2 résulte de (5.2.5) et (5.2.6) pour $V' = 0$ ou $V'' = 0$. Le foncteur μ fournit donc

$$\mu : \underline{K}(X) \longrightarrow (\text{torseurs sous } M(X)) ,$$

compatible à la commutativité grâce à (5.2.6). Comme expliqué en 5.1, la donnée de μ équivaut à celle de $\underline{KM}(X)$, munie de ω .

Le groupe $KM_0(X)$ des classes d'isomorphie d'objets dans $\underline{KM}(X)$ est engendré par les (V,γ) , V fibré vectoriel et $\gamma \in \mu(V)$, avec les relations suivantes:

(a) $(V,\gamma) - (V,\gamma')$ ne dépend que de $\gamma - \gamma'$ dans $M(X)$; (b) pour V extension de V'' par V' , si $\delta(g \; ; \; g',g'') = 0$, alors $(V,[g]) = (V',[g']) + (V'',[g''])$. Les conditions (5.2.7) (5.2.8) équivalent donc à l'existence de

$$\mathrm{ch}: \; KM_0(X) \longrightarrow \text{formes}$$

vérifiant 5.1 (iii).

5.3 Supposons données des fonctions δ comme en 5.2, donc une théorie 5.1. Le facteur direct $M^1(X)$ de $M(X)$ est le groupe additif des fonctions réelles sur X et, par passage au quotient par $\bigoplus_{p>1} M^p(X)$, le foncteur μ fournit un foncteur $\bar{\mu}$ de $\underline{K}(X)$ dans les $M^1(X)$-torseurs. Pour tout x dans $\underline{K}(X)$, soit

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$\nu(x)$ l'ensemble des métriques sur le fibré en droite $\det(x)$. On en fait un $M^1(X)$-torseur en définissant la métrique $h + a$ $(a \in M^1(X))$ par

$$\|s\|_{h+a} = \|s\|_h \cdot \exp(a) \quad ,$$

où $\| \ \|$ désigne la longueur carrée. Les conditions suivantes (5.3.1) (5.3.2) sur δ assurent l'existence d'un unique isomorphisme $\bar{\mu} \xrightarrow{\sim} \nu$ (un isomorphisme de morphismes de catégories de Picard) qui, pour g une métrique sur un fibré V , envoie $[g]^- \in \bar{\mu}([V])$ sur la métrique de $\det(V) = \det[V]$ déduite de g .

(5.3.1) $$\| \ \|_{\det g} / \| \ \|_{\det h} = \exp(\delta^1(g,h))$$

(5.3.2) Si V est extension de V'' par V' et que la métrique g sur V induit g' sur V' et a pour quotient g'' sur V'' , on a

$$\delta^1(g \ ; \ g',g'') = 0 \ .$$

Pour V un fibré vectoriel, (5.3.1) assure l'existence d'un (unique) isomorphisme de $M(X)$-torseurs $\bar{\mu}([V]) \to \nu([V])$ qui à $[g]$ associe la métrique de $\det(V)$ définie par g . La condition (5.3.2) assure que les données 4.2 coïncident pour $\bar{\mu}$ et ν .

Dit avec moins de précision: si (5.3.1) (5.3.2) sont vérifiés, une métrique virtuelle sur x définit une métrique sur $\det(x)$. La première classe de Chern est respectée.

<u>Remarque</u> 5.4 Soient $KM_0(X)$ le groupe des classes d'isomorphie d'objets de $\underline{KM}(X)$ et $KM_1(X)$ le groupe des automorphismes d'un quelconque objet. Que le foncteur d'oubli: $\underline{KM}(X) \to \underline{K}(X)$ soit fidèle, surjectif sur les classes d'isomorphie d'objets et de fibre $M(X)$ fournit une suite exacte

(5.4.1) $0 \to KM_1(X) \to K_1(X) \xrightarrow{\partial} M(X) \to KM_0(X) \to K_0(X) \to 0$. La définition de la flèche ∂ est qu'un automorphisme $u \in K_1(X)$ d'un objet se transforme une métrique virtuelle γ en $\gamma + \partial u$. L'existence de ch sur $KM_0(X)$ assure que la flèche ∂ est à valeurs dans le noyau de $d'd''$.

Cette suite exacte suggère que $\underline{KM}(X)$ est une version tronquée d'une catégorie $\underline{\tilde{KM}}(X)$ s'envoyant dans $\underline{K}(X)$ par un foncteur d'oubli non fidèle.

Soit A^p le complexe de composantes les $A^p_k := \{(2p - k - 2)$-formes réelles sur X , modulo celles dans $F^p \oplus \overline{F^p}\}$, avec pour différentielles d , et soit $M_k(X)$ la somme des $M^p_k(X) := H_k(A^p)$. Il devrait exister des groupes $\tilde{KM}_i(X)$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

donnant lieu à une suite exacte longue

(5.4.2) $\qquad \to M_i(X) \to \tilde{KM}_i(X) \to K_i(X) \to \quad ,$

et $\tilde{KM}(X)$ aurait pour groupe de classes d'isomorphie d'objets $KM_o(X) = \tilde{KM}_o(X)$, pour groupe des automorphismes de 0 l'extension $\tilde{KM}_1(X)$ de $KM_1(X)$.

5.5 Une théorie de classes de Chern secondaires vérifiant (5.2.3) à (5.2.8) et (5.3.1) (5.3.2) est contenue, pour l'essentiel, dans [4]. Une variante de l'approche de [4] m'a été signalée par C. Soulé.

Expliquons comment définir $\delta(g\ ;\ h)$ vérifiant (5.2.3) .

Rappelons la définition de $ch(V,g)$. Soit $\nabla = \nabla' + \nabla''$, $\nabla' : V \to \Omega^{1,0}(V)$, $\nabla'' : V \to \Omega^{01}(V)$ la connection métrique de V ($\nabla g = 0$, $\nabla'' = \partial''$) . Elle se prolonge en $\nabla : \Omega^{**}(V) \to \Omega^{**}(V)$ vérifiant $\nabla(\alpha x) = d\alpha.x \pm \alpha\nabla x$ ($\pm = (-1)^{\deg\alpha}$) et ∇^2 est un endomorphisme Ω^{**}-linéaire de $\Omega^{**}(V)$, la multiplication par une 2-forme K de type $(1,1)$ à valeurs dans $End(V)$. On a

$$ch(V,g) = Tr \exp\left(\frac{-1}{2\pi i}\ K\right) .$$

Supposons que g dépende de $t \in T$. Ci-dessous, T sera une variété différentiable, mais il serait plus naturel de se placer dans le cas universel où T est l'espace des structures hermitiennes sur V . La donnée de $g(t)$ est celle d'une structure hermitienne sur l'image inverse pr_1^*V de V sur $X \times T$. Le complexe de de Rham de $X \times T$ est trigradué: nombre de dz , de $d\bar{z}$ et de dt , et la différentielle extérieure se décompose en $d = d' + d'' + d_T$. Les $ch^p(V,g(t))$ dans $\Omega^{p,p}(X)$ fournissent une forme de type $(p,p,0)$, notée $ch^p(V,g)$, sur $X \times T$.

Nous allons construire (cf [4]) une forme réelle A^p , de type $(p-1\ ,\ p-1\ ,\ 1)$, telle que

$$d_T\ ch^p(V,g) = \frac{1}{2\pi i}\, d'd''\ A^p$$

et une forme B^p , de type $(p-2\ ,\ p-1\ ,\ 2)$ telle que

$$d_T\ A^p = d'B^p + \text{complexe conjugué} .$$

Ces formes sont de formation compatible à tout changement d'espace de paramètres $T_1 \to T$. Pour ch un chemin de $t_0 \in T$ à $t_1 \in T$, correspondant à des métriques $g(0)$ et $g(1)$ sur V , on pose

(5.5.1) $\qquad \delta^p(g(1)\ ,\ g(0)) := \int_{ch} A^p \quad .$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Si ch^1 et ch^2 sont deux chemins de $g(0)$ à $g(1)$ et que $ch^1 - ch^0$ est le bord d'un cycle H, on a

$$\int_{ch^1} A^p - \int_{ch^2} A^p = d' \int_H B^p + \text{complexe conjugué}$$

L'espace de toutes les formes hermitiennes sur V étant contractile, (5.5.1) définit sans ambiguité $\delta^p(g(1), g(0)) \in M^p(X)$.

5.6 Pour chaque valeur de t, on dispose de la connection métrique ∇ de V. Les composantes ∇' et ∇'' de ∇ se prolongent en ∇' et $\nabla'' : \Omega^{***}(pr_1^*V) \to \Omega^{***}(pr_1^*V)$, de type $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$, vérifiant $\nabla'(\alpha x) = d'\alpha.x \pm \alpha\nabla' x$ et $\nabla''(\alpha x) = d''\alpha.x \pm \alpha\nabla'' x$ $(\pm = (-1)^{\deg\alpha})$. On dispose aussi d'une connection d_1 "dans la direction T" : $pr_1^*V \to \Omega^{001}(pr_1^*V)$ exprimant que pr_1^*V est une image inverse: $d_1\, pr_1^*(v) = 0$. Soit d_2 la connection "dans le sens de T" caractérisée par

$$d_T(v,w) = (d_1 v, w) + (v, d_2 w) .$$

La métrique identifie pr_1^*V à pr_1^* (antidual de V), et d_2 correspond au d_1 de l'antidual. Les d_i se prolongent en $d_i : \Omega^{***}(V) \to \Omega^{***}(V)$ avec $d_i(\alpha x) = d_T\alpha.x \pm \alpha.d_i x$. Soit $L := d_2 - d_1$. C'est un endomorphisme (au sens $\mathbb{Z}/2$-gradué) du Ω^{***}-module $\Omega^{***}(V)$, défini par une $(0,0,1)$-forme à valeurs dans $\mathrm{End}(V)$.

On a, les $[\ ]$ étant pris au sens $\mathbb{Z}/2$-gradué

$$\nabla'^2 = \nabla''^2 = d_1^2 = d_2^2 = [\nabla'', d_1] = [\nabla', d_2] = 0$$

Soit $\mathcal{L}_0$ l'algèbre de Lie (au sens $\mathbb{Z}/2$-gradué) librement engendrée par des éléments impairs ∇', ∇'', d_1, d_2 soumis aux relations précédentes: $[\nabla', \nabla'] = [\nabla'', \nabla''] = [d_1, d_1] = [d_2, d_2] = [\nabla'', d_1] = [\nabla', d_2] = 0$. Elle est trigraduée, les générateurs étant de degrés respectifs $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ pour d_1 et d_2. Elle admet pour quotient l'algèbre de Lie ($\mathbb{Z}/2$-graduée) commutative de base d', d'', d_T (avec $\nabla' \mapsto d'$, $\nabla'' \mapsto d''$, $d_i \mapsto d_T$). Soit

$$\mathcal{L} = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{L}_0 \longrightarrow \langle d', d'', d_T\rangle) .$$

Pour toute situation $(X, V, T, g$ sur $X \times T)$ comme ci-dessus, $\mathcal{L}_0$ agit sur $\Omega^{***}(V)$ et $\mathcal{L}$ agit par endomorphismes Ω^{***}-linéaires (au sens $\mathbb{Z}/2$-gradué): on dispose d'un morphisme de Lie

$$\mathcal{L} \longrightarrow \Omega^{***}(\mathrm{End}(V)) .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Soit P une forme invariante de degré k sur $g\ell_n$, où n est le rang de V. Soit ℓ_P la forme linéaire sur $\mathrm{Sym}^k g\ell_n$ telle que $P(x) = \ell_P(x^k)$. Etant invariante, ℓ_P définit une section du dual de $\mathrm{Sym}^k \underline{\mathrm{End}}(V)$. Les puissances symétriques étant prises au sens $\mathbb{Z}/2$-gradué, on en déduit

$$c(P, \ ) : \ \mathrm{Sym}^k(L) \longrightarrow \Omega^{***}(\mathrm{Sym}^k \mathrm{End}V) \longrightarrow \Omega^{***} .$$

Par invariance, $c(P, \ )$ est nul sur $[L , \mathrm{Sym}^k(L)]$. L'action de L_0 sur L induit une action de L_0 sur $\mathrm{Sym}^k(L)/[L , \mathrm{Sym}^k L]$. Cette action se factorise par $L_0/L = \langle d' , d'' , d_T\rangle$. Le morphisme

$$c_P : \ \mathrm{Sym}^k(L)/[L , \mathrm{Sym}^k L] \longrightarrow \Omega^{***}$$

commute à d', d'' et d_T. C'est un morphisme de tricomplexes. Les formes que nous considérons sont dans l'image de c_P et les calculs essentiels se feront dans $\mathrm{Sym}^k(L)/[L , \mathrm{Sym}^k L]$, indépendamment de P.

Soit $\nabla = \nabla' + \nabla''$. Soit dans L

$$K = \nabla^2 := \tfrac{1}{2}[\nabla,\nabla] = [\nabla',\nabla''] ,$$

de type $(1,1,0)$. On a $[\nabla,\nabla^2] = 0$ (Bianchi) et donc $[\nabla',K] = [\nabla'',K] = 0$. Soit

$$L := d_2 - d_1 ,$$

dans L, de type $(0,0,1)$. Soit $d_0 = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$. On a

$$[d_0,L] = \tfrac{1}{2}[d_2 + d_1 , d_2 - d_1] = \tfrac{1}{2}([d_2 , d_2] - [d_1 , d_1]) = 0$$

$$[d_0,K] = -[[\nabla',\nabla''] , d_0] = -[\nabla' , [\nabla'',d_0]] - [\nabla'' [\nabla' , d_0]]$$

$$= \tfrac{1}{2}(-[\nabla' , [\nabla'',L]] + [\nabla'' , [\nabla',L])$$

puisque $d_0 = d_1 + \tfrac{1}{2}L = d_2 - \tfrac{1}{2}L$.

Dans la somme des $\mathrm{Sym}^k(L)/[L , \mathrm{Sym}^k L]$, on a donc

$$d_T \exp K = [d_0 , \exp K] = \exp K.[d_0,K]$$

$$= \tfrac{1}{2}(-\mathrm{ad}\nabla' \ \mathrm{ad}\nabla'' + \mathrm{ad}\nabla'' \ \mathrm{ad}\nabla')(\exp K.L)$$

$$= -d'd''(\exp K.L)$$

$$d_T(\exp K.L) = [d_0 , \exp K.L] = \exp K.[d_0,K].L$$

$$= \exp K. \tfrac{1}{2}[-\mathrm{ad}\nabla' \ \mathrm{ad}\nabla'' + \mathrm{ad}\nabla'' \ \mathrm{ad}\nabla')(L).L$$

$$= \tfrac{1}{2} \{-\mathrm{ad}\nabla'(\exp K.[\nabla'',L].L) + \exp K.[\nabla'',L][\nabla',L]$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$+\mathrm{ad}\nabla''(\exp K.[\nabla',L].L) - \exp K.[\nabla',L][\nabla'',L]$$

$$= \tfrac{1}{2}\{-d'(\exp K.[\nabla'',L].L) + d''(\exp K.[\nabla',L].L)\}$$

Pour P_k la forme invariante de degré k $\mathrm{Tr}(x^k)$, on a

$$c(P_k\ ,\ \exp K) := c(P_k\ ,\ \frac{K^k}{k!}) = (-2\pi i)^k\ \mathrm{ch}^k(V,g)\ ,$$

d'où

$$d_T\ \mathrm{ch}^k(V,g) = \frac{1}{2\pi i}\ d'd''\ c(P_k\ ,\ \exp(\frac{-1}{2\pi i}K).L) \quad \text{et}$$

$$d_T(c(P_k\ ,\ \exp(\frac{-1}{2\pi i}K).L) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\ d'(c(P_k\ ,\ \exp(\frac{-1}{2\pi i}K).[\nabla'',L].L)$$

$$+ \text{ complexe conjugué.}$$

Ceci fournit les formes A^p et B^p de 5.5.

<u>Remarque</u> 5.7 La construction 5.6 ne dépend pas des propriétés particulières de $\mathrm{ch}(V,g)$. Pour toute forme invariante P, si $c_P(V,g)$ est la forme $P(\frac{-1}{2\pi i}K)$ correspondante, elle fournit $\delta_P(g,h)$ vérifiant

$$c_P(V,g) - c_P(V,h) = \frac{1}{2\pi i}\ d'd''\ \delta_P(g,h)\ .$$

On a $\delta_{P+Q} = \delta_P + \delta_Q$ et

(5.7.1) $$\delta_{PQ}(g,h) = c_P(V,h)\ \delta_Q(g,h) + \delta_P(g,h)\ c_Q(V,g)\ .$$

Noter que dans $M(X)$, on a

(5.7.2) $$\delta_P \cdot \frac{1}{2\pi i}\ d'd''\delta_Q = \frac{1}{2\pi i}\ d'd''\delta_P \cdot \delta_Q\ ;$$

ceci assure la symétrie en P et Q du membre de droite.

Pour la forme de Chern

$$\mathrm{ch}(V,g) = \mathrm{Tr}\ \exp\ (\frac{-1}{2\pi i}K)\ ,$$

$\delta(g,h)$ est donné par intégration de

$$A = \mathrm{Tr}(\exp(\frac{-1}{2\pi i}K).L)$$

où exp et le produit sont pris au sens de la composition dans $\underline{\mathrm{End}}(V)$.

<u>Remarque</u> 5.9 Pour la somme de deux fibrés, on a

(5.9.1) $$\begin{aligned} &\mathrm{ch}(V_1 \oplus V_2\ ,\ g_1 \oplus g_2) = \mathrm{ch}(V_1\ ,\ g_1) + \mathrm{ch}(V_2\ ,\ g_2) \quad \text{et} \\ &\delta(g_1 \oplus g_2\ ,\ h_1 \oplus h_2) = \delta(g_1\ ,\ h_1) + \delta(g_2\ ,\ h_2)\ . \end{aligned}$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Pour le produit tensoriel, on a

$$\text{(5.9.2)}\qquad \begin{aligned} ch(V_1 \otimes V_2 , g_1 \otimes g_2) &= ch(V_1 , g_1).\, ch(V_2 , g_2) \quad \text{et} \\ \delta(g_1 \otimes g_2 , h_1 \otimes h_2) &= ch(V_1 , h_1)\, \delta(g_2 , h_2) \\ &\quad + \delta(g_1 , h_1)\, ch(V_2 , g_2) \end{aligned}$$

(cf 5.7.2 pour la symétrie en V_1 et V_2) .

Sur le fibré en droite trivial $\mathcal{O}$, soit 1 (resp u.1) la métrique pour laquelle $\|1\|$ vaut 1 (resp la constante u) . On a

$$\text{(5.9.3)}\qquad \delta(u.1,1) = \log u .$$

Tensorisant (V,g) avec $\mathcal{O}$ muni de ces métriques, on déduit de (5.9.2) (5.9.3) que pour une constante u ,

$$\text{(5.9.4)}\qquad \delta(ug,g) = ch(V,g) \log(u) .$$

Noter que $ch(V,ug) = ch(V,g)$, que, comme il se doit, $d'd''\delta(ug,g) = 0$ mais que $\delta(ug,g)$ est en général non nul.

<u>Remarque</u> 5.10 On vérifie facilement que dans l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$, les éléments de T-degré 0 sont réduits aux multiples de K . Dans le tricomplexe

$$Sym^k(\mathcal{L})/[\mathcal{L} , Sym^k \mathcal{L}] ,$$

seul K^k est donc de T-degré 0 . On peut montrer que pour $\ell > 0$, la partie de T-degré ℓ est d' et d"-acyclique. Pour $\ell = 1$, il en résulte que la formule donnée pour $\delta(g,h)$ est essentiellement unique.

5.11 Expliquons comment définir $\delta(g ; g',g'')$ (cf 5.2). Si on impose (5.2.4), il suffit de traiter le cas où la métrique g sur V induit la métrique g' sur V' et a pour quotient g" sur V" . Pour g' et g" ainsi choisis, posons

$$\delta(g) := \delta(g ; g',g'') .$$

La condition (5.2.4) se réduit à

$$\delta(g_1) - \delta(g_2) = \delta(g_1 ; g_2) - \delta(g_1' ; g_2') - \delta(g_1'' ; g_2'')$$

et (5.2.6) à ce que pour une somme directe orthogonale, $\delta(g) = 0$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, V_λ le pull-back de l'extension V par λ: $V'' \to V''$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V' \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r] \arrow[d, "\sigma(\lambda)"] & V'' \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V' \arrow[r] & V \arrow[r] & V'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

et $\tilde{V}''_\lambda$ l'image inverse par $\sigma(\lambda)$ de l'orthogonal $\tilde{V}''$ de V' dans V. Notons g_λ la métrique sur V_λ, induisant g' et g'' sur V' et V'' et pour laquelle $\tilde{V}''_\lambda$ est l'orthogonal de V_λ. Pour $\lambda = 0$, on a $(V_0, g_0) = (V', g') \oplus (V'', g'')$. Ceci amène à postuler que $\delta(g_\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to 0$. Pour $\lambda \neq 0$, $\sigma(\lambda)$ est un isomorphisme. Soit $g(\lambda)$ la métrique $\sigma(\lambda)(g_\lambda)$ sur V. On a $\delta(g_\lambda) = \delta(g(\lambda))$. La formule (5.11.1) pour $h = g(\lambda)$, donc $h' = g'$ et $h'' = \|\lambda\|^{-1} g''$, impose

$$\begin{aligned}\delta(g) &= \lim_{\lambda\to 0} \delta(g, g(\lambda)) - \delta(g'', \|\lambda\|^{-1} g'') \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \delta(g, g(\lambda)) - \log \|\lambda\| \, \mathrm{ch}(V'', g'')\end{aligned}$$

(appliquer (5.9.4)). Montrons qu'une telle limite existe.

Les $g(\lambda)$ forment une famille paramétrée par $\mathbb{C}^*$ de métriques sur V. En terme de la décomposition, comme fibré C^∞, de V en $V' \oplus \tilde{V}'' \xrightarrow{\sim} V' \oplus V''$, on a $g(\lambda) = g' \oplus \|\lambda\|^{-1} g''$. Notant pr'' la projection sur $\tilde{V}''$, on calcule que la 1-forme L à valeurs dans $\mathrm{End}\, pr_1{}^*V$, sur $X \times \mathbb{C}^*$, est

$$L = -d \log \|\lambda\| \, . \, pr'' \quad .$$

Calculons la courbure K_λ de (V_λ, g_λ). En terme de la décomposition, comme fibré C^∞, de V_λ en $V' \oplus \tilde{V}''_\lambda \xrightarrow{\sim} V' \oplus V''$, on a $g_\lambda = g' \oplus g''$, et la connection $\nabla_\lambda = \nabla'_\lambda + \nabla''_\lambda$ est

$$\nabla''_\lambda = \begin{pmatrix} \partial'' & \lambda.\alpha \\ 0 & \partial'' \end{pmatrix} \qquad \nabla'_\lambda = \begin{pmatrix} \nabla' & 0 \\ -\bar{\lambda}\alpha^* & \nabla' \end{pmatrix}$$

où α dans $\Omega^{01}\, \underline{\mathrm{Hom}}(V'', V')$ détermine la classe d'extension de V. De là, notant K' et K'' les courbures de (V', g') et (V'', g'') et ∇ la connection de $\underline{\mathrm{Hom}}(V'', V')$,

$$K_\lambda = \begin{pmatrix} K' - \|\lambda\| \alpha\alpha^* & \lambda \nabla'(\alpha) \\ -\bar{\lambda}\nabla''(\alpha^*) & K'' - \|\lambda\| \alpha^*\alpha \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda \neq 0$, la courbure $K(\lambda)$ de (V_λ, g_λ) est l'image par $\sigma(\lambda)$ de K_λ et $\delta(g(\lambda), g)$ se déduit donc par intégration de 1 à λ de

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(-\exp(\tfrac{-1}{2\pi i} K(\lambda)) \, . \, d \log \|\lambda\| . pr'') \\ &= \mathrm{Tr}(-\exp(\tfrac{-1}{2\pi i} K_\lambda) . \, pr'') \, . d \log \|\lambda\|\end{aligned}$$

La quantité à intégrer est le produit par $d \log \|\lambda\|$ d'un polynôme en $\|\lambda\|$ dont le terme constant est la trace de $-\exp(\frac{-1}{2\pi i} K'')$. A cause de ce terme constant,

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

l'intégrale diverge pour $\lambda \to 0$, avec une divergence en $-\log \|\lambda\| \cdot ch(V'',g'')$. La limite qui doit définir $\delta(g)$ existe donc, et

$$(5.11.3) \qquad \delta(g) = \int_1^0 (Tr(\exp(\frac{-1}{2\pi i} K_\lambda)pr'') - Tr(\exp(\frac{-1}{2\pi i} K''))) \cdot d \log \|\lambda\| .$$

Plus précisément, nous définissons $\delta(g)$ par (5.11.3). L'espace $M(X)$ (un quotient) n'étant pas nécessairement séparé, la définition par passage à la limite n'a en effet qu'une valeur heuristique.

5.12 Pour vérifier les propriétés (5.2), il est plus commode d'utiliser une autre construction des fonctions δ qui m'a été signalée par C. Soulé. L'idée est la suivante. Pour tout schéma lisse X , X et son produit $X \times A^1$ avec la droite affine ont mêmes K_i . Ce fait, pour $i = 0,1$, implique que le foncteur

$$pr_1^* : \underline{K}(X) \longrightarrow \underline{K}(X \times A^1)$$

est une équivalence. Les foncteurs $s^*: \underline{K}(X \times A^1) \to \underline{K}(X)$ pour s une section de $X \times A^1/X$ sont donc tous naturellement isomorphes. En particulier, pour V un fibré vectoriel sur $X \times A^1$, les $[s^*V]$ sont naturellement isomorphes. Soient i_0 et i_1 les sections $X \to X \times \{0\}$ et $X \to X \times \{1\}$, et $V_0 = i_0^*V$, $V_1 = i_1^*V$.

Supposons provisoirement qu'un formalisme 5.1 est donné. Si g_i est une métrique sur V_i , les $[g_i]$ sont des métriques virtuelles sur $[V_0] \simeq [V_1]$, et $[g_0] - [g_1] \in M(X)$ est défini. C. Soulé propose que, lorsque V est prolongé en un fibré encore noté V sur $X \times \mathbb{P}^1$, $[g_0] - [g_1]$ est donné par la formule suivante. On choisit une métrique g sur V sur $X \times \mathbb{P}^1$, induisant g_0 et g_1 - d'où une forme de Chern $ch(V,g)$ sur $X \times \mathbb{P}^1$ induisant $ch(V_0,g_0)$ et $ch(V,g_1)$ sur $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ - et

$$(5.12.1) \qquad [g_0] - [g_1] = -\int_{X \times \mathbb{P}^1/X} ch(V,g). \ \log(\|z\|/\|z-1\|) .$$

Notons $D(g_0 , g_1)$ le membre de droite. L'identité sur $\mathbb{P}^1$

$$\frac{-1}{2\pi i} d'd'' \log(\|z\|/\|z-1\|) = \delta(0) - \delta(1)$$

assure que

$$(5.12.2) \qquad ch(V_0 , g_0) - ch(V_1 , g_1) = \frac{1}{2\pi i} d'd'' D(g_0 , g_1) .$$

Soit W un fibré sur X et prenons $V = pr_1^* W$. On a $V_0 = V_1 = W$ et V définit l'isomorphisme identique de $[V_0] = [W]$ avec $[V_1] = [W]$. Si g_0 et g_1 sont deux métriques sur W , et que la métrique g sur pr_1^*W sur $X \times \mathbb{P}^1$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

induit g_0 sur $X \times \{0\}$ et g_1 sur $X \times \{1\}$, ce qui précède amène C. Soulé à prendre comme fonction $\delta(g_0 ; g_1)$ de 5.2 la fonction

$$(5.12.3) \qquad D(g_0 ; g_1) := -\int_{X \times \mathbb{P}^1/X} ch(V,g) \,.\, \log(\|z\|/\|z-1\|) \,.$$

Soit W un fibré sur X extension de W'' par W'. Les W_λ (comme en 5.9) sont les restrictions aux $X \times \{\lambda\}$ d'un fibré V sur $X \times \mathbb{A}^1$. On a $V_0 = W' \oplus W''$, $V_1 = W$ et V définit l'isomorphisme naturel

$$[W] \xrightarrow{\sim} [W' \oplus W''] = [W'] + [W''] \,.$$

En dehors de la section 0, les σ_λ de 5.9 fournissent un isomorphisme σ de V avec $pr_1^* W$. Nous noterons encore V le prolongement de V à $X \times \mathbb{P}^1$ auquel σ se prolonge. Si $s\colon \mathcal{O}(-X\times\{0\}) \to \mathcal{O}$ est l'inclusion naturelle, V est défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & pr^*W' \arrow[r] \arrow[d, equal] & pr^*W \arrow[r] & pr^*W'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & pr^*W' \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[u] & pr^*W'' \oplus \mathcal{O}(-X\times\{0\}) \arrow[r] \arrow[u, "s"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Si une métrique g sur V induit des métriques g_1 sur $V_1 = W$ et $g_0' \oplus g_0''$ sur $V_0 = W' \oplus W''$, ceci amène C. Soulé à prendre comme fonction $\delta(g_1 ; g_0', g_0'')$ de (5.2) la fonction

$$(5.12.4) \qquad D(g_1 ; g_0', g_0'') := \int_{X \times \mathbb{P}^1/X} ch(V,g) \,.\, \log(\|z\|/\|z-1\|) \,.$$

D'après (5.12.1), les exigences (5.2.7) et (5.2.8) sont remplies.

Les définitions de $D(g_0, g_1)$ (5.12.1) et (5.12.3) (5.12.4) dépendent d'une métrique g interpolant des métriques données au-dessus de $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$. Si on change g, on modifie $ch(V,g)$ par un $d'd''\alpha$, où α a une restriction nulle à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ (utiliser 5.5, ou (5.12.1), avec X remplacé par $X \times \mathbb{P}^1$). Dans l'identité

$$\begin{aligned}\int d'd''\alpha.\ \log(\|z\|/\|z-1\|) = d' \int & d''\alpha.\ \log(\|z\|/\|z-1\|) \\ + d'' \int & \alpha.\ d'\log(\|z\|/\|z-1\|) \\ + \int & \alpha.\ d'd''\log(\|z\|/\|z-1\|)\end{aligned}$$

(intégrales selon les fibrés de $X \times \mathbb{P}^1/X$, prises au sens des distributions), le troisième terme est nul. Les seconds membres de (5.12.1) (5.12.3) (5.12.4) sont donc définis sans ambiguité dans $M(X)$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

5.13 Comparons les constructions 5.6 et (5.12.3). Soit V un fibré vectoriel sur X et g une métrique sur son image inverse sur $X \times \mathbb{P}^1$. Décomposons la forme $c_p(pr_1^* V, g)$, pour P un polynôme invariant de degré p, selon le type $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ dans la direction $\mathbb{P}^1$:

$$c_p(pr_1^* V, g) = c + A + B + D .$$

La forme c_p étant fermée de type (p,p), on a

$$d'_{\mathbb{P}1} c + d'_X A = d''_{\mathbb{P}1} c + d''_X B = 0 , \quad d'_X B = d''_X A = 0 \tag{5.13.1}$$

$$d'_{\mathbb{P}1} B + d'_X D = d''_{\mathbb{P}1} A + d''_X D = 0 . \tag{5.13.2}$$

La construction 5.6, elle, fournit une $(p-1, p-1, 1)$-forme E avec

$$d_{\mathbb{P}1} c = \frac{1}{2\pi i} d'_X d''_X E , \tag{5.13.3}$$

et des $(p-1, p-2, 2)$ et $(p-2, p-1, 2)$ formes F_1 et F_2 avec

$$d_{\mathbb{P}1} E = d''F_1 + d'F_2 . \tag{5.13.4}$$

Décomposons E en $E' + E''$ selon le type dans la direction de $\mathbb{P}^1$. Les formes $-d''_X E'$, $d'_X E''$, $-d''_{\mathbb{P}} E' + d''_X F_1 = d'_{\mathbb{P}} E'' - d'_X F_2$, multipliées par $\frac{1}{2\pi i}$, vérifient les identités (5.13.1) (5.13.2) vérifiées par A, B, D. Ceci suggère

$$2\pi i\, A = -d''_X E' \qquad 2\pi i\, B = d'_X E'' \tag{5.13.5}$$

$$2\pi i\, D = d'_{\mathbb{P}} E'' - d'_X F_2 = -d''E' + d''_X F_1 .$$

On vérifie que tel est bien le cas. Après un changement de variables, (5.13.3) donne pour les métriques g_0 et g_∞ portées par V sur $X \times \{0\}$ et $X \times \{\infty\}$

$$D(g_0 ; g_\infty) = -\int_{X \times \mathbb{P}^1/X} D.\log \|z\|$$

Modulo $\mathrm{Im}(d')$ et $\mathrm{Im}(d'')$, ou exactement si la métrique au-dessus de $X \times \{z\}$ ne dépend que de $\|z\|$, auquel cas $F_1 = F_2 = 0$, l'intégrale au second membre vaut $\frac{1}{2\pi i}$ fois

$$-\int_{X \times \mathbb{P}^1/X} \tfrac{1}{2}(d'_{\mathbb{P}1} E'' - d''_{\mathbb{P}1} E') \log \|z\| = -\int \tfrac{1}{2} E' \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} - E'' \frac{dz}{z}$$

$$= -\int \tfrac{1}{2} E \left(\frac{d\bar{z}}{\bar{z}} - \frac{dz}{z} \right) = \int i\, E\, d\theta$$

et $D(g_0 ; g_\infty)$ est la moyenne des $\delta(g_0, g_\infty)$ calculés pour les rayons allant de 0 à ∞.

5.14 Vérifions les identités 5.2 pour D. Pour (5.2.3), on munit $pr_1^* V$ sur

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$X \times \mathbb{P}^1$ d'une métrique g induisant g_i sur $X \times \{i\}$ $(i = 1,2,3)$; on a

$$D(g_i \; ; \; g_j) = -\int \mathrm{ch} \, . \, \log(z-i/z-j)$$

et on utilise que $\log(ab) = \log a + \log b$.

Pour (5.2.4), on considère sur $X \times \mathbb{P}^1$ le fibré (5.11, 5.12) qui interpole entre $V' \oplus V''$ (sur $X \times \{0\}$) et V (sur $X \times \{1\}$) , et son image inverse sur $X \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On prend une métrique g qui interpole en $(0,0)$ et $(1,0) \in \mathbb{P}^1$, $g_1' \oplus g_1''$ et g_1 , et en $(0,1)$ et $(1,1)$, $g_2' \oplus g_2''$ et g_2 . Soit ch la forme de Chern. Il s'agit de comparer

$$\int_{X \times \mathbb{P}^1 \times \{0\}/X} \mathrm{ch}.\log(\|z\|/\|z-1\|) - \int_{X \times \mathbb{P}^1 \times \{1\}/X} \mathrm{ch}.\log(\|z\|/\|z-1\|$$

$$= \int_{X \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1/X} \mathrm{ch}.\log(\|z\|/\|z-1\|) . \frac{-1}{2\pi i} d'd'' \log(\|t\|/\|t-1\|)$$

et

$$\int_{X \times \{0\} \times \mathbb{P}^1/X} \mathrm{ch}.\log(\|t\|/\|t-1\|) - \int_{X \times \{1\} \times \mathbb{P}^1/X} \mathrm{ch}.\log(\|t\|/\|t-z\|)$$

$$= \int_{X \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1/X} \mathrm{ch}.\log(\|t\|/\|t-1\|) \, . \, \frac{-1}{2\pi i} d'd'' \log(\|z\|/\|z-1\|) \, .$$

Modulo $\mathrm{Im}(d')$ et $\mathrm{Im}(d'')$, on passe de l'un à l'autre par une intégration par partie.

Prouvons (5.2.5). Soit W le sous-faisceau suivant de l'image inverse de V sur $X \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Si z , t sont les coordonnées de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on ne touche pas à V en dehors de $z = 0$ ou $t = 0$. Là, on ne prend que les sections d'image dans $pr_1^*(V/V_2)$ divisible par z et d'image dans $pr^*(V/V_1)$ divisible par z et t . Sur $\mathbb{P}^1 \times \{1\}$ (resp $\{1\} \times \mathbb{P}^1$), on obtient le fibré interpolant entre V et $V/V_2 \oplus V_2$ (resp $V/V_1 \oplus V_1$) . Sur $\mathbb{P}^1 \times \{0\}$, on interpole entre $V/V_1 \oplus V_1$ et $V/V_1 \oplus V_1/V_2 \oplus V_2$. Sur $\{0\} \times \mathbb{P}^1$, on interpole entre $V/V_2 \oplus V_2$ et $V/V_1 \oplus V_1/V_2 \oplus V_2$. Prenant une métrique g interpolant les métriques données, et procédant comme dans la preuve de (5.2.4), on obtient (5.2.5).

Prouvons (5.2.6). La définition de D demande de considérer sur $X \times \mathbb{P}^1$ le fibré $pr_1^*V' \oplus pr_2^*V''(-X \times \{0\})$, isomorphe à $pr_1^*V' \oplus pr_2^*V''(-X \times \{\infty\})$, et

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

une métrique g qui est $g' \oplus g''$ sur $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$. On peut prendre g invariant par $Z \longmapsto 1 - Z$ et la nullité de D résulte alors de l'antiinvariance de $\log(\|z\|/\|1 - z\|)$.

Enfin, 5.2.7 et 5.2.8 résultent de (5.12.2). L'argument heuristique de 5.11 devrait permettre de comparer (5.11.3) et (5.12.4).

5.15 Esquissons la vérification de (5.12.1), la base heuristique des formules avec lesquelles nous avons travaillé. Soient i_0 et i_1 les inclusions de X dans $X \times \mathbb{P}^1$ par $x \longmapsto (x,0)$ et $x \longmapsto (x,1)$. L'isomorphisme considéré en 5.12 entre les foncteurs i_0^* et $i_1^* : \underline{K}(X \times \mathbb{P}^1) \to \underline{K}(X)$ est caractérisé par la propriété de donner lieu à l'isomorphisme évident si appliqué à pr_1^*V ou à $pr_1^*V \otimes \mathcal{O}(-X \times \{\infty\})$. Il définit une trivialisation du $M(X)$-torseur $\mu(i_0^* x) - \mu(i_1^* x)$ pour tout x dans $\underline{K}(X \times \mathbb{P}^1)$. Cette trivialisation est caractérisée par sa compatiblité à $+$, et que c'est l'évidente pour un pr_1^*V ou un $pr_1^*V \otimes \mathcal{O}(-X \times \{\infty\})$. La trivialisation correspondante de $\mu(i_0^*V) - \mu(i_1^*V)$, pour V un fibré vectoriel sur $X \times \mathbb{P}^1$, est caractérisée par les mêmes propriétés de normalisation, et une compatibilité aux suites exactes courtes $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$. Si g, g' et g'' sont des métriques sur V, V' et V'', cette compatibilité s'écrit, pour la formule proposée (5.12.1),

$$D(g_0, g_1) - D(g_0', g_1') - D(g_0'', g_1'') = D(g_0 ; g_0', g_0'') - D(g_1 ; g_1', g_1''),$$

et se prouve par un argument semblable à celui prouvant 5.2.4 (5.14). La normalisation se déduit, comme 5.2.6, de l'antisymétrie de $\log(\|z\|/\|z - 1\|)$ par $z \longmapsto 1 - z$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

6. Intégrale d'un produit de premières classes de Chern.

6.1 Soit $f: X \to S$ un morphisme de schémas propre, plat et purement de dimension relative N. Le programme 2.1, pour P le polynôme $C_1^1 \cdot \cdots \cdot C_{N+1}^1$ demande la construction d'un foncteur (pour les isomorphismes) $I_{X/S}\, P(V_1, \ldots, V_{N+1})$ attachant à $N+1$ fibrés vectoriels sur X un fibré en droites sur S. Dans tous les contextes usuels, la première classe de Chern d'un fibré V ne dépend que de $\det(V)$. Ceci amène à se concentrer sur le cas où les V_i sont des fibrés en droites. Si on sait traiter ce cas, on posera

$$(6.1.1) \qquad I_{X/S}\, P(V_1, \ldots, V_{N+1}) := I_{X/S}\, P(\det(V_1), \ldots, \det(V_{N+1}))$$

Pour notre théorème principal, on a besoin du cas où $N = 1$ et où X est une famille de courbes lisses paramétrées par S. Dans ce cas, le foncteur requis a été construit dans SGA4 (XVIII 1.3). Comme dans SGA4, nous le noterons $\langle L, M\rangle$. Pour S spectre d'un corps k, on peut en donner la description directe suivante. On définit $\langle L, M\rangle$ comme l'espace vectoriel de rang un sur k, engendré par des symboles $\langle \ell, m\rangle$ pour ℓ et m des sections rationnelles de L et M, à diviseurs disjoints, avec les relations

$$(6.1.2) \qquad \begin{aligned} \langle \ell, fm\rangle &= f(\mathrm{div}(\ell))\, \langle \ell, m\rangle \\ \langle f\ell, m\rangle &= f(\mathrm{div}(m))\, \langle \ell, m\rangle . \end{aligned}$$

Que la construction ne s'effondre pas se ramène au théorème de Weil que, pour f et g deux fonctions rationnelles sur X à diviseurs disjoints, on a ([16] III §4)

$$f(\mathrm{div}(g)) = g(\mathrm{div}(f)) .$$

La construction de SGA4 est plus compliquée, plus instructive et reprouve le théorème de Weil.

Sur une base quelconque, la même construction marche, pour autant qu'on se localise pour la topologie étale: le faisceau des sections locales de $\langle L, M\rangle$ est le faisceau de $\mathcal{O}$-modules engendré par des sections locales $\langle \ell, m\rangle$ avec les relations (6.1.2), avec $f(\mathrm{div}(\ell))$ interprété comme une norme: pour D un diviseur de Cartier relatif, on pose $f(D) := N_{D/S}(f)$. On a $f(D_1 + D_2) = f(D_1).f(D_2)$. On écrit $\mathrm{div}(\ell) = D_1 - D_2$ et on pose $f(\mathrm{div}(\ell)) = f(D_1).f(D_2)^{-1}$.

Pour $L = \mathcal{O}(D)$, et 1 la section canonique de $\mathcal{O}(D)$, on a $\langle 1, fm\rangle =$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$N_{D/S}(f) \cdot \langle 1 , m\rangle$. De là, un isomorphisme

(6.1.3) $$\langle \mathcal{O}(D) , M\rangle = N_{D/S} M$$

avec $\langle 1 , m\rangle \longmapsto N_{D/S}(m)$. Pour la définition de $N_{D/S}M$, voir 7.1.

Au paragraphe 8, on indiquera, avec des esquisses de démonstrations, comment traiter l'intégrale d'un produit de premières classes de Chern dans un cas plus général.

6.2 La définition 6.1 rend claire la définition d'isomorphismes de bimultiplicativité:

$$\langle L_1 \otimes L_2 , M\rangle \simeq \langle L_1 , M\rangle \otimes \langle L_2 , M\rangle$$
$$\langle L , M_1 \oplus M_2\rangle \simeq \langle L , M_1\rangle \otimes \langle L , M_2\rangle ,$$

et de symétrie

$$\langle L , M\rangle \xrightarrow{\sim} \langle M , L\rangle .$$

Pour $L = M$, l'isomorphisme de symétrie (un automorphisme de $\langle L , L\rangle$) est la multiplication par $(-1)^{\deg L}$ (SGA4 XVIII 1.3.16.6) .

6.3 Sur $\mathbb{C}$, si L et M sont munis de structures hermitiennes, on définit une structure hermitienne sur $\langle L , M\rangle$ par

(6.3.1) $$\log\|\langle \ell,m\rangle\| = \frac{1}{2\pi i}\int d'd'' \log\|\ell\|.\log\|m\| + \log(\|m\|)\,[\mathrm{div}(\ell)] + \log(\|\ell\|)\,[\mathrm{div}\,(m)] .$$

où $d'd''$ est pris au sens des distributions et où $[\ ]$ est comme en 1.5. Regroupant les deux premiers termes, on obtient la formule équivalente

(6.3.2) $$\log\|\langle \ell,m\rangle\| = \int F_L .\log\|m\| + \log(\|\ell\|)\,[\mathrm{div}(m)]$$

qui cache la symétrie mais rend claire que le second membre vérifie l'identité

$$\log\|(f\ell,m\rangle\| = \log\|\langle \ell,m\rangle\| + \log\|f(\mathrm{div}(m))\|$$

requise par (6.1.2) pour que (6.3.1) soit légitime.

6.4 Justifions cette définition par l'analogie du §3. Dans le cadre du §3, 2e colonne, soient L et M deux faisceaux inversibles sur X_A et ℓ , m des sections rationnelles sur X_K , à diviseurs disjoints. Elles définissent une base $\langle \ell , m\rangle$ de $\langle L , M\rangle \otimes_A K$. Soient D et E les diviseurs de ℓ et m , vus comme sections rationnelles de L et M sur X_A: on a sur X_A des isomorphismes de faisceaux munis de sections rationnelles $(L , \ell) \simeq (\mathcal{O}(D) , 1)$ et $(M , m) \simeq (\mathcal{O}(E) , 1)$. Avec ces notations, la valuation de $\langle \ell , m\rangle$ est le nombre d'inter-

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

section (D,E) . Pour le prouver, on se ramène à supposer $\mathrm{div}(\ell)$ fini sur A et on utilise que $\langle L , M\rangle = N_{\mathrm{div}(\ell)/\mathrm{Spec}\, A}(M)$.

Dans 4.3, ℓ et m définissent de même des diviseurs compactifiés (3.7) et $-\log\|\langle \ell,m\rangle\|$ est leur nombre d'intersection.

6.5 Soient φ et ψ deux fonctions C^∞ avec $\varphi + \psi = 1$. On suppose φ (resp ψ) nul au voisinage de $\mathrm{div}(\ell)$ (resp $\mathrm{div}(m)$) . Une intégration par partie permet de récrire (4.3) sous la forme

$$(6.5.1)\qquad \log\|\langle \ell ,m\rangle\| = \int F_L .\log\|m\| . \psi + \int F_M .\log\|\ell\| . \varphi + \frac{1}{2\pi i}\int d'' \log\|\ell\| . \log\|m\| . d'\varphi + \frac{1}{2\pi i}\int d' \log\|m\| . \log\|\ell\| . d''\varphi .$$

Cette formule m'a été indiquée par O. Gabber. Elle rend claire que la définition de la métrique de $\langle L , M\rangle$ garde un sens pour L et M munis de métriques singulières, pour autant que leurs singularités soient disjointes. On définit une <u>métrique singulière</u> comme la donnée, pour toute section locale inversible, d'une fonction généralisée (distribution) $\log\|s\|$, avec $\log\|fs\| = \log\|s\| + \log\|f\|$. On ne tient pas à ce que $\|s\|$ ait un sens.

La formule 6.3 peut encore s'exprimer comme suit. La section ℓ de L , de diviseur D , fournit un isomorphisme de L avec $\mathcal{O}(D)$, transformant ℓ en 1 . Avec sa métrique, L est isomorphe au produit tensoriel de $\mathcal{O}(D)$, avec la métrique singulière pour laquelle $\|1\| = 1$ (cf 1.3.4) et de $\mathcal{O}$, avec la métrique singulière pour laquelle $\|1\| = \|\ell\|$. La métrique de $\langle L , M\rangle$ est caractérisé par sa compatibilité à la bimultiplicativité, à la symétrie, et par les règles suivantes:

(i) Si $\mathcal{O}(D)$ est muni de la métrique singulière pour laquelle $\|1\| = 1$, l'isomorphisme (6.1.3)

$$\langle \mathcal{O}(D) , M\rangle = N_D(M)$$

est compatible aux métriques.

(ii) On a $\langle \mathcal{O} , \mathcal{O}\rangle = \mathbb{C}$ et la métrique de $\langle(\mathcal{O},g) , (\mathcal{O},h)\rangle$ est celle pour laquelle $-\log\|1\|$ est le nombre d'intersections des "diviseurs concentrés sur la fibre spéciale"(3.5, 3.6) définis par g et h .

6.6 La définition 6.3 s'étend trivialement au cas où S est un schéma lisse de

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

type fini sur $\mathbb{C}$, plutôt que $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. Dans ce cadre, le résultat suivant est crucial

<u>Proposition</u>. Soient $\underline{c}^1(L)$ et $\underline{c}^1(M)$ les formes de Chern des fibrés en droites métrisés L et M . La forme de Chern du fibré en droite métrisé $\langle L , M\rangle$ est donnée par

$$(6.6.1) \qquad \underline{c}_1(\langle L , M\rangle) = \int_{X/S} c_1(L)\wedge c_1(M) .$$

Rappelons que la première forme de Chern est donnée par

$$\underline{c}_1(L) = \frac{1}{2\pi i} \, d'd''\log\|\ell\|$$

pour ℓ une section locale inversible de L (et $\|\ell\| = \langle\ell,\ell\rangle$) .

On notera que (6.6.1) a un sens pour L et M munis de métriques singulières de lieux singuliers disjoints. Par additivité des deux membres de (6.6.1), il suffit (cf 6.5) de traiter les deux cas suivants: (a) L est $\mathcal{O}(D)$, pour D un diviseur étale sur S , et sa métrique est la métrique singulière pour laquelle $\|1\| = 1$; (b) L et M sont isomorphes à $\mathcal{O}$. Dans le cas (a), $\underline{c}_1(L)$ est le courant défini par le cycle D : pour toute forme β sur X , $\int_{X/S} \underline{c}_1(L)\wedge\beta$ est la trace de D à S de la restriction de β à D . Ceci est compatible au fait que $\langle L , M\rangle$ est, avec sa métrique, la norme de D à S de la restriction de M à D . Dans le cas (b): $L = \mathcal{O}$, avec $\|1\| = g$ et $M = \mathcal{O}$, avec $\|1\| = h$, le fibré $\langle L , M\rangle$ est trivial, avec

$$\log \|1\| = \frac{1}{2\pi i}\int_{X/S} d'd''\log g.\ \log h \quad ,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi i} \, d'd'' \log\|1\| = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{X/S} d'd''\log g \ \ d'd''\log h$$
$$= \int_{X/S} \underline{c}_1(L)\wedge \underline{c}_1(M) .$$

6.7 Arakelov et Faltings fixent sur la courbe X une densité positive μ de masse totale 1 et appellent <u>admissible</u> une métrique sur un fibré en droites dont la forme de courbure est proportionnelle à μ . A un facteur près, un fibré en droites a une et une seule métrique admissible. Pour D un diviseur, il existe donc sur $\mathcal{O}(D)$ une et une seule métrique admissible tel que

$$\int \log \|1\|.\ \mu = 0 .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Si $\mathcal{O}(D)$ est muni de cette métrique, et L d'une métrique admissible, l'isomorphisme (6.1.3)

$$\langle \mathcal{O}(D) , L\rangle \simeq N_D(L)$$

est une isométrie: pour ℓ une section rationnelle de L inversible sur D, $\langle 1,\ell\rangle$ correspond à $N_D(\ell)$,

$$\log\|\langle 1,\ell\rangle\| = \int F_L \,.\, \log \|1\| + \log\|\ell\| \,[\mathrm{div}(1)]$$

et l'intégrale au second membre est nulle par hypothèse, tandis que le second terme est $\log\|\ell\|[D]$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

7. $\langle L , M\rangle$ et cohomologie.

7.1 Normes. Pour $g: S' \to S$ fini et plat, le morphisme norme $N_{S'/S}: g_* \mathcal{O}^*_{S'} \to \mathcal{O}^*_S$ induit un foncteur norme de la catégorie de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}(S')$ des faisceaux inversibles sur S' dans $\underline{\mathrm{Pic}}(S)$. Pour L un faisceau inversible sur S', de faisceau de sections inversibles L^*, sa norme $N_{S'/S}(L)$ est un faisceau inversible N sur S muni d'un morphisme de faisceaux $N_{S'/S}: g_* L^* \to N^*$ vérifiant $N_{S'/S}(u\,\ell) = N_{S'/S}(u)\, N_{S'/S}(\ell)$. Le couple $(N , N_{S'/S})$ est unique à isomorphisme unique près.

Pour F_0 et F_1 des fibrés vectoriels sur S' de même rang, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$(7.1.1) \qquad \det(g_* F_0 - g_* F_1) = N_{S'/S} \det(F_0 - F_1) \quad , \text{ i.e}$$
$$\det g_* F_0 \otimes (\det g_* F_1)^{-1} = N_{S'/S} (\det F_0 \otimes (\det F_1)^{-1})$$

compatible à la localisation sur S, et caractérisé par le fait que pour tout isomorphisme $u: F_1 \to F_0$, les trivialisations des deux membres déduites de u se correspondent. De tels isomorphismes u existent localement sur S et que (1.1) ne dépende pas du u choisi exprime que pour v un automorphisme de F_1, on a

$$\det(v , g_* F_1) = N_{S'/S} \det(v , F_1) .$$

Plus généralement, pour $g: X \to S$ quelconque et E sur X, S-plat, à support S' fini sur S, on définit

$$N_{E/S}: g_* \mathcal{O}^*_{S'} \to \mathcal{O}^*_S : u \longmapsto \det(u , g_* E) ,$$

un foncteur norme correspondant et un isomorphisme

$$(7.1.2) \qquad \det(g_* E\otimes F_0 - g_* E\otimes F_1) = N_{E/S} \det(F_0 - F_1) .$$

Montrons que (7.1.1) provient d'un isomorphisme fonctoriel en v, fibré virtuel de rang partout nul sur S'

$$(7.1.3) \qquad \det g_* v = N_{S'/S} \det v .$$

Définissons un foncteur Ngr des faisceaux inversibles gradués (a , L) sur S' dans les faisceaux inversibles gradués sur S par

$$\mathrm{Ngr}(a , L) := (\mathrm{Tr}_{S'/S}(a) , \det g_* \mathcal{O}^a \otimes N_{S'/S} L) .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

La donnée de compatibilité à + évidente sur ce foncteur est compatible à la commutativité et à l'associativité. Pour E un fibré vectoriel sur S', directement ou par (7.1.1), on a un isomorphisme

$$\det g_* E \simeq \mathrm{Ngr} \det E$$

et cet isomorphisme est compatible à l'additivité en E des deux membres. Il se prolonge donc en un isomorphisme fonctoriel en v virtuel:

$$\det g_* v \simeq \mathrm{Ngr} \det(v) \tag{7.1.4}$$

qui, pour v partout de rang 0 donne (7.1.3).

De même, (7.1.2) provient de

$$\det g_*(E \ominus v) = N_{E/S} \det(v) \tag{7.1.5}$$

pour v de rang 0.

Supposons g plat de dimension relative 1. Si E est localement le conoyau d'un morphisme $u: \mathcal{O}^n \to \mathcal{O}^n$ avec $\det(u)$ fibre à fibre non diviseur de zéro, $\det u$ est l'équation d'un diviseur de Cartier relatif $\mathrm{div}(E)$ ne dépendant que de E : le fibré en droites $\det E$ est trivialisé en dehors de S', la section trivialisante d se prolonge à X et $\mathrm{div}(E)$ est défini par $d = 0$. On a $N_{E/S} = N_{\mathrm{div}(E)/S}$ pour le morphisme norme, donc pour le foncteur norme.

Soient $g: X \to S$ propre et plat purement de dimension relative un et D un diviseur de Cartier relatif. Pour tout faisceau inversible M sur X, on a

$$\langle \mathcal{O}(D) , M\rangle \xrightarrow{\sim} N_{D/S}(M) \quad : \quad \langle 1 , m\rangle \longmapsto N_{D/S}(m) \quad .$$

En d'autres termes, pour tout faisceau inversible L et toute section ℓ de L, fibre à fibre non diviseur de zéro, on a

$$\langle L , M\rangle \xrightarrow{\sim} N_{\mathrm{div}(\ell)/S}(M) \quad : \quad \langle \ell , m\rangle \longmapsto N_{\mathrm{div}(\ell)/S}(m) \quad .$$

<u>Construction</u> 7.2 Soient $f: X \to S$, propre, plat, purement de dimension relative 1, E_0 et E_1 deux fibrés vectoriels sur X, partout du même rang, et F_0 et F_1 de même. On a

$$\langle \det(E_0 - E_1) , \det(F_0 - F_1)\rangle = \det f_*((E_0 - E_1) \ominus (F_0 - F_1)) \tag{7.2.1}$$

Le langage des fibrés virtuels nous sera utile pour ne pas noyer 7.2 dans un océan de signes.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Au membre de gauche, $E_0 - E_1$ est le fibré virtuel somme de $[E_0]$ et de l'opposé de $[E_1]$. Le fibré en droites gradué $\det(E_0 - E_1)$ est $\det(E_0) \otimes \det(E_1)^{-1}$. Il est de degré 0 car E_0 et E_1 sont de même rang et on l'identifie au fibré en droites sous-jacent. Soit $u: E_1 \to E_0$ et notons E_* le complexe $E_1 \to E_0$ (degrés -1 et 0). On a $\det(E_*) = \det(E_0 - E_1)$. Si u est un monomorphisme, son conoyau E est de Tor-dimension finie; la projection de E_0 sur E est un quasi-isomorphisme de E_* avec le complexe réduit à E en degré 0, d'où un isomorphisme

$$(7.2.2) \qquad \det(E) = \det(E_*) = \det(E_0 - E_1) = \det(E_0)\det(E_1)^{-1} .$$

Il est déduit par addition de $\det(E_1)^{-1}$ aux deux membres de l'isomorphisme $\det(E_0) = \det(E_1)\det(E)$ défini par la suite exacte courte $E_1 \to E_0 \to E$. Sur l'ouvert où u est inversible, les deux membres de (7.2.2) sont trivialisés, et les trivialisations se correspondent: à gauche, $E = 0$ et $\det(E)$ est donc trivial. A droite, u induit $\det(u)$: $\det(E_1) \xrightarrow{\sim} \det(E_0)$. On note encore $\det(u)$ la trivialisation correspondante de $\det(E_0 - E_1)$.

Au membre de droite, $(E_0 - E_1) \otimes (F_0 - F_1)$ est un produit tensoriel d'objets virtuels. Quels que soient $u: E_1 \to E_0$ et $v: F_1 \to F_0$, c'est le fibré virtuel défini par le complexe $E_* \otimes F_*$ (noter que c'est la "difficulté" 4.11 (b) qui rend ceci possible). S'il existe u et v qui soient des monomorphismes, avec $\det(u)$ et $\det(v)$ fibre à fibre non diviseurs de zéro et non simultanément nuls, de conoyaux E et F, u et v définissent un isomorphisme d'objets virtuels

$$(7.2.3) \qquad (E_0 - E_1) \otimes (F_0 - F_1) = [E_* \otimes F_*] = [E \otimes F] = 0 ,$$

et cette trivialisation définit une trivialisation du membre de droite de (7.2.1). Notons $\alpha(u,v)$ l'isomorphisme (7.2.1) par laquelle cette trivialisation correspond à la trivialisation $\langle \det u , \det v \rangle$ du membre de gauche.

Supposons seulement disposer de $u: E_1 \to E_0$ avec $\det(u)$ fibre à fibre non diviseur de zéro. On a par 7.1 un isomorphisme

$$\det f_*((E_0 - E_1) \otimes (F_0 - F_1)) = \det f_*(E \otimes (F_0 - F_1)) = N_{\mathrm{div}\, E/S} \det(F_0 - F_1)$$

et $\det u$ identifie $\langle \det(E_0 - E_1) ,$ à $N_{\mathrm{div}(E)/S}(\quad)$. Ceci identifie les deux membres de (7.2.1) à $N_{\mathrm{div}(E)/S} \det(F_0 - F_1)$, d'où un isomorphisme $\alpha(u)$ entre les deux membres. On vérifie aussitôt que si $\alpha(u,v)$ est défini, il coïncide avec $\alpha(u)$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Aux deux membres de (7.2.1), les E_i et les F_i jouent des rôles symétriques. Par symétrie, $v\colon F_1 \to F_0$ définit donc $\alpha(v)$ avec $\alpha(u,v) = \alpha(v)$ quand $\alpha(u,v)$ est défini.

Etant donnés trois fibrés E_0, E_1 et E_2, on a

(7.2.4) $\qquad (E_0 - E_2) = (E_0 - E_1) + (E_1 - E_2)$

et une additivité pour les deux membres de (7.2.1). Si on dispose de $u'\colon E_1 \to E_0$ et $u''\colon E_2 \to E_1$ de composé u, l'isomorphisme (7.2.4) coïncide avec celui défini par la suite exacte courte

$$\operatorname{coker}(u'') \longrightarrow \operatorname{coker}(u) \longrightarrow \operatorname{coker}(u') .$$

On en déduit que $\alpha(u)$, $\alpha(u')$, $\alpha(u'')$ sont compatibles à l'additivité des deux membres de (7.2.1). Si on dispose seulement de u et u'', soit u' le morphisme rationnel uu''^{-1} et définissons $\alpha(u')$ comme étant l'isomorphisme entre les deux membres de (7.2.1) tels que $\alpha(u)$, $\alpha(u')$, $\alpha(u'')$ soient compatibles à l'additivité. Pour $f\colon E_2' \to E_2$ sans diviseur de zéro, $\alpha(u')$ est le même, calculé avec u et u'' ou uf et $u''f$. Ceci permet de définir $\alpha(u')$ pour $u'\colon E_1 \to E_0$ un isomorphisme sur un ouvert dense fibre à fibre et contenant fibre à fibre les points non de Cohen Macaulay: localement sur S (pour la topologie étale), il existe E_2 sur X et $u''\colon E_2 \to E_1$ tel que $u'u''$ soit un morphisme, et deux tels sont coiffés par un même troisième; prendre $E_2 = E_1 \otimes L^{\otimes -n}$ avec L ample. Que ce soit possible localement sur S suffit, car la définition d'une flèche (7.2.1) est un problème local sur S.

Symétriquement, un morphisme rationnel $v\colon F_1 \to F_0$ analogue à $u'\colon E_1 \to E_0$ définit un isomorphisme (7.2.1) $\alpha(v)$. Montrons que, quels que soient $u\colon E_1 \to E_0$ et $v\colon F_1 \to F_0$ rationnels (isomorphisme sur un ouvert fibre à fibre dense et contenant les points non de Cohen-Macaulay, on a $\alpha(u) = \alpha(v)$. Les compatibilités à l'additivité et à la localisation sur S ramènent à supposer u et v des morphismes avec $\operatorname{div}(u)$ et $\operatorname{div}(v)$ disjoints. Dans ce cas, $\alpha(u) = \alpha(u,v) = \alpha(v)$. Il en résulte que $\alpha(u)$ (resp $\alpha(v)$) est indépendant de u (resp v): c'est l'isomorphisme 7.2.1

<u>Variante</u> 7.3 L'isomorphisme (7.2.1) provient d'un isomorphisme biadditif, fonctoriel en des fibrés virtuels de rang 0

(7.3.1) $\langle \det u , \det v \rangle = \det f_*(u \otimes v)$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Il s'agit de montrer que pour tout isomorphisme de fibrés virtuels $(F_0 - F_1) \xrightarrow{\sim} (F'_0 - F'_1)$, les isomorphismes (7.2.1) donnent lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \langle \det(E_0 - E_1), \det(F_0 - F_1)\rangle & \text{———} & \det f_*((E_0 - E_1) \otimes (F_0 - F_1)) \\ \Big| & & \Big| \\ \langle \det(E_0 - E_1), \det(F'_0 - F'_1)\rangle & \text{———} & \det f_*((E_0 - E_1) \otimes (F'_0 - F'_1)) \end{array}$$

(et de même, symétriquement, pour E remplaçant F).
On se ramène à supposer qu'il existe $u\colon E_1 \to E_0$ non diviseur de zéro et au même problème pour l'isomorphisme

$$\det f_*(E \otimes (F_0 - F_1)) \text{———} N_{E/S} \det(F_0 - F_1) \quad ,$$

traité en (7.1.4) (7.1.5).

7.4 Pour u et v virtuels de rang 0, $\det(u \otimes v)$ est trivialisé: localement, u et v sont isomorphes à 0 et la trivialisation est définie aussi bien par un isomorphisme $u \xrightarrow{\sim} 0$ que par un isomorphisme $v \to 0$ (pour un énoncé plus général, voir 4.14). Pour $f\colon X \to S$ comme en 7.2 et u, v, w de rang 0, on a donc un isomorphisme

(7.4.1) $\det f_*(u \otimes v \otimes w) = \langle \det u , \det(v \otimes w)\rangle = 1$.

Cette définition fait jouer un rôle spécial à u, mais l'isomorphisme obtenu est symétrique en u, v et w : on se ramène à supposer u, v et w définis par $E_0 - E_1$, $F_0 - F_1$, $G_0 - G_1$ et qu'il existe $a\colon E_1 \to E_0$, $b\colon F_1 \to F_0$, $c\colon G_1 \to G_0$ de déterminants non diviseurs de zéro à diviseurs deux à deux disjoints. On trouve que 7.4.1 est déduit de l'isomorphisme

$$\operatorname{coker}(a) \otimes \operatorname{coker}(b) \otimes \operatorname{coker}(c) = 0$$

où E, F, G jouent des rôles symétriques.

<u>Construction</u> 7.5 Soit $f\colon X \to S$ une courbe sur S, propre, plate et d'intersection complète relative. Le fibré en droites sous-jacent au fibré en droites gradué $\det Rf_*(L - \mathcal{O}) := \det Rf_*L \otimes \det Rf_*\mathcal{O}^{-1}$ donne lieu à un isomorphisme

(7.5.1) $(\det Rf_*(L - \mathcal{O}))^{\otimes 2} = \langle L , L \otimes \omega^{-1}\rangle$.

Pour tout fibré vectoriel F sur X, de dual de Serre $\underline{\mathrm{Hom}}(F , \omega)$, la dualité de Serre

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(Rf_*F , \mathcal{O})[-1] = Rf_* \underline{\mathrm{Hom}}(F , \omega)$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

donne lieu à un isomorphisme entre les fibrés en droites sous-jacents aux fibrés en droites gradués $\det Rf_*F$ et $\det Rf_* \underline{\mathrm{Hom}}(F, \omega)$, (situés en degrés différant par un entier pair). De là, un isomorphisme

$$\det Rf_*((L - 0) \otimes (\omega L^{-1} - 0) = \det Rf_* \omega . (\det Rf_* L)^{-1} . (\det Rf_* \omega L^{-1})^{-1} . \det Rf_* 0$$
$$= (\det Rf_* (L - 0))^{\otimes(-2)}$$

et on applique 7.2.1.

7.6 Les deux membres M de 7.5.1 donnent lieu à des isomorphismes canoniques

(7.6.1) $M(L \otimes M) = M(L) \otimes M(M) \otimes \langle L , M \rangle^{\otimes 2}$

et (à gauche, dualité de Serre)

(7.6.2) $M(L^{-1} \otimes \omega) \simeq M(L)$.

Nous utiliserons que les isomorphismes(7.6.1) (resp (7.6.2)) des deux membres se correspondent par (7.5.1). L'usage essentiel, en 7.11, ne le requiert qu'au signe près.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

8. Intégrale d'un produit de premières classes de Chern. Cas général (esquisse).

8.1 Avec les notations de 6.1, et comme expliqué en 6.1, il s'agit d'attacher à des faisceaux inversibles L_i $(0 \leq i \leq N)$ sur X un faisceau inversible $\langle L_0, \ldots, L_N \rangle$ sur S. Nous supposerons X projectif sur S. Pour S réduit à un point, on peut définir $\langle L_0, \ldots, L_N \rangle$ comme l'espace vectoriel engendré par des symboles $\langle \ell_0, \ldots, \ell_N \rangle$, pour les ℓ_i des sections méromorphes dont les diviseurs ont une intersection vide, avec les relations suivantes. Si $0 \leq i \leq N$, et que les $\mathrm{div}(\ell_j)$ $(j \neq i)$ ne se coupent qu'en un nombre fini de points, définissant un 0-cycle $\sum a_\alpha P_\alpha = \prod_{j \neq i} \mathrm{div}(\ell_j)$, on veut

(8.1.1) $\langle \ell_0, \ldots, f\ell_i, \ldots, \ell_N \rangle = \prod f(P_\alpha)^{a_\alpha} . \langle \ell_0, \ldots, \ell_N \rangle$.

Le fait que $\langle \ell_0, \ldots, \ell_N \rangle$ n'est défini que si l'intersection des $\mathrm{div}(\ell_i)$ est vide, et que (8.1.1) n'est imposé que si l'intersection des $\mathrm{div}(\ell_j)$ $(j \neq i)$ a un sens en tant que 0-cycle, crée une difficulté inessentielle. Si on la néglige, il est clair que deux quelconques $\langle \ell_1, \ldots, \ell_{N+1} \rangle$ sont proportionnels: joindre $\langle \ell_1, \ldots, \ell_{N+1} \rangle$ à $\langle m_1, \ldots, m_{N+1} \rangle$ par une chaîne de $\langle n_0^a, \ldots, n_N^a \rangle$ $(0 \leq a \leq N+1)$ avec $n_i = \ell_i$ ou m_i, en ne changeant à chaque étape qu'un seul argument. Si deux chaînes coïncident sauf pour une valeur de a, qu'elles imposent le même rapport $\langle m \rangle / \langle \ell \rangle := \langle m_0, \ldots, m_N \rangle / \langle \ell_0, \ldots, \ell_N \rangle$ résulte du théorème de Weil $f(\mathrm{div}\, g) = g(\mathrm{div}\, f)$ sur une intersection de $(N-1)$ diviseurs. Ne changeant qu'un n^a à la fois, on peut passer d'une chaîne à une autre en un nombre fini d'étapes. Toutes les chaînes imposent donc le même rapport $\langle m \rangle / \langle \ell \rangle$. Pour que la construction ne s'effondre pas, il faut encore vérifier que, pour $\langle m \rangle / \langle \ell \rangle$ ainsi calculé, on a bien

(1) $$(\langle n \rangle / \langle m \rangle)\,(\langle m \rangle / \langle \ell \rangle) = \langle n \rangle / \langle \ell \rangle .$$

Si pour un i $(0 \leq i \leq N)$ on a $\ell_i = m_i = n_i =: s$, avec $\mathrm{div}(s) = A - B$, l'assertion se réduit à (1) pour $(\ell_0, \ldots, \hat{\ell}_i, \ldots, \ell_N)$, $(m_0, \ldots, \hat{m}_i, \ldots, m_N)$ et $(n_0, \ldots, \hat{n}_i, \ldots, n_N)$ sur A et B. Choisissant une section méromorphe s de L_0, on se ramène à ce cas en comparant $\ell := (\ell_0, \ldots, \ell_N)$ à $\ell' := (s, \ell_1, \ldots, \ell_N)$ et de même pour m et n : il faut une compatibilité entre rapports dans le carré

$$\begin{array}{ccc} \langle \ell \rangle & \text{———} & \langle \ell' \rangle \\ | & & | \\ \langle m \rangle & \text{———} & \langle m' \rangle \end{array}$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Joignant ℓ à m par une chaîne, on peut supposer que $\ell_j = m_j$ sauf pour une valeur i de j. L'assertion se ramène alors à une question analogue sur l'intersection des $\mathrm{div}(\ell_j)$ $(j \neq 0, i)$, i.e. au cas $N = 0$ ou 1 déjà traité.

8.2 Bouchons les trous de cet argument. Pour éviter de parler de sections méromorphes, il y a intérêt à introduire un faisceau inversible très ample X tel que les $L_i \otimes X$ soient aussi très amples. Au lieu d'une section méromorphe ℓ_i de L_i, on prendra des sections ℓ_i' de $L_i \otimes X$ et ℓ_i'' de X, supposées localement non diviseur de zéro.

Formellement, $\ell_i = \ell_i' / \ell_i''$ et $\mathrm{div}(\ell_i) = \mathrm{div}(\ell_i') - \mathrm{div}(\ell_i'')$. On a gagné que $\mathrm{div}(\ell_i')$ et $\mathrm{div}(\ell_i'')$ sont des diviseurs de Cartier.

Une chaîne de ℓ à m peut contenir des n interdits, i.e. avec une intersection des $\mathrm{div}(n_i') \cup \mathrm{div}(n_i'')$ non vides. Pour obvier à ce problème, on pose

$$\langle \ell \rangle / \langle m \rangle := (\langle \ell \rangle / \langle r \rangle) / (\langle m \rangle / \langle r \rangle)$$

pour un r choisi assez général et le membre de droite défini comme en 8.1. Avec cette règle, (1) est clair. L'indépendance de r résulte de 8.1 (1) pour ℓ, r, r_1 et m, r, r_1, avec r et r_1 assez généraux.

L'hypothèse "assez général" a un sens et suffit à faire marcher les arguments si le corps de base est infini. Le cas d'un corps de base fini demande de plus une descente galoisienne.

Un autre problème est le sens à attribuer à une intersection de $(N - 1)$ $\mathrm{div}(\ell_i)$. On veut que ce soit une courbe à laquelle on puisse appliquer le théorème de Weil. Le plus simple ici est de ne considérer que des systèmes $\ell = (\ell_0, \ldots, \ell_N)$, $\ell_i = (\ell_i', \ell_i'')$ tels que chaque ℓ_i' ou ℓ_i'' soit non diviseur de zéro sur toute intersection de $\mathrm{div}(\ell_j') + \mathrm{div}(\ell_j'')$ $(j \neq i)$.

Ainsi modifié, l'argument 5.1 fonctionne encore sur une base S, pour autant qu'on le localise pour la topologie étale sur S. Dans 5.1.1, le produit des $f(P_\alpha)^{a_\alpha}$ est à remplacer par la norme de f, de l'intersection des $(\mathrm{div}(\ell_j') - \mathrm{div}(\ell_j''))$ $(j \neq i)$ à S. L'intersection considérée est un revêtement fini et plat virtuel de S.

8.3 Supposons que $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, que X est lisse et que les L_i sont munis de métriques. On définit une métrique sur $\langle L_0, \ldots, L_N \rangle$ par la formule suivante. Soient $\ell_i = \ell_i' / \ell_i''$ comme en 5.2, avec $D_i' := \mathrm{div}(\ell_i')$ et $D_i'' := \mathrm{div}(\ell_i'')$ lisses

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

et les D'_i et D''_i $(0 \leq i \leq N)$ en position générale. Pour $J \subset [0,N]$, soit $D(J)$ l'intersection des $D_j := D'_j - D''_j$. On aura à intégrer sur $D(_J)$. Par définition, une intégration sur $D(J)$ est la somme sur les $J_1 \subset J$ des $(-1)^{\#J_1}$ $\int_{D(J,J_1)}$, où $D(J, J_1)$ est l'intersection des $D'_j(j \in J - J_1)$ et des D''_j $(j \in J_1)$. On pose

$$(8.3.1) \quad \log\|\langle \ell_0, \ldots, \ell_N\rangle\| = \sum \int_{D(J)} \alpha_J ,$$

où la somme porte sur les $J \subset I$, $J \neq I$ et où, pour un $j(J)$ quelconque dans $[0,N] - J$, α_J est le produit des $\frac{1}{2\pi i}$ d'd" $\log\|\ell_j\|$ $(j \notin J, j \neq j(J))$ et de $\log\|\ell_{j(J)}\|$. La forme α_J dépend du choix de $j(J)$ mais non son intégrale. Le d'd" est pris au sens des distributions. On a encore (cf (4.3.2)).

$$(8.3.2) \quad \log\|\langle \ell_0, \ldots, \ell_N\rangle\| = \sum_{0 \leq i \leq N} \int_{D(]i,N])} \bigwedge_{j<i} \underline{\underline{c}}^1(L_j) \cdot \log\|\ell_i\| .$$

Cette construction se généralise au cas où X est projectif et lisse sur S de type fini sur $\mathbb{C}$.

8.4 Les constructions 8.1 à 8.3 sont symétriques en les L_i : pour toute permutation σ de $[0,N]$, on dispose de

$$a(\sigma) : \langle L_0, \ldots, L_N\rangle \xrightarrow{\sim} \langle L_{\sigma(0)}, \ldots, L_{\sigma(N)}\rangle .$$

Si $L_i = L_j$ (avec $i \neq j$) et que σ est la transposition qui échange i et j, on a $a(\sigma) = (-1)^n$ avec n un entier localement constant sur S. Cet entier est

$$n = \int_{X/S} c^1(L_i) \cdot \bigwedge_{k \neq i,j} c^1(L_k) ,$$

ainsi qu'on le vérifie par réduction au cas $N = 1$.

<u>Proposition</u> 8.5 Pour X lisse sur S, supposé lisse de type fini sur $\mathbb{C}$, et les L_i munis de métriques, on a

$$\underline{\underline{c}}^1(\langle L_0, \ldots, L_N\rangle) = \int_{X/S} \bigwedge \underline{\underline{c}}^1(L_i) .$$

Comme en 6.6, on se ramène au cas où chaque L_i est soit un $\mathcal{O}(D)$, avec D lisse, muni de la métrique singulière pour laquelle $\|1\| = 1$, soit est isomorphe à $\mathcal{O}$. Le cas où un L_i est un $\mathcal{O}(D)$ se ramène à un énoncé analogue sur D : on a une isométrie

$$\langle \mathcal{O}(D), L_1, \ldots, L_N\rangle = \langle L_1, \ldots, L_N\rangle \text{ sur } D .$$

Le cas où tous les L_i sont isomorphes à $\mathcal{O}$ se traite comme en 6.6.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

9. IC^2 et isomorphisme de Riemann-Roch

9.1 Soit $f: X \to S$ propre et plat purement de dimension relative 1. Pour P le polynôme C^2, 2.1 nous demande de construire un foncteur (pour les isomorphismes) $I_{X/S}C^2$ des fibrés vectoriels sur X vers les fibrés en droites sur S. La classe de Chern c^2 vérifie

(9.1.1) $\quad c^2(E) = 0$ pour E de rang 1, et

(9.1.2) $\quad c^2(E) = c^2(E') + c^2(E'') + c^1(E')\, c^1(E'')$

pour E une extension de E'' par E'. Ceci conduit à vouloir l'existence d'isomorphismes canoniques

(9.1.3) $\quad I_{X/S}C^2(E) = \mathcal{O}$ pour E de rang 1 ;

(9.1.4) $\quad I_{X/S}C^2(E) \simeq I_{X/S}C^2(E') \otimes I_{X/S}C^2(E'') \otimes \langle \det(E'), \det(E'')\rangle$.

9.2 Considérons la catégorie de Picard commutative suivante:

<u>objets</u>: triples (n, L, M) où $n \in \Gamma(X,\mathbb{Z})$ (un entier localement constant sur X), où L est un faisceau inversible sur X et où M est un faisceau inversible sur S ;

<u>flèches</u>: isomorphismes ;

<u>addition des objets</u>: $(n', L', M') + (n'', L'', M'')$ est le triple $(n' + n'', L' \otimes L'', M' \otimes M'' \otimes \langle L', L''\rangle)$.

Définissons l'isomorphisme d'associativité $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$. Posons $A_i = (n_i, L_i, M_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, $(A_1 + A_2) + A_3 = (n', L', M')$ et $A_1 + (A_2 + A_3) = (n'', L'', M'')$. On a

$$n' = n_1 + n_2 + n_3 = n''$$
$$L' = (L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 \simeq L_1 \otimes (L_2 \otimes L_3) = L''$$
$$M' = (M_1 \otimes M_2 \otimes \langle L_1, L_2\rangle) \otimes M_3 \otimes \langle L_1 \otimes L_2, L_3\rangle$$
$$M'' = M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3 \otimes \langle L_2, L_3\rangle) \otimes \langle L_1, L_2 \otimes L_3\rangle$$

et la bimultiplicativité de $\langle\ \rangle$ jointe aux isomorphismes usuels d'associativité et de commutativité pour $\otimes$ identifient tant M' que M'' à $\bigotimes_i M_i \otimes \bigotimes_{i<j} \langle L_i, L_j\rangle$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Définissons l'isomorphisme de commutativité $\sigma : A_1 + A_2 = A_2 + A_1$. Posons $A_i = (n_i , L_i , M_i)$ $(i = 1 , 2)$, $A_1 + A_2 = (n' , L' , M')$, $A_2 + A_1 = (n'' , L'' , M'')$. On a

$$n' = n_1 + n_2 = n''$$

$$L' = L_1 \otimes L_2 \quad , \; L'' = L_2 \otimes L_1 \quad \text{et}$$

$L' \to L''$ est $\ell_1\ell_2 \longmapsto (-1)^{n_1n_2}\ell_2\ell_1$

$$M' = M_1 \otimes M_2 \otimes \langle L_1 , L_2 \rangle$$

$$M'' = M_2 \otimes M_1 \otimes \langle L_2 , L_1 \rangle \quad \text{et}$$

$M' \to M''$ est $m_1 \otimes m_2 \otimes \langle \ell_1 , \ell_2 \rangle \longmapsto (-1)^N m_2 \otimes m_1 \otimes \langle \ell_2 , \ell_1 \rangle$

avec $N = \int_{X/S} n_1n_2(c^1(L_1) + c^1(L_2))$. Ce signe est justifié par le

<u>Lemme</u> 9.2.1 Les données d'associativité et de commutativité ci-dessus sont compatibles

$$\begin{tikzcd}
A_1 + A_2 + A_3 \arrow[rr, "\sigma(1,23)"] \arrow[dr, "\sigma(1,2) + A_3"'] & & A_2 + A_3 + A_1 \\
& A_2 + A_1 + A_3 \arrow[ur, "A_2 + \sigma(1,3)"'] &
\end{tikzcd}$$

Posons $A_i = (n_i , L_i , M_i)$, $c(i) = c^1(L_i)$ et soit $N(\; , \;)$ l'exposant de (-1) dans la définition de l'action de $\sigma(\; , \;)$ sur la troisième composante. Calculons les images d'une section locale $s = \langle \ell_1 , \ell_2 \rangle \langle \ell_1 , \ell_3 \rangle \langle \ell_2 , \ell_3 \rangle m_1m_2m_3$ de la troisième composante de $A_1 + A_2 + A_3$. Les m_i jouent un rôle de figurants et on les omettra de la notation. Pour calculer $\sigma(1,23)$ (s) , on récrit $s = \langle \ell_1 , \ell_2\ell_3 \rangle \langle \ell_2\ell_3 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\sigma(1,23)\,(s) &= (-1)^{N(1,23)} \langle \ell_2\ell_3 , \ell_1 \rangle \langle \ell_2 , \ell_3 \rangle \\
&= (-1)^{N(1,23)} \langle \ell_2 , \ell_3 \rangle \langle \ell_2 , \ell_1 \rangle \langle \ell_3 , \ell_1 \rangle .
\end{aligned}$$

Pour calculer $(\sigma(1,2) + A_3)$ (s) , on récrit $s = \langle \ell_1 , \ell_2 \rangle \langle \ell_1\ell_2 , \ell_3 \rangle$. Par $\sigma(1,2)$, $\langle \ell_1 , \ell_2 \rangle$ donne $(-1)^{N(1,2)} \langle \ell_2 , \ell_1 \rangle$ et $\ell_1\ell_2$ donne $(-1)^{n_1n_2}\ell_2\ell_1$, d'où

$$\begin{aligned}
(\sigma(1,2) + A_3)\,(s) &= (-1)^{N(1,2)} \langle \ell_2 , \ell_1 \rangle \langle (-1)^{n_1n_2}\ell_2\ell_1 , \ell_3 \rangle \\
&= (-1)^{N(1,2) + \int n_1n_2c(3)} \langle \ell_2 , \ell_1 \rangle \langle \ell_2 , \ell_3 \rangle \langle \ell_1 , \ell_3 \rangle .
\end{aligned}$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

De même,

$$(A_2 + \sigma(1,3))\ (\langle \ell_2 , \ell_1\rangle \langle \ell_2 , \ell_3\rangle \langle \ell_1 , \ell_3\rangle)$$
$$= (-1)^{N(1,3) + \int n_1 n_3 c(2)} .$$

Il reste à vérifier une congruence modulo 2

$$N(1,23) \equiv N(1,2) + \int n_1 n_2 c(3) + N(1,3) + \int n_1 n_3 c(2) .$$

Avant intégration de X à S, on a en effet

$$n_1(n_2 + n_3)\ (c(1) + c(2) + c(3)) = n_1 n_2 (c(1) + c(2)) + n_1 n_2 c(3)$$
$$+ n_1 n_3 (c(1) + c(3)) + n_1 n_3 c(2) .$$

Pour la deuxième composante, on retrouve la compatibilité entre associativité et commutativité pour les faisceaux inversibles gradués. Ceci termine la preuve de 9.2.1.

La vérification, plus facile, des autres axiomes de catégories de Picard commutatives est laissée au lecteur.

9.3 Une version précisée de (9.1.4) est qu'on veut que le foncteur $E \to (\mathrm{rg}(E)$, $\det(E)$, $I_{X/S}C^2(E))$ se factorise par un morphisme de catégories de Picard commutative des fibrés virtuels sur X dans la catégorie 9.2 - la compatibilité à $+$ prolongeant celle de

$$(\text{fibrés virtuels}) \longrightarrow (\mathrm{rg}(E) , \det(E)) .$$

On veut de plus une compatibilité à tout changement de base S'/S (i.e. un morphisme de préchamps en catégories de Picard commutatives de $f_*\underline{K}(X)$ vers le champ sur S de catégories 9.2) . La proposition suivante est un résultat d'existence et d'unicité pour un tel foncteur IC_2 , muni de données additionnelles et satisfaisant à des axiomes additionnels. On y suppose f lisse. Localement sur S pour la topologie étale, X est alors quasi-projectif et un faisceau cohérent Q sur X de Tor-dimension finie sur S définit un fibré vectoriel virtuel $[Q]$ sur X . On posera $IC_2(Q) := IC_2([Q])$.

<u>Proposition</u> 9.4 Soit f comme en 9.1, supposé lisse. A isomorphisme unique près, il existe un et une seul foncteur IC_2 , muni, de façon compatible à tout changement de base, de données du type suivant.

(i) Le foncteur $T: E \longmapsto (\mathrm{rg}(E)$, $\det E$, $IC_2(E))$ est muni, pour chaque suite

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

exacte courte $E' \to E \to E''$ d'un isomorphisme $T(E) \sim T(E') + T(E'')$. Cette donnée prolonge la donnée analogue pour $E \longmapsto (\mathrm{rg}\, E, \det E)$, et est compatible à l'associativité et à la commutativité: T se factorise par un morphisme de $\underline{\underline{K}}(X)$ dans la catégorie de Picard commutative 9.2.

(ii) Pour L un fibré en droites, $IC_2(L)$ est trivialisé.

(iii) Soient s une section de X/S, Q' un fibré en droites sur S, $Q = s_*Q'$. Soit L un fibré en droites sur X prolongeant Q (i.e. tel que $Q' = s^*L$). La suite exacte courte

$$0 \to L(-s(S)) \to L \to Q \to 0$$

et (i) fournissent un isomorphisme

$$IC_2(L\ (-s(S))\ \ IC_2(Q) \langle L(-s(S)), \det(Q)\rangle = IC_2(L),$$

d'où par (ii) et parce que $\det(Q) = \mathcal{O}(s(S))$ un isomorphisme

$$IC_2(Q)\ s^*(L(-s(S))) = 0, \quad \text{i.e.}$$

$$IC_2(Q) \simeq (s^*Q)^{-1}\ s^*\mathcal{O}(s(S)).$$

On exige que cet isomorphisme soit indépendant de L.

<u>Remarques</u>: (a) La condition (iii) n'est pas conséquence de (i) (ii). En effet, si on modifie les données de trivialisation (ii) par un facteur $\lambda(\deg L)$, elle ne reste vérifiée que si $n \longmapsto \lambda(n)$ est de la forme $n \longmapsto \lambda^n$.

(b) La formulation de (iii) utilise que, par (i), T est prolongé à $\underline{\underline{K}}(X)$. Soient L_1 et L_2 deux fibrés en droites munis d'un isomorphisme $s^*L_i = Q$. Comparons les présentations $Q = L_i/L_i(-s)$ à $0 \to E \to L_1 \oplus L_2 \to Q \to 0$.

D'après 4.8 appliqué au diagramme des 9

$$\begin{array}{ccccc} L_1(-s) & \to & L_1 & \to & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ E & \to & L_1 \oplus L_2 & \to & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & = & L_2 & \to & 0 \end{array},$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(L_1 \oplus L_2) & = & T(L_1) + T(L_2) \\ \| & & \| \\ T(E) + T(Q) & = & T(L_1(-s)) + T(L_2) + T(Q) \end{array}$$

est commutatif. L'isomorphisme

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$T(L_1) - T(L_1(-s)) = T(Q) = T(L_1 \oplus L_2) = T(E)$$

est donc déduit des isomorphismes $T(L_1 \oplus L_2) = T(L_1) + T(L_2)$ et $T(E) = T(L_1(-s)) + T(L_2)$: les soustraire membre à membre. En termes où seuls apparaissent des fibré vectoriels, (iii) affirme la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} T(L_1) - T(L_1(-s)) \arrow[dr, "(s^*(Q))^{-1}"'] & = T(L_1) + T(L_2) - T(E) = T(L_2) + T(L_2(-s)) \\ & s^*\mathcal{O}(s(S)) \arrow[ur] \end{tikzcd}$$

(c) Nous écrirons la preuve sous l'hypothèse que S est le spectre d'un corps algébriquement clos et que X est connexe. Le cas général se traite de même: remplacer "point" par "section" et parsemer de "localement pour la topologie étale". Nous donnerons ensuite une seconde preuve de l'existence, sans cette hypothèse simplificatrice.

9.5 <u>Preuve de l'unicité</u> Tout fibré vectoriel E admet une filtration $0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_d = E$, avec F_i un fibré vectoriel de rang i localement facteur direct dans E. On peut construire une telle filtration comme suit. Si E est de rang ≤ 1 , il n'y a rien à faire. Sinon, on choisit un fibré en droite L . Si L est assez négatif pour que $E \otimes L^{-1}$ soit engendré par ses sections, une section générale s ne s'annulle nulle part et définit $f:L \to E$ localement facteur direct. On prend $F_1 = f(L)$ et on recommence avec E/F_1 . Si une filtration F est donnée et qu'on construit G par le procédé précédent, général, et avec L chaque fois choisi assez négatif, F et G seront en position générale au sens suivant. En dehors d'un ensemble fini S de points, F et G sont opposées: il existe une décomposition $E = \bigoplus_1^d L_i$ avec $F_a = \bigoplus_{i \leq a} L_i$, $G_a = \bigoplus_{i > d-a} L_i$. Au voisinage de chaque $s \in S$, il existe une seule valeur a de i $(1 \leq a < d)$ pour laquelle $F_i \oplus G_{d-i+1}$ ne soit pas tout E , et $\operatorname{coker}(F_a \oplus G_{d-a+1} \to E)$ est ponctuel de rang 1 . Au voisinage de s , (E , F , G) est alors isomorphe au modèle suivant: le faisceau modèle M est le sous-faisceau de $\mathcal{O}(s)^d$ de sections les $(f_1 \ldots f_d)$ avec f_i dans $\mathcal{O}$ pour $i \neq a , a+1$ et f_a , f_{a+1} de mêmes parties polaires. Les filtrations F , G sont induites par les filtrations opposées évidentes (cf. ci-dessus) de $\mathcal{O}(s)^d$.

<u>Notations</u> 9.5.1 Pour F et G deux filtrations en position générale de E , nous utiliserons les notations suivantes: $L_i := F_i \cap G_{d-i+1}$, $E' = \oplus L_i$, S l'ensemble des points où F et G ne sont pas opposées, $a(s)$ l'entier i tel que $F_i \oplus G_{d-i+1} \xrightarrow{\not\sim} E$ en s , Q_s les faisceaux ponctuels de rang un, avec Q_s localisé

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

en s , donnant lieu à la suite exacte

$$0 \to E' \to E \to \bigoplus_{s \in S} Q_s \to 0 .$$

Pour L un fibré en droite, soit $T(L) = (1 , L , \mathcal{O})$ dans la catégorie 9.2. Pour Q ponctuel de rang un, en s , soit $T(Q) = (0 , \mathcal{O}(s) , (s^*Q)^{-1} \otimes \tau_s)$, où τ_s est l'espace tangent en s . Pour une suite exacte $0 \to L(-s) \to L \to Q \to 0$, on définit

$$T(L(-s)) + T(Q) \xrightarrow{\sim} T(L) \tag{9.5.2}$$

par la flèche évidente $L(-s) \otimes \mathcal{O}(s) \simeq L$ et par

$$(s^*Q)^{-1} \otimes \tau_s \otimes \langle L(-s) , \det Q\rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$$

défini comme suit: $\det Q = \mathcal{O}(s)$, $\langle L(-s) , \det Q\rangle = s^*L(-s) = s^*L \otimes s^*\mathcal{O}(-s) = s^*Q \otimes m_s/m_s^2$, et on prend l'isomorphisme évident

$$(s^*Q)^{-1} \otimes \tau_s \otimes s^*Q \otimes m_s/m_s^2 \to \mathcal{O} .$$

Soient T_1 et T_2 deux foncteurs $(\mathrm{rg}\, E, \det E , IC_2(E))$ comme en 9.4. Pour E de rang 1, la donnée (ii) définit un isomorphisme $T_i(E) = T(E)$. Pour Q ponctuel de rang un, et L un fibré en droites muni d'un isomorphisme $Q_s = L_s$, soit $T_i(Q) \xrightarrow{\sim} T(Q)$ l'isomorphisme rendant commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_i(L(-s)) + T_i(Q) & \xrightarrow{\sim} & T_i(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(L(-s)) + T(Q) & \xrightarrow{\sim} & T(L) \end{array} .$$

D'après 9.4 (iii), il ne dépend pas du choix de L .

Pour F une filtration de E de quotients successifs des fibrés en droites, soit $\phi(F)$ l'isomorphisme composé

$$T_1(E) = \sum T_1(\mathrm{Gr}_i^F E) = \sum T(\mathrm{Gr}_i^F E) = \sum T_2(\mathrm{Gr}_i^F E) = T_2(E) ,$$

somme, rel 9.4 (ii), des $T_1(\mathrm{Gr}_i^F E) = T(\mathrm{Gr}_i^F E) = T_2(\mathrm{Gr}_i^F E)$.

Soit $E_1 \subset E$ avec un quotient ponctuel de rang un, en un point s :

$$0 \to E_1 \to E \to Q \to 0$$

La filtration F de E induit une filtration, encore notée F , de E_1 . Sauf pour une valeur, a , de i , on a $\mathrm{Gr}_i^F(E_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_i^F(E)$. Pour $i = a$, on a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_i^F E_1 \longrightarrow \mathrm{Gr}_i^F E \longrightarrow Q \longrightarrow 0 .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Appliquant 4.7 aux filtrations F et $E \supset E' \supset \{0\}$ de E, on trouve un diagramme commutatif dans $\underline{K}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} [E] & \longrightarrow & \sum[\mathrm{Gr}_i^F E] \\ \Big| & & \Big| \\ [E_1] + [Q] & \longrightarrow & (\sum[\mathrm{Gr}_i^F E_1]) + [Q] \end{array}$$

(flèche verticale droite déduite de $[\mathrm{Gr}_a^F E_1] + [Q] = [\mathrm{Gr}_a^F E]$). Passant par le coin supérieur droit, on trouve que $\phi(F)$ est compatible aux

$$T_i([E]) = \sum T_i([\mathrm{Gr}_i^F E_1]) + T_i([Q]) = \sum T(\mathrm{Gr}_i^F E_1) + T(Q) .$$

Passant par le coin inférieur gauche, on en déduit une compatibilité entre $\phi(F)$ pour E et E_1 :

$$\begin{array}{ccc} T_1(E) & \xrightarrow{\phi(F)} & T_2(E) \\ \Big| & & \Big| \\ T_1(E_1) + T(Q) & \xrightarrow{\phi(F')} & T_2(E_1) + T(Q) \end{array}$$

(flèches verticales: additivité de T_i pour $E_1 \to E \to Q$ et $T_i(Q) = T(Q)$) .

Montrons que $\phi(F)$ est indépendant de F . Deux filtrations étant toujours en position générale par rapport à une même troisième, il suffit de vérifier que $\phi(F) = \phi(G)$ si F et G sont en position générale. On passe de E à E' (notations 9.5.1) par une suite de modifications du type considéré plus haut. Il suffit donc de prouver que $\phi(F) = \phi(G)$ pour E' , i.e. pour une somme $\bigoplus_i^d L_i$ munie des deux filtrations opposées évidentes. Celà résulte de ce que T_1 et T_2 sont supposés compatibles à la commutativité:

$$\begin{tikzcd} & \sum T_1(L_i) \arrow[r, dash] & \sum T_2(L_i) \arrow[dr, dash, "F"] & \\ T_1(E_1) \arrow[ur, dash, "F"] \arrow[dr, dash, "G"'] & & & T_2(E_1) \\ & \sum T_1(L_i) \arrow[r, dash] & \sum T_2(L_i) \arrow[ur, dash, "G"'] & \end{tikzcd} .$$

Les $\phi(F)$ définissent un isomorphisme de foncteurs $T_1 \xrightarrow{\sim} T_2$, compatible aux trivialisations 9.4 (ii). Pour vérifier qu'il est compatible à l'additivité par suites exactes $E_1 \to E \to E_2$, prendre F avec E_1 = l'un des F_a .

9.6 <u>Preuve de l'existence</u> Nous allons prouver l'assertion 9.4 d'existence par

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

une méthode suggérée par la preuve 9.5 de l'unicité. Pour simplifier la rédaction, on continue à supposer X connexe sur k algébriquement clos.

Soient E un fibré de rang d sur X et F une filtration de E de quotients successifs des fibrés en droites. On pose

$$T(E\ ,\ F) := \sum T(\mathrm{Gr}_i^F\ E)$$

Soit $E_1 \subset E$ avec $Q := E/E_1$ ponctuel de rang un. Pour chaque valeur de i sauf une, on a $\mathrm{Gr}_i^F E_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_i^F E$. Pour la valeur exceptionnelle, $i = a$, on a une suite exacte courte $\mathrm{Gr}_i^F E_1 \to \mathrm{Gr}_i^F E \to Q$ et (9.5.2) fournit un isomorphisme

$$T(E\ ,\ F) = T(E_1\ ,\ F) + T(Q)\ . \tag{9.6.1}$$

Soient L un fibré en droites s et t , deux points distincts, $Q_s = L/L(-s)$ et $Q_t = L/L(-t)$. On vérifie que le diagramme d'isomorphismes (9.5.2) (= (9.6.1))

$$\begin{array}{ccc} T(L) & \text{———} & T(L(-s)) + T(Q_s) \\ \Big| & & \Big| \\ T(L(-t)) + T(Q_t) & \text{——} & T(L(-s-t)) + T(Q_s) + T(Q_t) \end{array} \tag{9.6.2}$$

est commutatif.

Soient Q_1 et Q_2 ponctuels de rang 1, de supports des points distincts, E' le noyau d'un épimorphisme de E dans $Q_1 + Q_2$ et $E_i := \mathrm{Ker}(E \to Q_i)$. Soit $a(i)$ l'entier tel que $\mathrm{Gr}_{a(i)}^F E_i \to \mathrm{Gr}_{a(i)}^F E$ ne soit pas un isomorphisme. Le diagramme d'isomorphismes 9.6.1

$$\begin{array}{ccc} T(E\ ,\ F) & \text{———} & T(E_1\ ,\ F) + T(Q_1) \\ \Big| & & \Big| \\ T(E_2\ ,\ F) + T(Q_2) & \text{——} & T(E'\ ,\ F) + T(Q_1) + T(Q_2) \end{array} \tag{9.6.3}$$

est commutatif. Si $a(1) \neq a(2)$, c'est trivial (plutôt: exprime que les contraintes d'associativité et de commutativité de la catégorie 9.2 sont compatibles). Si $a(1) = a(2)$, cela résulte de (9.6.2).

Soient F et G comme en 9.5.1, dont nous reprenons les notations. Itérant la construction (9.6.1), on obtient un isomorphisme

$$T(E\ ,\ F) = T(E'\ ,\ F) + \sum T(Q_s) = \sum T(L_i) + \sum T(Q_s)$$

et de même pour G . L'itération suppose le choix d'un ordre total sur S mais il résulte de (9.6.3) que l'isomorphisme obtenu n'en dépend pas. Le membre de droite étant le même pour F et G , on obtient un isomorphisme

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

(9.6.4) $$T(E\ ,\ F) \xrightarrow{\sim} T(E\ ,\ G)\ .$$

Disons que deux filtrations F et G sont <u>adjacentes</u> si il existe a tel que $F_i = G_i$ pour $i \neq a$ et que F et G induisent sur F_{a+1}/F_{a-1} des filtrations en position générales. On a $T(E\ ,\ F) = \sum_{i \neq a;a+1} T(Gr_i^F(E)) + T(F_{a+1}/F_{a-1}\ ,\ F)$, de même pour G , et l'isomorphisme (9.6.4) pour $F_{a+1}/F_{a-1} = G_{a+1}/G_{a-1}$ fournit

(9.6.5) $$T(E\ ,\ F) \xrightarrow{\sim} T(E\ ,\ G)\ .$$

Soient Q ponctuel de rang un, localisé en s , et E_1 le noyau d'un épimorphisme de E dans Q . Dans divers cas où cela a un sens, les isomorphismes (9.6.1) et (9.6.4) (resp et (9.6.5)) donnent lieu à un diagramme commutatif

(9.6.6) $$\begin{array}{ccc} T(E\ ,\ F) & \text{———} & T(E_1\ ,\ F) + T(Q) \\ | & & | \\ T(E\ ,\ G) & \text{———} & T(E_1\ ,\ G) + T(Q)\ . \end{array}$$

<u>Cas</u> 1: F et G en position général, et, avec les notations 9.5.1

<u>sous-cas</u> (a): $s \notin S$ et , pour un a , $L_i \to Q$ est non trivial si et seulement si $i = a$

<u>sous-cas</u> (b): $s \notin S$ et , pour un a , $L_i \to Q$ est non trivial si et seulement si $i = a$ ou $a + 1$

<u>sous-cas</u> (c): $s \notin S$ et en s , $E_1 = E'$.

<u>Cas</u> 2: F et G adjacentes, avec $F_a \neq G_a$ et, posant $F_1 = F_{a+1}(E_1)/F_{a-1}(E_1)$, $F = F_{a+1}(E)/F_{a-1}(E)$, on a soit

<u>sous-cas</u> (a) (b) (c): $F_1 \to F$ n'est pas un isomorphisme et F , muni des filtrations F , G et de F_1 est justifiable des cas 1 (a) (b) (c)

<u>sous-cas</u> (d): $F_1 \xrightarrow{\sim} F$, i.e. $F_{a+1}(E_1) \xrightarrow{\sim} F_{a+1}(E)$ ou $F_{a-1}(E_1)$ ne s'envoie pas isomorphiquement sur $F_{a-1}(E)$.

Le cas 1 (a) se déduit de (9.6.3) et le cas 1 (c) est la définition de 9.6.4. Prouvons 1 (b). Appliquant 9.6.3, on se ramène à supposer que $E = \oplus L_i$. On se ramène aussi au cas où $d = 2$. Soient $L = F_1$, $M = G_1$. On a $L_s \sim Q_s \sim M_s$. On a $T(E\ ,\ F) = T(L) + T(M)$, $T(E\ ,\ G) = T(M) + T(L)$, (9.6.4) = symétrie. On a $T(E_1\ ,\ F) = T(L(-s)) + T(M)$, $T(E_1\ ,\ G) = T(M(-s)) + T(L)$ et (9.6.4) est $T(L(-s)) + T(M) = T(L(-s)) + T(M(-s)) + T(Q) = T(M(-s)) + T(L(-s)) + T(Q) = T(M(-s)) + T(L)$. Il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$\begin{array}{ccccc} T(L) + T(M) & — & (T(L(-s)) + T(M)) + T(Q) & — & (T(L(-s)) + T(M(-s))) + T(Q) + T(Q) \\ | & & & & | \\ T(M) + T(L) & — & (T(L) + T(M(-s))) + T(Q) & — & (T(M(-s)) + T(L(-s)) + T(Q) + T(Q) \end{array}$$

(à droite, symétrie pour $T(L(-s)) + T(M(-s)))$. Elle résulte de ce que l'automorphisme de symétrie de $T(Q) + T(Q)$ est l'identité.

Les cas 2(a) (b) (c) se ramènent à 1 (a) (b) (c) et 2 (d) est trivial.

Soient F , G en position générale et reprenons les notations (9.5.1). Pour chaque permutation σ de $\{1 ,\dots, d\}$, soit F_σ la filtration de E , de quotients successifs des fibrés en droites, qui induit sur E' la filtration par les $\bigoplus_{i\leq a} L_{\sigma(i)}$. Pour τ la transposition de deux entiers consécutifs, F_σ et $F_{\sigma\tau}$ sont adjacentes. Pour $\sigma = (1 ,\dots, d)$ (resp $(d ,\dots, z)$) , $F_\sigma = F$ (resp G) . Joignons F à G par une chaîne $F = F(0) , F(1) ,\dots, F(N) = G$ de F_σ , avec $F(i + 1)$ adjacent à $F(i)$.

<u>Lemme</u> 9.6.7 L'isomorphisme (9.6.4) est le composé des isomorphismes (9.6.5) :

$$T(E , F(0)) \to T(E , F(1)) \to \dots \to T(E , F(N)) .$$

Pour $s \in S$, si $E_1 = \mathrm{Ker}(E \to Q_s)$, on vérifie que (9.6.6) s'applique à $E_1 \subset E$ et aux paires de filtrations (F , G) (cas 1 (b)) ou $(F(i) , F(i + 1))$ (cas 2) . Ceci ramène l'énoncé pour E au même énoncé pour E_1 . Itérant, on se ramène au cas trivial où $E = \bigoplus L_i$.

<u>Lemme</u> 9.6.8 Pour F , G , H trois filtrations en position générale (en un sens qui sera précisé), le triangle d'isomorphismes (9.6.4)

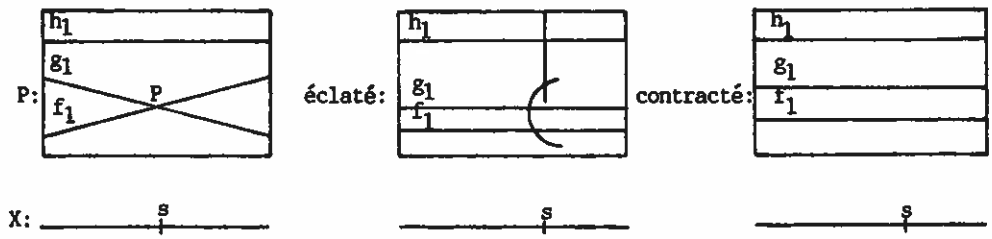
$$\begin{array}{ccc} T(E , G) & \text{———} & T(E , G) \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & T(E , H) & \end{array}$$

est commutatif.

Le cas où E est de rang ≤ 1 est trivial. Supposons E de rang 2 et prenons comme hypothèse de position générale que F , G , H sont deux à deux en position générale avec des lieux exceptionnels disjoints. Soit P le fibré en droites projectives $\mathbb{P}(E^\vee)$. Les droites F_1 , G_1 , H_1 définissent trois sections f_1 , g_1 , h_1 de P/X . L'hypothèse de position générale est qu'elles ne se coupent que deux à deux, et transversalement. Si f_1 et g_1 se coupent en p au-dessus de $s \in X$, la modification, en s , qui remplace E par $E_1 = F_1 + G_1$, remplace

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

P par un contracté de l'éclaté de P en p : contracter le transformé par de la fibre en s . Après cette modification, la trace $H_1(-s)$ de H_1 sur E' reste, en s , un supplément de F_1 et G_1 . Dessin sur P :



Soit $Q := E/E_1$. Par définition (ou 9.6.6, cas 1 (b)) ,le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(E\ ,\ F) & \xrightarrow{\sim} & T(E\ ,\ G) \\ | & & | \\ T(\ E'\ ,\ F) + T(Q) & \xrightarrow{\sim} & T(\ E'\ ,\ G) + T(Q) \end{array}$$

est commutatif. Par 9.6.6 (cas 1 (a)) ,

$$\begin{array}{ccc} T(E\ ,F) & \longrightarrow & T(E\ ,\ H) \\ | & & | \\ T(E\ '\ ,\ F) + T(Q) & \longrightarrow & T(E'\ ,\ H) + T(Q) \end{array}$$

l'est également et de même pour G et H . La commutativité 9.6.8 pour E équivaut donc à la même commutativité pour E' . Itérant cette construction, on se ramène à supposer les sections f_1 , g_1 , h_1 de P disjointes. Cela signifie que $E = L + L$, avec $F_1 = L + 0$, $G_1 = 0 + L$, H_1 = image diagonale de L . Traitons ce cas. Pour M un sous-fibré en droites de E localement facteur direct, la troisième composante de $T(E$, filtration par M) est $\langle M\ ,\ E/M\ \rangle$, d'élément typique $\langle a\ ,\ b\rangle$ avec a (resp b) une section rationnelle de M (resp E/M) . Pour $\tilde{b}$ une section rationnelle de E d'image b dans E/M , on écrira encore $\langle a\ ,\ \tilde{b}\rangle$ pour $\langle a\ ,\ b\rangle$. Avec ces notations, les isomorphismes du triangle 9.6.8 induisent sur la troisième composante des $T(E\ ,\ *)$, la seule qui pose problème, les isomorphismes suivants. Pour a et b des sections rationnelles de L à diviseurs disjoints, on a

$$\begin{array}{ccc} \langle(a,0)\ ,\ (0,b)\rangle & \longmapsto & \langle(0,b)\ ,\ (a,0)\rangle \\ \| & & \| \\ \langle(a,0)\ ,\ (b,b)\rangle & & \langle(0,b)\ ,\ (a,a)\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle b,b)\ ,\ (a,0)\rangle = \langle(b,b)\ ,\ (0,-a)\rangle & & \langle(a,a)\ ,\ (0,b)\rangle \end{array}$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

car le signe $(-1)^N$, $N = 1.1.(\deg L + \deg L)$ est $+1$. La commutativité (9.6.8) affirme donc que dans $\langle L , L\rangle$ on a

$$\langle a,b\rangle = \langle b,-a\rangle .$$

On a en effet $\langle b,-a\rangle = (-1)^{\deg L}\langle b,a\rangle$ et $\langle a,b\rangle = (-1)^{\deg L}\langle b,a\rangle$.

Supposons maintenant E de rang ≥ 3 et prenons comme hypothèse de position générale que F et G sont en position générale et que, pour une chaîne $F(i)$ comme en 9.6.7, H est en position générale avec chacun des $F(i)$, et opposé aux $F(i)$ aux points exceptionnels pour (F , G) . La factorisation 9.6.7 ramène 9.6.8 au lemme suivant

<u>Lemme</u> 9.6.9 Pour F et G adjacentes et H en position générale par rapport à F et à G , et opposé à F et G aux points exceptionnels pour (F , G) , le triangle d'isomorphismes 9.6.4 et 9.6.5

$$\begin{tikzcd} T(E , F) \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash] & & T(E , G) \arrow[dl, dash] \\ & T(E , H) & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit a l'entier tel que $F_a \neq G_a$. Pour $i \neq a , a+1$, soit $L_i = F_i \cap H_{d-1+1}$. Soit $F = F_{a+1} = H_{d-a+1}$, de rang 2, et $L^F = F_a \cap H_{d-a+1}$, $L^G = G_a \cap H_{d-a+1}$, $L^H = F_{a+1} \cap H_{d-a}$ les traces de F_a , G_a et H_{d-a} sur F . En dehors d'un nombre fini de points, on a $E = \oplus L_i \oplus F$, $F = L^F \oplus L^G = L^F \oplus L^H = L^G \oplus L^H$, et F , G , H sont donnés de façon évidentes en terme de ces décompositions.

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'en les points exceptionnels s , on a soit

(a) $E = \oplus L_i \oplus F$ et L^F , L^G , L^H sont en position générale dans F (cas où en s $F_a = G_a$, F_a n'est pas un supplémentaire de H_{d-a+1} , ou G_a n'est pas un supplémentaire de H_{d-a+1})

(b) F_i n'est pas un supplémentaire de H_{d-i+1} pour

(b1) $i = a-1$, (b2) $i = a+1$, (b3) $i \neq a , a-1 , a+1$.

Si s est du type (b) et que $E_1 = E$ en dehors de s et vaut $\oplus L_i \oplus F$ en s ,

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

(9.6.6) s'applique à $E_1 \subset E$ et à (F, G), (F, H), (G, H). L'assertion (9.6.9) pour E équivaut donc à la même pour E_1. Pour E_1, s n'est plus exceptionnel, ou est du type (a) (si s était du type (b1)). Le cas où tous les points exceptionnels sont du type (a) se ramène au rang deux, déjà traité.

Fin de la preuve d'existence. Soient F et G deux filtrations de E. On définit

(9.6.10) $$T(E, F) \xrightarrow{\sim} T(E, G)$$

comme le composé des isomorphismes (9.6.4)

$$T(E, F) \simeq T(E, H) \simeq T(E, G)$$

pour H en position générale par rapport à F et G.

D'après (9.6.8) appliqué à (F, H, H'') et à (G, H, H'), deux filtrations H, H' donnent lieu au même isomorphisme (9.6.10) si (F, H, H'), (G, H, H') sont en position générale, donc toujours. D'après (9.6.8) (resp 9.6.9), l'isomorphisme (9.6.10) coïncide avec (9.6.4) (resp (9.6.5)) si ce dernier est défini. Les isomorphismes (9.6.10) forment un système transitif d'isomorphisme et on note $T(E)$ la valeur commune des $T(E, F)$. Pour une suite exacte courte $E' \to E \to E''$, une filtration F avec $E' = F_a$ pour un a définit un isomorphisme

$$T(E) = T(E, F) = T(E', F) + T(E'', F) = T(E') + T(E'') .$$

Cet isomorphisme est indépendant du choix de F (comparer deux F par une chaîne de filtrations adjacentes). C'est une donnée 9.4 (i) sur T. Pour E de rang un, F est unique et $T(E) = T(E, F) = T(E)$ déjà défini, d'où une donnée 9.4 (ii) vérifiant 9.4 (iii). La troisième composante de T est le foncteur IC_2 voulu.

9.7 Autre preuve de l'existence.

Si v est un fibré virtuel de rang zéro et de déterminant trivial sur X : $ch^0(v) = ch^1(v) = 0$, on a $ch^2(v) = -c^2(v)$ et la formule de Riemann-Roch s'écrit

$$c_1 f_* v = \int_{X/S} - c^2(v) .$$

Soit $R(v) = (v - 0^{rg E}) - (\det v - 0)$. On a

(9.7.1) $$v = 0^{rg\, v} + (\det v - 0) + R(v)$$

et, appliquant c^* à l'égalité correspondante dans K_0, on obtient $ch^0 R(v) = c^1 R(v) = 0$, $c^2 R(v) = c^2(v)$.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Ces formules suggèrent de définir

$$(9.7.2)\qquad I_{X/S}C^2(E) := \det f_*(-R(E)) := \det f_*((\det E - \mathcal{O}) - (E - \mathcal{O}^{\mathrm{rg}E})) .$$

et plus généralement, pour v dans $\underline{K}(X)$, $I_{X/S}C^2(v) = \det f_*(-R(v))$.

Etudions l'additivité en v des foncteurs $v \longmapsto \mathcal{O}^{\mathrm{rg}\, v}$ et $v \longmapsto (\det v - \mathcal{O})$, et par là, par 9.7.1, de $v \longmapsto R(v)$.

Pour n et m deux entiers, définissons

$$(9.7.3)\qquad \mathcal{O}^n \oplus \mathcal{O}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{n+m}$$

par $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_m) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Soit $(\mathbf{Z})$ la catégorie de Picard commutative d'ensemble d'objets $\Gamma(X, \mathbf{Z})$, de flèches les isomorphismes identiques, et d'addition $+$. Alors, $v \longmapsto \mathrm{rg}(v)$ et $n \longmapsto [\mathcal{O}^n]$ (muni de 9.7.3) sont des morphismes de catégories de Picard. Le premier est compatible à la commutativité, le second non: il s'en faut de $\varepsilon(\mathcal{O})^{nm}$. Le foncteur $v \longmapsto [\mathcal{O}^{\mathrm{rg}(v)}]$ a donc pour défaut de compatibilité à la commutativité

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\mathrm{rg}(v)} + \mathcal{O}^{\mathrm{rg}\, w} \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash, "(9.7.2)"'] & & \mathcal{O}^{\mathrm{rg}\, w} + \mathcal{O}^{\mathrm{rg}\, v} \arrow[dl, dash, "(9.7.2)"] \\ & \mathcal{O}^{\mathrm{rg}(v+w)} & \end{tikzcd}$$

l'élément $\varepsilon(\mathcal{O})^{\mathrm{rg}(v)\,\mathrm{rg}(w)}$ de K_1 , représenté par l'automorphisme $(-1)^{\mathrm{rg}(v)\,\mathrm{rg}(w)}$ de $\mathcal{O}$.

Pour L et M deux fibrés en droites, plusieurs définitions d'un isomorphisme d'objets virtuels

$$(9.7.4)\qquad (L \otimes M - \mathcal{O}) = (L - \mathcal{O}) + (M - \mathcal{O}) + (L - \mathcal{O}) \otimes (M - \mathcal{O})$$

sont possibles ($(-\mathcal{O}) \otimes (-\mathcal{O}) \sim \mathcal{O}$ à droite, ordre des $\mathcal{O}$ à gauche) . Les isomorphismes obtenus diffèrent par $\varepsilon(\mathcal{O})$. On choisit la définition pour laquelle, si $L = \mathcal{O}(D)$ et $M = \mathcal{O}(E)$ (d'où $\mathcal{O}(D) - \mathcal{O} = [\mathcal{O}_D(D)]$, ...) et que D et E sont disjoints, l'isomorphisme obtenu est déduit des l'isomorphismes $\mathcal{O}_{D+E}(D + E) = \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_E(E)$ et de la trivialisation

$$(\mathcal{O}(D) - \mathcal{O})\,(\mathcal{O}(E) - \mathcal{O}) = \mathcal{O}_D(D) \otimes \mathcal{O}_E(E) = 0$$

(car les supports sont disjoints). L'isomorphisme 9.7.4 a les compatibilités suivantes à l'associativité et à la commutativité (on omet les signes $\otimes$):

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

(9.7.5)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & LMN - 0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(L - 0) + (MN - 0) + (L - 0)(MN - 0) \arrow[dr, dash] & & (LM - 0) + (N - 0) + (LM - 0)(N - 0) \arrow[dl, dash] \\
 & (L - 0) + (M - 0) + (N - 0) + (L - 0)(M - 0) + (L - 0)(N - 0) + (M - 0)(N - 0) + (L - 0)(M - 0)(N - 0) &
\end{tikzcd}$$

(9.7.6)

$$\begin{tikzcd}
(LM - 0) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (L - 0) + (M - 0) + (L - 0)(M - 0) \arrow[d, dash] \\
(LM - 0) \arrow[r, dash] & (M - 0) + (L - 0) + (M - 0)(L - 0)
\end{tikzcd}$$

Pour le foncteur $v \longmapsto (\det v - 0)$, l'isomorphisme $\det(v + w) = \det(v) \otimes \det(w)$ et (9.7.3) fournissent

(9.7.7) $(\det(v + w) - 0) = (\det v - 0) + (\det w - 0) + (\det v - 0)(\det w - 0)$

et pour cet isomorphisme une compatibilité à la (9.7.5) à l'associativité. Par contre, det n'étant pas compatible à la commutativité, (9.7.7) ne l'est pas non plus: il s'en faut de l'élément de K_1 représenté par l'automorphisme $(-1)^{rg(v)rg(w)}$ de $\det(v + w)$.

L'isomorphisme (9.7.1) et les compatibilités à l'additivité (9.7.3) (9.7.7) fournissent pour $R(v)$ un isomorphisme

(9.7.8) $R(v + w) = R(v) + R(w) - (\det v - 0)(\det w - 0)$,

avec une compatibilité à l'associativité (cf 9.7.5) mais non à la commutativité: défaut $\varepsilon(\det v \det w - 0)^{rg(v)rg(w)}$.

Le fibré virtuel $R(v)$ est fibre à fibre de rang et de degré nul, donc d'Euler-Poincaré nul et le fibré en droite gradué $\det f_* R(v)$ est de degré 0 . Par applications des foncteurs det, f_* et "-" , (9.7.8) et (7.3) fournissent un isomorphisme

(9.7.9) $I_{X/S}C^2(v + w) = I_{X/S}C^2(v) \otimes I_{X/S}C^2(w) \otimes \langle \det v , \det w \rangle$

avec défaut de compatibilité à la commutativité $(-1)^N$,

$$N = \int_{X/S} rg(v)\, rg(w)\, (c_1(v) + c_1(w)) .$$

On en déduit une compatibilité à l'additivité pour

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$v \longmapsto (\mathrm{rg}(v)\ ,\ \det(v)\ ,\ I_{X/S}C^2(v))$$

qui fait de ce foncteur un morphisme de catégories de Picard commutatives de $\underline{K}(X)$ dans la catégorie 9.2. De là, une donnée d'additivité pour $E \longmapsto (\mathrm{rg}\ E\ ,\ \det E\ ,\ I_{X/S}C^2(E))$. Pour E de rang 1 , $R(E)$ est trivialisé, d'où une donnée 9.4(ii). On vérifie qu'elle vérifie 9.4(iii). Ceci achève la deuxième preuve de l'existence.

9.8 Appliquons $\det f_*$ à (9.7.1):

(9.8.1) $\det f_* v = \det Rf_* \mathcal{O}^{\mathrm{rg}\ v} \otimes \det f_*(\det v - \mathcal{O}) \otimes I_{X/S}C^2(v)^{-1}$.

D'après (7 . 5), le second facteur est une racine carrée de $\langle \det v, \det v \otimes \omega_{X/S}^{-1} \rangle$. D'après Mumford [17] § 5 , $\det Rf_* \mathcal{O}$ est une racine douzième de $\langle \omega\ ,\ \omega \rangle$. On obtient ainsi des isomorphismes de Riemann-Roch:

<u>Théorème</u> 9.9 Soit X propre et lisse sur S , à fibres géométriques connexes. Pour v dans $\underline{K}(X)$, on a des isomorphismes:

(i) Si v est de rang 0 , et de $\det(v)$ trivialisé:

$$\det f_* v = I_{X/S}C^2(v)$$

(ii) Si v est de rang 0 ,

$$(\det f_* v)^{\otimes 2} = \langle \det v\ ,\ \det v \otimes \omega_{X/S}^{-1} \rangle \otimes I_{X/S}C^2(v)^{-2}$$

(iii) En général,

$$(\det f_* v)^{\otimes 12} = \langle \omega\ ,\ \omega \rangle^{\otimes \mathrm{rg}(v)} \otimes \langle \det v\ ,\ \det v \otimes \omega_{X/S}^{-1} \rangle^{\otimes 6} \otimes I_{X/S}C^2(v)^{-12}\ .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

10. Métriser IC^2 .

10.1 Soient X une variété analytique complexe, Ξ une suite exacte courte $E' \to E \to E''$ de fibrés vectoriels sur X , h une métrique sur E et h' , h'' les métriques induite et quotient sur E' et E'' . Au §5, nous avons rappelé la définition d'un "terme correctif" $\delta^i(h) := \delta^i(h\,;h',h'')$ dans $M(X)$ vérifiant

$$ch^i(E\,,h) = ch^i(E'\,,h') + ch^i(E''\,,h'') + \frac{1}{2\pi i}\, d'd''\,\delta^i(h)\ .$$

Les formules $\delta^1 = 0$, $c^2 = -ch^2 + \frac{1}{2}(ch^1)^2$ donnent que

$$c^2(E,h) = c^2(E',h') + c^1(E'\,,h')\,c^1(E'',h'') + c^2(E'',h'') - \frac{1}{2\pi i}\, d'd''\delta^2(h)$$

et d'après (5.11.3), avec les notations de 5.11,

$$\delta^2(h) = \int_1^0 \frac{-1}{2\pi i}\,(-\|\lambda\|\alpha^*\alpha)\ d\log\|\lambda\|$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\ \mathrm{Tr}(\alpha^*\wedge\alpha)$$

(où $\alpha \in \Omega^{0,1}(\underline{\mathrm{Hom}}(E''\,,E'))$

<u>Théorème</u> 10.2 Soit X une courbe projective non singulière. Il est possible, d'une et d'une seule façon, d'attacher à chaque fibré vectoriel métrique $(E\,,h)$ sur X une métrique sur l'espace vectoriel de rang un $I_X C^2(E)$ de sorte que

(i) Pour E de rang 1, on obtient la métrique 1 sur l'espace vectoriel $I_X C^2(E) = \mathbb{C}$.

(ii) Pour toute suite exacte courte $E' \to E \to E''$, définissant un isomorphisme

$$IC_2(E) \simeq IC_2(E')\ IC_2(E'')\ \langle \det E'\,,\det E''\rangle\ ,$$

si x à gauche correspond à y à droite, les longueurs carrées sont liées par $\|x\| = \|y\|\exp(a)$ avec

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_X \mathrm{Tr}(\alpha^*\wedge\alpha)$$

(notations de 10.1).

<u>10.3 Unicité</u>: Soient $(E\,,h)$ et F une filtration de E de quotients successifs des fibrés en droites: $0 \subset F_1 \subset \ \ldots \subset F_d = E$. La définition de IC_2 fournit un isomorphisme

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$IC_2(E) = \bigotimes_{i<j} \langle Gr_i^F(E) , Gr_j^F(E) \rangle$$

et un usage itéré de 10.2 (i) (ii) détermine le rapport entre la métrique 10.2 à gauche et le produit des métriques à droite, lorsque chaque Gr_i^F est muni de la métrique h_i déduite de celle de E . Ce rapport $\exp(a)$ est le suivant. Le fibré virtuel $[E]$ est canoniquement isomorphe à la somme des $[Gr_i^F(E)]$, et la métrique virtuelle $[h]$ est la somme des $[h_i]$ plus un terme correctif δ . On a

$$a = -\int_X \delta^2 .$$

Avec paramètres, si $f: X \to S$ est une famille de courbes projectives non singulières paramétrée par S , E un fibré vectoriel sur X muni d'une métrique h et que F est une filtration comme plus haut de E , la construction ci-dessus fournit une métrique g^F sur $I_{X/S}C^2(E)$. D'après 10.1, le terme correctif introduit dans 10.2 (ii) assure que

<u>Lemme</u> 10.4 La forme de Chern $c^1(I_{X/S}C^2(E) , g^F)$ est l'intégrale $\int_{X/S}$ de $c^2(E , h)$.

<u>10.5 Existence</u>. Il s'agit de montrer que la métrique g^F ne dépend pas de F . Soient F et G deux filtrations. Pour toute application $g(z)$ de $\mathbb{C}$ dans l'espace des métriques, 10.4 donne

$$d'd'' \log(g^F(z)/g^G(z)) = 0 .$$

Il en résulte (cf 2.4.4) que $u(F , G) := \log(g^F/g^G)$ est indépendant de la métrique g . Pour trois filtrations F , G , H , on a $u(F , H) = u(F , G) + u(G , H)$. Pour voir que $u = 0$, il suffit donc de le vérifier pour F et G en position générale. Ce cas se réduit à celui où F et G sont adjacentes (cf 9.6.7), puis au cas où E est de rang deux.

Pour E de rang deux, la donnée d'une filtration F équivaut à celle d'un fibré en droites $L \subset E$ localement facteur direct. Que les fibrés L et M correspondent à des filtrations en position générale F , G signifie qu'il existe un diviseur réduit E et un isomorphisme φ entre L et M sur E tel que

$$L \oplus M \subset E \subset L(E) \oplus M(E)$$

et que les sections locales de E soient les (ℓ , m) , avec ℓ (resp m) section locale de $L(E)$ (resp $M(E)$) et ℓ et m de même partie polaire (rel. φ) .

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Les suites exactes $L \to \mathcal{E} \to M(E)$ et $M \to \mathcal{E} \to L(E)$ fournissent des isomorphismes

(10.5.1) $\alpha_F : \langle L , M(E)\rangle \to IC_2(\mathcal{E})$

(10.5.2) $\alpha_G : \langle M , L(E)\rangle \to IC_2(\mathcal{E})$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier le

<u>Lemme</u> 10.6 Soient ℓ et m des sections de L et M . Supposons que ℓ et m ne s'annullent pas sur E , donc définissent $\langle \ell , m\rangle \in \langle L , M(E)\rangle$ et $\langle m , \ell\rangle \in \langle M , L(E)\rangle$. Si $\ell|E$ et $m|E$ se correspondent par φ , alors, au signe près, $\langle \ell , m\rangle$ et $\langle m , \ell\rangle$ définissent le même élément de $IC^2(\mathcal{E})$.

La métrique g^F sur $IC^2(\mathcal{E})$ correspond par (10.5.1) à la métrique de $\langle L , M\rangle$ modifiée par un terme correctif, et $\log \|\alpha_F(\langle \ell , m\rangle)\|_{g_F}$ est la somme de (a) l'intégrale qui apparaît dans la définition de $\|\langle \ell , m\rangle\|$, (b) les termes ponctuels qui y apparaissent, (c) l'intégrale qui définit le terme correctif.

Choisissons un recouvrement $X = U \cup V$ avec $U \subset\subset X-\mathrm{div}(\ell) -\mathrm{div}(m)$ et $V \subset\subset X - E$. Il existe une métrique g sur $\mathcal{E}$ telle que, sur U , g soit invariante par l'automorphisme de $\mathcal{E}$ qui échange ℓ et m , que, sur V , $L \perp M$, que localement sur V , soit $\|\ell\| = 1$, soit $\|m\| = 1$, et que $\|\ell\| = \|m\| = 1$ sur E . Pour une telle métrique, les termes ponctuels (b) sont nuls, les intégrands dans (a) (c) sont nuls et $\log \|\alpha_F\langle \ell , m\rangle\|_{g_F} = \log\|\alpha_G\langle m , \ell\rangle\|_{g_G}$ par symétrie. Ceci termine la preuve 10.5 et celle de 10.2.

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

11. Le théorème.

11.1 Soient X une courbe projective et lisse sur $\mathbb{C}$ et E un fibré vectoriel sur X. Si ω_X et E sont munis de métriques h et g, les deux membres de l'isomorphisme de Riemann-Roch 9.9

(11.1.1) $(\det H\rangle(X, E))^{\otimes 12} = \langle\omega, \omega\rangle^{\otimes \mathrm{rg} E} \otimes \langle \det E, \det E \otimes \omega_{X/S}^{-1}\rangle^{\otimes 6} \otimes I_{X/S}C^2(v)^{\otimes(-12)}$

sont métrisés. A gauche, la métrique "torsion analytique", normalisée comme en 1.2. A droite, le produit tensoriel de métriques (6.3) et (10.2). Pour x, à gauche, correspondant à y, à droite, soit

$$\phi(X, E, h, g) = \log(\|x\|/\|y\|) .$$

Rassemblons les informations dont on dispose sur ϕ. Si X et E dépendent de paramètres, i.e.si on part de $f: X \to S$ et de E sur X, (11.1.1) correspond à un isomorphisme de fibrés en droites. Si $\omega_{X/S}$ et E sont métrisés, la première forme de Chern de $\det Rf_*E$, pour la métrique "torsion analytique" a été calculée par [3] [6]. Elle est donnée par la formule de Riemann Roch, au niveau des formes, et coïncide donc (6.6.1) (10.4) avec la première forme de Chern du membre de droite. On conclut:

(11.1.2) En présence de paramètres, la fonction ϕ sur S vérifie

$$d'd''\phi = 0 .$$

Pour $E = E' \oplus E''$ et une métrique g sur E somme directe orthogonale de métrique g' sur E' et g'' sur E'', l'isomorphisme (11.1.1) est compatible à l'additivité des deux membres,et les métriques sont compatibles à l'additivité. On a donc

(11.1.3) $\phi(X, E, h, g) = \phi(X, E', h, g') + \phi(X, E'', h, g'')$.

Enfin, la compatibilité à la dualité de Serre pour les fibrés en droites donne

(11.1.4) $\phi(X, L, h, g) = \phi(X, \omega L^\vee, h, h \otimes \check{g})$.

11.2 Comme expliqué en 2.4.4, (11.1.2) implique que $\phi(X, E, h, g)$ ne dépend pas de g et h. Posons $\phi(X, E) := \phi(X, E, h, g)$. Si E extension de E'' par E', la somme directe $E' \oplus E''$ est une limite de fibrés isomorphes à E. Par (11.1.3), on a donc

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

$$\phi(X , E) = \phi(X , E') + \phi(X , E'')$$

de sorte que $\phi(X , E)$ ne dépend que de la classe de E dans $K_0(X)$. On a

$$K^\circ(X) = \mathrm{Pic}(X) \times \mathbf{Z}$$

(les seuls invariants stables d'un fibré sont sa dimension et son déterminant). A X fixé, la fonction $\phi(X , E)$ se factorise donc par $\mathrm{Pic}(X) \times \mathbf{Z}$. Etant additive, elle est de la forme

$$\phi(X , E) = a(X)\, \mathrm{rg}(E) + b(X) \deg(E) .$$

et (11.1.2) affirme que a et b sont des fonctions pluriharmoniques sur l'espace de module des courbes.

La compatibilité à la dualité de Serre (11.1.4) équivaut à $b(X) = 0$.

11.3 En genre $g \neq 1 , 2$, une fonction pluriharmonique est constante: en tout genre, l'espace de modules M des courbes de genre g vérifie $H^1(M , \mathbf{R}) = 0$, de sorte qu'une fonction pluriharmonique réelle ϕ est la partie réelle d'une fonction holomorphe f . Pour $g \neq 1 , 2$ M admet une compactification (normale) $\overline{M}$ avec $\overline{M} - M$ de codimension ≥ 2 , f se prolonge à $\overline{M}$ et f est donc constante. On a prouvé:

<u>Théorème</u> 11.4 A un facteur $\exp(a(X)\, \mathrm{rg}(E))$ près , (11.1.1) est une isométrie. On a $d'd''a = 0$ et, en genre $g \neq 1 , 2$, $a(X)$ ne dépend que du genre de X .

<u>Remarque</u> 11.5 En genre 1 , on vérifie que $\phi = 0$. Ceci laisse penser que, pour une constante c , on

$$a(X) = c\chi(X) .$$

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

Bibliographie

[1] S. Arakelov - Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. Izv. Akad. Nauk 86 (1974) p 1167-1180

[2] S. Arakelov - Theory of intersections on the arithmetic surface. Proc. ICM Vancouver 1974 p 405-408

[3] J. M. Bismuth and D. S. Freed - Anomalies and determinants. Preprint 1985

[4] R. Bott and S. S. Chern - Hermitian vector bundles and the equidistribution of zeroes of their holomorphic sections. Acta Math 114 (1965) p 71-112

[5] G. Faltings - Calculus on arithmetic surfaces. Annals of Math. 119 (1984) p 387-424

[6] D. S. Freed - Determinants, torsion and strings. Preprint 1986

[7] H. Gillet et C. Soulé - Intersections sur les variétés d'Arakelov. CR Acad. Sci. Paris 299 12 (1984) p 563-566

[8] H. Gillet et C. Soulé - Classes caractéristiques en théorie d'Arakelov. CR Acad. Sci. Paris

[9] A. Grothendieck - A la poursuite des champs. Preprint

[10] F. Knudsen and D. Mumford - The projectivity of the moduli space of stable curves I, preliminaries on "det" and "Div". Math. Scand. 39 1 (1976) p 19-55

[11] S. MacLane - Natural associativity and commutativity. Rice University studies 49 (1963) p 28-46

[12] D. Quillen - Higher algebraic K-theory I, in Algebraic K-theory I, Battelle conference 1972. Springer Lecture Notes in Mathematics 341 p 85-147

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms

[13] D. Quillen - Determinants of Cauchy - Riemann operators over a Riemann surface. Funk Anal. i prilozenie 19 1 (1985) p 37-41

[14] D. B. Ray and I. M. Singer - Analytic torsion. Ann. of Math. 98 1 (1973) p 154-177

[15] N. Saavedra - Catégories tannakiennes. Springer Lecture Notes in Mathematics 265

[16] J. P. Serre - Groupes algébriques et corps de classe. Actualités Scientifiques et industrielles, Hermann 1959

[17] D. Mumford - Stability of projective varieties. Ens. Math. XXIII 1-2 (1977) p 39-110

Licensed to Princeton University. Prepared on Wed May 23 11:09:58 EDT 2012 for download from IP 128.112.203.193.
License or copyright restrictions may apply to redistribution; see http://www.ams.org/publications/ebooks/terms