Selecta Mathematica, New Series
Vol. 1, No. 4 (1995)

1022–1824/95/040667–31\$1.50 + 0.20/0

Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et De Wilde, Lecomte

P. DELIGNE

Introduction

Soit M une variété différentiable. On s'intéresse aux déformations de l'opérateur "produit" de deux fonctions en un produit associatif mais non nécessairement commutatif. Plus précisément, on s'intéresse aux déformations $*_t$ dépendant d'un paramètre formel t, de la forme

$$f *_t g = \sum c_n(f,g)t^n$$

avec c_n $\mathbb{R}$-bilinéaire et différentiel en f et g. Pour un panorama de la théorie de ces "star-products", nous renvoyons à [10]. Qu'on déforme le produit usuel signifie que $c_0(f,g) = fg$. On a

$$f *_t g - g *_t f = \{f,g\}t + O(t^2)$$

avec $\{f,g\} = c_1(f,g) - c_1(g,f)$ et $\{\ ,\ \}$ est un crochet de Poisson.

De Wilde et Lecomte [1], [2] et Fedosov [4] ont montré que si M est une variété symplectique, il existe une déformation $*_t$ du produit donnant lieu au crochet de Poisson symplectique. Disons que deux déformations $*_t$ et $*'_t$ sont isomorphes si on passe de l'une à l'autre par $f \longmapsto \sum c_n(f)t^n$ avec $c_0(f) = f$ et c_n $\mathbb{R}$-linéaire et différentiel en f. La construction de Fedosov montre que les classes d'isomorphie de déformations $*_t$, donnant lieu au crochet de Poisson symplectique, sont classifiées par les suites $(R_n)_{n\geq 0}$ de classes dans $H^2(M)$. La méthode de De Wilde et Lecomte permet une classification analogue.

Notre but est de comparer les méthodes utilisées, les classifications correspondantes, et d'expliciter l'effet d'un changement de paramètre formel

$$t \longmapsto \sum_1^\infty a_n t^n \qquad (a_1 \text{ inversible})\ .$$

Contents

§1. Déformations

1.1. Soient M une variété différentiable (toujours supposée paracompacte) et $A = C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur M. La géométrie algébrique suggère une autre description de la notion de "déformation $*_t$ du produit" considérée dans l'introduction. Il s'agit de considérer une $\mathbb{R}[\![t]\!]$-algèbre A_1, munie d'un isomorphisme $A = A_1/tA_1$, et vérifiant les conditions (1.1.1) et (1.1.2) ci-dessous.

1.1.1. A_1 est plat sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ et est séparé et complet pour la topologie t-adique: $A_1 \xrightarrow{\sim} \lim\operatorname{proj} A_1/t^n A_1$.

Si on choisit un relèvement $\mathbb{R}$-linéaire de A dans A_1: une section $a \mapsto \tilde{a}$ de la projection $A_1 \to A_1/tA_1 = A$, la condition (1.1.1) équivaut à ce que

$$\sum a_n t^n \longmapsto \sum \tilde{a}_n t^n : A[\![t]\!] \to A_1$$

est une bijection. Le produit de A_1 est déterminé par sa restriction à l'image $\tilde{A} \subset A_1$ de A par $\sim$:

$$\tilde{a}.\tilde{b} = \sum c_n(a,b)^\sim t^n.$$

1.1.2. Il existe un relèvement $a \mapsto \tilde{a}$ pour lequel les $c_n(a,b)$ sont différentiels en a et b.

Pour un tel relèvement, les $c_n(a,b)$ définissent un produit $*_t$ au sens de l'introduction. Si on change le relèvement en

$$a \longmapsto \sum c_n(a)^\sim t^n, \tag{1.1.3}$$

avec $c_1(a) = a$ et c_n $\mathbb{R}$-linéaire et différentiel en a, la condition (1.1.2) est encore vérifiée.

LEMMA 1.1.4. *On obtient ainsi tous les relèvements vérifiant* (1.1.2).

Preuve. Utilisons le relèvement donné au départ pour identifier A_1 et $A[\![t]\!]$. Soit G le groupe des automorphismes $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaires g de $A[\![t]\!]$ qui sont l'identité modulo t. Ils sont déterminés par leur restriction à A, de la forme $a \longmapsto \sum c_n(a)t^n$ avec $c_0(a) = a$. Le transformé par g du relèvement identique id de A dans $A[\![t]\!]$ est $a \longmapsto \sum c_n(a)t^n$, et les relèvements forment un espace principal homogène sous G. L'écriture, en terme du relèvement $g(id)$, du produit $*$, coincide avec celle, en terme du relèvement identique, du produit $g^{-1}(*)\colon x, y \longmapsto g^{-1}(gx * gy)$.

Soit G_{diff} le sous-groupe de G formé des g pour lesquels $c_n(a)$ est différentiel en a. Il s'agit de voir que si un produit $*$ est donné par des $c_n(a,b)$ différentiels en a et b et que $g^{-1}(*)$ a la même propriété, alors g est dans G_{diff}. Prouvons par récurrence sur n que pour un tel g, donné par $a \longmapsto \sum c_i(a)t^i$, les $c_i(a)$ sont différentiels en a. Supposant les $c_i(a)$ différentiels en a pour $i < n$, il s'agit de le prouver pour $i = n > 0$. On a $g = g_1 \circ h$, avec g_1 donné par $a \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a)t^i$ dans G_{diff} et h de la forme $a \longmapsto a + c_n(a)t^n + \cdots$ et h^{-1} transforme le produit $*' := g_1^{-1}(*)$, donné par des $c'_n(a,b)$ différentiel en a et b, en $g^{-1}(*)$. Mod t^{n-1}, on a

$$\begin{aligned} h^{-1}(ha *' hb) &\equiv h^{-1}\big((a + t^n c_n(a)) *' (b + t^n c_n(b))\big) \\ &\equiv h^{-1}\big(a *' b + t^n(c_n(a)b + ac_n(b))\big) \\ &\equiv a *' b + t^n\big(c_n(a)b + ac_n(b) - c_n(ab)\big) \end{aligned}$$

de sorte que

$$c_n(a)b + ac_n(b) - c_n(ab)$$

est différentiel en a et b. Là où $a \longmapsto c_n(a)b + ac_n(b) - c_n(ab)$ ou – ce qui revient au même – $a \longmapsto c_n(a)b - c_n(ab)$ est différentiel en a d'ordre $\leq N$ pour tout b, $a \longmapsto c_n(a)$ est différentiel en a d'ordre $\leq N + 1$. Ceci termine la preuve de 1.1.4.

Changer le relèvement change le produit $*_t$ correspondant en un produit isomorphe, au sens de l'introduction, d'où une bijection entre classes d'isomorphie de produits $*_t$, au sens de l'introduction, et classes d'isomorphie de $\mathbb{R}[\![t]\!]$-algèbres A_1, munies de $A_1/tA_1 \xrightarrow{\sim} A$, vérifiant (1.1.1) (1.1.2).

Pour $a, b \in A$, et $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ dans A_1 relevant a et b, $[\tilde{a}, \tilde{b}] \bmod t^2$ ne dépend que de a et b: le crochet de Poisson $\{a, b\} = \frac{1}{t}[\tilde{a}, \tilde{b}] \bmod t$ ne dépend que de la classe d'isomorphie de A_1.

REMARQUE 1.2. L'algèbre A_1 est automatiquement à unité: si f dans A_1 est invertible $\bmod t$, la multiplication à gauche par f est bijective, car elle l'est après passage au gradué pour la filtration t-adique, et si $fu = f$, u est une unité à gauche. Même argument à droite. Soit $\sim$ un relèvement comme en (1.1.2), et utilisons-le pour identifier A_1 à $A[\![t]\!]$. Si u est l'unité de $(A_1,*)$, le relèvement $a \longmapsto au$ (produit dans $A[\![t]\!]$) relève 1 en u et vérifie encore (1.1.2). Les $c_n(a,b)$ correspondant vérifient

$$c_n(a,1) = c_n(1,b) = 0 \tag{1.2.1}$$

pour $n > 0$: opérateurs différentiels sans terme d'ordre 0 en a ou b. Les changements de relèvements respectant les unités sont donnés par (1.1.3) avec $c_n(1) = 0$ pour $n > 0$.

Dans la littérature, la condition (1.2.1) fait souvent partie de la définition des $*$-produits.

REMARQUE 1.3. On peut montrer qu'il existe des relèvements pour lesquels les $c_n(a,b)$ sont sommes d'opérateurs bidifférentiels en a, b d'ordre $\leq (p,q)$, avec $p+q \leq 2n$. On passe d'un tel relèvement à un autre par (1.1.3), avec $c_n(a)$ d'ordre $\leq 2n$ en a.

1.4. Les conditions de réalité utilisées ci-dessus ne sont pas les plus usuelles. Voici des variantes.

Variante complexe: partir non de $C^\infty(M)$, mais de la $\mathbb{C}$-algèbre $A^{\mathbb{C}} = C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ des fonctions C^∞ à valeurs complexes. On prend $A_1^{\mathbb{C}}$ plat sur $\mathbb{C}[\![t]\!]$, séparé et complet pour la topologie t-adique, muni de $A_1^{\mathbb{C}}/tA_1^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} A^{\mathbb{C}}$, et admettant un relèvement $a \longmapsto \tilde{a}$ vérifiant (1.1.2). Ceci correspond à un produit $*_t$ où les $c_n(a,b)$ sont complexes. Le crochet de Poisson $\{a,b\} = c_1(a,b) - c_1(b,a)$ est complexe. S'il est non dégénéré, il correspond à une 2-forme fermée non dégénérée complexe $\omega \in \Omega^2(M) \otimes \mathbb{C}$. Bien qu'on n'ait pas de modèle local (théorème de Darboux) dans ce contexte, la méthode de Fedosov continue à s'appliquer.

Une déformation réelle, i.e., une déformation au sens de 1.1, s'identifie à une déformation complexe, comme ci-dessus, munie d'une involution σ de $A_1^{\mathbb{C}}$, $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$, induisant la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}[\![t]\!]$ et sur $A^{\mathbb{C}}$. Déformation réelle correspondante: l'algèbre des points fixes de σ.

Variante $*$-réelle: déformations complexes $A_1^{\mathbb{C}}$, munies d'une anti-involution $*$: $(xy)^* = y^*x^*$, induisant la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}[\![t]\!]$ et sur $A^{\mathbb{C}}$. Une déformation $*$-réelle donne lieu à un crochet de Poisson purement imaginaire. Il est d'usage de le diviser par i.

Si une déformation complexe est isomorphe (resp. anti-isomorphe) à sa complexe conjuguée, elle provient d'une déformation réelle (resp. $*$-réelle) et cette dernière est unique à isomorphisme près. Cela résulte par un argument standard de cohomologie galoisienne (pour $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$) de ce que le groupe G des automorphismes ($\mathbb{C}[\![t]\!]$-linéaires et l'identité $\bmod t$) d'une déformation complexe est pro-unipotent. Si σ est un automorphisme (resp. anti-automorphisme) de A_1, induisant la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}[\![t]\!]$ ainsi que sur $A^{\mathbb{C}}$, il s'agit de vérifier qu'on peut corriger σ en $a\sigma$ avec $a \in G$ pour avoir $(a\sigma)^2 = 1$, puis que si σ est déjà involutif et que $(b\sigma)^2 = 1$, avec $b \in G$, alors σ et $b\sigma$ sont conjugués par $c \in G$. Solutions: $a = (\sigma^2)^{-1/2}$, $c = b^{1/2}$ (on a $bb^\sigma = 1$, donc $b^{1/2} = (b^{-1/2})^\sigma$ et il faut résoudre $b = c^{1-\sigma}$).

1.5. Pour suivre par transport de structures l'effet d'un changement de paramètre formel t, il est commode de reprendre 1.1 en remplaçant $\mathbb{R}[\![t]\!]$ par une $\mathbb{R}$-algèbre V supposée seulement isomorphe à $\mathbb{R}[\![t]\!]$: une $\mathbb{R}$-algèbre qui soit un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel $\mathbb{R}$. Soit m l'idéal maximal. Le choix d'un générateur t_1 de m équivaut par $f \longmapsto f(t_1)$ à celui d'un isomorphisme de $\mathbb{R}[\![t]\!]$ avec V. Le crochet de Poisson défini par une déformation est à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension un m/m^2.

REMARQUE 1.6. Il revient au même de déformer $C^\infty(M)$, comme en 1.1, ou de déformer le faisceau $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions C^∞ sur M. Il faut comprendre "déformation de $\mathcal{C}^\infty$" comme étant un faisceau de $\mathbb{R}[\![t]\!]$-algèbres $\mathcal{A}_1$, plat (i.e. sans t-torsion) séparé et complet: $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\sim} \lim\operatorname{proj} \mathcal{A}_1/t^n$, muni de $\mathcal{A}_1/t\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty$, et vérifiant localement (1.1.2). Les faisceaux en jeu étant mous (d'après [7] II 3.4.1, la question est locale), y compris celui des relèvements vérifiant (1.1.2), on obtient la déformation correspondante de $C^\infty(M)$ par passage aux sections globales.

§2. Comparer deux déformations

2.1. Soit M une variété symplectique. Antérieurement aux travaux de De Wilde, Lecomte et Fedosov, on savait déjà ([8], [9]) que si $H^3(M,\mathbb{R}) = 0$, il existe une déformation A_1 de $A = C^\infty(M)$ au sens 1.1, donnant lieu au crochet de Poisson symplectique. Si de plus $H^2(M,\mathbb{R}) = 0$, cette déformation est unique à isomorphisme près. Soit $\mathfrak{aut}(A_1)$ l'algèbre de Lie des dérivations $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaires et triviales modulo t de A_1. Si $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$, les dérivations dans $\mathfrak{aut}(A_1)$ sont intérieures. Si $H^0(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, i.e. si M est connexe, $\mathbb{R}[\![t]\!]$ est le centre de A_1. Si $H^0(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et que $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$, on a donc une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \mathbb{R}[\![t]\!] \to A_1 \to \mathfrak{aut}(A_1) \to 0. \tag{2.1.1}$$

Rappelons l'idée essentielle. La théorie des déformations de A est controlée par la variante du complexe de Hochschild $C^*_{\mathrm{diff}}(A,A)$ pour laquelle $C^n_{\mathrm{diff}}(A,A)$ est l'espace des fonctionnelles $\mathbb{R}$-multilinéaires $c(f_1,\cdots,f_n)$: $A^{\otimes n} \to A$ différentielles en les f_i. Le complexe $C^*_{\mathrm{diff}}(A,A)[1]$ est une algèbre de Lie différentielle graduée et que des $c_i(a,b)$ définissent un $*$-produit équivaut à ce que la série formelle $c = \sum_1 c_i t^i$ à coefficients dans $(C^*_{\mathrm{diff}}(A,A)[1])^1 = C^2_{\mathrm{diff}}(A,A)$ vérifie $dc + \frac{1}{2}[c,c] = 0$.

Le groupe de cohomologie $H^pC^*_{\mathrm{diff}}(A,A)$ est l'espace des champs de p-vecteurs, et le crochet de $C^*_{\mathrm{diff}}(A,A)[1]$ induit en cohomologie le crochet de Schouten. Un crochet de Poisson est un champ de 2-vecteurs vérifiant $[\eta,\eta]=0$. Il induit une différentielle $\mathrm{ad}\eta$ sur $H^*(C^*_{\mathrm{diff}}(A,A)[1])$. Point essentiel: si η est non dégénéré, et qu'on utilise la structure symplectique correspondante pour identifier p-vecteurs et p-formes, $\mathrm{ad}\eta$ devient la différentielle extérieure.

2.2. Supposons que $H^0(M,\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et $H^1(M,\mathbb{R})=0$, et traduisons (2.1.1) en terme de groupes d'automorphismes.

Pour $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie pro-nilpotente, limite projective d'algèbres de Lie nilpotentes $\mathcal{L}_n$, nous noterons $\exp(\mathcal{L})$ le groupe correspondant: $\mathcal{L}$, muni de la loi de Hausdorff. On a $\exp(\mathcal{L})=\lim\operatorname{proj}\exp(\mathcal{L}_n)$. On notera "exp"$(\ell)$ un élément ℓ de $\mathcal{L}$, vu comme élément de $\exp(\mathcal{L})$.

Soit $\mathrm{Aut}(A_1)$ le groupe des automorphismes $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaires et triviaux modulo t de A_1. L'exponentielle est une bijection de $\mathfrak{aut}(A_1)$ avec $\mathrm{Aut}(A_1)$ et un isomorphisme

$$\exp(\mathfrak{aut}(A_1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(A_1)\colon \text{“exp”}(a)\longmapsto \exp(a).$$

La suite exacte (2.1.1) d'algèbres de Lie pro-unipotentes fournit une suite exacte de groupes

$$0\to\exp(\mathbb{R}[\![t]\!])\to\exp(A_1)\to\mathrm{Aut}(A_1)\to 0 \tag{2.2.1}$$

et un isomorphisme

$$\exp(A_1/\mathbb{R}[\![t]\!])\xrightarrow{\sim}\mathrm{Aut}(A_1). \tag{2.2.2}$$

Noter que l'algèbre de Lie $\mathbb{R}[\![t]\!]$ étant commutative, le groupe $\exp\mathbb{R}[\![t]\!]$ est simplement le groupe additif $\mathbb{R}[\![t]\!]$.

L'application exponentielle $\exp\colon A_1\to A_1$ induit un isomorphisme "exp"(a) $\mapsto\exp(a)$ de $\exp(A_1)$ avec le groupe multiplicatif A_1^{*+} des éléments de A_1 dont la réduction modulo t est positive. De même pour $\mathbb{R}[\![t]\!]$. Ceci permet de récrire (2.2.1) sous la forme

$$0\to\mathbb{R}[\![t]\!]^{*+}\to A_1^{*+}\to\mathrm{Aut}(A_1)\to 0; \tag{2.2.3}$$

un élément a de A_1^{*+} s'envoie sur l'automorphisme intérieur $x\mapsto axa^{-1}$ correspondant de A_1.

2.3. Passons au point de vue faisceautique 1.6. Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux déformations donnant lieu au crochet de Poisson symplectique, puisque localement les H^i supérieurs sont nuls, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont localement isomorphes. Les classes d'isomorphie de déformations $\mathcal{A}_2$ sont donc classifiées par le groupe de cohomologie non abélienne $H^1(M,\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1))$, où $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1)$ est le faisceau des automorphismes de la déformation $\mathcal{A}_1$.

De (2.2.1), on déduit une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \exp(\mathbb{R}[\![t]\!]) \to \exp(\mathcal{A}_1) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1) \to 0 \tag{2.3.1}$$

où $\exp(\mathbb{R}[\![t]\!])$ désigne le faisceau constant de valeur $\exp(\mathbb{R}[\![t]\!]) \sim \mathbb{R}[\![t]\!]$. La suite exacte (2.3.1) définit un cobord

$$H^1(M, \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1)) \to H^2(M, \mathbb{R}[\![t]\!]). \tag{2.3.2}$$

Nous noterons $[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]$ l'image par (2.3.2) de la classe d'isomorphie de $\mathcal{A}_2$. Rappelons sa définition en cohomologie de Čech. On choisit un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X et des isomorphismes de déformations $p_i \colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ sur U_i. Soit $c_{ij} = p_i^{-1}p_j$: un automorphisme de $\mathcal{A}_1$ sur $U_i \cap U_j$. Les c_{ij} sont le 1-cocycle décrivant $\mathcal{A}_2$. Supposons que c_{ij} se relève dans $\exp(\mathcal{A}_1)$. Tel est le cas après passage à un recouvrement plus fin (cf. A.1 (a1)). Choisissons un relèvement $\tilde{c}_{ij}$. Les $y_{ijk} := \tilde{c}_{jk}\tilde{c}_{ik}^{-1}\tilde{c}_{ij}$ sont un 2-cocycle à valeurs dans $\exp(\mathbb{R}[\![t]\!])$, identifié à $\mathbb{R}[\![t]\!]$. Sa classe est $[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]$.

Il est parfois commode de définir y_{ijk} par la formule équivalente

$$\tilde{c}_{ij}\tilde{c}_{jk} = y_{ijk}\tilde{c}_{ik}.$$

D'après [6] IV 3.4, de même qu'un H^1 classifie des torseur, un H^2 classifie des gerbes. La gerbe $\mathcal{G}$ en jeu ici est la suivante: un objet de $\mathcal{G}$ sur U est un torseur P sous $\exp(\mathcal{A}_1)$, sur U, muni d'un morphisme $\exp(\mathcal{A}_1)$-équivariant dans le $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1)$-torseur des isomorphismes $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. Le faisceau des automorphismes de P (compatibles à la projection donnée) est $\exp(\mathbb{R}[\![t]\!])$.

PROPOSITION 2.4. *Pour $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ trois déformations donnant lieu au crochet de Poisson symplectique, on a*

$$[\mathcal{A}_3 : \mathcal{A}_1] = [\mathcal{A}_3 : \mathcal{A}_2] + [\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1].$$

1 ère *preuve* (cocyclique). Pour (U_i) un recouvrement ouvert assez fin, choisissons sur chaque U_i des isomorphismes

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow[p_i]{} \mathcal{A}_2 \xrightarrow[q_i]{} \mathcal{A}_3$$

et des relèvements $\tilde{c}_{ij}$ de $p_i^{-1}p_j$ et $\tilde{d}_{ij}$ de $q_i^{-1}q_j$ de cobord les 2-cocycles y_{ijk} et z_{ijk}. Le cocycle

$$(q_ip_i)^{-1}(q_jp_j) = p_i^{-1}q_i^{-1}q_jp_j = p_i^{-1}d_{ij}p_j = p_i^{-1}p_jp_j^{-1}d_{ij}p_j = c_{ij}p_j^{-1}(d_{ij})$$

se relève en $\tilde{c}_{ij}p_j^{-1}(\tilde{d}_{ij})$. On a

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{ij}p_j^{-1}(\tilde{d}_{ij})\tilde{c}_{jk}p_k^{-1}(\tilde{d}_{jk}) &= \tilde{c}_{ij}\tilde{c}_{jk}.\tilde{c}_{jk}^{-1}p_j^{-1}(\tilde{d}_{ij})\tilde{c}_{jk}.p_k^{-1}(\tilde{d}_{jk})\\ &= y_{ijk}\tilde{c}_{ik}.c_{jk}^{-1}(p_j^{-1}(\tilde{d}_{ij})).p_k^{-1}(\tilde{d}_{jk}).\end{aligned}$$

Comme $c_{jk}^{-1}p_j^{-1} = p_k^{-1}$, on a encore

$$= y_{ijk}\tilde{c}_{ik}.p_k^{-1}(\tilde{d}_{ij}\tilde{d}_{jk}) = y_{ijk}z_{ijk}\tilde{c}_{ik}p_k^{-1}(\tilde{d}_{ik}),$$

à comparer à $\tilde{c}_{ik}\tilde{p}_k^{-1}(\tilde{d}_{ik})$.

2 ème *preuve* (gerbale). Soit P le bitorseur des isomorphismes de $\mathcal{A}_1$ avec $\mathcal{A}_2$: espace principal homogène à droite sous $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1)$ et à gauche sous $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_2)$. De même, soit Q celui des isomorphismes de $\mathcal{A}_2$ avec $\mathcal{A}_3$. Le bitorseur composé $Q \circ P$ est le bitorseur des isomorphismes de $\mathcal{A}_1$ avec $\mathcal{A}_3$. Si $\tilde{P}$ est un relèvement de P en un $\exp(\mathcal{A}_1)$-torseur, $\tilde{P}$ est aussi un torseur à gauche sous le tordu de $\exp(\mathcal{A}_1)$ par $\tilde{P}$, i.e. sous $\exp(\mathcal{A}_2)$ puisque $\mathcal{A}_2$ est le tordu de $\mathcal{A}_1$ par P: $\tilde{P}$ est un $(\exp(\mathcal{A}_1), \exp(\mathcal{A}_2))$-bitorseur. De même, un relèvement $\tilde{Q}$ de Q en un $\exp(\mathcal{A}_2)$-torseur est automatiquement un $(\exp(\mathcal{A}_2), \exp(\mathcal{A}_3))$-bitorseur. La composition $\tilde{Q} \circ \tilde{P}$ induit sur les faisceaux d'automorphismes la multiplication sur $\exp(\mathbb{R}[\![t]\!])$, et l'existence du foncteur $\tilde{Q} \circ \tilde{P}$:

$$\big(\text{gerbe classifiée par } [\mathcal{A}_3 : \mathcal{A}_2]\big) \times \big(\text{gerbe classifiée par } [\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]\big) \to \big(\text{gerbe classifiée par } [\mathcal{A}_3 : \mathcal{A}_1]\big)$$

fournit 2.4.

Si $\mathcal{A}$ est une déformation de $\mathcal{C}^\infty(M)$, l'algèbre opposée $\mathcal{A}^0$ est également une déformation. Le crochet de Poisson induit est l'opposé de celui de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux déformations, correspondant à la même structure symplectique ω, $\mathcal{A}_1^0$ et $\mathcal{A}_2^0$ correspondent à la même structure symplectique $-\omega$ et $[\mathcal{A}_2^0 : \mathcal{A}_1^0]$ est défini. On a

PROPOSITION 2.5. $[\mathcal{A}_2^0 : \mathcal{A}_1^0] = -[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]$.

Preuve. On calcule en cohomologie de Čech, avec $[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]$ classe de y_{ijk} déduit de p_i, c_{ij} et $\tilde{c}_{ij}$ comme en 2.3. L'isomorphisme $p_i\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ fournit $p_i^0\colon \mathcal{A}_1^0 \to \mathcal{A}_2^0$ et $p_k^{0-1} p_j^0 = c_{ij}^0$. Si c_{ij} est l'automorphisme intérieur de $\mathcal{A}_1$ défini par $\tilde{c}_{ij}$ dans $\mathcal{A}_1^{*+}$, c_{ij}^0 est l'automorphisme intérieur de $\mathcal{A}_1^0$ défini par $\tilde{c}_{ij}^{-1}$. Le produit dans $\mathcal{A}_1^0$

$$\tilde{c}_{ij}^{-1}(\tilde{c}_{ik}^{-1})^{-1}\tilde{c}_{ij}^{-1}$$

est dans $\mathcal{A}_1$ le produit $(c_{jk}\tilde{c}_{ik}^{-1}\tilde{c}_{ij})^{-1}$. Passant au logarithme, on obtient 2.5.

PROPOSITION 2.6. *L'application* (2.3.2) *est bijective.*

Conjointement avec 2.4, cette proposition affirme que l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations comme en 2.1: donnant lieu au crochet de Poisson symplectique, est vide ou un espace principal homogène sous $H^2(M, \mathbb{R}[\![t]\!])$.

En tant que faisceau d'ensembles, le faisceau $\exp(\mathcal{A}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{A}_1$, et à $\mathcal{C}^\infty[\![t]\!]$. Le faisceau $\mathcal{C}^\infty[\![t]\!]$ étant fin, le faisceau $\exp(\mathcal{A}_1)$ est mou. S'il s'agissait de cohomologie abélienne, il ne resterait pour prouver 2.6 qu'à invoquer la suite exacte longue de cohomologie attachée à (2.3.1). Le language des gerbes permet d'adapter cette preuve à notre situation. Voir l'appendice (A3).

VARIANTE 2.7. Comme en 1.5, soit V isomorphe à $\mathbb{R}[\![t]\!]$ et M muni d'un crochet de Poisson non dégénéré à valeur dans m/m^2. Les constructions qui précèdent montrent encore que l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations de $C^\infty(M)$ sur V, donnant lieu au crochet de Poisson imposé, est vide ou un espace principal homogène sous $H^2(M,V)$. En d'autres termes, la formation de $[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]$ de 2.3 est compatible à un changement de variable $t \to f(t)$.

VARIANTE 2.8. Supposons donnée une 2-forme fermée non dégénérée complexe ω, et considérons les déformations de $C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}[\![t]\!]$ donnant lieu au crochet de Poisson correspondant. Les résultats de [8] rappelés en tête de 2.1 restent valables et fournissent une classification par $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1))$. La suite exacte (2.3.1) est à remplacer par

$$0 \to \exp(\mathbb{C}[\![t]\!]) \to \exp(\mathcal{A}_1) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1) \to 0, \tag{2.8.1}$$

où $\exp(\mathbb{C}[\![t]\!])$ est simplement le faisceau constant de valeur le groupe additif $\mathbb{C}[\![t]\!]$ et où l'application exponentielle de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_1$ induit un isomorphisme "exp"$(a) \mapsto (\exp(a),\, a \bmod t)$ de $\exp(\mathcal{A}_1)$ avec le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{A}_1$ munis d'un logarithme de leur réduction modulo t.

On obtient que l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations complexes, donnant lieu au crochet de Poisson défini par ω, est vide ou un espace principal homogène sous $H^2(M,\mathbb{C}[\![t]\!])$. La compatibilité 2.5 (passage à l'algèbre opposée) reste valable.

VARIANTE 2.9. Si la 2-forme ω est purement imaginaire, on dispose encore d'une variante $*$-réelle. Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux déformations complexes de même crochet de Poisson non dégénéré, on a pour leurs complexes conjuguées

$$[\bar{\mathcal{A}}_2 : \bar{\mathcal{A}}_1] = [\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1]^-$$

et pour les algèbres opposées

$$[\mathcal{A}_2^0 : \mathcal{A}_1^0] = -[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1].$$

Pour $\mathcal{A}_1$ anti-isomorphe à sa complexe conjuguée, les déformations $\mathcal{A}_2$ ayant la même propriété et de même crochet de Poisson, supposé non dégénéré, sont classifiées par $[\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_1] \in H^2(M, i\mathbb{R}[\![t]\!])$, et par 1.4, l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations $*$-réelles ayant le crochet de Poisson imposé est vide ou un espace principal homogène sous $H^2(M, i\mathbb{R}[\![t]\!])$.

On pourrait aussi invoquer une suite exacte analogue à (2.8.1):

$$0 \to \exp(i\mathbb{R}[\![t]\!]) \to \exp(\mathcal{A}_1^-) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}_1, *) \to 0 \tag{2.9.1}$$

où $\mathcal{A}_1^-$ est l'algèbre de Lie des a dans $\mathcal{A}_1$ vérifiant $a^* = -a$. L'exponentielle identifie $\exp(\mathcal{A}_1^-)$ au groupe des éléments inversibles f de $\mathcal{A}_1$, vérifiant $ff^* = 1$ et munis d'un logarithme de leur réduction modulo t.

REMARQUE 2.10. On peut cumuler 2.7 et 2.8 ou 2.9: pour V isomorphe à $\mathbb{C}[\![t]\!]$ (resp. $\mathbb{R}[\![t]\!]$), les classes d'isomorphie de déformations complexes (resp. $*$-réelles) de $C^\infty(M)$ sur V (resp. $V_\mathbb{C}$), de crochet de Poisson non dégénéré donné, forment un ensemble vide ou principal homogène sous $H^2(M,V)$ (resp. $H^2(M,iV)$).

§3. La méthode de Fedosov

Rappelons ce qu'il nous faudra savoir de la méthode de Fedosov.

3.1. Soit E_0 l'espace vectoriel symplectique type, de dimension $2n$: coordonnées p_i, q_i $(1 \le i \le n)$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Le produit de Moyal $*_t$ de deux fonctions C^∞ sur E_0 est

$$f *_t g = \exp\left(\frac{t}{2}\sum \partial_{p_i'}\partial_{q_i''} - \partial_{q_i'}\partial_{p_i''}\right)[f(p',q')g(p'',q'')]$$
$$\text{évalué en } (p',q') = (p'',q'') .$$

Il correspond à une structure de $\mathbb{R}[\![t]\!]$-algèbre $*$ sur le $\mathbb{R}[\![t]\!]$-module $C^\infty(E_0)[\![t]\!]$, faisant de ce dernier une déformation de $C^\infty(E_0)$. Cette construction, invariante par translations, n'utilise que la structure d'espace affine symplectique de E_0: le groupe symplectique affine $ASp = Sp \ltimes$(translations) agissant sur $C^\infty(E_0)$ respecte le produit $*$.

Variante polynomiale: $\mathbb{R}[(p_i),(q_i),t] \subset C^\infty(E_0)[\![t]\!]$ est une sous-$\mathbb{R}[t]$-algèbre, pour le produit $*$. Elle est graduée, avec p_i, q_i de degré 1 et t de degré 2. On note F la filtration correspondante: degré $\ge n$. C'est la filtration par les puissances de l'idéal $((p_i),(q_i)) = ((p_i),(q_i),t)$, noyau de l'évaluation en 0 de la réduction modulo t.

Variante formelle: soit $\widehat{A_0}$ le complété à l'origine de $C^\infty(E_0)$. Le produit de Moyal est encore défini sur $\widehat{A} := \widehat{A_0}[\![t]\!] = \mathbb{R}[\![(p_i),(q_i),t]\!]$. L'algèbre obtenue est le complété de $\mathbb{R}[\![(p_i),(q_i),t]\!]$ pour la filtration F. Le groupe symplectique continue à agir sur $\widehat{A}$, ainsi que l'algèbre de Lie $\mathfrak{asp}$ de ASp. Le crochet $[f,g] = f*g-g*f$ de $\widehat{A}$, à valeurs dans $t\widehat{A}$, se prolonge uniquement en un crochet de Lie $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaire sur $\frac{1}{t}\widehat{A}$. La filtration F se prolonge, avec $F^n = \frac{1}{t}F^{n+2}$. Dans $\frac{1}{t}\widehat{A}$, les éléments ($\frac{1}{t}\cdot$ forme quadratique) forment l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}$. Plus précisement, il existe un unique isomorphisme

$$\rho\colon \mathfrak{sp} \to \left\{\frac{1}{t}\cdot \quad \text{formes quadratiques}\right\} \subset \frac{1}{t}\widehat{A}$$

tel que l'action de $x \in \mathfrak{sp}$ sur $\widehat{A}$ soit $\mathrm{ad}\rho(x)$.

Pour $n > 0$, l'algèbre de Lie $F^0/F^n(\frac{1}{t}\widehat{A})$ est de dimension finie, extension de $\rho(\mathfrak{sp})$ par le radical unipotent $\mathbb{R} \oplus F^1/F^n$. On notera $\exp(F^0/F^n)$ le groupe algébrique correspondant, extension du groupe symplectique par un groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathbb{R} \oplus F^1/F^n$.

Passant à la limite projective, on obtient un groupe pro-algébrique noté $\exp\big(F^0(\frac{1}{t}\widehat{A})\big)$ extension du groupe symplectique par le radical unipotent $\exp\big(\mathbb{R} \oplus F^1(\frac{1}{t}\widehat{A})\big)$. L'action adjointe de l'algèbre de Lie $F^0(\frac{1}{t}\widehat{A})$ sur $\widehat{A}$ s'intègre en une action du groupe $\exp\big(F^0(\frac{1}{t}\widehat{A})\big)$ sur $\widehat{A}$, limite projective de l'action des $\exp\big(F^0/F^n(\frac{1}{t}\widehat{A})\big)$ sur les $\widehat{A}/F^n\widehat{A}$. Le centre $\exp(\mathbb{R}[\![t]\!])$ agit trivialement. On peut vérifier que cette action identifie le quotient $\exp\big(F^0(\frac{1}{t}\widehat{A})/\mathbb{R}[\![t]\!]\big)$ au groupes des automorphismes de la $\mathbb{R}[\![t]\!]$-algèbre $\widehat{A}$, et $\frac{1}{t}\widehat{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$ à l'algèbre de Lie de ses dérivations.

3.2. Le système $\big(\mathrm{Sp}, \frac{1}{t}\widehat{A}, \rho\big)$ est du type suivant: un groups de Lie G, une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ sur laquelle G agit, et un plongement G-équivariant ρ de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ dans $\mathcal{L}$, $x \longmapsto \mathrm{ad}\rho(x)$ devant coïncider avec l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{L}$. Pour G connexe (notre cas), cela revient à: G groupe de Lie, $\mathcal{L}$ algèbre de Lie et $\rho\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{L}$ tel que $\mathrm{ad}\,\rho$ s'intègre en une action de G sur $\mathcal{L}$.

De tels systèmes $(G, \mathcal{L}, \rho)$ sont familiers en théorie des représentations des groupes de Lie semi-simples, où est commode de remplacer un groupe H par un compact maximal K et l'algèbre de Lie de H. Si $\mathcal{L}$ s'intègre en L contenant G, l'information portée par $(G, \mathcal{L}, \rho)$ est celle du complété formel de L le long de G, avec sa structure de groupe.

Soit un système $(G, \mathcal{L}, \rho)$, avec G supposé connexe (pour simplifier). Supposons tout d'abord que $\mathcal{L}$ s'intègre en L et ρ en un morphisme $G \to L$. Dans ce cas, si P est un G-torseur sur une variété M, on peut pousser P par $G \to L$ pour obtenir un L-torseur P_L et on dispose de la notion de connexion sur P_L. Cette notion ne dépend pas en fait de pouvoir intégrer ρ en un morphisme de groupes: une connexion est "quelque chose qui s'écrit $\nabla_0 + \beta$, avec ∇_0 une connexion sur P et β une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{L}^P$, avec les identifications $(\nabla_0 + \alpha) + \beta = \nabla_0 + (\rho(\alpha) + \beta)$ pour α une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}^P$." Formellement, on définit l'espace des *connexions* sur $P_\mathcal{L}$ comme le quotient

$$\{\text{ connexions sur } P\ \} \times \Omega^1(\mathcal{L}^P)/\Omega^1(\mathfrak{g}^P).$$

Le formalisme usuel reste valable:

(a) Si V est une représentation linéaire de $(G, \mathcal{L}, \rho)$, i.e. est muni d'actions compatibles τ de G et $\mathcal{L}$, une connexion ∇ sur $P_\mathcal{L}$ induit une connexion $\tau(\nabla)$, ou simplement ∇, sur le fibré V^P tordu de V par P sur M. Si on voit $\tau(\nabla)$ comme un endomorphisme de degré un de $\Omega^*(V^P)$, on a $\tau(\nabla_0+\beta)=\tau(\nabla_0)+\tau(\beta)$.

(b) Une connexion ∇ a une courbure R dans $\Omega^2(\mathcal{L}^P)$. Pour V comme en (a), la courbure de $\tau(\nabla)$ est $\tau(R)$: $\tau(\nabla)^2=\tau(R)$. Pour $V=\mathcal{L}$, si $\nabla=\nabla_0+\beta$ et que ∇_0 est de courbure R_0, on a

$$R=R_0+\nabla_0(\beta)+\frac{1}{2}[\beta,\beta] \qquad \text{et}$$

$$\nabla R=0 \qquad \text{(Bianchi)}\ .$$

Nous appliquerons ces constructions à $(\mathrm{Sp}, \frac{1}{t}\widehat{A}, \rho)$ agissant sur l'algèbre $\widehat{A}$. La sous-algèbre de Lie $F^0\left(\frac{1}{t}\widehat{A}\right)$ s'intègre en un pro-groupe de Lie agissant sur $\widehat{A}$, mais il n'en va pas de même de $\frac{1}{t}\widehat{A}$. Exemple: $\frac{1}{t}$ (forme linéaire) agit comme une translation infinitésimale.

3.3. Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Chaque espace tangent T_x est un espace vectoriel symplectique, et les espaces de repères symplectiques Isom (E_0,T_x) forment un Sp-torseur P sur M. La méthode de Fedosov est de chercher une connexion ∇ sur $P_{\frac{1}{t}\widehat{A}}$ (au sens 3.2) ayant les propriétés (A), (B) ci-dessous.

Tordant $\widehat{A}$ par P, on obtient un fibré $\widehat{A}^P$ sur M. Sa fibre en $x\in M$ est

$$\left(\text{ complété en 0 de } C^\infty(T_x)\ \right)[\![t]\!]. \tag{3.3.1}$$

Le fibré $\widehat{A}^P$ est de dimension infinie. Il faut le voir comme un système projectif de fibrés de dimension finie. Il hérite des structures de $\widehat{A}$ invariantes par le groupe symplectique: la structure de $\mathbb{R}[\![t]\!]$-algèbre, la filtration F de $\frac{1}{t}\widehat{A}$, ...

Le fibré des $(\frac{1}{t}$·forme linéaire affine sur $T_x)$ s'envoie isomorphiquement sur le quotient de $\frac{1}{t}\widehat{A}^P$ par F^0. Puisque $\mathfrak{sp}\subset F^0$, une connexion ∇ sur $P_{\frac{1}{t}\widehat{A}}$ a une projection « mod F^0 » sur l'espace des 1-formes à valeurs dans le fibré vectoriel des $\{\frac{1}{t}$. forme linéaire affine sur l'espace tangent$\}$: écrire $\nabla=\nabla_0+\beta$ avec ∇_0 une connexion sur P et projeter β.

L'application identique de T_x est une 1-forme η_0 à valeurs dans le fibré tangent. Un vecteur tangent $v\in T_x$ définit la forme linéaire $\omega(v,\ ): w\longmapsto\omega(v,w)$. Appliquant cette construction à η_0, on obtient une 1-forme $\omega(\eta_0,\ )$ à valeurs dans les fonctions linéaires sur les T_x. On pose

$$\eta=\frac{1}{t}\omega(\eta_0,\ ).$$

Conditions sur ∇:

(A) $\nabla \bmod F^0$ est η;

(B) La courbure R de ∇ est une 2-forme à valeurs dans le centre $\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$ de $\frac{1}{t}\widehat{A}^P$.

D'après l'identité de Bianchi, la 2-forme R est automatiquement fermée.

3.4. Soit ∇_0 une connexion sur P, i.e., une connexion linéaire sur le fibré tangent respectant la structure symplectique. Si le fibré tangent est traité comme un fibré en espaces affines, il admet une unique connexion sans glissement ∇_0^{aff} de partie linéaire ∇_0. Sans glissement: tel que le transport parallèle de T_x à $T_{x+\delta x}$ envoie 0 sur $-\delta x + O(\delta x^2)$. La connexion induite sur le fibré des fonctions sur les T_x est

$$\nabla_0^{\text{aff}}(f) = \nabla_0(f) - \partial_{\eta_0}(f).$$

Le lecteur peut prendre cette formule comme définissant ∇_0^{aff}. Par (3.3.1), ∇_0^{aff} induit une connexion sur $\widehat{A}^P$. C'est la connexion définie par la connexion $\nabla_0 + \eta$ sur $P_{\frac{1}{t}\widehat{A}}$. En effet, pour f une fonction sur T_x et v un vecteur tangent, on a dans l'algèbre de Moyal

$$\left[\frac{1}{t}\omega(v,\ ), f\right] = -\partial_v f$$

et donc, dans les 1-formes à valeurs dans l'algèbre de Moyal,

$$[\eta, f] = \left[\frac{1}{t}\omega(\eta_0,\ ), f\right] = -\partial_{\eta_0} f.$$

La courbure de ∇_0^{aff} est une 2-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique affine ($\mathrm{Sp} \ltimes$ translations) du fibré tangent. Par définition de la torsion T_0 de ∇_0, c'est la somme $R_0 + T_0$ de la courbure et de la torsion de ∇_0.

La courbure de la connexion $\nabla_0 + \eta$ de $P_{\frac{1}{t}\widehat{A}}$ relève $R_0 + T_0$: c'est $R_0 + \nabla_0\eta + \eta^2$, où $\eta^2 = \frac{1}{2}[\eta, \eta]$:

$$\eta^2 = \frac{1}{t}\omega$$

$$\nabla_0\eta = \frac{1}{t}\omega(T_0,\ ).$$

Une connexion vérifiant (A) s'écrit

$$\nabla = \nabla_0 + \eta + \beta$$

avec β à valeurs dans $\left(\mathbb{R} \oplus F^1\left(\frac{1}{t}\widehat{A}\right)\right)^P$. Sa courbure est

$$R = \frac{1}{t}\omega + \frac{1}{t}\omega(T_0,\ ) + R_0 + [\eta, \beta] + \nabla_0\beta + \beta^2.$$

La condition (A) impose

$$R = \frac{1}{t}\omega + \quad \text{termes de filtration} \quad \geq -1$$

et $R - \frac{1}{t}\omega$, mod F^0, est donné par la torsion T_0. En particulier, (B) impose à ∇_0 d'être sans torsion.

3.5. Fedosov prouve que pour chaque 2-forme fermée R à valeurs dans $\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$, de partie polaire $\omega \cdot \frac{1}{t}$, il existe une connexion ∇ vérifiant (A) (B) de courbure R. De plus, deux telles connexions sont transformées l'une de l'autre par une transformation de gauge, section de $\exp\left(F^1\left(\frac{1}{t}\widehat{A}^P\right)\right)$. Son argument procède par approximations successives le long de la filtration F, utilisant à chaque étape que le complexe de de Rham de chaque espace tangent T_x est canoniquement homotope au sous-complexe réduit à $\mathbb{R}$ en degré 0. L'homotopie provient de l'homotopie $x \longmapsto \lambda x$ $(1 \geq \lambda \geq 0)$ entre l'application identique de T_x et l'application constante de valeur 0. Cette canonicité évite que se posent des problèmes globaux sur M.

Soit ∇ une connexion vérifiant (A) (B). La condition (B) assure que la connexion induite sur le fibré en algèbres $(\widehat{A})^P$ est sans courbure. Modulo t, le fibré en algèbres $(\widehat{A}/t\widehat{A})^P$ est le fibré dont la fibre en x est l'algèbre $\mathrm{jet}_\infty(T_x, 0)$ de jets d'ordre ∞ en 0 de fonctions sur l'espace tangent T_x. Un jet d'isomorphisme $\alpha_x \colon (T_x, 0) \to (M, x)$ a une dérivée en 0 qui est un automorphisme de T_x. La condition (A) assure alors qu'il existe un unique champ de jets infinis d'isomorphismes $\alpha_x \colon (T_x, 0) \to (M, x)$ $(x \in M)$, de dérivée 1 en 0, tel que l'isomorphisme correspondant

$$(\widehat{A}/t\widehat{A})^P \to \quad \text{(jets infinis de fonctions sur } M)$$

transforme ∇ en la connexion canonique sur les jets d'ordre infini. On sait que $\Omega^*(\mathrm{jet}_\infty)$ est une résolution du faisceau des fonctions C^∞, l'augmentation étant $f \longmapsto \mathrm{jet}_\infty(f)$. De même, $\Omega^*(\widehat{A}/t\widehat{A})^P$ est une résolution de $\mathcal{C}^\infty(M)$, une section horizontale a de $(\widehat{A}/t\widehat{A})^P$ correspondant à la fonction $x \longmapsto$ valeur de a_x en 0. Filtrant par la filtration t-adique et appliquant ce qui précède au gradué associé, on voit que $\Omega^*(\widehat{A}^P)$ est une résolution du faisceau de $\mathbb{R}[\![t]\!]$-modules $\mathcal{C}^\infty(M)[\![t]\!]$, une section horizontale $a_x(u,t)$ correspondant à $a_x(0,t)$.

Le faisceau $\mathcal{A}(\nabla)$ des sections horizontales de $(\widehat{A})^P$ est une déformation de $C^\infty(M)$, le morphisme structural $\mathcal{A}(\nabla) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ étant

$$a \longmapsto \text{la fonction de } x\text{: évaluation en 0 de } a_x \bmod t\ .$$

Si on l'identifie à $\mathcal{C}^\infty(M)[\![t]\!]$ par $a \longmapsto a_x(0,t)$, le produit est donné par un $*$-produit. Notons pour usage ultérieur

$$\Omega^*(\widehat{A}^P) \quad \text{est une résolution de } \mathcal{A}(\nabla)\ . \tag{3.5.1}$$

PROPOSITION 3.6. *Soient* ∇_1 *et* ∇_2 *deux connexions vérifiant* (A) (B), *de courbure* R_1 *et* R_2. *La différence* $R_2 - R_1$ *est une* 2*-forme fermée à valeurs dans* $\mathbb{R}[\![t]\!]$ *et* $[\mathcal{A}(\nabla_2)\colon \mathcal{A}(\nabla_1)]$ *est sa classe de cohomologie.*

Rappelons comment obtenir un cocycle de Čech de classe de cohomologie celle d'une 2-forme fermée α. Pour un recouvrement ouvert (U_i) convenable, on résoud

$$\alpha = d\beta_i \quad (\text{sur } U_i)\ , \qquad \beta_j - \beta_i = df_{ij} \quad (\text{sur } U_i \cap U_j)$$

et $c_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$ vérifie $dc_{ijk} = 0$, i.e. est localement constant. Le cocycle cherché est l'opposé $-c_{ijk}$. Le signe provient de ceux qui parsèment le complexe double $\check{C}(\mathcal{U}, \Omega^*)$.

Ecrivons donc

$$R_2 - R_1 = d\beta_i \quad \beta_j - \beta_i = df_{ij} \quad c_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}.$$

Les connexions ∇_2 et $\nabla_1 + \beta_i$ ont la même courbure (puisque β_i est à valeurs centrales, la courbure de $\nabla_1 + \beta_i$ est simplement $R_1 + \nabla_1\beta_i = R_1 + d\beta_i$). Il existe donc g_i dans $\exp(F^1 \frac{1}{t} \widehat{A}^P)$ transformant $\nabla_1 + \beta_i$ en ∇_2, et sur U_{ij} $g_i^{-1} g_j$ transforme $\nabla_1 + \beta_j$ en $\nabla_1 + \beta_i$: écrivant simplement ∇ pour ∇_1,

$$g_i^{-1} g_j \nabla (g_i^{-1} g_j)^{-1} = \beta_i - \beta_j = -df_{ij}$$

et $g_i^{-1} g_j \exp(-f_{ij})$ est horizontal pour ∇. C'est une section du sous-groupe unipotent de $\exp\left(F^0 \frac{1}{t} \widehat{A}^P\right)$ d'algèbre de Lie $(F^1 + \mathbb{R})^P$ et on a

$$g_i^{-1} g_j \exp(-f_{ij}) = \exp(u_{ij})$$

avec u_{ij} dans $\left(F^1\left(\frac{1}{t}\widehat{A}\right) \oplus \mathbb{R}\right)^P$ et horizontal. Notons $\bar{u}_{ij}$ la réduction $\bmod t$ de tu_{ij}. En chaque point $x \in M$, $\bar{u}_{ij}(x)$ est un jet d'ordre infini de fonctions sur $(T_x, 0)$, nul à l'origine. Il est aussi horizontal. L'argument par lequel Fedosov montre que $\mathcal{A}(\nabla)$ est bien une déformation montre qu'une section horizontale du fibré des jets d'ordre infini de fonctions sur les T_x est déterminée par la valeur de ces jets à l'origine. On a donc $\bar{u}_{ij} = 0$ et u_{ij} est une section horizontale de $\widehat{A}^P$, i.e., appartient à $\mathcal{A}(\nabla)$.

Sur $\widehat{A}^P$, ∇ and $\nabla + \beta_i$ définissent la même connexion. Puisque g_i transforme $\nabla + \beta_i$ en ∇_2, g_i induit un isomorphisme de la déformation $\mathcal{A}(\nabla)$ avec la déformation $\mathcal{A}(\nabla_2)$. Puisque f_{ij} est central, l'automorphisme $g_i^{-1} g_j$ de $\mathcal{A}(\nabla)$ est donné par $\exp(u_{ij})$, i.e., est l'automorphisme intérieur de $\mathcal{A}(\nabla)$ défini par $\exp(u_{ij})$ dans $\mathcal{A}(\nabla)^*$.

On a

$$\begin{aligned}
\exp(u_{jk}) \exp(u_{ik})^{-1} \exp(u_{ij}) &= \\
&= \left(g_j^{-1} g_k \exp(-f_{jk})\right) \left(g_i^{-1} g_k \exp(-f_{ik})\right)^{-1} \left(g_i^{-1} g_j \exp(-f_{ij})\right) \\
&= \exp(-c_{ijk})
\end{aligned}$$

et 3.6 résulte de la définition de $[\mathcal{A}(\nabla_2):\mathcal{A}(\nabla_1)]$.

3.7. D'après 2.6 et 3.6, les déformations $\mathcal{A}$ de $C^\infty(M)$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$, donnant lieu à un crochet de Poisson non dégénéré, sont classifiées par ce crochet de Poisson, correspondant à une structure symplectique ω, et par une classe de cohomologie $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ dans $H^2\big(M, \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\big)$ de partie polaire $\frac{1}{t}.[\omega]$. La classe de cohomologie attachée à $\mathcal{A}$ s'obtient en mettant $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A}(\nabla)$, et en prenant la courbure de ∇.

Nous allons vérifier que la formation de $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ est compatible à un changement de variables $t \longmapsto f(t)$, $f(t) = \sum\limits_1^\infty a_n t_n$ avec a_1 inversible: si $\mathcal{A}'$ est déduit de $\mathcal{A}$ par l'extension des scalaires $f^*\colon \mathbb{R}[\![t]\!] \to \mathbb{R}[\![t]\!]$, $t \longmapsto f(t)$, on a $\mathrm{cl}(\mathcal{A}') = f^*\mathrm{cl}(\mathcal{A})$.

Il suffit de vérifier que les constructions 3.1 à 3.5 peuvent être reformulées pour garder un sens pour $\mathbb{R}[\![t]\!]$ remplacé par V isomorphe à $\mathbb{R}[\![t]\!]$, comme en 1.5.

3.8 L'analogue du fibré $\widehat{A}^P$. Soit m l'idéal maximal de V. Les droites m/m^2 et m^{-1}/V sont en dualité. La variété M est supposée non pas symplectique, mais munie d'une 2-forme fermée ω_0 non dégénérée à valeurs dans m^{-1}/V^0. Il lui correspond un crochet de Poisson

$$\{\ \ ,\ \ \}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M) \to C^\infty(M)\otimes m/m^2$$

et on s'intéresse aux déformations de $C^\infty(M)$ telles que le crochet correspondant soit mod m^2 ce crochet de Poisson. En chaque point x, le crochet de Poisson correspond à un 2-vecteur à coefficients dans m/m^2: $\tau_0 \in \overset{2}{\wedge}\, T_x \otimes m/m^2$.

Soit E_0 un espace vectoriel muni d'un 2-vecteur τ_0 à coefficients dans m/m^2. On veut lui associer un V-module libre E, muni d'un 2-vecteur $\tau \in \overset{2}{\wedge}\, E\otimes m$, tel que (E_0,τ_0) soit (E,τ) mod m. L'idéal fractionnaire m^{-1} est libre de rang un. Tordons-le en $m^{-1}\otimes_{\mathbb{R}}(m/m^2)$. Le module obtenu est trivialisé modulo m. Une *racine carrée* de $m^{-1}\otimes_{\mathbb{R}}(m/m^2)$ est un V-module libre de rang un ρ, trivialisé modulo m, muni d'un isomorphisme de modules trivialisés modulo m

$$\rho^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} m^{-1}\otimes_{\mathbb{R}}(m/m^2).$$

Une telle racine carrée existe, et est unique à isomorphisme unique près. On prend $E = E_0\otimes_{\mathbb{R}}\rho$. On a

$$\overset{2}{\wedge}\, E\otimes_V m = \overset{2}{\wedge}\, E_0 \otimes_{\mathbb{R}} \rho^{\otimes 2}\otimes_V m = \left(\overset{2}{\wedge}\, E_0\otimes m/m^2\right)\otimes_{\mathbb{R}} V \supset \overset{2}{\wedge}\, E_0\otimes m/m^2$$

et on prend pour τ l'image de τ_0.

Description équivalente: si on choisit une uniformisante t, τ_0 s'écrit $\tau_1.t$ avec $\tau_1 \in \overset{2}{\wedge} E_0$. On prend $E = E_0 \otimes_{\mathbb{R}} V$ et $\tau = \tau_1.t$. On identifie ces modules entre eux par

$$\begin{array}{ccc} t \text{ choisi} & & t' \text{ choisi} \\ & & \\ E_0 \otimes_{\mathbb{R}} V & \xrightarrow[a_{t't}]{} & E_0 \otimes_{\mathbb{R}} V \end{array}$$

avec $a_{t',t} = \left[t'/t.(t'/t \bmod m)^{-1}\right]^{1/2}$.

Soit enfin $\widehat{A}(E_0) = \prod \mathrm{Sym}^n(E^\vee)$: le complété à l'origine de l'algèbre locale de E, vue comme schéma vectoriel sur $\mathrm{Spec}(V)$. Le 2-vecteur τ définit un produit de Moyal sur $\widehat{A}(E_0)$. On dispose d'une augmentation $\widehat{A}(E_0) \to V \to \mathbb{R}$ et les puissances de l'idéal d'augmentation fournissent la filtration F. Puisque $\widehat{A}(E_0)$ est commutative modulo m, $m^{-1}\widehat{A}(E_0)$ est une algèbre de Lie. On a

$$\begin{aligned} m^{-1}\widehat{A}(E_0) \supset & m^{-1}\mathrm{Sym}^2(E^\vee) = m^{-1}\rho^{-2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Sym}^2(E_0) \\ & = V \otimes m^{-1}/V \otimes \mathrm{Sym}^2(E_0) \supset m^{-1}/V \otimes \mathrm{Sym}^2(E_0). \end{aligned}$$

Si τ_0 est non dégénéré, ce sous-espace est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}(E_0)$: $\mathrm{Sp}(E_0)$ agit sur $\widehat{A}(E_0)$ et l'action de $x \in \mathfrak{sp}$ est $\mathrm{ad}\,\rho(x)$, pour $\rho(x)$ l'élément correspondant de $m^{-1}/m^0 \otimes \mathrm{Sym}^2(E_0) \subset m^{-1}\widehat{A}(E_0)$. Il suffit de le vérifier après avoir choisi une uniformisante t, auquel cas on retrouve 3.1.

Pour chaque x dans M, appliquons cette construction à T_x et à $\tau_0 \in \overset{2}{\wedge} T_x \otimes m/m^2$. On obtient un fibré en V algèbres filtrées $\widehat{A}$ sur M et un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{sp} \hookrightarrow m^{-1}\widehat{A}$, pour $\mathfrak{sp}$ le fibré des algèbres de Lie symplectiques des T_x.

3.9. Définissons une *Connexion* comme étant "quelque chose qui s'écrit" $\nabla_0 + \beta$, avec ∇_0 une connexion symplectique sur la fibré tangent et β une 1-forme à valeurs dans $m^{-1}\widehat{A}$, (no-modulo) l'identification $(\nabla_0 + \alpha) + \beta = \nabla_0 + (\alpha + \beta)$ pour α une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{sp} \subset m^{-1}\widehat{A}$. Une Connexion induit une connexion sur le fibré $\widehat{A}$, et a une courbure: celle de $\nabla_0 + \beta$ est la somme de celle de ∇_0, à valeurs dans $\mathfrak{sp} \subset m^{-1}\widehat{A}$, et de $\nabla_0(\beta) + \beta^2$.

On traduit facilement pour les Connexions les conditions (A) (B) de 3.2. Une Connexion ∇ vérifiant (A) (B) fournit une déformation de $C^\infty(M)$ sur V: l'algèbre des sections horizontales de $\widehat{A}$. La *classe* de cette déformation est la classe de cohomologie de la courbure de ∇.

On a déjà vu, en choisissant une uniformisante t, que cette construction attache bien à chaque déformation une classe de cohomologie. Que les définitions puissent être faites sans mentionner t montre l'invariance par changement d'uniformisante $t \longmapsto f(t)$:

CONSTRUCTION 3.10. *Les classes d'isomorphie de déformations sur V de $C^\infty(M)$, donnant lieu à un crochet de Poisson non dégénéré, sont classifées par*

(a) *ce crochet de Poisson*

(b) *une classe de cohomologie* $\mathrm{cl} \in H^2(M, m^{-1})$, *d'image dans* $H^2(M, m^{-1}/V)$ *la classe de la 2-forme fermée à valeurs dans* m^{-1}/V *définie par le crochet de Poisson.*

VARIANTES 3.11. Le même énoncé vaut, avec le même preuve, pour les déformation complexes (V isomorphe à $\mathbb{C}[\![t]\!]$) et pour les déformation $*$-réelles (V isomorphe à $\mathbb{R}[\![t]\!]$, classe dans $H^2(M, im^{-1})$).

§4. La méthode de De Wilde et Lecomte

4.1. Soit (M, ω) une variété symplectique et soit $\mathcal{A}$ une déformation de $C^\infty(M)$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$, donnant lieu au crochet de Poisson correspondant. D'après (2.1.1), toute dérivation $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaire et induisant $0 \bmod t$ est localement de la forme $\mathrm{ad}\, f$ avec f section de $\mathcal{A}$. Divisant par t, on trouve que toute dérivation $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaire est localement de la forme $\mathrm{ad}\, f$, avec f section de $\frac{1}{t}\mathcal{A}$. De plus, $\mathrm{ad}\, f$ est trivial si et seulement si f est une section du faisceau constant $\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$.

Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie des dérivations D de $\mathcal{A}$ induisant sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ une dérivation $\lambda t \partial_t$, avec λ localement constant. Associant à D sa restriction à $\mathbb{R}[\![t]\!]$, on obtient une suite de faisceaux

$$0 \to \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!] \to \frac{1}{t}\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathcal{L} \to \mathbb{R}.t\partial_t \to 0. \tag{4.1.1}$$

LEMME 4.2. *La suite* (4.1.1) *est exacte.*

Preuve. Il reste à voir que $\mathcal{L}$ se projette sur le faiceau constant $\mathbb{R}.t\partial_t$. La question est locale. On peut donc supposer que M est un espace vectoriel symplectique et que $\mathcal{A}$ est $C^\infty(M)[\![t]\!]$ muni du produit de Moyal. Les

$$f(x,t) \longmapsto f(\lambda^{1/2}x, \lambda t) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^*)$$

forment un groupe à un paramètre d'automorphismes. Son générateur infinitésimal induit $t\partial_t$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$.

4.3. La suite exacte (4.1.1) définit une classe de Yoneda

$$\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A}) \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}, \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right) = H^2\left(M, \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right).$$

Voici son interprétation en terme de gerbes (et notre choix de signes).

Considérons le problème de relever l'extension $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}.t\partial_t$ par $\frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$ en une extension par $\frac{1}{t}\mathcal{A}$, i.e. d'avoir un diagramme commutatif de faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \frac{1}{t}\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{L}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[[t]] \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

La seconde ligne est déduite de 4.1.1, avec $\mathbb{R}.t\partial_t$ identifié à $\mathbb{R}$. Le relèvement $\widetilde{\mathcal{L}}$ est automatiquement un faisceau d'algèbres de Lie: si $\tilde{\ell}$ dans $\widetilde{\mathcal{L}}$ se projette sur 1 dans $\mathbb{R}$, et sur ℓ dans $\mathcal{L}$, on munit $\widetilde{\mathcal{L}}$ du crochet pour lequel il est produit semi-direct de $\mathbb{R}\tilde{\ell}$ et $\frac{1}{t}\mathcal{A}$, l'action de $\tilde{\ell}$ sur $\frac{1}{t}\mathcal{A}$ étant celle de ℓ. Ce crochet est indépendant du choix de $\tilde{\ell}$.

La seconde ligne de (4.3.1) étant localement scindée, il existe localement des relèvements $\widetilde{\mathcal{L}}$: scinder $\mathcal{L}$ en $\left(\frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right) \times \mathbb{R}$ (comme faisceau vectoriel) et prendre $\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{t}\mathcal{A} \times \mathbb{R}$. Deux relèvements sont localement isomorphes (en tant que relèvements) et le faisceau des automorphismes d'un relèvement (en tant que relèvement) est $\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}, \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right) = \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$. Les relèvements $\widetilde{\mathcal{L}}$ forment donc une gerbe sur X, de lien $\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$, et $\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A})$ est sa classe de cohomologie, obstruction à l'existence d'un relèvement global.

Précisons les signes: à f dans $\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$ correspond l'automorphisme $\tilde{\ell} \to \tilde{\ell} +$ $f.$(image de $\tilde{\ell}$ dans $\mathbb{R}$). Si $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ est un relèvement sur U_i et $c_{ij}\colon \widetilde{\mathcal{L}}_j \to \widetilde{\mathcal{L}}_i$ un isomorphisme de relèvements sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A})$ est la classe du 2-cocycle $c_{jk}c_{ik}^{-1}c_{kj}$.

PROPOSITION 4.4. *Soit $\mathcal{A}$ une déformation comme en 4.1, obtenue par la méthode de Fedosov 3.5 à partir d'une connexion ∇ de courbure R, de classe de cohomologie* $\mathrm{cl}(\mathcal{A}) = [R] \in H^2\left(M, \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right)$. *L'obstruction* 4.3 *est*

$$\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A}) = -t\partial_t[R].$$

Preuve. Soit E_0 l'espace vectoriel symplectique type, comme en 3.1. Sur l'algèbre de Moyal formelle $\widehat{A}$, identifiée à $\mathbb{R}[\![(p_i),(q_i)]\!][\![t]\!]$ en tant que $\mathbb{R}[\![t]\!]$-module, on dispose d'une action des homothéties $f(p,q,t) \mapsto f(\lambda^{1/2}p, \lambda^{1/2}q, \lambda t)$, de générateur infinitésimal $E := t\partial_t + \frac{1}{2}(\Sigma p_i\partial_{p_i} + q_i\partial_{q_i})$. Soit L l'algèbre de Lie produit semi-direct $\mathbb{R}.E \ltimes \frac{1}{t}\widehat{A}$. Le groupe symplectique agit sur L par transport de structures. Il fixe E. Les éléments de $\frac{1}{t}\widehat{A}$ de la forme $\frac{1}{t}$.(forme quadratique) sont annulés par E. L'algèbre de Lie du groupe symplectique agit donc sur L par $\mathrm{ad}\,\rho(x)$, avec $\rho\colon \mathfrak{sp} \to \frac{1}{t}\widehat{A}$ comme en 3.1.

Soit P comme en 3.3 et tordons par P la suite exacte

$$0 \to \frac{1}{t}\widehat{A} \to L \to \mathbb{R}.t\partial_t \to 0. \tag{4.4.1}$$

On obtient un fibré d'extensions (4.4.1), limite projective de fibrés vectoriels de rang fini. C'est une extension du fibré trivial (correspondant à $\mathbb{R}.t\partial_t$) par $\frac{1}{t}\widehat{A}^P$:

$$0 \to \left(\frac{1}{t}\widehat{A}\right)^P \to L^P \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{C}^\infty \to 0. \tag*{$(4.4.1)^P$}$$

Le fibré $\widehat{A}^P$ est décrit en 3.3.1.

La connexion ∇ de $P_{\frac{1}{t}\widehat{A}}$ définissant $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\nabla)$ fournit une connexion sur L^P. Sa courbure est $\mathrm{ad}\,R$, pour R la courbure de ∇. C'est la 2-forme à valeurs dans les dérivations de L^P:

$$\ell \longmapsto -t\partial_t R.\mathrm{pr}(\ell)$$

Comme en 3.6, exprimons la classe de cohomologie de la 2-forme fermée R par un cocycle de Čech: si $\alpha = R$ et que β_i, f_{ij}, c_{ijk} sont comme en 3.6, c'est la classe de $-c_{ijk}$.

Sur U_i, la connexion $\nabla_i := \nabla - \beta_i$ est de courbure nulle, et induit une connexion de courbure nulle sur L^P. Soit $L_i \subset L^P$ le faisceau des sections horizontales.

LEMMA 4.5. *La suite*

$$0 \to \frac{1}{t}\mathcal{A} \to L_i \to \mathbb{R}.t\partial_t \to 0 \tag{4.5.1}$$

déduite de $(4.4.1)^P$ *par passage aux sections horizontales est exacte.*

Preuve. La suite exacte $(4.4.1)^P$ fournit une suite exacte de complexes de de Rham. Par (3.5.1), la suite exacte longue de faisceaux de cohomologie correspondante se réduit à (4.5.1).

L'extension L_i est une solution sur U_i au problème de relèvement (4.3.1). Soit pr la projection de L^P sur $(\mathbb{R}.t\partial_t)^P$, identifié au faisceau des fonctions C^∞. Si ℓ est dans L_j:

$$(\nabla - \beta_j)(\ell) = 0,$$

$\mathrm{pr}(\ell)$ est localement constant et

$$\begin{aligned}(\nabla - \beta_i)(\ell) &= (\nabla - \beta_j + \beta_j - \beta_i)(\ell) = [df_{ij}, \ell] \\ &= \mathrm{pr}(\ell).d(-t\partial_t f_{ij})\end{aligned}$$

de sorte que $\ell + \mathrm{pr}(\ell)t\partial_t f_{ij}$ est dans L_i: on dispose d'isomorphismes

$$c_{ij}\colon L_j \to L_i\colon \ell \longmapsto \ell + \mathrm{pr}(\ell).t\partial_t f_{ij}$$

et $c_{jk}c_{ik}^{-1}c_{ij}$ est l'automorphisme défini par $t\partial_t c_{ijk}$, en accord avec 4.4.

4.6. Comme nous l'avons exploité au §2, les déformations (sur un ouvert U variable de M) $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ donnant lieu au crochet de Poisson symplectique forment une gerbe. Son lien: le faisceau $\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!])$ des automorphismes de $\mathcal{A}$ (indépendant de $\mathcal{A}$ à automorphisme intérieur près). Les déformations $\mathcal{A}$ comme ci-dessus, munies d'un relèvement $\widetilde{\mathcal{L}}$ comme en 4.3.1, forment également une gerbe. Le faisceau des automorphismes de $(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}})$ est une extension de celui des automorphismes de $\mathcal{A}$ par celui des automorphismes de $\widetilde{\mathcal{L}}$, à $\mathcal{A}$ fixé:

$$0 \to \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!] \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}}) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}) \to 0 \tag{4.6.1}$$

et (4.6.1) fait du lien $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}})$ une extension centrale du lien $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A})$.

Les faisceaux de groupes (4.6.1) sont pro-unipotents, et s'identifient à leurs algèbres de Lie:

$$0 \to \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!] \xrightarrow{①} \underline{\mathfrak{aut}}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}}) \to \mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!] \to 0 \tag{4.6.2}$$

munies de la loi de Hausdorff. L'action adjointe de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ relève la projection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!]$ en $\mathrm{ad}\colon \mathcal{A} \to \underline{\mathfrak{aut}}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}})$, et la section t^n de $\mathcal{A}$, qui agit trivialement sur $\mathcal{A}$, agit sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ par $\tilde{\ell} \mapsto -nt^n$.(image de $\tilde{\ell}$ dans $\mathbb{R}$): l'image de $-nt^n$ par 4.6.2.①. On a donc un isomorphisme:

$$\mathrm{ad} \oplus ①\colon \mathcal{A}/\mathbb{R} \oplus \frac{1}{t}\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathfrak{aut}}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}})$$

d'exponentielle un isomorphisme

$$\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}) \times \frac{1}{t}\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}}). \tag{4.6.3}$$

4.7. L'idée essentielle de De Wilde et Lecomte peut être présentée comme suit. La gerbe $\mathcal{G}_0$ des déformations $\mathcal{A}$ de C^∞ comme en 4.6, avec son lien $\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!])$, ouvre la porte à une obstruction dans $H^3(M, \mathbb{R}[\![t]\!])$ à l'existence d'un objet global. Formellement: le cobord de la classe de $\mathcal{G}_0$ dans $H^2(\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!]))$. Bien que la cohomologie soit nonabélienne, on peut donner un sens à ce cobord (A6, A9). Il est plus facile de chercher un objet global de la gerbe $\mathcal{G}_1$ des $(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}})$ et d'obtenir $\mathcal{A}$ comme sous-produit. Formellement: on a seulement une obstruction dans $H^2(\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R})) \times H^2(\frac{1}{t}\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$, avec $H^2(\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R})) = H^3(\mathbb{R})$: l'obstruction dans $H^3(\mathbb{R}[\![t]\!])$ s'est réduite à une dans $H^3(\mathbb{R})$. On écope aussi d'obstructions parasites dans $H^2(\frac{1}{t}\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R})$.

4.8. La stratégie 4.7 ne permet de produire que des déformations $\mathcal{A}$ vérifiant $\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A}) = 0$. D'après 4.4 et 3.4 ou 3.10 (b), elle ne peut donc réussir que si la classe de cohomologie $[\omega]$ de la structure symplectique est nulle. Que le cas $[\omega] = 0$ soit plus facile est confirmé par l'antériorité [1] sur [2].

Une variante de 4.7 permet de produire des déformations pour lesquelles $\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A})$ est préassigné. Il s'agit de tordre la gerbe $\mathcal{G}_1$ par une classe dans $H^2(\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!])$.

Plus précisément, soit c_{ijk} un 2-cocycle de Čech à valeurs dans $\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$, de classe $c \in H^2$, et soit $\mathcal{G}_1^c$ la gerbe suivante: un objet de $\mathcal{G}_1^c$ sur un ouvert U de M est la donnée de

4.8.1. une déformation $\mathcal{A}$ de C^∞ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ (sur U), munie de relèvements (4.3.1) $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ sur les $U \cap U_i$ et d'isomorphismes de relèvements $c_{ij}\colon \widetilde{\mathcal{L}}_j \to \widetilde{\mathcal{L}}_i$ sur $U \cap U_i \cap U_j$, vérifiant la condition de cocycle tordue

$$c_{jk} c_{ik}^{-1} c_{ij} = c_{ijk}.$$

Localement (par exemple sur chaque U_i), le cocycle c_{ijk} est un cobord, et le choix de b dont il soit cobord définit une équivalence de $\mathcal{G}_1^c$ avec $\mathcal{G}$. Le calcul menant à (4.6.4) étant local, le lien de $\mathcal{G}_1^c$ est encore donné par (4.6.4)

$$\text{Lien } (\mathcal{G}_1^c) = \exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}) \times \frac{1}{t}\mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{4.8.2}$$

Si $(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{L}}_i, c_{ij})$ est un objet global de $\mathcal{G}_1^c$, on a

$$\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A}) = c. \tag{4.8.3}$$

La décomposition (4.8.2) du lien de $\mathcal{G}_1^c$ en produit définit une décomposition correspondante de la gerbe, et de l'obstruction à l'existence d'un objet global. Pour se débarasser des obstructions dans $H^2(\frac{1}{t}\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R})$, le plus simple est de remplacer $\mathcal{G}_1^c$ par une gerbe quotient. Considérer plutôt que $\mathcal{G}_1$ la gerbe $\mathcal{G}_2$ des déformations $\mathcal{A}$ comme en 4.1, munie d'un relèvement de l'extension $\mathcal{L}$ en une extension par $\frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{L}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!] \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.8.4}$$

Le lien de $\mathcal{G}_2$ est $\exp(\mathcal{A}/\mathbb{R})$. L'obstruction à l'existence d'un objet global est dans $H^3(\mathbb{R})$ (A9) et la déformation $\mathcal{A}$ sous-jacente à un objet global vérifie

$$\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A}) = c \mod H^2\left(\frac{1}{t}\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\right).$$

D'après 4.4 et 3.4 ou 3.10 (b), $\mathcal{A}$ n'est donc pas déterminé isomorphisme près: ambiguïté dans $H^2(\mathbb{R})$. Pour se débarasser de ces ultimes obstructions et ambiguïté, plusieurs méthodes sont possibles: voir 4.9 et 4.10.

4.9. Si on pense à une déformation $\mathcal{A}$ comme construite pas à pas de $\mathcal{A}/t^n\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}/t^{n+1}\mathcal{A}$, les ambiguïtés et obstructions résiduelles apparaissent au début, et peuvent être traitées directement. Soit η le champ de 2-vecteurs correspondant au crochet de Poisson. L'interprétation en cohomologie de Hochschild de la nullité $[\eta, \eta] = 0$ (voir 2.1) assure l'existence d'une 2-cochaîne $c_2(f, g)$ telle que

$$fg + \frac{1}{2}\{f, g\}t + c_2(f, g)t^2 \tag{4.9.1}$$

soit associatif modulo t^3. La cochaîne $c_2'(f, g) := c_2(g, f)$ a alors la même propriété. Pour le voir, passer au produit opposé et remplacer t par $-t$. Remplaçant c_2 par $\frac{1}{2}(c_2 + c_2')$, on peut donc supposer c_2 symétrique. Supposons-le.

Considérons la gerbe suivante. Un objet local consiste en

(a) Une déformation $\mathcal{A}$ de C^∞ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$,

(b) Un isomorphisme φ de $\mathcal{A}/t^2$ avec la déformation $\mod t^2$ donnée par $fg + \frac{1}{2}\{f, g\}t$ sur $C^\infty[t]/(t^2)$, cet isomorphisme étant localement relevable en un isomorphisme de $\mathcal{A}/t^3$ avec la déformation $\mod t^3$ (4.9.1),

(c) Un relèvement (4.8.4).

On vérifie que deux objets sont localement isomorphes, et que le faisceau des automorphismes d'un objet est $\exp(t\mathcal{A})$. Le faisceau $t\mathcal{A}$ étant mou, il existe un objet global, unique à isomorphisme près.

La déformation sous-jacente est de classe de Fedosov $\frac{1}{t}\omega$ (voir 4.12). Pour obtenir les autres déformations, il suffit de modifier (b), (c) en (b^*), (c^*):

(b^*) Soit α une 2-forme fermée. Soit $\eta + t\eta_\alpha$ le 2-vecteur à coefficients dans $\mathbb{R}[t]/t^2$ inverse de la 2-forme non dégénérée $\omega + t\alpha$. On ajoute à (4.9.1) le terme $\langle \eta_\alpha, f \wedge g\rangle$.

(c^*) Tordre (c) par un 2-cocycle à valeurs dans $t\mathbb{R}[\![t]\!]$, comme en 4.8.

4.10. De Wilde et Lecomte procèdent autrement: ils utilisent l'involution $t \longmapsto -t$ de $\mathbb{R}[\![t]\!]$ et cherchent un $*$-produit $f *_t g$ tel que

$$f *_{-t} g = g *_t f.$$

En terme de déformations du faisceau d'algèbres $\mathcal{C}^\infty(M)$, il s'agit de chercher une déformation $\mathcal{A}$ munie d'une anti-involution τ induisant $t \longmapsto -t$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$. Pour une telle déformation, on déduit de 4.4 et 2.5, ou on vérifie directement, que

$$\mathrm{obs}_{DL}(\mathcal{A}) \in \frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t^2]\!].$$

4.11. Soit donc c un cocycle de Čech, à valeurs dans $t\mathbb{R}[\![t^2]\!]$. Considérons le problème de construire un objet du type (a) (b) suivant.

(a) Une déformation $\mathcal{A}$ de $C^\infty(M)$ comme en 4.1, munie d'une anti-involution τ induisant $t \longmapsto -t$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ et l'identité sur $C^\infty(M)$.

Le faisceau des dérivations $\mathbb{R}[\![t]\!]$-linéaires et commutant à τ de $\mathcal{A}$ est la sous-algèbre de Lie de $\frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]$ des anti-invariants sous τ. Les dérivations commutant à τ et agissant sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ par $\lambda t\partial_t$ sont une extension $\mathcal{L}^-$:

$$0 \longrightarrow \left(\frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right)^{-\tau} \longrightarrow \mathcal{L}^- \longrightarrow \mathbb{R}.t\partial_t \longrightarrow 0$$

(b) Sur chaque U_i, un relèvement de $\mathcal{L}^-$ en une extension $\mathcal{L}_i^-$ de $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{t}\mathcal{A}\right)^{-\tau}/\frac{1}{t}\mathbb{R}$. Des isomorphismes $c_{ij}: \mathcal{L}_j^- \longrightarrow \mathcal{L}_i^-$ vérifiant la condition de cocycle tordue $c_{jk}c_{ik}^{-1}c_{ij} = c_{ijk}$.

Comme en 4.6, on vérifie que ce problème a localement une solution unique à isomorphisme près. Le faisceau des automorphismes est

$$\exp(\mathcal{A}^{-\tau}).$$

La gerbe des solutions est donc une gerbe de lien mou et, par A.5, il existe une solution globale, unique à isomorphisme près.

Pour $c = 0$, on obtient

PROPOSITION 4.12. *Sur une variété symplectique, il existe à isomorphisme (non unique) près un et un seul système du type suivant:*

(a) *une déformation $\mathcal{A}$ de $C^\infty(M)$ comme en* 4.1

(b) *une anti-involution τ de $\mathcal{A}$ induisant $t \mapsto -t$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ et l'identité sur $C^\infty(M)$*

(c) *un relèvement de $\mathcal{L}^-$ en une extension de $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{t}\mathcal{A}\right)^{-\tau}/\frac{1}{t}\mathbb{R}$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(\frac{1}{t}\mathcal{A}\right)^{-\tau}/\frac{1}{t}\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{L}}^- \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(\frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R}[\![t]\!]\right)^{-\tau} \arrow[r] & \mathcal{L}^- \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

D'après 4.4, la classe (3.4) de $\mathcal{A}$ est

$$\mathrm{cl}(\mathcal{A}) = \frac{1}{t}[\omega]. \tag{4.12.1}$$

REMARQUE 4.13. Une déformation comme en 4.12 est sous-jacente à une déformation comme en 4.9 (a) (b) (c): prendre pour φ de 4.9 (b) l'unique isomorphisme mod t^2 qui transforme τ en $t \to -t$, et obtenir (4.8.3) en poussant par $\left(\frac{1}{t}\mathcal{A}\right)^{-\tau}/\frac{1}{t}\mathbb{R} \to \frac{1}{t}\mathcal{A}/\frac{1}{t}\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. La déformation de 4.9 (a) (b) (c) a donc pour classe $\frac{1}{t}[\omega]$.

REMARQUE 4.14. Une déformation $\mathcal{A}$ munie d'une involution τ comme en 4.10 fournit aussi une déformation $*$-réelle. En formules: faire $t = i\hbar$. Dans notre langage: munir $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ de l'anti-involution composée de τ de la conjugaison complexe.

4.15. Ce paragraphe 4 est pour l'essentiel une traduction dans le langage des gerbes des textes cocycliques [2] [3] de De Wilde et Lecomte.

Une différence: ils restreignent leur considération aux $*$-produits vérifiant

$$f *_{-t} g = g *_t f \tag{4.15.1}$$

(cf. 4.10). Une telle déformation du produit induit une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson sur $\mathbb{R}[\![t^2]\!]$. Dans le language de 4.10: considérer les invariants $\mathcal{A}^\tau$ de τ dans $\mathcal{A}$, un $\mathbb{R}[\![t^2]\!]$-module, et munir $\mathcal{A}^\tau$ du crochet

$$\frac{1}{t}(fg - gf).$$

Il revient au même de déformer le crochet de Poisson — la déformation étant localement, au premier ordre, d'un type préassigné-ou de déformer C^∞, avec (4.15.1):

la construction $(\mathcal{A},\tau) \longmapsto \left(\mathcal{A}^\tau, \frac{1}{t}[\ ,\ ]\right)$ définit une équivalence de gerbe. Ils utilisent cette équivalence pour s'exprimer en terme de déformations du crochet de Poisson.

Appendice: cohomologie non abélienne

A.1. Nous travaillerons en cohomologie de Čech, sur un espace paracompact X. La paracompacité garantit que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, étant donné $n \geq 1$ et

(a.n) pour chaque $i_0, \cdots, i_n \in I$, un recouvrement ouvert $(U_{i_0,\cdots,i_n})_\alpha$ de $U_{i_0,\cdots,i_n} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$,

il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ et $\varphi: J \to I$ tels que $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ et que chaque $V_{j_0\ldots j_n}$ soit contenu dans un $(U_{\varphi(j_0)\ldots\varphi(j_n)})_\alpha$.

Cet usage de la paracompacité n'est pas sérieux. S'il est seul en cause, le cas général (un topos quelconque) peut se traiter de même en cohomologie hyperčechiste (cf. SGA4t2V7). Seules les notations sont plus lourdes.

La paracompacité garantit aussi que les faisceaux mous ont de bonnes propriétés d'acyclicité.

Un ouvert U d'un espace paracompact X n'est pas nécesairement paracompact, et la restriction à U d'un faisceau mou n'est pas nécessairement molle. Cette difficulté disparaît pour X métrisable ([7] II 3.4.2). Dans le cas général, le bon critère de localization est [7] II 3.4.1: soient $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace paracompact X et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Pour que $\mathcal{F}$ soit mou, il faut et il suffit que pour tout U dans $\mathcal{U}$, la restriction de $\mathcal{F}$ à U vérifie

$$\text{Toute section de } \mathcal{F} \text{ sur } F \subset U \text{ fermé dans } X \text{ se prolonge à } U\ . \tag{A.1.1}$$

Nous dirons qu'une gerbe $\mathcal{G}$ sur un espace paracompact X a un lien mou si pour tout objet G de $\mathcal{G}$ sur un ouvert U, le faisceau sur U des automorphismes de G sur U vérifie (A.1.1). Condition équivalente: pour tout objet G de $\mathcal{G}$ sur un fermé F de X, le faisceau sur F des automorphismes de G est mou.

A.2. Soit une suite exacte de faisceaux en groupes

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0 \tag{A.2.1}$$

avec $\mathcal{A}$ central. On dispose d'un cobord

$$\partial: H^1(X,\mathcal{C}) \to H^2(X,\mathcal{A}). \tag{A.2.2}$$

Pour Q un $\mathcal{C}$-torseur, notons $\mathrm{cl}(Q)$ le cobord de la classe de Q dans $H^1(X,\mathcal{C})$. C'est l'obstruction à relever Q en un $\mathcal{B}$-torseur (i.e. la classe dans $H^2(X,\mathcal{A})$ de la $\mathcal{A}$-gerbe des relèvements de Q).

Le faisceau $\mathcal{C}$ agit sur la suite exacte (A.2.1). Tordons-la par Q. L'action de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{A}$ étant triviale, la suite tordue s'écrit

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B}^Q \to \mathcal{C}^Q \to 0. \tag{A.2.1^Q}$$

Le faisceau $\mathcal{C}^Q$ est le faisceau des automorphismes du torseur Q, qui en devient un $(\mathcal{C},\mathcal{C}^Q)$-bitorseur. Si P est un $\mathcal{C}^Q$-torseur, le composé $P \circ Q = P \times Q/\mathcal{C}^Q$ est un $\mathcal{C}$-torseur. On a

$$\mathrm{cl}(P \circ Q) = \mathrm{cl}(P) + \mathrm{cl}(Q). \tag{A.2.3}$$

La preuve est la même qu'en 2.4.

PROPOSITION A.3. *Si $\mathcal{B}$ est mou sur X paracompact, le cobord* (A.2.2) *est bijectif.*

LEMME A.4. $H^1(X,\mathcal{B}) = 0$.

Preuve. Si P est un $\mathcal{B}$-torseur, le faisceau des sections de P est mou: il est localement isomorphe à $\mathcal{B}$ et on applique le critère local de mollesse (A.1). En particulier, P admet une section globale: tout $\mathcal{B}$-torseur est trivial.

INJECTIVITÉ. Si P et Q sont deux $\mathcal{C}$-torseurs de même classe, la classe dans $H^2(\mathcal{A})$ du $\mathcal{C}^Q$-torseur $P \circ Q^{-1}$, égale à $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$ par (A.2.3), est triviale. La suite exacte (A.2.1)^Q fournit une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(\mathcal{B}^Q) \to H^1(\mathcal{C}^Q) \to H^2(\mathcal{A})$$

et $H^1(\mathcal{B}^Q) = 0$ par A.4, car d'après le critère local de mollesse (A.1), le faisceau $\mathcal{B}^Q$, localement isomorphe à $\mathcal{B}$, est mou. Le $\mathcal{C}^Q$-torseur $P \circ Q^{-1}$ est donc trivial: P est isomorphe à Q.

De même que l'injectivité de (A.2.2) résulte de (A.4), la surjectivité résultera du lemme suivant.

LEMME A.5. *Sur un espace paracompact X, une gerbe $\mathcal{G}$ de lien mou admet un objet global.*

Preuve. Soit $(F_i)_{i\in I}$ un recouvrement fermé localement fini de X, tel que sur chaque F_i, $\mathcal{G}$ admette un objet G_i. Si $\mathcal{G}$ admet un objet G sur un fermé F, cet objet est unique à un isomorphisme (non unique) près: résulte de $H^1(F, \underline{\mathrm{Aut}}(G)) = 0$. Soit E l'ensemble des systèmes formé d'une partie J de I, et d'isomorphismes $c_{jk}\colon G_j \to G_k$ $(j,k \in J)$ sur $F_j \cap F_k$, vérifiant la condition de cocycle. Ordonné par prolongement, l'ensemble E est inductif, donc admet un élément maximal (J,c). Les G_j se recollent en G_0 sur la réunion F_0 des F_j $(j \in J)$. Pour tout $i \in I$, G_i et G_0 sont isomorphes sur $F_0 \cap F_i$, et le choix d'un isomorphisme permet de prolonger (J,c) en $(J \cup \{i\}, c')$.

Par maximalité, $J = I$ et G_0 est l'objet cherché.

Surjectivité. Soit $c \in H^2(\mathcal{A})$ correspondant à une gerbe $\mathcal{G}_1$ dont les objets locaux ont pour faisceau d'automorphismes $\mathcal{A}$. Poussons par $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pour obtenir une gerbe $\mathcal{G}$ de lien $\mathcal{B}$. Si c_{ijk} est un cocycle de Čech représentant c, elle admet la description suivante que le lecteur peut prendre pour définition: un objet G de $\mathcal{G}$ sur U est la donnée de $\mathcal{B}$-torseurs G_i sur les $U \cap U_i$ et d'isomorphismes $c_{ij}: G_j \to G_i$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ vérifiant la condition de cocycle tordue

$$c_{ik}^{-1} c_{ij} c_{jk} = c_{ijk}.$$

Par A.5, la gerbe $\mathcal{G}$ a un objet global G. Poussons les torseurs G_i par $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Les torseurs obtenus se recollent en un $\mathcal{C}$-torseur $\bar{G}$, avec l'image dans $\mathcal{C}$ des c_{ij} comme donnée de recollement, et on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathrm{cl}(\bar{G}) = c$.

A.6. Dans [6], le cobord à valeur dans H^3 en cohomologie non abélienne n'est défini que pour la gerbe des réalisations d'un lien. Voici le cas général.

Soient $\mathcal{H}$ une gerbe, F un faisceau abélien et supposons donné, pour chaque objet local Z de $\mathcal{H}$, une extension centrale

$$0 \to F \to G_Z \to \underline{\mathrm{Aut}}(Z) \to 0, \tag{A.6.1}$$

fonctorielle en Z et compatible à la localisation. On suppose que l'action par fonctorialité de $\underline{\mathrm{Aut}}(Z)$ sur G_Z est celle définie par l'action intérieure de G_Z sur lui-même (cette action intérieure se factorise par G_Z/F).

Exemple 1. Soient L un lien, $\mathcal{H}$ la gerbe des réalisations de L et F le centre de L. Pour chaque réalisation Z de L, le faisceau (dans $\mathcal{H}$) des automorphismes de Z est celui des automorphismes intérieurs, d'où une extension centrale

$$0 \to F \to Z \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{H}}(Z) \to 0.$$

Exemple 2. Soient (M, ω) une variété symplectique, $\mathcal{H}$ la gerbe des déformations de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}[\![t]\!]$ donnant lieu au crochet de Poisson symplectique et F le faisceau constant $\mathbb{R}[\![t]\!]$. Pour $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$, on a $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!])$, d'où une extension centrale

$$0 \to \mathbb{R}[\![t]\!] \to \exp(\mathcal{A}) \to \exp(\mathcal{A}/\mathbb{R}[\![t]\!]) \to 0.$$

Nous nous proposons de définir une classe $\partial\mathcal{H}$ dans $H^3(F)$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvement ouvert de X. Pour $\mathcal{U}$ assez fin, $\mathcal{H}$ admet un objet Z_i sur chaque

U_i. Choisissons Z_i et posons $G_i := G_{Z_i}$. Après passage à un recouvrement plus fin (cf. A.1, a1), Z_i et Z_j sont isomorphes sur U_{ij}. Soit P_{ij} le bitorseur des isomorphismes $Z_j \to Z_i$: un $(\underline{\mathrm{Aut}}(Z_j), \underline{\mathrm{Aut}}(Z_i))$-bitorseur sur U_{ij}. Choisissons un (G_{Z_j}, G_{Z_i})-bitorseur $\tilde{P}_{ij}$, muni d'un morphisme de bitorseurs $q\colon \tilde{P}_{ij} \to P_{ij}$ tel que, pour s une section locale de $\tilde{P}_{ij}$, l'isomorphisme correspondant $G_j \to G_i\colon g \mapsto s(g)$ tel que $sg = s(g)s$ soit déduit de $q(s)$ par fonctorialité. Deux tels $(\tilde{P}_{ij}, q)$ sont localement isomorphes, avec pour faisceau d'automorphismes F. Après passage à une recouvrement plus fin (cf. A.1, a.2), $\tilde{P}_{ij} \circ \tilde{P}_{jk}$, muni de sa projection sur $P_{ij} \circ P_{jk} = P_{ik}$, est donc isomorphe à $\tilde{P}_{ik}$ sur U_{ijk} Choisissons $c_{ijk}\colon \tilde{P}_{ik} \to \tilde{P}_{ij} \circ \tilde{P}_{jk}$. Sur $U_{ijk\ell}$, les c_{ijk} fournissent deux isomorphismes $\tilde{P}_{i\ell} \xrightarrow{\sim} P_{ij} \circ P_{jk} \circ P_{k\ell}$.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{P}_{i\ell} \arrow[r, "c_{ij\ell}"] \arrow[d, "c_{ik\ell}"] & \tilde{P}_{ij} \circ \tilde{P}_{j\ell} \arrow[d, "c_{jk\ell}"] \\
\tilde{P}_{ik} \circ \tilde{P}_{k\ell} \arrow[r, "c_{ijk}"] & \tilde{P}_{ij} \circ P_{jk} \circ P_{k\ell}.
\end{tikzcd}$$

La cochaîne à valeurs dans F

$$d_{ijk\ell} := (c_{ijk} c_{ik\ell})^{-1} (c_{jk\ell} c_{ij\ell})$$

est un cocycle, et changer les c_{ijk} modifie d par un cobord.

DÉFINITION. $\partial\mathcal{H}$ est la classe du cocycle d.

Dans le cas particulier de l'exemple 1, L. Breen exprime cette construction de façon plus géométrique, faisant apparaître $\partial\mathcal{H}$ comme la classe d'une 2-gerbe convenable (On the classification of 2-gerbes and 2-stacks, Astérisque 225, SMF 1994: §6).

A.7. Si $d = 0$, soit $\mathcal{G}$ la gerbe engendrée par un objet Y_i sur chaque U_i, avec $\underline{\mathrm{Hom}}(Y_j, Y_i) = \tilde{P}_{ij}$ sur U_{ij}, la composition étant donnée par les c_{ijk}. Elle est munie d'un morphisme de gerbes $\phi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}\colon Y_i \mapsto Z_i$ et, pour tout objet local Y de $\mathcal{G}$, d'image Z dans $\mathcal{H}$, on dispose d'un diagramme commutatif fonctoriel en Y et compatible à la localisation

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Aut}}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "s"] & \underline{\mathrm{Aut}}(Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] & G_Z \arrow[r] & \underline{\mathrm{Aut}}(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{A.7.1}$$

Réciproquement, s'il existe un morphisme de gerbes $\phi\colon \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ et un isomorphisme (A.7.1), le cocycle d est cohomologue à zéro: relever les Z_i en des Y_i dans $\mathcal{G}$ et prendre $\tilde{P}_{ij} = \underline{\mathrm{Hom}}(Y_j, Y_i)$, $c_{ijk} =$ (composition) $^{-1}$ pour avoir $d = 0$.

PROPOSITION A.8. *Pour que $\partial\mathcal{H} = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme de gerbes $\phi\colon \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ donnant lieu à un isomorphisme fonctoriel et compatible à la localisation* (A.7.1)

COROLLAIRE A.9. *Si X est paracompact et que, le lien formé par les G_Z est mou, alors $\partial\mathcal{H} = 0$ si et seulement si la gerbe $\mathcal{H}$ admet un objet global.*

Preuve. Si $\partial\mathcal{H} = 0$, la gerbe $\mathcal{H}$ est quotient d'une gerbe $\mathcal{G}$ à laquelle A.5 s'applique: $\mathcal{G}$, et donc $\mathcal{H}$, admet un objet global.

Réciproquement, si Z est un objet global de $\mathcal{H}$, on peut identifier $\mathcal{H}$ à la gerbe des $\underline{\mathrm{Aut}}(Z)$-torseurs. Prendre pour $\mathcal{G}$ celle des G_Z-torseurs.

Bibliographie

[1] M. De Wilde and P.B.A. Lecomte. *Existence of star-products on exact symplectic manifolds.* Annales de l'Institut Fourier, **XXXV, 2** (1985), 117–143.

[2] M. De Wilde and P.B.A. Lecomte. *Existence of star-products and of formal deformations in Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds.* Lett. Math. Phys., **7** (1983), 487–496.

[3] M. De Wilde and P.B.A. Lecomte. *Existence of star-products revisited.* Suppl. n. 1, Note di Mathematica, **X** (1990), 205–216.

[4] B.V. Fedosov. *Formal quantization.* in: Some topics of Modern Mathematics and their applications to problems of mathematical physics, Moscow, 1985, pp. 129–136.

[5] B.V. Fedosov. *A simple geometrical construction of deformation quantization.* J. Diff. Geom., **40** 2 (1994), 213–238.

[6] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne.* Grundlehren 179, Springer-Verlag, 1971.

[7] R. Godement. *Théorie des faisceaux.* Publ. Inst. Math. Univ. de Strasbourg, Paris: Hermann, 1985.

[8] O.M. Neroslavsky et A.T. Vlassov. *Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique.* CR Acad. Sci. Paris, **292 1** (1981), 71–73.

[9] J. Vey. *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique.* Comm. Math. Helv., **50** (1975), 421–454.

[10] A. Weinstein. *Deformation quantization.* Séminaire Bourbaki 789, (juin 1994), Astérisque.

[11] SGA4. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963/64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier: vol. 2: Lecture Notes in Math. 270, Springer-Verlag 1972.

P. Deligne
School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Princeton, NJ 08540, USA
e-mail address: deligne@math.ias.edu