Invent. math. 128, 159–175 (1997)

Inventiones mathematicae

Action du groupe des tresses sur une catégorie

P. Deligne

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA
(e-mail: deligne@math.ias.edu)

Oblatum: VII-1996

Abstract. We describe how to define by generators and relations an action of the braid group on a category. More generally, how to define a functor from a generalized positive braids monoid, corresponding to a finite Coxeter group, to a monoidal category. Applications to constructions of Bondal (exceptional systems) and of Broué–Michel (correspondences on flag manifolds) are given.

0. Introduction

Une *action* d'un monoïde M (n'ayant pas nécessairement d'unité) sur une catégorie $\mathscr{C}$ est la donnée de foncteurs $T(f)$ $(f \in M)$ et d'isomorphismes de foncteurs $c_{f,g} : T(f) \circ T(g) \to T(fg)$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T(f) \circ T(g) \circ T(h) & \longrightarrow & T(fg) \circ T(h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(f) \circ T(gh) & \longrightarrow & T(fgh)\,. \end{array} \tag{0.1}$$

Les actions d'un monoïde M sur une catégorie $\mathscr{C}$ forment une catégorie: un morphisme $(T,c) \to (T',c')$ est la donnée de morphismes de foncteurs $T(f) \to T'(f)$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} T(f)T(g) \arrow[r, "c_{f,g}"] \arrow[d] & T(fg) \arrow[d] \\ T'(f)T'(g) \arrow[r, "c'_{f,g}"] & T'(fg)\,. \end{tikzcd}$$

Supposons M donné par générateurs et relations: $M = \langle G|R \rangle$. Si à chaque générateur $g \in G$ on fait correspondre $T(g)\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, et si chaque relation $r_1 = r_2$ dans R donne lieu à une *égalité* de foncteurs composés, on obtient par composition des $T(g)$ $(g \in G)$ une action de M sur $\mathscr{C}$ pour laquelles les $c_{f,g}$ sont des isomorphismes identiques. Cette construction est sans intérêt. La question utile est la suivante. Considérons la catégorie des systèmes du type suivant (a) des $T(g) : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ $(g \in G)$; (b) des isomorphismes entre foncteurs composés pour $r_1 = r_2$ dans R; (c) vérifiant des compatibilités à la (0.1) (à spécifier). Comment spécifier (c) pour que le foncteur de restriction, de la catégorie des actions de M sur $\mathscr{C}$ dans celle des systèmes (a) (b) vérifiant (c), soit une équivalence de catégories? En d'autres termes: pour qu'il "revienne au même" de se donner une action de M sur $\mathscr{C}$ ou de se donner un système (a) (b) vérifiant (c).

Dans cet article, nous traitons du cas où M est le monoïde des tresses strictement positives B_n^+ (1.2). Nous utilisons un système de générateurs indexé par les éléments non triviaux du groupe symétrique S_n. Pour $b \in B_n^+$, soit $E(b)$ l'ensemble des décompositions de b comme produit de générateurs. Cet ensemble admet un ordre naturel et notre outil principal est le théorème que la réalisation géométrique de l'ensemble ordonné $E(b)$ est contractile. On peut penser à ce théorème comme un résultat d'unicité "à homotopie près" de la décomposition de b en produit de générateurs. Pour prouver la contractibilité de $E(b)$, nos méthodes sont celles de Deligne (1972) et donc, indirectement, de Garside (1969).

Nos méthodes s'appliquent aussi bien au cas de monoïdes de tresses strictement positives généralisés (1.4), correspondant aux groupes de Coxeter finis. Par ailleurs, $f \mapsto T(f)$ peut être pris à valeurs dans une quelconque catégorie monoïdale $\mathscr{M}$, plutôt qu'à valeurs dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{C},\mathscr{C})$.

Dans la fin de cette introduction, nous donnons les deux applications qui nous ont motivés. Le lecteur peut préférer les lire après le par. 2.

Application 1. Soient $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée et W une filtration $W_1 \subset \cdots \subset W_N = \mathscr{T}$ de $\mathscr{T}$ par des sous-catégories triangulées, avec W_n épaisse (Verdier (1963) p. 13) dans W_{n+1} $(1 \leqq n < N)$. On pose $W_0 := 0$.

Disons avec Bondal–Kapranov (1989) 4.1 que la filtration W est *admissible à droite* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées pour $1 \leqq n < N$: (i) l'inclusion de W_n dans W_{n+1} admet un adjoint à droite; (ii) le foncteur de passage au quotient $W_{n+1} \to W_{n+1}/W_n$ admet un adjoint à droite; (iii) tout objet Y de W_{n+1} figure dans un triangle distingué (X, Y, Z) avec X dans W_n et Z dans l'orthogonal à droite de W_n dans W_{n+1}. Pour l'équivalence de ces conditions, voir Bondal–Kapranov (1989) par. 1 ou Verdier (1963) Ch. 1 par. 2 n°. 6. La filtration W est *admissible à gauche* si elle est admissible à droite dans la catégorie triangulée opposée: remplacer dans (i) (ii) ci-dessus "adjoint à droite" par "adjoint à gauche". Elle est *admissible* si elle l'est à gauche et à droite.

Notons $Gr_n^W(\mathscr{T})$ la catégorie quotient W_n/W_{n-1} $(1 \leqq n \leqq N)$. Pour W admissible à droite, notons

$$
\begin{aligned}
i_{n*} : W_n \to \mathscr{T} &: \text{ le foncteur d'inclusion} \\
i_n^! : \mathscr{T} \to W_n &: \text{ son adjoint à droite} \\
j_{n*} : Gr_n^W(\mathscr{T}) \to \mathscr{T} &: \text{ le composé de } i_{n*} \text{ et de l'adjoint à} \\
& \text{ droite du foncteur de passage au quotient} \\
& \ W_n \to W_n/W_{n-1} = G_n^W \mathscr{T} \\
j_n^! : \mathscr{T} \to Gr_n^W &: \text{ le composé du foncteur de passage} \\
& \text{ au quotient et de } i_n^!.
\end{aligned}
$$

Comme expliqué dans Bondal–Kapranov (1989) 4.3, la donnée d'une filtration admissible à droite W équivaut à celle d'une suite $(\mathscr{B}_i)_{1 \leqq i \leqq N}$ de sous-catégories triangulées strictement pleines de $\mathscr{T}$ engendrant $\mathscr{T}$, avec $\mathscr{B}_j$ orthogonale à droite à $\mathscr{B}_i$ pour $i < j$: $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ pour X dans $\mathscr{B}_i$ et Y dans $\mathscr{B}_j$. Passage de W à $(\mathscr{B}_i)$: $\mathscr{B}_n$ est l'image essentielle de $Gr_n^W(\mathscr{T})$ par le foncteur $j_{n!}$; de $(\mathscr{B}_i)$ à W : W_n est la sous-catégorie triangulée de $\mathscr{T}$ engendrée par les $\mathscr{B}_i$ $(i \leqq n)$, i.e. la plus petite sous-catégorie triangulée strictement pleine de $\mathscr{T}$ contenant ces $\mathscr{B}_i$.

Pour σ une permutation de $\{1, \ldots, N\}$, la *mutation à droite* $\sigma_d W$ ou simplement σW de W est définie par $(\sigma W)_n :=$ sous-catégorie triangulée engendrée par les $\mathscr{B}_i$ $(\sigma i \leqq n) =$ catégorie des objets K de $\mathscr{T}$ avec $j_i^! K = 0$ pour $\sigma i > n$. Les équivalences

$$
Gr_n^W \mathscr{T} \xleftarrow{\sim} \mathscr{B}_n \xrightarrow{\sim} Gr_{\sigma n}^{\sigma W} \mathscr{T} \tag{0.2}
$$

fournissent une équivalence de $Gr_n^W \mathscr{T}$ avec $Gr_{\sigma n}^{\sigma W} \mathscr{T}$.

Pour W admissible à gauche, la *mutation à gauche* $\sigma_s W$ est la mutation à droite dans la catégorie opposée. Si W est admissible, la mutation à droite $\sigma_d W$ est encore admissible à gauche, et $(\sigma^{-1})_s \sigma_d W = W$.

Une filtration W est *∞-admissible* si elle est admissible, ainsi que ses mutations à gauche ou à droite itérées. Le lecteur trouvera dans Bondal–Kapranov (1989) par. 3, 4 des critères commodes pour vérifier la ∞-admissibilité d'une filtration.

L'exemple suivant explique les notations choisies.

Exemple 1. Soient X un espace topologique et $F_1 \subset \cdots \subset F_N = X$ une filtration de X par des sous-espaces fermés. Posons $F_0 := \emptyset$ et $S_n := F_n - F_{n-1}$ ($n \in I := \{1, \ldots, N\}$). La filtration W de $\mathscr{T} := D^+(X)$ par les sous-catégories épaisses $D^+(F_n)$ est admissible. Les foncteurs i_{n*} et $i_n^!$ (resp. j_{n*} et $j_n^!$) s'identifient à ceux de même nom relatifs à l'inclusion i_n de F_n dans X (resp. j_n de S_n dans X).

Factorisons l'inclusion j_n de S_n dans X en les morphismes d'inclusion $g_{n,i}$: $F_n - F_i \to F_n - F_{i-1}$ ($n > i > 0$) et i_n. Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, N\}$ et soit σW la mutation à droite correspondante de W. La sous-catégorie $(\sigma W)_n$ de $D^+(X)$ est celle des objets K tels que $j_i^! K = 0$ pour $\sigma i > n$. La filtration σW est admissible à gauche, l'orthogonal à droite de $(\sigma W)_{\sigma n - 1}$ dans $(\sigma W)_{\sigma n}$ étant l'image essentielle de $D^+(S_n)$ par le foncteur composé des $g_{n,i!}$ (pour $\sigma i < \sigma n$) ou $g_{n,i*}$ (pour $\sigma i > \sigma n$) et de $i_{n*} = i_{n!}$. Le foncteur composé induit l'équivalence déjà considérée de $D^+(S_n) = Gr_n^W(\mathscr{T})$ avec $Gr_{\sigma n}^{\sigma W}(\mathscr{T})$.

Soient $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée et $(\mathscr{T}_i)_{i \in I}$ une famille à N éléments de catégories triangulées. Considérons les *systèmes* exceptionnels E du type (a) (b) (c) suivant.

(a) Un ordre total sur I, identifié à une bijection τ de I dans $\{1, \ldots, N\}$ (l'unique bijection croissante).
(b) Une filtration ∞-admissible $W \colon W_1 \subset \cdots \subset W_N = \mathscr{T}$ de $\mathscr{T}$.
(c) Des équivalences de catégories triangulées $\varphi_i : Gr_{\tau(i)}^W(\mathscr{T}) \to \mathscr{T}_i$ ($i \in I$).

Les systèmes exceptionnels forment une catégorie: il n'y a de morphisme de E dans E' que si les ordres correspondants coïncident, et dans ce cas un morphisme est un système d'isomorphismes de foncteurs $\varphi_i \to \varphi'_i$.

Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, N\}$. La mutation (à droite) σE de $E = (\tau, W, (\varphi_i))$ est le système exceptionnel défini par $\sigma \circ \tau$, σW et les équivalences

$$Gr_{\sigma\tau(i)}^{\sigma W}(\mathscr{T}) \xleftrightarrow{(0.2)} Gr_{\tau(i)}^W(\mathscr{T}) \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{T}_i$$

Cette construction $E \mapsto \sigma E$ est une autoéquivalence de la catégorie des systèmes exceptionnels, d'inverse donné par une mutation à gauche.

Notons $\ell(\sigma)$ le nombre de paires (i, j) telles que $i < j$ et $\sigma(j) < \sigma(i)$. Si $\ell(\sigma_1\sigma_2) = \ell(\sigma_1) + \ell(\sigma_2)$, on vérifie que $\sigma_1\sigma_2 E$ est canoniquement isomorphe à $\sigma_1(\sigma_2 E)$, avec une compatibilité pour un composé triple $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ si $\ell(\sigma_2\sigma_2\sigma_3) = \ell(\sigma_1) + \ell(\sigma_2) + \ell(\sigma_3)$. Appliquant 1.5 et 1.10, on obtient une action du groupe des tresses sur la catégorie des systèmes exceptionnels. Ceci précise Bondal–Kapranov (1989) 4.10 qui définit l'action par mutations du groupe des tresses sur l'ensemble des filtrations ∞-admissibles, et prouve l'équivalence de $Gr_n^W(\mathscr{T})$ avec $Gr_{\bar{b}n}^{bW}(\mathscr{T})$ (pour $b \mapsto \bar{b}$ la projection du groupe des tresses sur le groupe symétrique). Nous obtenons une équivalence $[b]\colon Gr_n^W(\mathscr{T}) \to Gr_{\bar{b}n}^{bW}(\mathscr{T})$ bien définie à isomorphisme unique près, un isomorphisme $[b_1 b_2] \underset{\sim}{\to} [b_1] \circ [b_2]$, et une compatibilité pour un composé triple.

Variante. Suppons la catégorie triangulée $\mathscr{T}$ k-linéaire, pour k un corps commutatif, et que les k-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}^*(X,Y) := \oplus \mathrm{Hom}(X,Y[n])$ sont de dimension finie. Si chacune des catégories $\mathscr{T}_i$ est la catégorie dérivée bornée de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k, i.e. si $\mathscr{T}_i$ est la catégorie des espaces vectoriels gradués de dimension finie, la notion de *système exceptionnel* se réduit à celle de *suite exceptionnelle*: une suite $X_1, \dots, X_N$ d'objets de $\mathscr{T}$ avec $\mathrm{Hom}^*(X_i, X_j) = 0$ pour $i < j$ et $\mathrm{Hom}^*(X_i, X_i) = k$, qui engendrent $\mathscr{T}$. Plus précisément, il faudrait considérer une famille finie $(X_i)_{i \in I}$, un ordre total $\leqq$ sur I et exiger que les X_i engendrent $\mathscr{T}$, que $\mathrm{Hom}^*(X_i, X_j) = 0$ pour $i < j$ et que $\mathrm{Hom}^*(X_i, X_i) = k$. Le système exceptionnel correspondant est défini par l'ordre $\leqq$, identifée à une bijection τ comme en (a) et par la filtration W, où W_n est engendré par les X_i pour $\tau(i) \leqq n$. L'équivalence φ_i est caractérisée comme envoyant X_i sur k en degré 0. D'après Bondal–Kapranov (1989) 3.2 et 4.11, la filtration W est automatiquement ∞-admissible.

L'action du groupe des tresses sur la catégorie des systèmes exceptionnels en fournit une sur celle des suites exceptionnelles.

Application 2. Soient G un groupe réductif déployé sur un corps k et $\mathscr{B}$ la variété de ses sous-groupes de Borel. Soit $\mathscr{M}$ la catégorie des schémas sur $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$, vus comme correspondances de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}$. La composition des correspondances fait de $\mathscr{M}$ une catégorie monoïdale. Soit W le groupe de Weyl, identifié à l'ensemble des positions relatives de sous-groupes de Borel, i.e. aux orbites de $G(k)$ sur $\mathscr{B}(k) \times \mathscr{B}(k)$. Pour $w \in W$, on note $X(w)$ la variété des paires (B', B'') de sous-groupes de Borel en position relative w. Dans cette description de W, pour $e \in W$ l'élément neutre, l'orbite $X(e)$ est la diagonale. Les générateurs distingués s_i correspondent aux orbites X d'adhérence $X \cup$ diagonale et la loi de groupe est caractérisée par

$$(0.3)\quad X(w) = X(w') \circ X(w'') \quad \text{si } w = w'w'' \text{ et que } \ell(w) = \ell(w') + \ell(w'') .$$

Les générateurs distingués de W en font un groupe de Coxeter fini. Soit B^+ le monoïde des tresses positives généralisé correspondant. Broué et Michel (1995) déduisent de (0.3) qu'on peut étendre $w \mapsto X(w)$ en une construction qui à $b \in B^+$ attache une classe d'isomorphie de schémas $X(b)$ sur $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$, avec $X(b) \simeq X(b') \circ X(b'')$ pour $b = b'b''$. Nos résultats montrent que $X(b)$ est en fait défini à isomorphisme unique près.

1. Actions

1.1. Comme expliqué dans l'introduction, les actions d'un monoïde M sur une catégorie $\mathscr{C}$ forment une catégorie. Dire qu'il "revient au même" de se donner une action de M sur $\mathscr{C}$ ou de donner… signifie la construction d'une équivalence de la catégorie des actions avec celle des….

1.2. Le *monoïde* (sans unité) B_n^+ *des tresses strictement positives* à n brins ($n \geqq 2$) est le monoïde engendré par des générateurs s_i ($1 \leqq i \leqq n-1$) soumis aux relations

(1.2.1)
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$$

$$s_i s_j = s_j s_i \quad \text{pour } j \geqq i+2 \,.$$

On sait qu'il s'injecte dans le *groupe de tresses* B_n, défini par les mêmes générateurs et relations.

1.3. Pour définir une action T de B_n^+ sur un ensemble E, il suffit de donner des applications $T(s_i): E \to E$ vérifiant (1.2.1).

Pour définir une action de B_n^+ sur une catégorie $\mathscr{C}$, il ne suffit pas de donner des foncteurs $T(s_i): \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ et des isomorphismes de foncteurs

(1.3.1)
$$T(s_i)T(s_{i+1})T(s_i) \xrightarrow{\sim} T(s_{i+1})T(s_i)T(s_{i+1})$$

$$T(s_i)T(s_j) \xrightarrow{\sim} T(s_j)T(s_i) \quad \text{pour } j \geqq i+2 \,.$$

Dans le cas de B_4^+, il faut de plus que la condition suivante soit vérifiée. Ecrivons a, b, c pour $T(s_1), T(s_2), T(s_3)$. Dans le cycle de 12 foncteurs suivant, chacun est relié au suivant par des isomorphismes (1.3.1) ou leurs inverses, appliqués aux composés soulignés.

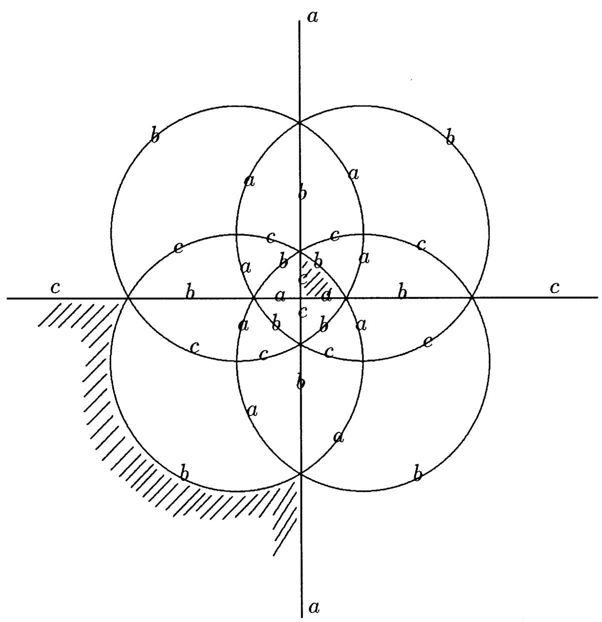
(1.3.2)
$$a\underline{cbc}ab \quad abc\underline{bab} \quad abc\underline{ca}ba \quad \underline{aba}cba$$

$$ba\underline{bcb}a \quad b\underline{ac}b\underline{ca} \quad bc\underline{aba}c \quad \underline{bcb}abc$$

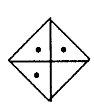
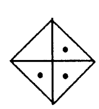
$$cb\underline{ca}bc \quad cba\underline{cbc} \quad c\underline{bab}cb \quad \underline{ca}b\underline{ac}b$$

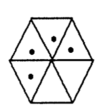
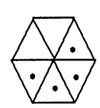
Le composé de ces isomorphismes doit être l'identité.

Voici le sens géométrique de (1.3.2). On considère la sphère S^2, découpée en triangles sphériques (chambres) par les hyperplans radiciels du système de racines A_3. Un tétraèdre régulier inscrit fournit une décomposition de S^2 en 4 triangles sphériques; ce qu'on considère est sa subdivision barycentrique. Appelons un des triangles la chambre fondamentale, et attachons à chaque arrête un label a, b ou c, de façon invariante par le groupe de Weyl, les arrêtes d'un triangle ayant des labels distincts et b étant opposé à l'angle droit. En projection stéréographique, envoyant un sommet à l'infini:

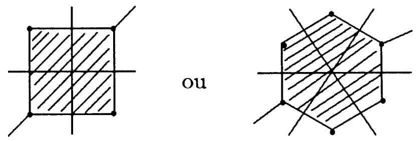


En hachuré: la chambre fondamentale C_0, et son opposée $\bar{C}_0$. Chaque mot (1.3.2) correspond à une suite G de chambres mitoyennes (galerie) allant de la chambre fondamentale C_0 à la chambre opposée – C_0 et traversant une et une seule fois chacun des hyperplans radiciels (sur le dessin: les deux droites et les quatre circonférences). Le mot donne la suite des labels des arrêtes traversées. Le cycle de mots (1.3.2) donne un cycle de galeries. On passe d'une galerie G à la suivante par une modification de l'un des types suivant, ou deux modifications disjointes du premier type:

de  à  ou

de  à 

Attachons à G le chemin du centre de C_0 à celui de $\bar{C}_0$ suite des géodésiques allant du centre d'un triangle au centre du triangle suivant. Quand on passe d'une galerie à la suivante, on dispose d'une homotopie entre les chemins correspondants:



Pour la suite de galeries (1.3.2), ces homotopies successives balaient S^2, donnant lieu au générateur de $\pi_1 \Omega^1 S^2 = \pi_2 S^2$.

La théorème 1.5 ci-dessous permet de vérifier que la condition de compatibilité (1.3.2) est suffisante. Plus précisément, on dispose d'un foncteur de restriction, de la catégorie des actions de B_4^+ sur $\mathscr{C}$ avec celle des triples de foncteurs $T(s_1), T(s_2), T(s_3)$ munis d'isomorphismes (1.3.1) vérifiant (1.3.2): à T attacher les $T(s_i)$ et les isomorphismes

$$T(s_i)T(s_{i+1})T(s_i) \xrightarrow{\sim} T(s_i s_{i+1} s_i) = T(s_{i+1} s_i s_{i+1}) \xleftarrow{\sim} T(s_{i+1})T(s_i)T(s_{i+1})$$

$$T(s_i)T(s_j) \xrightarrow{\sim} T(s_i s_j) = T(s_j s_i) \xleftarrow{\sim} T(s_j)T(s_i)\,.$$

Ce foncteur de restriction est une équivalence de catégories.

1.4. Une description plus commode s'obtient en remplacant (1.2.1) par un système redondant de générateurs et relations. Considérons le cas plus général du *monoïde des tresses strictement positives généralisé* B^+ correspondant à un groupe de Coxeter fini W d'ensemble générateur distingué R. Les tresses usuelles correspondent à $W = S_n$, R étant l'ensemble des transpositions $(i, i+1)$. On note ℓ la fonction longueur $W \to \mathbb{N}$ définie par le système générateur R.

Notons prod $(m; a, b)$ un produit de m facteurs $abab \ldots$. Le groupe W est engendré par les $i \in R$, soumis à des relations

(1.4.1) $\quad prod(m_{ij}; i, j) = prod(m_{ij}; j, i) \quad (i, j \in R,\ i \neq j)$

(1.4.2) $\quad i^2 = e \quad (i \in R)$

Le *monoïde* B^+ correspondant est engendré par des générateurs $\tilde{\imath}$ $(i \in R)$ soumis aux seules relations (1.4.1). Il s'injecte dans le groupe de tresses généralisé B défini par les mêmes générateurs et relations (1.4.1) (Deligne (1972) 4.14 (ii)). La projection $\tilde{\imath} \to i$ de B^+ sur W admet, sur le complément de l'élément neutre e, une section ensembliste canonique τ, caractérisée par

(1.4.3) $\quad \tau(i) = \tilde{\imath} \quad (i \in R)$

(1.4.4) $\quad \tau(w'w'') = \tau(w')\tau(w'') \quad \text{si} \quad \ell(w'w'') = \ell(w') + \ell(w'')$

(Bourbaki Lie IV 1.5 proposition 5). Cette section fournit une nouvelle présentation de B^+:

(1.4.5) générateurs: $\tau(w) \quad (w \in W,\ w \neq e)$

relations: (1.4.4)

Noter que (1.4.5), i.e. (1.4.4), permet d'écrire chaque $\tau(w)$ comme produit de $\tau(i)$ $(i \in R)$ et implique (1.4.1) pour les $\tau(i)$: les deux membres de (1.4.1) sont des décompositions minimales du même élément de W.

Notre résultat principal est le

Théorème 1.5. *Il revient au même* (1.1) *de se donner une action de* B^+ *sur* $\mathscr{C}$, *ou de se donner*

(1.5.1) *Pour* $w \in W,\ w \neq e$, *un foncteur* $T(w) : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$;

(1.5.2) *Pour* w', w'' *vérifiant* $\ell(w'w'') = \ell(w') + \ell(w'')$, *un isomorphisme de foncteurs*

$(1.5.2)_{w',w''}$: $T(w')T(w'') \to T(w'w'')$, *ces isomorphismes vérifiant*

(1.5.3) *Pour* $\ell(w'w''w''') = \ell(w') + \ell(w'') + \ell(w''')$, *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} T(w')T(w'')T(w''') & \longrightarrow & T(w'w'')T(w''') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(w')T(w''w''') & \longrightarrow & T(w'w''w''') \end{array}$$

est commutatif.

Dans cet énoncé, "il revient au même" présuppose que les données (1.5.1) (1.5.2) vérifiant (1.5.3) forment une catégorie. Un morphisme $T_1 \to T_2$ est la donnée de morphismes de foncteurs $T_1(w) \to T_2(w)$ $(w \in W - \{e\})$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T_1(w')T_1(w'') & \longrightarrow & T_1(w'w'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_2(w')T_2(w'') & \longrightarrow & T_2(w'w'') \end{array}$$

pour w', w'' comme en (1.5.2). Nous nous contenterons de construire le foncteur quasi-inverse au foncteur de restriction, et laisserons au lecteur le soin de vérifier que c'est bien un quasi-inverse. La partie difficile de la preuve est le théorème de contractibilité 1.7 qui sera prouvé au par. 2.

Soient donc des données (1.5.1) (1.5.2) vérifiant (1.5.3) et construisons une action de B^+ sur $\mathscr{C}$ qui prolonge (1.5.1) (1.5.2).

Considérons l'ensemble $E(b)$ des façons d'écrire $b \in B^+$ comme produit de $\tau(w)$. Plus précisément, soit $\mathscr{L}(W-\{e\})$ le monoïde libre engendré par les $w \in (W-\{e\})$. Il s'envoie dans B^+ par $w \mapsto \tau(w)$ et $E(b) \subset \mathscr{L}(W-\{e\})$ est l'image inverse de b. Une donnée (1.5.1) fournit pour chaque $A \in \mathscr{L}(W-\{e\})$ un foncteur composé $T(A) : A \mapsto T(A)$ qui prolonge (1.5.1) et $T(AB) = T(A)T(B)$.

Si A_1 et A_2 sont des types

$$B.w'.w''.C \quad \text{et} \quad B.(w'w'').C \tag{1.5.4}$$

avec $\ell(w'w'') = \ell(w') + \ell(w'')$, une donnée (1.5.2) fournit un isomorphisme

$$T(B).(1.5.2)_{w',w''}.T(C) : T(A_1) \to T(A_2)\,. \tag{1.5.5}$$

Le point essentiel est de vérifier le

Lemma 1.6. *Les isomorphismes* (1.5.5) *engendrent un système transitif d'isomorphismes entre les* $T(A)$, $A \in E(b)$.

Preuve de $1.6 \Rightarrow 1.5$. On définit $T(b)$ comme étant la valeur commune des $T(A)$, $A \in E(b)$. Plus précisément, la limite projective du système des $T(A)$: on dispose d'isomorphismes $T(b) \xrightarrow{\sim} T(A)$ $(A \in E(b))$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & T(A_1) \arrow[dd, "1.5.5"] \\ T(b) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & T(A_2)\,. \end{tikzcd}$$

Pour $b, c \in B^+$, $B \in E(b)$ et $C \in E(c)$, le mot composé BC est dans $E(bc)$. De plus, si $u : T(B_1) \to T(B_2)$ est un isomorphisme (1.5.5), $u \cdot T(C)$ est un isomorphisme 1.5.5 pour bc. De même en permutant les rôles de B et C. Ceci permet de définir l'isomorphisme $T(b)T(c) \to T(bc)$ comme étant celui qui rend commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} T(b)T(c) \arrow[r] \arrow[d] & T(bc) \arrow[d] \\ T(B)T(C) \arrow[r] & T(BC)\,. \end{tikzcd}$$

Cette construction, fonctorielle en les données (1.5.1) (1.5.2) vérifiant (1.5.3), est le quasi-inverse cherché au foncteur de restriction.

Preuve de 1.6. Soit $\leqq$ la relation d'ordre sur $E(b)$ engendrée par "$A_1 \leqq A_2$ pour A_1 et A_2 comme en (1.5.4)". En d'autres termes, $A \leqq B$ si B est déduit de A en factorisant A en $A_1 \dots A_k$, chaque A_i étant dans $\mathscr{L}(W - \{e\})$ du type $w_{i,1} \dots w_{i,m}$ avec $\ell(w_{i,1} \dots w_{i,m}) = \sum_j \ell(w_{i,j})$, et an remplaçant A_i par le produit $w_{i1} \dots w_{im}$ dans W. Le théorème suivant sera prouvé en 2.3 et 2.4.

Théorème 1.7. *La réalisation géométrique $|E(b)|$ de l'ensemble ordonné $E(b)$ est contractile.*

La réalisation géométrique de $E(b)$ est celle de la catégorie attachée de façon usuelle à $E(b)$: ensemble d'objets $E(b)$, Hom (x, y) réduit à un élément si $x \leqq y$, vide sinon. Voir Quillen (1973) par. 1 p. 89.

Montrons que 1.6 résulte de ce que $|E(b)|$ est connexe et simplement connexe. La condition (1.5.3) assure que, pour $A \leqq B$, les composés d'isomorphismes (1.5.5) fournissent un unique isomorphisme

$$\varphi_{B,A} : T(A) \to T(B)$$

avec $\varphi_{C,B}\varphi_{B,A} = \varphi_{C,A}$ pour $A \leqq B \leqq C$.

D'après Quillen (1973) par. 1 prop. 1, p. 90, la catégorie des revêtements de $|E(b)|$ est équivalente à celle des foncteurs de la catégorie $E(b)$ dans celle (Ens, is) des ensembles et de leurs bijections. Si $|E(b)|$ est connexe et simplement connexe, tout foncteur de $E(b)$ dans (Ens, is) est donc isomorphe à un foncteur constant: étant donnés des ensembles $T(x)$ $(x \in E(b))$, un système de bijections $\varphi_{y,x} : T(x) \to T(y)$ pour $x \leqq y$ vérifiant $\varphi_{z,y}\varphi_{y,x} = \varphi_{z,x}$ engendre un système transitif de bijections. On en déduit le même résultat pour T à valeur dans une catégorie $\mathscr{X}$ et les $\varphi_{x,y}$ des isomorphismes: considérer les $\mathrm{Hom}(A, T(x))$ pour A dans $\mathscr{X}$.

1.8 Variante: unités. Une *action unitale* d'un monoïde à unité (M, e) sur une catégorie $\mathscr{C}$ est une action T de M telle que $T(e)$ soit une auto équivalence. Il existe alors un unique isomorphisme

$$T(e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id} \tag{1.8.1}$$

tel que $c_{e,f} : T(e)T(f) \to T(f)$ et $c_{f,e} : T(f)T(e) \to T(f)$ soient induits par (1.8.1). Si M^+ est déduit d'un monoïde M par adjonction d'une unité, il revient au même de se donner une action de M ou une action unitale de M^+.

Une *action de groupe* d'un groupe G est une action unitale de G.

Proposition 1.9. *Soient M un monoïde à unité vérifiant la condition de Öre à gauche ou à droite et G son groupe de fractions. Il revient au même* (1.1) *de se donner une action de G sur une catégorie $\mathscr{C}$, ou une action unitale de M sur $\mathscr{C}$ par auto-équivalences.*

Preuve. Pour fixer les idées, on supposera la condition de Öre vérifiée à gauche.

Pour $f \in G$, soit $\mathscr{L}_f$ la catégorie d'objets les couples $(x, y) \in M \times M$ tels que $f = x^{-1}y$, une fléche $a : (x, y) \to (x', y')$ étant a dans M tel que $x' = ax$ et $y' = ay$. La condition de Öre assure que $\mathscr{L}_f$ est filtrante. Pour $a : (x, y) \to (x', y')$, on dispose d'un isomorphisme

$$\varphi_a : T(x)^{-1}T(y) = T(x)^{-1}T(a)^{-1}T(a)T(y) = T(x')^{-1}T(y')$$

et $\varphi_{ba} = \varphi_b\varphi_a$. Les φ_a étant des isomorphismes et $\mathscr{L}_f$ étant filtrante, la limite inductive $T(f)$ des $T(x)^{-1}T(y)$ existe, et $T(x)^{-1}T(y) \xrightarrow{\sim} T(f)$.

Pour $f, g \in G$, soit $\mathscr{L}_{f,g}$ la catégorie des triples (x, y, z) tels que $g = x^{-1}y$ et $h = y^{-1}z$, une fléche $a : (x, y, z) \to (x', y', z')$ étant a dans M tel que $x' = ax$, $y' = ay$ et $z' = az$. la condition de Öre assure encore que cette catégorie est filtrante et que les foncteurs (x, y), (y, z), (x, z) de $\mathscr{L}_{f,g}$ dans $\mathscr{L}_f, \mathscr{L}_g$ et $\mathscr{L}_{fg}$ sont confinaux. On définit $c_{f,g} : T(f)T(g) \to T(fg)$ comme étant la limite inductive des isomorphismes

$$T(x)^{-1}T(y)T(y)^{-1}T(z) \to T(x)^{-1}T(z)\ .$$

Pour vérifier (0.1), on écrit f, g, h sous la forme $x^{-1}y$, $y^{-1}z$ et $z^{-1}t$.

1.10. D'après Deligne (1972), le monoïde des tresses positives généralisé, déduit de B^+ (1.4) par adjonction d'un élément neutre, vérifie la condition de Öre à gauche et à droite. Par 1.8, 1.9 et 1.5, il revient au même de se donner une action sur une catégorie du groupe de tresses généralisé correspondant, ou de se donner (1.5.1) (1.5.2) (1.5.3) tels que les $T(w)$ soient des auto-équivalences.

1.11 Variante. Soit $\mathscr{M}$ une catégorie monoïdale et considérons les catégories (A) et (B) suivantes

(A) la catégorie des systèmes formés par

(A.1) $B^+ \to Ob\mathscr{M} : b \mapsto T(b)$,
(A.2) des isomorphismes $T(b')T(b'') \xrightarrow{\sim} T(b'b'')$, vérifiant
(A.3) le carré

$$\begin{array}{ccc} T(b')T(b'')T(b''') & \longrightarrow & T(b'b'')T(b''') \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ T(b')T(b''b''') & \longrightarrow & T(b'b''b''') \end{array}$$

est commutatif.

(B) la catégorie des systèmes formés par
(B.1) $W - \{e\} \to Ob(\mathscr{M}) : w \mapsto T(w)$,
(B.2) des isomorphismes $T(w')T(w'') \xrightarrow{\sim} T(w'w'')$ pour $\ell(w'w'') = \ell(w') + \ell(w'')$, vérifiant

(B.3) le carré

$$\begin{array}{ccc} T(w')T(w'')T(w''') & \longrightarrow & T(w'w'')T(w''') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(w')T(w''w''') & \longrightarrow & T(w'w''w''') \end{array}$$

est commutatif pour $\ell(w'w''w''') = \ell(w') + \ell(w'') + \ell(w''')$.

Le foncteur de restriction, de la catégorie (A) à la catégorie (B), est une équivalence. La preuve est la même que celle de 1.5.

La même conclusion vaut si $\mathscr{M}$ est catégorie de Picard (= monoïdale à unité où tout objet est inversible), et que dans (A) on remplace B^+ par le groupe des tresses généralisé B. La preuve est la même qu'en 1.9, 1.10.

2. Contractibilité

2.1. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathscr{M}$ un ensemble fini d'hyperplanes homogènes de V (les murs). On suppose que les composantes connexes de $V - \bigcup_{M\in\mathscr{M}} M$ (les *chambres*) sont des cônes simpliciaux ouverts.

Nous utiliserons la terminologie (*murs*, *chambres*, *faces*, *facettes*) de Bourbaki (Lie V par. 1), et celle de Deligne (1972) rappellée ci-dessous.

Deux chambres A et B sont dite *mitoyennes* si $A \neq B$ et que A et B ont une face en commun. Une *galerie* de longueur n ($n \geqq 0$) de *source* A et de *but* B est une suite de chambres C_i ($0 \leqq i \leqq n$) avec $A = C_0$, C_{i+1} mitoyenne de C_i ($0 \leqq i < n$) et $C_n = B$. la *composée* GG' de deux galeries $G = (C_0, \ldots, C_n)$ et $G' = (C'_0, \ldots, C'_m)$, définie si $C_n = C'_0$, est $(C_0, \ldots, C_n = C'_0, \ldots, C'_m)$. Pour A et B deux chambres, les galeries *minimales* de A à B sont celles de longueur minimale, i.e. de longueur le nombre $d(A,B)$ de murs séparant A de B. Elles traversent une seule fois chaque mur séparant A de B. L'*équivalence* entre galeries est la relation d'équivalence compatible à la composition la plus fine telle que les galeries minimales d'une chambre A à une chambre B soient équivalentes. Deux galeries équivalentes ont même longueur. Plus précisément, elles traversent le même nombre de fois chaque mur. Les galeries minimales de A à B forment une classe d'équivalence, notée $u(A,B)$, et si $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$, on a $u(A,B)u(B,C) = u(A,C)$ pour la composition des classes d'équivalence de galeries.

Soient A, B et C trois chambres. Les conditions suivantes sont équivalentes (Deligne (1972) 1.4): (a) $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$;

(b) il existe une galerie minimale de A à C passant par B;

(c) B est dans l'intersections des demi-espaces bordés par un mur, contenant A et C. On note $D(A,C)$ l'ensemble des chambres B vérifiant ces conditions (chambres *entre* A et C). Pour A fixe, la relation “B est entre A et C”, équivalente à $D(A,B) \subset D(A,C)$, est une relation d’ordre entre chambres.

D’après le résultat technique central 1.9 de Deligne (1972), pour toute classe d’équivalence g de galeries de source A, si g *commence* par $u(A,C)$, i.e. s’il existe g' tel que $g = u(A,C)g'$, la classe d’équivalence g' est unique. De plus, il existe une chambre *optimale* C telle que g commence par $u(A,C)$: pour que g commence par $u(A,B)$, il faut et il suffit que B soit entre A et C.

2.2. Soient g une classe d’équivalence de galeries de A à B, $\ell(g)$ leur longueur et $E(g)$ l’ensemble des façons d’écrire g comme un composé de classes $u(C,D)$. Plus précisément $E(g)$ est l’ensemble des suites de chambres (C_i) $(0 \leqq i \leqq n)$ telles que $C_0 = A$, $C_n = B$, $C_i \neq C_{i+1}$ pour tout i $(0 \leqq i < n)$ et que

$$g = \text{composé des } u(C_i, C_{i+1}) \tag{2.2.1}$$

La condition (2.2.1) implique que

$$\sum d(C_i, C_{i+1}) = \ell(g)\,. \tag{2.2.2}$$

Ordonnons $E(g)$:

$$(C_0, \ldots, C_n) \leqq (D_0, \ldots, D_m)$$

s’il existe une application strictement croissante $\varphi : \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\}$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(m) = n$, $D_j = C_{\varphi(j)}$ et

$$d(C_{\varphi(j)}), C_{\varphi(j+1)}) = \sum_{\varphi(j) \leqq i < \varphi(j+1)} d(C_i, C_{i+1})\,.$$

L’application φ est alors unique. Si $(C_0, \ldots, C_m) \leqq (D_0, \ldots, D_m)$, on passe de la décomposition $g =$ composé des $u(C_i, C_{i+1})$ à la décomposition $g =$ composé des $u(D_j, D_{j+1})$ en remplaçant les $u(C_i, C_{i+1})$ $(\varphi(j) \leqq i < \varphi(j+1))$ par leur composé $u(D_j, D_{j+1})$.

2.3 *Exemple.* Soit $W \subset GL(V)$ un groupe fini engendré par des réflexions. On suppose que le sous-espace V^W des invariants est réduit à 0. Prenons pour murs les miroirs (= hyperplans fixes) des réflexions dans W. On sait que les chambres de V sont des cônes simpliciaux, permutés de façon simplement transitive par W (Bourbaki, Lie V 3.9 prop. 7 et 3.2 Th. 1).

Choisissons une chambre C_0 et appelons-la *chambre fondamentale*. Pour toute chambre A, soit $g(A)$ l’unique élément de W qui envoie C_0 sur A. Pour A et B deux chambres, la *position relative* $w(A,B)$ de A et B est l’élément w de W tel que $g(A)$ envoie (C_0, wC_0) sur (A,B): on a $w(A,B) = g(A)^{-1}g(B)$ et $w(A,B)w(B,C) = w(A,C)$.

Le groupe W, muni de l’ensemble R des réflexions par rapport aux miroirs contenant les faces de C_0, est un groupe de Coxeter (Bourbaki, Lie V 3.2 théorème 1).

Soit $G = (A_0, \dots, A_n)$ une galerie de longueur $n > 0$. Pour $0 \leqq i < n$, soit $r(i) \in R$ la position relative de A_i et A_{i+1}. Attachons à G l'élément

$$b(G) = \widetilde{r(0)} \dots \widetilde{r(n-1)} \tag{2.3.1}$$

de B^+ (1.4). L'image de $b(G)$ dans W est la position relative de A_0 et A_n. Pour une galerie composée, on a

$$b(G'G'') = b(G')b(G'') \,. \tag{2.3.2}$$

La définition (2.1) de l'équivalence des galeries mimique la présentation (1.4.5) de B^+, et on vérifie que l'application (2.3.1) induit une bijection, encore notée b:

$$\begin{aligned}&\{\text{classes d'équivalence de galeries de}\\ &\quad \text{source fixe } A \text{ et de longueur} > 0\} \xrightarrow{\sim} B^+ \,.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

De plus, l'application

$$E(g) \to E(b(g)) : (C_0 \dots C_n) \mapsto w_0 \dots w_{n-1}$$

avec w_i la position relative de C_i et C_{i+1}, est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Le théorème 1.7 est donc un cas particulier de l'énoncé suivant.

Théorème 2.4. *Avec les notations de* 2.2, *la réalisation géométrique* $|E(g)|$ *de l'ensemble ordonné* $E(g)$ *est contractile.*

Preuve. On prouvera 2.4 par récurrence sur la longueur $\ell(g)$ de g. Si $\ell(g) = 0$, $A = B$ et l'ensemble de suites $E(g)$ est réduit à la suite (A). Si $\ell(g) = 0, |E(g)|$ est donc contractile. Soit ℓ un entier > 0, supposons 2.4 pour $\ell(g) < \ell$, et prouvons 2.4 pour $\ell(g) = \ell$.

Soient g une classe d'équivalence de galeries de longueur ℓ de A à B, C la chambre optimale (2.1) telle que g commence par $u(A, C)$ et S l'ensemble des murs de A qui séparent A de C. Puisque $\ell > 0$, $A \neq C$ et S est non vide.

Pour $s \in S$, soit $E_s(g) \subset E(g)$ l'ensemble des suites (C_i) dans $E(g)$ telles que le mur s sépare A de C_1. L'ensemble $E(g)$ est la réunion des $E_s(g)$. Chaque $E_s(g)$ est un segment final de $E(g)$. Si on le munit de l'ordre induit, on a donc pour les réalisations géométriques

$$|E(g)| = \bigcup |E_s(g)| \,. \tag{2.4.1}$$

Pour T une partie non vide de S, soit $E_T(g)$ l'intersection des $E_t(g)$ pour $t \in T$ munie de l'ordre induit. On a

$$|E_T(g)| = \bigcap |E_t(g)| \,. \tag{2.4.2}$$

Lemme 2.5. *Chaque* $|E_T(g)|$ *est contractile.*

Preuve. Soit F_T la facette de A ouverte dans l'intersection P_T des murs $t \in T$ et soit A_T la chambre opposée à A dans l'étoile de F_T. Dans la notation 1.6 (ii) de Deligne (1972): $A_T := A \,.\, \Delta(P_T)$. La chambre A_T est la plus petite (2.1) des chambres séparées de A par les murs $t \in T$. En particulier, A_T est entre A et C. Notons h l'unique classe d'équivalence de galeries de A_T à B telle que $g = u(A, A_T)h$. On a $\ell(h) < \ell(g)$.

Soit $f : E(h) \to E_T(g)$ l'application croissante

$$(C_0 = A_T, \ldots, C_n) \mapsto (A, C_0, \ldots, C_n) \,. \tag{2.5.1}$$

Si (C_i) est dans $E(g)$, C_1 est dans $D(A, C)$, et pour que (C_i) soit dans $E_T(g)$, il faut et il suffit que C_1 soit dans $D(A_T, C)$. L'application f induit donc un isomorphisme de $E(h)$ avec un segment initial de $E_T(g)$.

Soit $f^* : E_T(g) \to E(h)$ l'application croissante

$$(C_0 = A,\ C_1, \ldots, C_n) \mapsto \begin{cases} (C_1, \ldots, C_n) & \text{si } C_1 = A_T \\ (A_T, C_1, \ldots, C_n) & \text{si } C_1 \neq A_T \,. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Pour $x \in E(h)$ et $y \in E_T(g)$, on a

$$f(x) \leqq y \Leftrightarrow x \leqq f^*(y) \,. \tag{2.5.3}$$

Si on regarde $E(h)$ et $E_T(g)$ comme des catégories et f, f^* comme des foncteurs (cf. 1.7), (2.5.3) signifie que (f, f^*) est une paire de foncteurs adjoints. D'après Quillen (1973) par. 1 cor. 1 à prop. 2, p. 92, l'application

$$|f| : |E(h)| \to |E_T(g)|$$

est une équivalence d'homotopie et 2.5 résulte de l'hypothèse de récurrence.

Les intersections non vides des $|E_s(g)|$ étant contractiles ((2.4.2) et 2.5), $|E(g)|$ a même type d'homotopie que le nerf de son recouvrement fermé fini par les $|E_s(g)|$. Les intersections étant toutes non vides, ce nerf est un simplexe et $|E(g)|$ est contractile.

Remarque 2.6. Soit $\mathfrak{C}$ une 2-catégorie dont les objets sont indexés par les chambres. De même que 1.7 nous a fourni 1.5, le théorème 2.4 fournit, avec la même démonstration, qu'il revient au même (1.1) de se donner (A) ou (B) comme suit:

(A) (i) Pour g une classe d'équivalence de galeries de longueur > 0 de A à B, une 1-flèche $T(g) : X_A \to X_B$;

(ii) Pour $g = g'g''$, un isomorphisme $T(g'')T(g') \to T(g)$, ces isomorphismes rendant commutatifs les diagrammes

$$\text{(iii)} \qquad \begin{array}{ccc} T(g''')T(g'')T(g') & \longrightarrow & T(g''g''')T(g') \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ T(g''')T(g'g'') & \longrightarrow & T(g'g''g''') \,. \end{array}$$

(B) (i) Pour A et B deux chambres distinctes, une 1-flèche $T_{B,A} : X_A \to X_B$;

(ii) Pour A, B, C trois chambres distinctes, avec C entre A et B, un isomorphisme $T_{CB}T_{BA} \xrightarrow{\sim} T_{CA}$, ces isomorphismes rendant commutatifs les diagrammes

(iii)
$$\begin{tikzcd} T_{DC}T_{CB}T_{BA} \arrow[r] \arrow[d] & T_{DB}T_{BA} \arrow[d] \\ T_{DC}T_{CA} \arrow[r] & T_{DA} \end{tikzcd}$$

lorsque ceux-ci sont définis, i.e. lorsque $d(A,D) = d(A,B) + d(B,C) + d(C,D)$.

L'application 1 donnée dans l'introduction est plus commodément exprimée dans ce langage: l'ensemble des ordres totaux sur I s'identifie à l'ensemble des chambres d'un système de racines de type A_n, pour $n = |I| - 1$. Pour chaque ordre total $\leqq$, correspondant à une chambre C, soit X_C la catégorie des systèmes exceptionnels correspondant, et soit $\mathrm{Hom}(X_C, X_D)$ la catégorie des foncteurs de X_C dans X_D. Ce que construit Bondal est une donnée (B).

Bibliographie

A.I. Bondal, M.M. Kapranov: Representable functors, Serre functors and mutations, Math USSR Izvestiya **63**, 1183–1205 (1989) (in Russian); AMS transl.: **35**, 519–541 (1990)

M. Broué, J. Michel: Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne–Lusztig associées, in: Finite reductive groups, related structures and representations (proc. of Oct. 94 Luminy conference). Basel, Boston, Stutgart: Birkhäuser, 1996

P. Deligne: Les immeubles des groupes de tresses généralisés, Inv. Math. **17**, 273–302 (1972)

F.A. Garside: The braid group and other groups, Quat. J. Math. Oxf., 2^e ser. **20**, 235–254 (1969)

D. Quillen: Higher algebraic K-theory I., Battelle inst. conference 1972, pp. 85–142, Lecture Notes in Math. **341**, Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1973)

J.L. Verdier: Catégories dérivées (état 0) [texte de 1963], In: Cohomologie étale (SGA $4\frac{1}{2}$). Lecture Notes in Mathematics, vol. **569**, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, pp. 262–311 (1977)