FUNKTORIALITÄT IN DER THEORIE DER AUTOMORPHEN FORMEN: IHRE ENTDECKUNG UND IHRE ZIELE

ROBERT P. LANGLANDS

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Anfangs sollte der vorliegende Aufsatz historisch sein. Er hat sich aber beim Schreiben autobiographisch gefärbt und auch didaktisch. Es handelt sich in diesem Aufsatz vordergründig um einen Brief, der einen Wendepunkt, fast einen Umbruch, in meinem Leben darstellt und markiert, nicht wegen des Adressaten, André Weil, den mir der Zufall auswählte, sondern wegen des Inhalts. Im nachhinein, und auch schon vorher, kann André Weil als Empfänger des Briefes selbstverständlich erscheinen, da dessen Inhalt überwiegend zahlentheoretisch ist, und Weil selbst einer der führenden Zahlentheoretiker seiner Zeit war. Der Brief jedoch, sowie der Adressat, kam, ohne Absicht, aus dem Stegreif zustande, und die Wahl des Empfängers war letzten Endes kaum wichtig. Harish-Chandra hat, fand ich, die Tragweite der darin gestellten Fragen besser verstanden, und der Zufall ließ sowieso den Brief erst in seine Hand fallen.

Das war nicht allein, weil der Brief ohne Kenntnis der Theorie der Lieschen Gruppen und ihrer unendlich-dimensionalen Darstellungen schwer verständlich war. Es ist aber so, daß in den sechziger Jahren diese Theorie angefangen hat, die Theorie der automorphen Formen stark zu beeinflußen. Bis heute bleibt diese Darstellungstheorie vielen Zahlentheoretikern fremd, so daß ich gern beschreiben möchte, wie ich zu ihr so wie zur Theorie der automorphen Formen kam.

Date: 2010.

1. Jugenderrinerungen

Ich nehme sogar die Gelegenheit wahr, ein paar Worte über meinen mathematischen Lebenslauf vor dem Brief, also vor Januar des Jahres 1967, zu schreiben. Ich hole sehr weit aus und verlange viel Geduld vom Leser. Ich habe meine mathematische Ausbildung in Kanada im Alter von fast achtzehn Jahren in meinem zweiten Universitätsjahr mit einer sehr einfachen Einführung in die Infinitesimalrechnung angefangen. Meine ernsthafte Ausbildung hat erst im darauffolgenden Jahr begonnen. Auf Empfehlung des Lehrers habe ich mir die englische Übersetzung von Courants zweibändigem Werk *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* beschafft. Wir hatten auch Vorlesungen über Algebra, für die die vorgeschlagenen Lehrbücher in vieler Hinsicht auf dem für mich richtigen Niveau waren, eine Einführung in die lineare Algebra von Murnaghan mit dem Titel *Analytic geometry,* sowie ein Buch von Dickson über elementare Algebra, *New first course in the theory of equations,* das, wie mir scheint, wenn ich es jetzt anschaue, viel Schönes enthält, dessen Wichtigkeit ich nur im nachhinein und sehr spät erkannte, insbesondere die Vandermonde-Determinante und die Lösung durch Radikale einer Gleichung dritten Grades. Wie sehr oft in meinem geistigen Leben—wie in meinem Leben überhaupt—wollte ich zu schnell lernen, und habe mir nicht die Zeit gegeben, über manche wichtigen Sachen nachzudenken. Dagegen habe ich für die lineare Algebra zwei Bücher gefunden, das Buch *Finite-dimensional vector spaces* von Halmos, das meine Einführung in die moderne Mathematik war, und dessen abstrakte Darlegung des Themas ich stark bewunderte, sowie die englische Übersetzung eines Buches, eigentlich zwei Bücher, *Einführung in die Algebra und analytische Geometrie* und *Vorlesungen über Matrizen* von Schreier und Sperner, die ich selbst entdeckt hatte. Sie waren meine Einführung in die Theorie der elementaren Teiler und gaben mir einen wichtigen Vorsprung in meiner späteren Beschäftigung mit Hecke-Operatoren.

In meinem vierten Universitätsjahr habe ich verschiedene Vorlesungen gehört. Obwohl einige, wie die über die Grundbegriffe der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und die speziellen Funktionen der mathematischen Physik eine starke Spur hinterließen, mußte diese Spur erst reifen, bevor sie mir nützte. Wir hatten auch Vorlesungen, die eine Einführung in die Funktionentheorie anboten und die sich auf die Übersetzungen einer Reihe von Konrad Knopp geschriebenen Büchlein stützte. Das letzte dieser Büchlein, über die Weierstraßsche Theorie der elliptischen Funktionen, gehörte nicht zum Lehrplan. Ich habe es trotzdem gelesen. Die algebraische Theorie dieser Funktionen kam erst später, als ich während meiner ersten Jahre in Princeton Gelegenheit hatte, eine elementare Vorlesungsreihe zu halten, und das Buch Walkers *Algebraic Curves* als Grundlage verwandte. Offensichtlich war ich rückständig hinsichtlich der algebraischen Geometrie. Ich bin leider so geblieben.

Diese Bücher von Knopp und Walker, so wie viele andere ausgezeichnete Bücher, oft in originaler Sprache, standen zur Verfügung zu sehr niedrigen Preisen in einer Taschenbuchauflage bei Dover Press. Diese bot, zusammen mit der Reihe von Neudruckausgaben, die bei Chelsea Press zur Verfügung standen, besonders für junge Menschen, eine Gelegenheit vergriffene oder aus anderen Gründen nicht erhältliche Bücher für die eigene Bibliothek zu bekommen. Das war allerdings zum Teil eine Folge der Beschlagnahme deutscher Verlagsrechte während des Kriegs.

In meiner Eile so viel wie nur möglich in kürzester Zeit zu lernen, hatte ich auch im vierten Jahr an einem Seminar über noethersche Ringe, das nicht für *undergraduates* gedacht war, teilgenommen. Das Büchlein Northcotts, *Ideal Theory,* bot das Grundthema dar. Obwohl ich meinte, das Vorgetragene im wesentlichen zu verstehen, wäre mir eine Einführung in die algebraische Geometrie, besonders in die Theorie der algebraischen Kurven, mit einem nachfolgenden allgemeinen Aufstieg in die algebraische Geometrie der Zeit, einbringender gewesen. Das Büchlein fand ich nichtsdestoweniger schön, und ich war über seinen Inhalt begeistert. Ich habe sogar versucht, das Jahr danach, meine *Master's thesis* auf diesem Gebiet zu schreiben. Ich kann nicht sagen, daß ich über das Ergebnis besonders stolz bin. Dieses Jahr, das fünfte und letzte meines Studiengangs in Vancouver, war in keiner Hinsicht glänzend. Es war übereilt. Ich mußte unterrichten und wollte die Würde eines *Master's degree* so schnell wie möglich erwerben, damit ich in eine *Graduate School* kam und die Doktorarbeit anfangen konnte. Die Folge war, daß ich eine Menge Vorlesungen hören sowie eine *thesis* schreiben mußte, alles innerhalb eines Jahres. Ich habe es geschafft. Aber von dem Jahr ist mir sehr wenig in Erinnerung geblieben. Ich habe jedoch verschiedenes gelesen. Erstens als Teil meiner Leistungen für den *Master's degree* habe ich mir vorgenommen, das Buch Dixmiers *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* zu lesen. Sein Thema zog mich zu der Zeit wegen seiner Abstraktheit sehr stark an. Mir ist es gelungen, das Buch zu lesen und ein bißchen davon zu verstehen. Ich fand jedoch am Ende das Thema nicht besonders begeisternd und bin nie zu ihm zurückgekommen.

Ich hatte bis dann kein fremdsprachiges mathematisches Lehrbuch gelesen. Ich hatte zwar van der Waerdens *Moderne Algebra* bestellt und hatte ohne Erfolg versucht es zu lesen. Es ist nicht klar, ob der Mißerfolg an dem Stoff lag oder an meiner Unkenntnis der deutschen Sprache, die ich zwischen dem ersten und dem zweiten Studienjahr versucht hatte, auf eigene Faust zu studieren, ohne verstanden zu haben, was es bedeutet, eine Fremdsprache zu können. Daß ein englischsprechender nordamerikanischer Junge das nicht verstand, ist kaum wunderlich. Heutzutage würde es ihm überhaupt nicht einfallen, so was zu versuchen. Ich hatte auch als Student sehr wenig Zeit im Sommer für Bildung oder Ausbildung, da ich nicht nur Geld für den Winter verdienen mußte, ich wollte auch die normalen Neigungen dieses Alters nicht ganz vernachlässigen. Im vierten Universitätsjahr, hatten wir auch ein Seminar über die Geometrie gehabt, dessen Stoff einem russischen Buch von A. A. Alexandrov, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей entnommen wurde, was mich sehr gefreut hatte, denn ich hatte mich im zweiten Studienjahr mit Russisch beschäftigt. Es waren nur drei Studenten und der Professor. Wir sind leider nicht sehr weit gekommen, vielleicht weil meine Kommilitonen weder begeistert noch fleißig waren.

In den fünfziger Jahren war der Verkehr zwischen Kanada und den Vereinigten Staaten anders als heute. Was die Menschen betraf war es nicht so streng. Man konnte die Grenze überqueren ohne Ausweis. Für Güter war es schwieriger, weil alles in den Vereinigten Staaten billiger war, und die Zölle in der Richtung vom Süden nach dem Norden teuer. Güter in sehr begrenztem Ausmaß konnte man ein- oder zweimal im Jahr zollfrei importieren nach einem zweitägigen Aufenthalt südlich der Grenze, so daß die Menschen sich damals, wohl auch immer noch wenn nicht so stark, an den Wochenenden nach dem Süden bewegten. Diesen Drang spürten auch ich und meine Verwandten, so daß ich in diesem fünften Jahr einmal über die Grenze nach Seattle fuhr. Bücher waren wohl zollfrei. Es gab aber in Vancouver keine mathematischen Bücher zum Kauf, so daß ich vor allem die Buchhandlung an der Universität in Seattle besuchen wollte, wo ich mir sogar einige mathematische Bücher antiquarisch erstehen konnte. Sie waren, wie es schien, auf einem wissenschaftlichen Niveau, das ich bis dahin nicht erreicht hatte. Es war auch klar, daß sie alle aus derselben kleinen Privatbibliothek stammten, vorwiegend von der Princeton University Press verlegte Bücher. Ich habe etliche gekauft, unter anderen *Introduction to Topology* von Lefschetz, *Classical groups* und *The theory of algebraic numbers,* beide von Weyl.

Meine ernste Absicht war, alle drei sofort zu lesen. In der Tat habe ich erst etliche Jahre später angefangen, das erste zu lesen, am Anfang der sechziger Jahre, als ich schon in Princeton war. Einige seiner Übungsaufgaben fand ich unmöglich schwer, was mich entmutigte, denn es sollte ein Buch für Anfänger sein. Ich habe aufgehört, das Buch zu lesen. Ich habe meinen Mißerfolg einem Bekannten gegenüber, einem Topologen, erwähnt, der mich erleichterte, weil er mir versicherte, daß Lefschetz, ohne den Leser darauf aufmerksam zu machen, einige wichtige ungelöste Probleme der Topologie unter die gewöhnlichen Übungsaufgaben verstreut hatte. Ich habe trotzdem das Buch nicht wieder aufgeschlagen und bin, leider, nie der Topologie sehr nahegekommen. Das Buch über die Theorie der algebraischen Zahlen, las ich, wenn nicht sofort schon eine kurze Zeit nach der Reise, und mit Begeisterung entdeckte ich, daß das quadratische Reziprozitätsgesetz eine unmittelbare, fast selbstverständliche, Folge einer sehr allgemeinen und sehr schönen Theorie und nicht, wie ich bis dahin meinte, eine elementare, zufällige Tatsache ist. Ich habe später auch gelernt, wie schön, wenn nicht die Tatsache selbst, bestimmt einige ihrer elementaren Beweise sind. Aber es war zunächst die Begeisterung für die schöne allgemeine Theorie, die sich fest in meinem Bewußtsein eingebettet hat. Weyls Buch über die klassischen Gruppen hat mich im Gegenteil nie begeistert. Ich möchte gern in der Zukunft zu ihm zurückkommen.

Die beiden Bücher sind, meine ich, eins nach dem anderen geschrieben, *Classical groups* ist 1939 erschienen, und *The theory of algebraic numbers* 1940. Nach meinen eigenen Erfahrungen, würde ich schätzen, daß beide einen Versuch Weyls darstellen, als alternder Mathematiker zu Themen seiner jungen Jahre zurückzukehren, um sie schließlich zu verstehen. In seiner zweiten Denkschrift über Hilbert nach dessen Tod beschreibt Weyl seine Bewunderung, als er, damals ein junger Student, Hilberts *Zahlbericht* las, und wie er schwor, alles was Hilbert geschrieben hatte, zu lesen. Dann beschreibt er später, nach dem frühen Tod seiner Frau, die auch in Göttingen Mathematik studiert hatte, in einer nie veröffentlichten Schrift über ihr gemeinsames Leben, wie die beiden zusammen einige Jahre später den Bericht studierten, ohne zu erwähnen, das er selbst es schon vorher gelesen hatte. Seine Frau hat auch die Vorlesungen in Princeton gehört, aus deren Unterlagen sein eigenes Buch erwachsen ist, und schreibt gelegentlich an ihren Sohn, Joachim, auch Mathematiker, wie fleißig der Vater bei der Vorbereitung war und wie er alles für sich gründlich verstehen wollte. Weyls Buch ist gewiß keine Wiederholung von Hilberts Buch. Ich habe das Gefühl, ohne den Zahlbericht mit dem Buch gründlich verglichen zu haben, daß Weyl eine Entwicklung und verschiedende auseinandergehende Gesichtspunkte, wie die von Dedekind und Kronecker, verstehen und erklären wollte, die Hilbert, der seine eigene Vorstellung hatte, beiseite gelassen hatte.

Obwohl Weyl selbst zur algebraischen Zahlentheorie wenig, wenn überhaupt, beigetragen hatte, war er einer der hervorragenden Gestalten in der Entwicklung der Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen und in ihrer Anwendung in der Physik, besonders in der Spektroskopie. Die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen sowie der dreidimensionalen Drehgruppe lieferte am Anfang die wichtigsten Beispiele für die Physik. Weyls Buch *Gruppentheorie und Quantenmechanik,* 1928 erschienen, war enflußreich und ist noch heute lesenswert. Seine drei Arbeiten *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I,II,III,* 1925 und 1926 erschienen, sind auch Klassiker geworden. Seltsamerweise habe ich bis jetzt in Weyls Arbeiten nichts über die gegenseitige Einwirkung der zwei Gebiete, insbesondere über den Einfluß der physikalischen Entwicklungen auf die

Darstellungstheorie der Mathematiker, sogar nicht auf seine eigenen mathematischen Arbeiten, gefunden. Ich finde sonstwo auch keine einleuchtende Beschreibung dieses Einflusses. Ich habe mir vielleicht nicht die nötige Mühe gegeben. Weyls Buch *Classical groups, their invariants and representations* ist dem vertriebenen Berliner Mathematiker Issai Schur gewidmet, der eine führende Rolle bei dem Übergang von den endlichen Gruppen zu den algebraischen Gruppen spielte. Ich selbst kam mit diesem Buch nie zurecht. Ich sollte es vielleicht wieder aufnehmen, in der Hoffnung Weyls Ansichten über diesen Übergang an den Tag zu bringen.

Als ich diese Sätze schrieb, wollte ich das Buch in meiner Bibliothek finden. Ich habe eine halbe Stunde gesucht, ohne es zu finden, und wurde langsam überzeugt, daß meine Erinnerung falsch war, und daß ich das Buch überhaupt nie besessen hatte. Inzwischen stieß ich auf zwei andere Bücher, auch von der Princeton University Press, die ich beim gleichen Besuch auch antiquarisch gekauft hatte, Pontrjagins *Topological groups,* eine Übersetzung, und Widders *The Laplace transform.* Das zweite habe ich sehr genossen. Es war meine Einführung in die klassische reelle Analysis. Das erste habe ich gelesen, aber die allgemeine Theorie der topologischen Gruppen blieb für mich immer hintergründig. Nach langem Suchen habe ich dann schließlich in den Bücherreihen *Classical groups* gefunden und zwar mit Kennzeichen, die es klar machten, daß ich es auch in Seattle gekauft hatte. Als ich die Einführung las, habe ich sofort verstanden, warum ich das Buch nie näher angesehen habe.

Die Einführung ist wie immer bei Weyl literarisch schön. Ich finde es dagegen schwer, den darin geäußerten Meinungen zuzustimmen. Weyl meint, "Important though the general concepts and propositions may be with which the modern industrious passion for axiomatizing and generalizing has presented us, in algebra more than anywhere else, nevertheless I am convinced that the special problems in all their complexity constitute the stock and core of mathematics; and to master their difficulties requires on the whole the harder labor." Ich bin derselben Meinung. Allgemeine Begriffe sind nichtsdestoweniger wichtig und die höhere Fähigkeit versteht es, die konkreten Beispiele, die zu wesentlichen allgemeinen Begriffen führen und die für sie grundlegend sind, von den anderen, die nur schön sind oder nur schwer verständlich, abzuteilen, sowie die allgemeinen Begriffe, die die bedeutenden konkreten Beispiele an den Tag bringen, von denjenigen abzuteilen, die nichts als ihre Allgemeinheit anzubieten haben. Ich finde es enttäuschend, daß Weyl, mit Élie Cartan einer der Gründer der Darstellungstheorie der halbeinfachen Algebren und Gruppen, die Einheitlichkeit dieser Theorie nicht voraussah oder, besser, nicht anerkannte. In seinen frühen Arbeiten ist eine Art Einheit schon enthalten, und die Prägnanz des Satzes *Alle Quantenzahlen sind Kennzeichen von Gruppendarstellungen* aus seinem Buch über Quantenmechanik finde ich überwältigend. Für mich ist es genau so wunderlich, wie im Rahmen der Funktorialität, zu der wir nachher kommen werden, wenn wir die Entwicklungen beschreiben, die als Folge der Möglichkeiten, die angedeutet wurden in dem Brief an Weil, langsam unternommen wurden, die Darstellungen aller halbeinfachen oder aller reduktiven Gruppen mit einandern verbunden sind, und zwar in einer unerwarteten Weise.

Ich bleibe jedoch ein Verehrer von Weyl und bewundere seine Stärke als Analytiker, seine breiten Kenntnisse der Mathematik und verwandter Gebieten, und seine literarische Begabung. Ich hoffe, in den Jahren, die mir bleiben, nicht allein einige schon gelesene Schriften, wie *Die Idee der Riemannschen Fläche,* wiederzulesen, sondern auch einige nie gelesene Bücher und Arbeiten, wie *Raum, Zeit, Materie,* zum ersten Mal zu lesen. Sogar zu meiner Zeit an der Yale Universitäthabe ich, obwohl ich schon eine Familie und noch sehr wenig Geld hatte, mir erlaubt, die *Selecta* zu bestellen, die seine Freunde und Kollegen ihm anläßlich seines siebzigsten Geburtstags geschenkt hatten, ein schön verlegtes Buch, wie es es heutzutage nicht mehr gibt. Darin habe ich, nicht so lange nach meiner Ankunft in Princeton, seine wunderschönen Arbeiten über die Darstellungen kompakter halbeinfacher Gruppen gelesen.

2. Yale University

Nach fünf Jahren an der Universität in Vancouver bin ich an die Yale University in Connecticut für meine weitere Ausbildung als Mathematiker gegangen. Obwohl ich dort nur zwei Jahre blieb, ging ich nicht allein mit der Doktorwürde weg sondern auch, obwohl ich es nicht wußte, mit dem Anfang vieler Jahre Arbeit. Das Hauptgebiet der Mathematiker in Yale war die Funktionalanalysis. Das war mir vorher bekannt, und ich war ganz begeistert von den Vorlesungen im ersten Jahr. Wir hatten Vorlesungen über den Stoff in den Büchern *Linear operators* von Dunford und Schwartz, in der Tat nur aus dem ersten Band, und *Analytic semi-groups* von Hille und Phillips. Für das erste war Dunford selbst zuständig; Hille war schon alt genug, daß er das Vorlesen einem jüngeren Kollegen, Cassius Ionescu-Tulcea, überließ. Ich habe beide Bücher gründlich studiert. Spuren meiner Arbeit sind in dem später erschienen zweiten Band von Dunford-Schwartz zu finden. Obwohl das Hauptthema seines Buches an sich vom beschränkten Interesse ist, war Hille vor allem ein Analytiker, und das Buch war auch in mancher Hinsicht eine ausgiebige Quelle der klassischen reellen Analysis. Mir hat es viel eingebracht.

Ich hatte auch, vielleicht nur im zweiten Semester, Vorlesungen von Felix Browder über partielle Differentialgleichungen, vor allem über A-priori-Schranken, die seinem Fach entsprach. Er war kein gewissenhafter Vortragender, sprach aus dem Stegreif, und mußte jeden Versuch einen Satz zu beweisen, dreimal wieder anfangen. Nichtsdestoweniger fand ich die Vorlesungen gut. Ich ging jeden Abend nach Hause mit einem Satz unordentlicher Aufzeichnungen und machte daraus eine ordentliche Darlegung des Stoffes. Das hat mir auch viel eingebracht, und ich wollte meine Doktorarbeit auf dem Gebiet schreiben. Dazu ist es nicht gekommen.

In den Vorlesungen über Halbgruppen wurde ein Problem über Liesche Halbgruppen, einen von Hille selbst eingeführten Begriff, gestellt, das ich löste. Ein bißchen später hatte ich auf eigene Faust einige meiner eigenen Ideen über analytische Halbgruppen entwickelt, zum Teil mit Hilfe einiger Ergebnisse aus der Theorie der parabolischen Differentialgleichungen, so daß ich schon nach etwa einem Jahr den Stoff für eine Doktorarbeit hatte. Obwohl ich sie nie richtig veröffentlicht habe, wurden die Ergebnisse für analytische Halbgruppen von Derek Robinson in sein Buch, *Elliptic operators and Lie groups* aufgenommen.

Die Studenten mußten auch am Ende des ersten Jahres eine Art Reifeprüfung bestehen. Ich hatte mich überhaupt nicht auf sie vorbereitet. Dagegen habe ich Zeit gehabt, verschiedene Bücher durchzublättern oder sogar richtig zu studieren. Die erste Ausgabe von Zygmunds Buch über Fourier-Reihen habe ich mit einiger Sorgfalt durchgelesen, sowie das Buch Burnsides über endliche Gruppen, aber dieses mit weniger Aufmerksamkeit. Ich träumte davon, seine berühmte, zu der Zeit noch nicht bewiesene Vermutung über einfache Gruppen ungerader Ordnung zu beweisen, ohne allerdings die geringste Ahnung zu haben, wie das zu machen wäre. Ich habe auch, glaube ich, schon zu der Zeit M. H. Stones Buch *Linear transformations in Hilbert spaces* gelesen. Die darin dargelegten Ergebnisse konnte ich später in der Theorie der Eisensteinschen Reihen gut gebrauchen. Obwohl ich bei der Prüfung nicht gut abgeschnitten habe, hauptsachlich weil ich über die kommutative Algebra alles aus dem Seminar über Noethersche Ringe vergessen oder nie verstanden hatte, hatte ich, dank dem Buch Zygmunds, eine außergewöhnliche und von der Prüfungskommission ganz unerwartete Kenntnis der

Konvexitätssätze in der Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale, die mir zur Hilfe kam. Zu meinem Glück kannte einer der Prüfenden, Shizuo Kakutani, sich auf dem Gebiet aus und hat darüber viele Fragen gestellt.

Mit der Prüfung, sowie der Doktorarbeit schon hinter mir, war mein zweites Jahr an Yale ganz frei, so daß ich mich meiner mathematischen Wißbegier ganz ergeben konnte. Wie es der Reihe nach ablief, kann ich nicht mehr sagen, aber die Vorsehung hat mich in dem Jahr zweimal begünstigt. Das wichtigste war, daß Steven Gaal eine Vorlesungsreihe über analytische Zahlentheorie angekündigt hatte. Da ich gehofft hatte, wegen des Buches von Weyl über algebraische Zahlentheorie, mich in Yale auch mit Zahlentheorie, und wenn ich mich richtig erinnere, sogar mit Klassenkörpertheorie zu beschäftigen, habe ich diese Vorlesungen gehört. Es stellte sich heraus, daß Gaal zwei Jahre in Princeton am Institute for Advanced Study an der Seite Selbergs verbracht hatte. Selberg hat ihn dort eingeladen nach dem Ungarischen Volksaufstand von 1956. In Princeton kam er in Berührung mit Selbergs Ideen über die analytische Theorie der automorphen Formen, die, obwohl kurz gefaßt, in Selbergs kurzer Veröffentlichung mit dem langen Titel *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series* erschienen sind. Diesen Stoff wollte Gaal in Yale vortragen. Im Zusammenhang mit seinen Vorlesungen habe ich diese Arbeit studiert. Was an sich nebensächlich schien, ist ein Versuch von Browder und Kakutani, ein Seminar über analytische Funktionen mehrerer komplexer Variablen zu halten. Die beiden kamen mit einander nicht gut aus, so daß, nach ein oder zwei Vorträgen, das Seminar aufhörte. Inzwischen hatte ich Gelegenheit gehabt, ein bißchen über den Definitionsbereich einer analytischen Funktion mehrerer Variablen zu lernen, insbesondere über die Konvexitätseigenschaften dieser Bereiche. Das hat mir erlaubt, die analytische Fortsetzung einiger der von Maaß und, allgemeiner, Selberg eingeführten Reihen zu beweisen. Der Name *Eisensteinsche Reihen* wurde später von Godement eingeführt. Ich habe dieses Ergebnis nicht besonders ernst genommen, obwohl es mir gefiel.

Erst später, nach meiner Ankunft in Princeton, mußte ich einmal im wöchentlichen Analysisseminar reden. Da ich sonst nichts zur Hand hatte, habe ich über dieses Ergebnis gesprochen. Bochner war sehr begeistert. Jetzt, da ich mehr Erfahrung mit den Lebensläufen junger Mathemtiker habe, würde ich schätzen, aus zwei Gründen. Erstens hatte er Dirichletsche Reihen sehr gern, wie ich allerdings damals schon erkannte; zweitens hatte diese Forschung überhaupt nichts mit meiner Dissertation zu tun. Sie war von mir selbst angeregt und auf eigene Faust durchgeführt. Meine Dissertation war auch im wesentlichen das Ergebnis selbständigen Denkens. Das konnte aber Bochner nicht wissen. Ich hatte bis zur Zeit meines Vortrags nichts mit Bochner zu tun gehabt. Ich kam nach Princeton auf Empfehlung von Edward Nelson, damals selbst ein sehr junger Mathematiker, der nur ein oder zwei Jahre vorher von Chicago, wo er studiert hatte, nach Princeton gekommen war. Er hat mich an seine Kollegen empfohlen wegen meiner Arbeit über holomorphe Halbgruppen, ein Thema, das ihn auch interessierte.

Bochner hat mich nachher sehr gefördert. Es war nicht so sehr, daß sich meine Stelle im Department ständig verbesserte, obwohl es so war. Es war eher, daß er mich ständig ermuntert hat, die schon angefangene Forschung über automorphe Formen, die ich nicht so ernst genommen hatte, weiterzuführen. Darüber hinaus, auch auf seine Anregung, nehme ich an, hat Selberg mich erstens zu einer Besprechung in seinem Büro am Institute for Advanced Study eingeladen, und dann später zu einem einjährigen Aufenthalt am Institute. Bochner hat auch andere mögliche Forschungsprobleme, diesmal in der Differentialgeometrie, vorgeschlagen, aus denen nichts wurde, hauptsachlich weil mir die Zeit fehlte, ihnen nachzugehen. Ich bin aber voreilig, da ich Princeton noch nicht erreicht habe.

3. Princeton

Ich kam im Herbst 1960 nach Princeton, wo ich mit Unterbrechungen zunächst sieben Jahre blieb. Es hilft meinem Gedächtnis, wenn ich diese Jahre aufteile: 60/61 und 61/62 an der Universität; 62/63 am Institute; 63/64 an der Universität; 64/65 in Kalifornien; 65/66 und 66/67 an der Universität.

Obwohl Bochner vor allem ein Analytiker und Geometer war, trug er zu vielen Gebieten der Mathematik bei, und interessierte sich für noch mehr. Er ist Schüler von Erhard Schmidt in Berlin gewesen und war nachher für einige Jahre, bis 1933, in München. Er hatte Beziehungen zu vielen Mathematikern, unter anderen, wenn ich mich nicht irre, zu Helmut Hasse und Emmy Noether. Er hat sich offensichtlich für ihre Arbeit interessiert. Als Teil seiner Ermunterung meiner Untersuchungen der Eisensteinschen Reihen wollte er zunächst, daß ich die ersten Ergebnisse, die für $\mathrm{GL}(n)$ über $\mathbf{Q}$ waren, oder eher, da die Adele mir noch unbekannt waren, für $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$, auf einen algebraischen Zahlkörper erweitere, was zum Lesen von Heckes Arbeiten über die Dedekindsche Zetafunktion führte, sowie zu Landaus Büchlein *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und ihrer Ideale*. Es hat mich auch zu den Arbeiten von Siegel geführt, die es mir erlaubten, mit speziellen Methoden die analytische Fortsetzung verschiedener Eisensteinscher Reihen für verschiedene Gruppen zu begründen.

In diesen ersten zwei Jahren habe ich auch weiter versucht, die Ideen Selberg's zu verstehen, zunächst die Spurformel, wo die nächstliegende Aufgabe war, mit ihr die Dimension des Raumes der holomorphen automorphen Formen einer gegeben Art auf einem kompakten Quotienten eines beschränkten symmetrischen Gebiets zu bestimmen. In dieser Zeit war die europäische Mathematik, besonders die französische, wichtiger als heute, und, um sich in die damalige Theorie der automorphen Formen einzuarbeiten, war es unbedingt nötig, die Pariser Seminare—Bourbaki, Cartan, Chevalley Lie, und andere—zu lesen. Ich weiß nicht mehr zu welcher Zeit ich sie entdeckte, wohl nach Siegel, aber ob vor oder nach Harish-Chandra weiß ich nicht mehr. Die Folge der Ereignisse war jedoch so, daß es mir klar ist, daß, als ich anfing, ich noch nicht im Rahmen der Darstellungstheorie dachte.

Die Integrale, die bei dem Versuch, die Dimensionen nach Selberg zu berechnen, vorkommen, habe ich zunächst unmittelbar aus den Arbeiten von Selberg genommen und war nicht imstande sie zu berechnen. Ich habe diese Schwierigkeit mit einem jungen, früh gestorbenen Mathematiker, David Lowdenslager, damals ein Kollege an der Universität, besprochen. Er meinte, es wäre allgemein angenommen, die Arbeiten Harish-Chandras würden für solche Fragen nützlich sein. Daraufhin habe ich sofort angefangen, Harish-Chandras Arbeiten zu lesen. Er hatte in seinen Forschungen die allgemeine diskrete Reihe noch nicht erreicht. Über die holomorphe diskrete Reihe kannte er aber viel. Als ich seine Arbeiten las, erkannte ich, obwohl nicht sofort, daß die Integrale, die in der Arbeit Selbergs vorkamen, nichts anders waren als Bahnenintegrale für die entsprechende Gruppe. Das war für mich eine große Entdeckung, die zu meiner ersten Arbeit über die Spurformel führte.

Ich habe Harish-Chandra selbst nur etwas später kennengelernt, obwohl er schon in Princeton war, vielleicht noch nicht als Professor am Institute. Ich hatte ihn, als ich anfing seine Arbeiten zu lesen, um einige Sonderdrucke per Post gebeten, wie es damals noch üblich war. Ich hatte sie aber lange Zeit nicht bekommen. Erst, nehme ich an, nachdem mein Name ihm gegenüber erwähnt wurde, vielleicht von Bochner, hat er sich mir vor einem Seminar vorgestellt und mir die gewünschten Sonderdrucke in die Hand gegeben. Nachher hatte ich viele Gelegenheiten, bis zu seinem frühzeitigen Tod zwanzig Jahre später, mich mit ihm zu unterhalten und ihn näher kennenzulernen. Er hat, nicht so lange nach unserer Begegnung, erklärt, etwas herablassend, nicht so sehr mir als dem abwesenden Selberg gegenüber, daß, wenn man die Sache richtig ansieht, nämlich gruppentheoretisch oder darstellungstheoretisch, war nicht allein meine eingebildete Entdeckung sondern sogar die Spurformel selbst, wenigstens für kompakte Quotienten, nicht besonders beeindruckend. Was meine Entdeckung betrifft hat er recht gehabt. Was die Spurformel betrifft, ist es nützlich, sogar wichtig, die Beziehung der Spurformel zur Frobenius-Dualität zu verstehen, und ich hatte sie vorher nicht verstanden. Die Tragweite der Frobenius-Dualität an sich ist, wie Harish-Chandra verstand, nichtsdestoweniger mit der der Spurformel nicht zu vergleichen.

In diesen zwei Jahren habe ich auch Selberg selbst kennengelernt. Wahrscheinlich dank der Vermittlung Bochners, hat Selberg mich zu ihm in sein Büro am Institute eingeladen. Er hat mir den Beweis der analytischen Fortsetzung der Eisensteinschen Reihen zu einer allgemeinen diskreten Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ erklärt, allerdings unter den üblichen Voraussetzungen über ihren Fundamentalbereich. Das war mir ein Erlebnis, meine erstes Gespräch über Mathematik mit einem Mathematiker reinsten Wassers. Mit Bochner hatte ich nur über Forschungsmöglichkeiten gesprochen, nie über die Mathematik selbst. Der Beweis gehört eigentlich zur Spektraltheorie einer gewöhnlicher Differentialgleichung zweiter Ordnung auf einer Halbgerade. Ich war, im Prinzip, von dem Buch *Theory of ordinary differential equations* von Coddington und Levinson, das ich gelesen hatte, schon mit dieser Theorie vertraut. Ich hatte dennoch nie vorher jemanden gesehen, der Stoff dieser Art und auf diesem mathematischen Niveau so meisterhaft handelte.

Nachher als ich beweisen konnte, meistens auf Grund verschiedener Ergebnisse Siegels, daß diese oder jene Eisensteinsche Reihe fortsetzbar war, habe ich es Selberg beim Tee am Institute, wo ich ihn normalerweise finden konnte, berichtet. Er sagte, mit Recht würde ich jetzt meinen, immer nur, “Wir brauchen einen allgemeinen Beweis.” Als ich später, wohl schon 1963 ihm berichtete, daß ich das Problem behandeln konnte, und später im Frühling, 1964, ihm den vollständig aufgeschriebenen und getippten Beweis zuschickte, hat er überhaupt nicht reagiert. Ich war etwas enttäuscht, habe mich aber nicht besonders darum gekümmert. Nur Jahre später ist mir ein möglicher Grund eingefallen, zu dem ich später zurückkommen werde. Wir waren jahrelang Kollegen und mehr als zwanzig Jahre, bis zu seinem Tod, saßen wir in benachbarten Zimmern. Aber Selberg war kein gesprächiger Mensch. Bei einem persönlichen Gespräch, aber auch in einer Sitzung, war seine bevorzugte Art der Monolog. Er richtete seinen Blick auf eine Zimmerecke und sprach, auch für längerer Zeit, mit jemandem, den er allein sehen konnte. Wir haben uns nur selten unterhalten, immer über alltägliche Sachen, aber auch immer freundlich.

Bochner hatte mich auch sehr früh, in 1963/64, ermutigt, sogar moralisch gezwungen, Vorlesungen über Klassenkörpertheorie zu halten. Das war sehr mutig von ihm, aber nicht unüberlegt. Erstens war es nicht üblich, daß es einem jungen, unerfahrenen Mathematiker überhaupt erlaubt wurde, Vorlesungen auf diesem Niveau, also für *graduate students* und für Kollegen an der Universität selbst oder Gäste des Institutes, zu halten. Zweitens war nicht allein das Thema mir fremd, sondern sogar die algebraische Zahlentheorie selbst. Ich hatte im vorhergehenden Jahr an einem Seminar für Studenten teilgenommen, das Armand Brumer, zu der Zeit auch ein Student, veranstaltet hatte, und worin er die meisten Vorträge hielt. Ich hatte mich lächerlich gemacht mit meinen dummen Fragen. Drittens sollten die Vorlesungen schon nach zwei/drei Wochen anfangen. Ich wollte Bochners Vorschlag ablehnen. Das hätte er mir nicht erlaubt.

Der Kreis der Zuhörer bestand aus drei/vier Studenten, Roy Fuller, Daniel Reich, und, wenigstens am Anfang, Dennis Sullivan, und drei/vier Gäste des Institutes. Die Mehrzahl meinte, zufrieden zu sein. Als Unterlagen verwendete ich wohl das Buch von Landau *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und ihre Ideale,* sowie das Buch von Hecke *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen* und Chevalleys *La théorie des corps de classes* vom Jahr 1939. Dies war ein weiterer Fall, bei dem meine Kenntnisse leider oberflächlich blieb. Meine Kenntnis der deutschen Sprache wurde allmählich besser aber nicht befriedigend, so daß ich nicht fähig war, die Arbeiten der großen deutschen Zahlentheoretiker des neunzehnten Jahrhunderts durchzublättern, und noch nicht geneigt war, sie einfach aus einer ungezielten, beschaulichen Freude an ihrer Denkungsart und an dem Stoff selbst zu lesen. Ich kam zu ihnen nicht, vielleicht auch weil ich eher von ungelösten Problemen als von gelösten Problemen angezogen war. Ich versuche jetzt, dieses Versäumnis nachzuholen. Das Problem einer nichtabelschen Klassenkörpertheorie hat sich jedoch, dank der Vorlesungen, in mein Bewußtsein stark eingeprägt.

Das vorige Jahr, 1962/63, hatte ich am Institute for Advanced Study verbracht, wohl wiederum dank einer Anregung Bochners, aber mittelbar, über Selberg. Harish-Chandra kam erst 1963 ans Institute als Professor, so daß ich ihn während meines Jahres am Institute nicht traf. Während dieses Jahres habe ich hauptsächlich mit Weil und vor allem Borel gesprochen. Es war nach dem Stockholmer Kongress der IMU, wo Gelfand vorgetragen hatte, und ich bekam, während des Semesters, seinen Vortrag zu lesen. Seltsamerweise habe ich zum ersten Mal aus diesem Vortrag den Begriff einer allgemeinen Spitzenform verstanden. Er ist der Schlüssel zur allgemeinen Fortsetzung der Eisensteinschen Reihen. Ungefähr zu derselben Zeit hatte ich angefangen die allgemeinen Prinzipien der Reduktionstheorie wie in der Arbeit von Borel-Harish-Chandra, deren Ergebnisse schon 1961 angekündigt wurden, sowie die modernen Prinzipien der automorphen Formen, wie sie in den Arbeiten von Godement und Harish-Chandra erklärt wurden, zu begreifen. Dank diesem Verständnis, ist es mir gelungen während des Jahres am Institute, das Problem der Fortsetzung wahrhaft anzugreifen. Bei seiner Lösung waren jedoch ernsthafte Schwierigkeiten zu überwinden, was mir erst im Laufe des nächsten akademischen Jahres vollständig gelungen ist. Man sieht übrigens an der Bibliographie der Arbeit *On the functional equations satisfied by Eisenstein series,* die ich später veröffentlichte, daß bei dieser Forschung, die oben erwähnte Lektüre, nämlich die Bücher von Dixmier und Stone, mir zugute kam.

Die Theorie der Eisensteinschen Reihen ist eine Spektraltheorie im Sinne der Funktionalanalysis. Es geht um eine möglichst genaue Beschreibung des gemeinsamen Spektrums einer kommutativen Familie von Differentialoperatoren auf einer Mannigfaltigkeit. Für Eisensteinsche Reihen handelt es sich um invariante Differentialoperatoren auf einer Mannigfaltigkeit $\Gamma\backslash G$, wobei G eine halbeinfache oder reduktive Liesche Gruppe ist. Die Eigenfunktionen werden durch unendliche Reihen definiert, und es handelt sich darum, diese Reihen analytisch fortzusetzen, und dann zu zeigen, wie das Spektrum aufgebaut wird aus den fortgesetzten Funktionen.

Die Struktur des Spektrums ist zweistufig, das heißt, das Spektrum ist zunächst in Teile aufgeteilt, die mittels gewisser parabolischer Untergruppen P parametrisiert sind, und die dann selbst in feinere Teile zerteilt werden. Jeder dieser ersten Teile hat eine Dimension

m, den Rang von P, und entspricht auch einer Familie von Spitzenformen zu einem Levi-Faktor M von P. Die erste Stufe ist dann mittels dieser Aufteilung in Familien beschrieben. Der erste Schritt bei dem Beweis der allgemeinen Fortsetzbarkeit ist, die Möglichkeit einer analytischen Fortsetzung der einer Familie dieser Art zugeordneten Eisensteinschen Reihen zu begründen. Diese Fortsetzung ist dann eine meromorphe Funktion in mehreren Veränderlichen, und es wird bewiesen, daß die allgemeinste Eisensteinsche Reihe sich dann als mehrfaches Residuum dieser Funktionen bildet. Bei dem Übergang zu dem Residuum wird die Anzahl n der Parameter in der Funktion kleiner, $n \to n-1$, und die Zahl n kann als Parameter in der zweiten Stufe betrachtet werden. Der zweite Schritt bei dem Beweis der allgemeinen Fortsetzbarkeit ist zu zeigen, daß unter den Funktionen, die bei diesem Verfahren vorkommen, alle diejenigen vorhanden sind, die zur Spektralzerlegung nötig sind.

Der erste Schritt war nicht so schwer, besonders für jemanden, der, einerseits, Selbergs Methode für SL(2) beherrschte und, andererseits, den theoretischen Rahmen verstand, in dem Harish-Chandra seine Darstellungstheorie entwickelt hatte. Der zweite Schritt war dagegen wesentlich schwieriger und etliche Anläufe waren nötig, so daß die Theorie mir am Ende fast ein Jahr meines Lebens gekostet hat.

Ich habe schon erwähnt, daß Selberg auf meine Leistung überhaupt nicht reagiert hat. Über die Jahre habe ich mich gefragt warum. Selberg war bestimmt ein stolzer, sogar eitler, wenn auch starker, Mathematiker, ein Einzelgänger. Ich kann mir vorstellen, daß er meinte, "Wenn dieser Grünschnabel einen Beweis finden kann, das kann ich auch." Ich fand diesen Standpunkt vernünftig. Neuerdings aber, in den letzten paar Jahren, ist es mir eingefallen, daß er wohl einige grundlegende Ideen nicht verstand, auch nicht nachher. Ich hatte immer angenommen, daß das, was in Gelfands Vortrag von 1962 stand, Selberg schon bekannt war. Es scheint mir jetzt möglich, daß er den Begriff einer allgemeinen Spitzenform nicht hatte, und daß er sich den Vortrag Gelfands nie angesehen hatte. Ich kann es jetzt nicht wissen. Er hatte bestimmt nicht die Fertigkeit mit Differentialoperatoren auf halbeinfachen Gruppen, die Harish-Chandras Theorie anbot.

Im Sommer 1964 fuhr ich mit meiner Familie nach Berkeley in Kalifornien, wo wir ein Jahr blieben. Jetzt, da ich eine allgemeine Theorie der Eisensteinschen Reihen in der Hand hatte, wollte ich versuchen, und hatte es vielleicht schon in Princeton versucht, die Spurformel allgemein zu formulieren und zu beweisen. Das ist mir nicht gelungen, entweder weil ich zu müde war, oder weil ich nicht klug genug war. Ich neige zur zweiten Erklärung. Ich hätte gewiß nie so viel erreicht, wie Arthur ein paar Jahre später.

4. Kalifornien

Ich hatte in Kalifornien ein freies Jahr ohne Verpflichtung und ich kam voller Hoffnung an. Ich hatte mir insbesondere vorgenommen, mich in die algebraische Geometrie einzuarbeiten, vornehmlich mit Hilfe des Buches Weils, *The foundations of algebraic geometry,* das dem damaligen Niveau in Princeton entsprach und mir als Lehrbuch selbstverständlich erschien. Der Name Grothendieck kam in den frühen sechziger Jahren in Princeton überhaupt nicht vor. Ich wollte auch mit Hilfe des Buches Confortos *Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie* mich in die Theorie der abelschen Varietäten einarbeiten. Phillip Griffiths war zu der Zeit Fakultätsmitglied in Berkeley, und wir haben zusammen ein Seminar gehalten, von dem ich keine Erinnerungen habe. Griffiths ist nachher auf dem Gebiet sehr weit gekommen; ich aber nicht. Wir haben auch eine Zeitlang auf Wunsch einiger Studenten ein Seminar aus dem Buch *Discontinuous groups and automorphic functions* von Joseph Lehner geführt. Ich nehme an, daß ich es für nützlich hielt, die klassische geometrische, nicht die algebro-geometrische, Theorie der Modulformen besser zu verstehen. Mir ist nicht mehr klar warum.

Ich erinnere mich auch, daß ich versucht habe, eine Theorie der Matrixkoeffizienten von Darstellungen halbeinfacher Gruppen aufzubauen, indem ich sie im Geist der Theorie der hypergeometrischen Funktionen als Integrale darstellte. Ich fand, und finde, die Theorie der hypergeometrischen Funktionen schön. Der Versuch führte leider zu nichts. Ich hatte am Ende des Jahres das Gefühl, es vergeudet zu haben.

Im nachhinein sieht das Jahr nicht so ganz schlecht aus. Während dieser Zeit hatte ich gezeigt, wie man das Volumen eines Quotienten $G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ berechnen konnte mit Hilfe der Theorie der Eisensteinschen Reihen, wenn G eine zerfallende Gruppe über $\mathbf{Q}$ oder allgemeiner über einem Zahlkörper ist. Dieselbe Methode gilt auch allgemeiner für quasizerfallende Gruppen, so daß man in diesen Fällen die Weilsche Vermutung über die Tamagawa-Zahl leicht beweisen kann. Ein paar Jahre später wurde in den mit Jacquet geschriebenen Lecture Notes gezeigt, wie, in einem besonderen Fall, nämlich für Formen von SL(2), das Ergebnis mittels der Spurformel von einer quasizerfallenden auf andere Formen derselben Gruppe übertragen werden kann. Viel später, nachdem er und Arthur angefangen hatten, die stabile Spurformel weiter zu entwickeln, ist es Kottwitz gelungen, die Vermutung allgemein zu beweisen. Ich hatte auch eine Skalarproduktformel entdeckt, die ich noch heute für schön und nützlich halte.

Beeinflußt von einer Arbeit von Griffiths hatte ich auch vermutet, wie man für unendlichdimensionale Darstellungen eine Form des Borel-Weil-Bott-Satzes bekommt. Diese Vermutung wurde bald von Wilfried Schmid, damals ein Schüler von Griffiths, bewiesen. Sie ist grundlegend für die allgemeine Theorie der Shimuravariäteten sowie für die $\{\mathfrak{g}, K\}$-Kohomologie. Außerdem hatte ich auch in einem Brief an Harish-Chandre eine Idee vorgelegt, die er später verwenden konnte, oder wenigstens erwähnt hat in einer Arbeit, deren Titel mir entfällt. Es handelt sich um eine Idee, wie man, auf Grund der zu der Zeit veröffentlichten Arbeiten von Harish-Chandra, die Plancherelsche Formel vielleicht beweisen könnte. Die Formel hat er schließlich anders bewiesen. Die Erwähnung hat mich nichtsdestoweniger geschmeichelt. Ich finde keine Kopie des Briefs, und der Brief selbst liegt wohl in einer Pappschachtel auf dem Dachboden in seinem Haus, wo seine Witwe sie nicht mehr finden kann. Ich weiß nicht mehr, was ich genau vorgeschlagen hatte.

Trotz dieser kleinen Erfolge fühlte ich am Ende des Jahres in Berkeley, daß ich nicht weit gekommen war, und mit Recht. Ich hatte kein echtes Ziel.

Die Reise von Berkeley nach Princeton ging über Boulder, wo ich an einer Tagung über *Algebraic groups and discontinuous subgroups* teilnahm, die von Armand Borel und G.D. Mostow veranstaltet wurde. Diese Tagung war meine Einführung in die algebraische und arithmetische Theorie der algebraischen Gruppen, und ich habe nie vorher und nie nachher so viel bei einer Tagung gelernt.

5. Wieder Princeton

Das Jahr 1965/66 war hinsichtlich meines mathematischen Fortkommens nicht besonders erfreulich. In diesem Jahr und im nächsten Jahr habe ich einige Vorlesungen für undergraduates gehalten, die mir selbst gefielen, z.B. über algebraische Kurven aus dem Buch von Walker, elementar aber lehrreich, und auch über angewandte Mathematik für Studenten der technischen Schule der University, besonders für Studenten der Elektrotechnik, wobei ich Gelegenheit hatte, das Buch *Electricity and Magnetism* von Maxwell zu studieren. Sich so zu amüsieren, machte keinen guten Eindruck auf den Direktor des departments, der meinte wohl, die elementare Technik sei unter dem Niveau eines Professors an der Princeton University. Dessen ungeachtet waren die Elektrotechniker mit mir und meinem Unterricht zufrieden; einige Studenten der Mathematik, unter ihnen Wilfried Schmid, waren im Gegenteil unzufrieden mit dem Niveau des Lehrbuchs von Walker, in seinem Fall wohl mit Recht.

Ich habe während dieses Jahres ohne Erfolg viel Zeit und viel Energie zwei hochfliegenden Versuchen gewidmet. Ich suchte nämlich, einerseits, eine Verallgemeinerung der Heckeschen Theorie und, andererseits, eine nicht-abelsche Klassenkörpertheorie. Die zweite war aussichtlos, die erste nicht. Die zweite war eher ein Traum, aber mit dem Versuch, allgemeinen automorphen Darstellungen L-Funktionen zuzuorden, habe ich viel Zeit zugebracht. Ich habe nichts Befriedigendes gefunden und war entmutigt.

Ich hatte eine Einladung zum Vortrag bei der Versammlung der IMU in Moskau, wohl wegen der Beiträge zur Theorie der Eisensteinschen Reihen. Ich habe sie abgesagt, zum Teil weil ich meinte, über diese Theorie hinaus nichts Weiteres geleistet zu haben, aber auch weil ich Russland oder die damalige Sowjetunion nicht besuchen wollte, bevor ich eine mich selbst befriedigende Kenntnis der Sprache hatte. Bis dahin war ich nur aus Kanada nach den USA gekommen. Ich hatte das echte Ausland nie besucht und hatte keine Ahnung, was von einem Nordamerikaner im Ausland erwartet wurde. Ich habe nicht allein die Erwartungen in betreff der Sprachfähigkeiten überschätzt, sondern auch das Niveau der Vorträge auf einer Tagung dieser Art. Ich bereue es nicht, daß ich weder voreilig an einer internationalen Tagung teilnahm, noch voreilig Russland besuchte. Ich hoffe jetzt, bald und besser vorbereitet dahin zu kommen.

Es ist doch wohl möglich, daß meine allgemeine Ermüdung und Entmutigung bei der Entscheidung mit im Spiel waren. Ich hatte schon während des Jahres in Berkeley überlegt, die Mathematik aufzugeben, weil sie mir nicht gelingen wollte. Ich hatte solche Gedanken einem türkischen Freunde gegenüber geäußert, und er hat mir vorgeschlagen, einige Zeit in der Türkei zu verbringen. Er war kein Mathematiker aber ein begeisterter Patriot. Zunächst hatte ich auf den Vorschlag nicht reagiert. Aber irgendwann im Jahr 1965/66 habe ich angefangen, den Vorschlag ernsthaft zu überlegen. Da meine Frau ein mutiges, tapferes Wesen war—und es immer noch ist—konnte ich, in meiner eher selbstischen Art, trotz unserer vier Kinder, die Möglichkeit ernsthaft überlegen. Wir haben uns entschieden, hinzugehen. Nachher habe ich die Entscheidung nie bereut, und meine Frau nur selten. Mir insbesondere hat es über die Jahre viel Unerwartetes eingebracht.

Es war keine wohlüberlegte Entscheidung. Ich kannte nichts von der Fremde, hatte keine ernsthafte Kenntnis einer Fremdsprache, und keine Ahnung wie man eine Fremdsprache lernt. Ich unterschätzte sehr die Schwierigkeiten eines Versuches, sich in ein fremdes Land wirklich einzuleben. Leichtfertig wie die Entscheidung war, war sie auch mir eine Erleichterung. Ich stand nicht mehr unter dem Druck, als Mathematiker was zu leisten. Ich fing an, Türkisch zu lernen, und nahm das Studium der russischen Sprache wieder auf. Ich träumte von einer Reise von Russland in die Türkei über Kaukasien, was allerdings nie zustande gekommen ist.

Da ich mich nach der Entscheidung auch etwas langweilte, habe ich auch ohne ein bestimmtes Ziel angefangen, die Koeffizienten der Funktionalgleichungen der Eisensteinschen reihen auszurechnen. Ich habe dann nicht nur eingesehen, daß diese Funktionen Quotienten von Eulerprodukten waren, sondern auch daß der Zähler, dessen Form auch die Form vom Nenner war, darstellungstheoretisch beschrieben werden könnte. Die betreffenden Darstellungen waren algebraische Darstellungen einer komplexen algebraischen Gruppe, der L-Gruppe, eine

Benennung, die erst viel später von Tate vorgeschlagen wurde. Ich hatte nicht nur die Form dieser Funktionen erkannt. Ich konnte auch, dank der allgemeinen Theorie der Eisensteinschen Reihen, beweisen, daß diese Funktionen als meromorphe Funktionen fortsetzbar waren.

Die betreffende Darstellung ρ mußte ich für die verschiedenen parabolischen Untergruppen ${}^LP = {}^LM{}^LN$ von der L-Gruppe ${}^LG$ jedes Mal ausdrücklich ausrechnen. Nur später, bei einem Vortrag, hat Tits sofort erkannt, daß die erwünschte Darstellung jedes Mal die natürliche Darstellung von ${}^LM$ auf der Lieschen Algebra von ${}^LN \subset {}^LG$ ist. Auf diese Weise hatte ich jedem M und folglich fast jedem G, zunächst nur zerfallenen Gruppen, eine kleine Menge von L-Funktionen zugeordnet. Die allgemeine Definition der Funktionen $L(s, \pi, \rho)$ lag dann auf der Hand, und mein Ziel, die Heckeschen L-Funktionen allgemein zu definieren, war, kaum daß ich es merkte, erreicht. Die speziellen, diejenigen die in der Theorie der Eisensteinschen Reihen vorkommen, wurden später von Shahidi gründlich untersucht.

Wir wohnten, meine Frau und ich mit vier Kindern, zu der Zeit an der Bank Street, eine Gasse in Princeton nur ein paar Schritte von der Universität entfernt, so daß ich abends und auch in der Ferienzeit in meinem Büro in der Universität arbeiten konnte. Das Büro befand sich nicht in der heutigen Fine Hall, die noch nicht existierte, sondern in der derzeitigen Fine Hall, in der das mathematische Institut beherbergt war, und die allein der Mathematik und den Mathematikern gewidmet war. Das Gebäude wurde 1929 nach einem Konzept von Oswald Veblen gebaut. Ich zähle es zu einem der kleinen Segen meines Lebens, daß ich einige Jahre meines beruflichen Lebens unter seinem Dach verbringen konnte, und auch daß ich vor dem Umzug in das neue grosse Gebäude die Universität verlassen hatte. Der alte Backsteinbau ist noch da, aber innerlich so verwüstet, daß man es nicht mehr erkennt. Ich hatte während meiner letzten Jahre an der Universität ein bescheidenes Zimmer rechts vom Haupteingang, mit eichenem Getäfel und bleigefassten Fensterscheiben, wie in allen Zimmern des Gebäudes. Rechts vom Eingang war ein Seminarraum mit großem Tisch und einer Schiefertafel, die wohl zehn Meter lang war, und mit einem Blick auf den Garten der Residenz des Rektors der Universität. Da konnte ich abends und in den Ferien ruhig allein denken.

Insbesondere, nicht lange nachdem ich auf die allgemeine Definition der automorphen L-Funktionen gekommen bin, überlegte ich am Fenster dieses Raumes stehend, wie ihre analytische Fortsetzung zu beweisen wäre. Ich habe auch wohl—meine Erinnerungen sind in dieser Hinsicht nicht sehr genau—allgemein über ihre Definition und Eigenschaften nachgedacht. Es war gewiß während der Weihnachtsferien 1966/67. Dann fiel mir auf einmal die mögliche Lösung aller Rätsel ein.

Was ich in der Hand hatte, war eine befriedigende Definition der Funktionen

$$L(s, \pi, \rho) = \prod_v L_v(s, \pi_v, \rho) = \prod_v{}' \frac{1}{\det\left(1 - \frac{\rho\left(\gamma(\pi_v)\right)}{q_v^s}\right)}$$

wobei allerdings die Funktionen L_v an einer endlichen Anzahl von Stellen unbekannt waren. Diese Stellen sind hier ausgelassen. Ich hatte noch keine Ahnung, wie sie zu definieren waren. Das Element $\gamma(\pi_v)$ gehört zu einer Konjugierungsklasse in einer komplexen Lieschen Gruppe, die jetzt mit ${}^LG$ bezeichnet wird. Obwohl ich für eine bedeutende Anzahl dieser Funktionen die Existenz einer meromorphen Fortsetzung beweisen konnte, hatte ich keine Idee, wie ich die Existenz dieser meromorphen Fortsetzung allgemein beweisen könnte, oder ob ihre holomorphe Fortsetzung überhaupt bewiesen werden könnte.

Darüber dachte ich vor dem Fenster nach. Plötzlich—das ganze war, wenigstens meiner Erinnerung nach, auf einmal in meinem Kopf präsent—habe ich Folgendes erkannt oder mich daran erinnert:

1) Tamagawa hatte schon über die Funktion $L(s,\pi,\rho)$ nachgedacht, wenn die Gruppe G eine innere Form von $\mathrm{GL}(n)$ ist und ρ die Darstellung, die ${}^LG = \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ definiert, und hatte die analytische Fortsetzung behandelt. Ich sah keinen Grund, daß sein Beweis nicht auch für $\mathrm{GL}(n)$ gelten könnte.
2) Für die Gruppe $G = \{1\}$ liefert meine allgemeine Definition gerade die Artinschen L-Funktionen, die einer komplexen Darstellung einer endlichen Galois-Gruppe zugeordnet sind. Es wäre wohl möglich, das, was Artin für ein-dimensionale Darstellungen gemacht hatte, allgemein durchzuführen. Er hatte nämlich bewiesen, daß jede endlichdimensionale abelsche Artinsche L-Funktion gleich der einem Idelklassencharakter zugeordneten L-Funktion ist. Anders ausgedrückt, eine n-dimensionale Darstellung der Gruppe $\mathrm{Gal}(K/F)$, wobei $[K:F]<\infty$, und $[F:\mathbf{Q}]<\infty$ kann auch gedeutet werden, als ein Homomorphismus,
$$\phi : \mathrm{Gal}(K/F) = {}^LH \mapsto {}^LG = \mathrm{GL}(n)\times\mathrm{Gal}(K/F), \quad H=\{1\}, \quad G=\mathrm{GL}(n).$$
Die Verallgemeinerung des Artinschen Satzes wäre, daß diesem Homomorphismus eine automorphe Darstellung $\pi(\phi) = \bigotimes \pi_v$ der Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbf{A}_F)$ zugeordnet wäre der Art , daß für fast jede Stelle v das Bild, $\phi(\mathrm{Frob}_v)$, eines Frobeniuselements Frob_v gleich der Frobenius-Heckeschen Klasse $\{\gamma(\pi_v)\}$ ist.
3) Wenn das so wäre, dann könnte ich mit dem gleichen Recht meinen, daß wenn zwei reduktive Gruppen H und G über dem endlichen algebraischen Zahlkörper F vorgegeben sind, sowie eine Abbildung
$$\phi : {}^LH \to {}^LG,$$
die mit den Abbildungen ${}^LH \mapsto \mathrm{Gal}(K/F)$ und ${}^LG \mapsto \mathrm{Gal}(K/F)$ verträglich ist, und eine automorphe Darstellung π_H, dann existiert auch eine automorphe Darstellung π_G der Art, daß, für fast jede Stelle v, das Bild der Klasse $\Big\{\phi\big(\gamma(\pi_{H,v})\big)\Big\}$ die Klasse $\{\pi_{G,v}\}$ ist.

Ich füge hinzu, daß die Klasse $\{\gamma(\pi_v)\}$ oft die Satake-Klasse genannt wird, eine Benennung, die mir nie gefallen hat. Im Rahmen der Darstellungstheorie der reellen halbeinfachen Gruppen hat Harish-Chandra die Struktur des Ringes der K-bi-invarianten Differentialoperatoren entdeckt und bewiesen. Die Kenntnis dieser Struktur war grundlegend für die Spektraltheorie der sphärischen Funktionen, die vor der allgemeinen Plancherelschen Formel entwickelt wurde. Als die Strukturtheorie der halbeinfachen p-adischen Gruppen entwickelt wurde, und man anfing, ihre Darstellungen zu untersuchen, hat Satake erkannt, daß die Iwasawa-Zerlegung für p-adische Gruppen es erlaubt, einen, dem Harish-Chandra-Satz ähnlichen, Satz für sphärische Funktionen auf p-adischen Gruppen zu beweisen. Das war nützlich obwohl nicht besonders schwer, und der Isomorphismus, der der Funktorialität zugrunde liegt, ist eine unmittelbare Folge dieses Satzes.

Die L-Gruppe einer quasizerfallenen halbeinfachen oder reduktiven Gruppe über einem p-adischen Körper, die über einer unverzweigten Erweiterung K zerfällt, $[K:F]<\infty$, kann als $\widehat{G}(\mathbf{C})\rtimes\mathrm{Gal}(K/F)$ definiert werden. Es sei Frob eine Frobenius-Substitution. Der grundlegende Isomorphismus ist der zwischen der Algebra der sphärischen Funktionen auf $G(F)$ und der Algebra der Beschränkungen auf $\widehat{G}(\mathbf{C})\rtimes\mathrm{Frob}$ der invarianten algebraischen Funktionen auf

${}^LG(\mathbf{C})$. Er kann gedeutet werden als eine Umformulierung des Satake-Satzes. Die Behauptung, daß jeder Homomorphismus dieser letzteren Algebra nach $\mathbf{C}$ durch ein Element der Menge $\widehat{G}(\mathbf{C}) \rtimes \mathrm{Frob}$ gegeben wird, ist folglich auch eine Folge des Satake-Satzes. So formuliert als diese Behauptung, aber nur so, mit einem ganz anderen Schlag, ist der Satz grundlegend, weil er dann der Kern und der Ursprung des Problems der Funktorialität ist. Diese Funktorialität hat jedoch nur einen Sinn innerhalb einer Theorie, die aus der invarianten harmonischen Analysis, der Endoskopie, der Heckeschen L-Funktionen, und der Theorie der Galoisschen Erweiterungen, wie wir sie von Dedekind, Frobenius und anderen geerbt haben, aufgebaut wird. In dieser Theorie spielen die sphärischen Funktionen als bestimmendes Element auf Gruppen außer auf denjenigen, die quasizerfallend und zerfallend über einer unverzweigten Erweiterung sind, keine besondere Rolle. Ich möchte sehr empfehlen, diese Struktur und ihre architektonischen Elemente hervorzuheben, indem man die Konjugationsklasse $\{\gamma(\pi)\}$ in ${}^LG$, die einer irreduziblen unverzweigten Darstellung π oder einem unverzweigten L-Paket π^{st} zugeordnet ist, die Frobenius-Hecke Klasse nennt. Diese Klasse wird in dem Brief eingeführt, aber nicht benannt. Leider hat jemand, der die Sache nicht verstand, sich später angemaßt, sie zu benennen.

Die mir vor dem Fenster eingfallenen Gedanken habe ich in dem Brief beschrieben. Ich lese den Brief jetzt wohl zum ersten Mal seit ich ihn schrieb. Ich finde, gebe ich unverschämt und auch erstaunt zu, daß, wenn ich nichts übersehe, erstens, es sich in dem Brief nichts Falsches befindet, und zweitens, das Wesentliche dasteht, obwohl die Behauptung, daß alles mir in der Fine Hall auf einmal gegenwärtig war, etwas übertrieben ist.

6. Der Brief

Während ich diesen Aufsatz schreibe, denke ich über die Umstände nach, unter denen der Brief zustande gekommen ist. Ich habe schon erwähnt, am Anfang dieses Aufsatzes und auch sonstwo, daß seine Entstehung das Ergebnis eines Zufalls war. Am 6. Januar 1967, ging ich zu einem Vortrag von Chern am Institute for Defense Analysis, das sich zu der damaligen Zeit in Princeton befand, wo es sich wohl heute noch befindet. Da ich leider ein eher pünktlicher Mensch bin, kam ich etwas frühzeitig an. Weil auch, der einmal bei einer Sitzung der Mathematiker am Institute, als wir und die anderen viele Jahre später auf einen oft verspäteten Kollegen warteten, bemerkt hat, "Die Pünktlichkeit ist die Höflichkeit der Könige", kam fast zur gleichen Zeit. Wir standen allein im Flur vor der Tür, die zugeschlossen war. Da wir einander schon kannten, obgleich nicht besonders gut, mußten wir uns unterhalten. Er schwieg; ich suchte etwas unbeholfen ein Thema. Meine Gedanken am Fenster fielen mir ein, und ich fing an, sie ihm zu erzählen.

Ich habe mich wohl nicht sehr klar ausgedrückt, und in den letzten Jahren meinte ich mich zu erinnern, daß Weil damals das tat, was ich auch in meinem Leben getan habe, wenn ein junger Mensch, der mir zudringlich und wohl auch geistig nicht ganz in Ordnung erschien, mir etwas Verworrenes zu erklären suchte. Er hat mir vorgeschlagen, meine Gedanken in einem Brief darzulegen und ihm den Brief zu schicken. Unter diesen Umständen erwartet man keinen Brief und ist mit diesem einfachen Ausweg eines vielleicht lästigen Menschens frei, ohne ihn beleidigt oder verletzt zu haben. Wohl zu seinem Erstaunen, bekam Weil einen Brief. Diesem Brief wurde aber eine kurze Erklärung vorangestellt, aus der es mir neulich klar geworden ist, daß Weil mich mit mehr Höflichkeit behandelt hat, als ich mich erinnerte. Er hat zwar mich anscheinend nicht verstehen können, aber er hat den Mut oder die Gutherzigkeit gehabt, mir vorzuschlagen, ihn bei einer späteren Gelegenheit in seinem Zimmer am Institute zu besuchen. Ich habe selbst entschieden, daß eine schriftliche Darlegung meiner Entdeckungen und Vermutungen ergiebiger sein würde. Es hat sich am Ende so herausgestellt.

Obwohl ich wegen meiner Weihnachtsgedanken nicht übermäßig aufgeregt war, bedeuteten sie mir bestimmt einen Fortschritt. Offensichtlich nahm ich die Gelegenheit, sie aufzuschreiben, mit Begeisterung auf. Es ist auch klar, daß ich mir ihrer Unreife bewußt war. Der Brief hat, zum Teil wegen der Stellung Weils in der damaligen Mathematik später einen Ruhm erlangt, der nicht beabsichtigt war, und nicht beabsichtigt sein konnte, Dieser Ruhm hat meine eigene Einschätzung des Briefes und seines Inhalts wohl mit der Zeit etwas verzerrt.

Da ich, nachdem der Brief geschrieben war, Harish-Chandra, den ich inzwischen besser kennenlernt hatte, zufällig getroffen habe, habe ich ihn gebeten, Weil den Brief zu überreichen. Nachher fand der vorgeschlagene Besuch in Weils Büro statt. So weit ich ersah, fand er den Brief und seinen Inhalt nicht besonders überzeugend. Er hat mir eher zwei wichtige Sachen erklärt, die mir bis dann unbekannt war. Erstens hat er mir den Inhalt seiner Arbeit *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen,* eine Weiterentwicklung der Hecke-Theorie, dargelegt oder mir einen Sonderdruck gegeben. Das zweite ist unwahrscheinlich, da wir wohl schon in Januar wieder zusammen gesprochen haben, und die Arbeit erst 1967 erschienen ist. Er hat mir auch einen Sonderdruck seiner Arbeit über das, was jetzt viele von uns, ohne es genau überlegt zu haben, die Weilgruppe nennen, gegeben. Die Entwicklung der Theorie dieser Gruppe und der verwandten kohomologischen Fragen ist ausführlich beschrieben in einer historischen Arbeit von Helmut Koch *The history of the theorem of Shafarevitch in the theory of class formations,* die in der Sammlung *Class field Theory—Its Centenary and Prospect* erschienen ist. Diese beiden Arbeiten Weils sollten mich bei der nächsten Entwicklung meiner Gedanken beeinflussen.

Meine erste Sorge in den Wochen nach diesem Gespräch war wahrscheinlich die Vorbereitung einiger Vorträge an der Yale University, die im April stattfanden, und in denen ich die Definition der L-Funktionen $L(s,\pi,\rho)$ beschrieb, so wie die Beispiele, die ich auf Grund der Theorie der Eisensteinschen Reihen wenigstens teilweise behandeln konnte. Wir mußten uns auch, meine Frau und ich, mit der bevorstehenden Reise in die Türkei beschäftigen, denn wir hatten uns entschieden, wenigstens ein Jahr dort, an der Orta Doğu Teknik Üniversitesi, zu verbringen. Ich verbrachte immer noch den Abend in meinem Büro an der Universität, wo ich mich hauptsächlich mit meinen neuen Ideen beschäftigte oder beschäftigen wollte. Leider wurden meine Überlegungen von dem Direktor des departments oft unterbrochen, der von der Idee besessen war, daß das department schwächer geworden war, und daß der erste Schritt zu seiner Verbesserung war, verschiedene junge Mathematiker nicht zu entlassen, was ihm oder dem department nicht möglich war, sondern sie hinauszujagen, indem er sie so quälte, daß sie freiwillig weggingen. Zunächst nahm ich ihn nicht ernst, aber er besuchte mich in meinem Zimmer ständig und beschrieb mir eine Zukunft, in der, da der Wert der Währung sank, mein Gehalt aber konstant blieb, so daß ich, verachtet von meinen Kollegen und verarmt, ein miserables Leben führen würde. Obwohl ich ihn nicht besonders ernst nahm, sah ich auch keine Gegenbewegung seitens meiner Kollegen und war etwas beunruhigt und unentschieden, ob es nicht besser wäre, meine Stelle einfach aufzugeben und nicht nur für ein Jahr Princeton zu verlassen, sondern auf immer. Meine Frau sah schnell ein, daß diese Unentschiedenheit meinerseits sinnlos war, und hat mir empfohlen, meine Stelle sofort zu kündigen. Da ich noch zögerte, wollte ich trotzdem mit einem Dekan sprechen, um ihm die Lage zu erklären. Der Dekan war leider ein dummer Kerl und, statt mich anzuhören, wollte er nur wissen, ob meine Frau mit meiner voreiligen Entscheidung einverstanden sei. Daraufhin habe ich gleich gekündigt.

Es war in jeder Hinsicht eine glückliche Entscheidung. Ich habe sofort das Angebot einer Stelle an Yale angenommen, wo ich, nach dem Jahr in der Türkei und bevor ich endgültig an das Institute in Princeton kam, vier glückliche und einträgliche Jahre verbrachte. Im Lauf dieser Geschichte hat ein Kollege, der es zweifellos mit mir gut meinte, mir erklärt, daß der Direktor sich über meinen Fall mit Weil beraten hat, der meinte, mein Ruf sei "overblown". Seltsamerweise habe ich diese Einschätzung nicht besonders ernst genommen. Ich war sowieso zu der Zeit schon gewahr, daß die Einschätzungen Weils willkürlich sein konnten. Außerdem hatte ich von meinem damaligen Ruf keine Ahnung, und der Begriff "overblown" ist relativ.

Was mir ganz klar ist, ist daß der Direktor, und vielleicht auch Weil, mir einen großen Gefallen tat. Nach den Regeln, die zu der Zeit in Kraft waren, durfte das Institute einen Mathematiker, der an der Princeton University angestellt war, nicht berufen, so daß, wenn ich an der University geblieben wäre, ich nie den Ruf an das Institute bekommen hätte, und, neben meiner Frau, ist die Stelle am Institute einer der zwei großen Segen meines Lebens gewesen.

Diesen Segen verdanke ich vor allen Harish-Chandra. Ich danke ihm noch mehr, denn irgendwann in den zwei Jahren 1965/66, 1966/67, wohl im Herbst 1966, als mein Selbstvertrauen immer noch nicht sehr stark war, obwohl sein Tiefstand hinter mir war, hatte er mir schon, zu meiner Überraschung, erwähnt, daß er seinen Kollegen vorgeschlagen hatte, mich als Professor an das Institute zu berufen. Die waren von diesem Vorschlag nicht besonders begeistert. Das war mir unwichtig. Es war mir eher wichtig, daß Harish-Chandra eine so gute Meinung von mir hatte. Obwohl ich viele der ständigen Mitglieder des Institutes bewunderte, war es mir nie eingefallen, daß ich zu diesen gehören konnte, und habe auch nicht erwartet, daß Harish-Chandra in der Zukunft seinen Vorschlag wieder aufnehmen würde. Die Hauptsache war die Vorstellung, daß Harish-Chandra mich als Mathematiker ernst nahm. Als er den Vorschlag vier Jahre später wiederholte, haben die Topologen immer noch gezögert. Die anderen hatten mich dann mit mehr Wohlgefallen betrachtet, Weil anscheinend nicht wegen des Briefs, sondern weil ich mir die Weilgruppe angeeignet hatte.

Obwohl nicht ohne Mängel, war Weil jemand, den ich gern hatte, als ich jung war und später als wir Kollegen am Institute waren. Meine erste Begegnung mit ihm war schon aus unerwarteten Gründen beeindruckend. Während meiner ersten Jahre an der Universität fand unter Weils Führung jeden Mittwoch das *Current Literature Seminar* statt. In diesem Seminar wurde jedes Mal ein Vortrag gehalten, entweder von einem Mathematiker am Institute, der ein zeitweiliger Gast oder ein permanentes Mitglied sein konnte, oder von einem Mathematiker an der Universität, der auch, aber selten, ein Student sein konnte. Weil saß allein in den ersten Reihen des großen Hörsaals mit einer Zeitung in der Hand, die er angeblich las, und unterbrach, mit keiner guten Absicht, häufig den Vortragenden. Einige, auch Studenten, haben gut abgeschnitten bei diesen Angriffen, andere nicht. Ich nahm jede Woche an dem Seminar teil und habe dabei vieles über die damalige Mathematik gelernt.

Der Hörsaal befand sich im Erdgeschoß gegenüber meinem ersten Zimmer, das ich mit anderen teilte, sowie gegenüber dem späteren, gleich neben dem Eingang, wo ich allein war. Eines Mittwochs, entweder während meines ersten oder während meines zweiten Jahres klopfte jemand an die Tür und kam sofort herein, um mit mir zu reden. Zu meinem Erstaunen war es André Weil, mit dem ich vorher nicht gesprochen hatte. Er setzte sich sofort auf einen Stuhl und warf gleichzeitig ein Bein über die Armlehne. Wir redeten über die Mathematik, und ich habe, unerfahren wie ich war, mich sofort über verschiedene Themen in der Theorie der Modulformen geäußert, die ich gerade angefangen hatte zu studieren. Meine Bemerkungen waren, wie ich nachher erkannte, oft dumm. Er hat auf meine Dummheiten nicht reagiert. Warum er gekommen ist, zu welchem Zweck, ist mir nie ganz klar gewesen. Ich nehme an, er hatte meinen Namen von jemandem, wohl Bochner, gehört, und statt mich zu ihm in sein Büro zu bitten, was gewöhnlicher gewesen wäre, ist er zu mir gekommen. Das hat mich damals erstaunt und erstaunt mich noch heute. Weil war sich gewiss seines Wertes in der Welt bewußt und hat ihn selten vergessen. Auf seine Würde dagegen hat er nicht gepocht.

Über die nächsten Jahre habe ich ihn ab und zu getroffen, kaum regelmäßig. Er hat mich zweimal zu einer Reihe von privaten Seminaren eingeladen, wo er über die Probleme, mit denen er gerade beschäftigt war, vortrug. Das zweite Mal war einige Zeit nach dem Brief. Er wollte seine Variante der Hecke-Theorie auf einen allgemeinen algebraischen Zahlkörper ausdehnen, besonders auf einen Körper mit komplexen Stellen. Ich hatte selbst, als ich nach einer Verallgemeinerung der Hecke-Theorie auf allgemeine Gruppen suchte, mir den Fall SL(2) oder GL(2) oft überlegt, so daß ich die Lösung seines Problems mehr oder wenig parat hatte. Es handelt sich um die Theorie der Whittaker-Funktionen für SL(2), also eigentlich um eine Übungsaufgabe in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit irregulären singularen Stellen, eine Theorie, die mich beeindruckte, als ich das Buch von Coddington und Levinson studierte. Ich habe meine Lösung aufgeschrieben und ihm geschickt, vielleicht schon bevor wir in die Türkei geflogen sind. Die darauffolgenden Briefe, die dann an Jacquet geschickt wurden, habe ich offensichtlich in der Türkei geschrieben.

Es ist bemerkenswert, daß diese Briefe, deren Inhalt in das Buch mit Jacquet kam, nicht unmittelbar durch die Fragen in dem ersten Brief selbst angeregt wurden, sondern durch eine Frage von Weil, der seine Hecke-Theorie entwickeln wollte. Das war nicht so schwer über archimedischen Körpern, aber über nicht-archimedischen Körpern kam mir offentsichtlich eine Theorie Kirillovs zugute, auf die ich in der Bibliothek der Universität in Ankara gestoßen bin. Nichtsdestoweniger begann ich, angeregt von den zwei Briefen an Weil/Jacquet, über die lokale Form der Vorschläge in dem ursprünglichen Brief nachzudenken. In diesem Brief ging es fast an keiner Stelle um eine lokale Theorie, weder um eine lokale Korrespondenz noch um die lokale Funktorialität. Die lokale Korrespondenz kam erst nachdem ich mich mit der lokalen Weilgruppe bekannt gemacht hatte. Aber als ich diese Briefe schrieb, also bis zu den ersten Monaten in der Türkei, war mir die Form einer lokalen Korrespondenz fast in allen Einzelheiten klar. Ich verbrachte meine Zeit dort mit diesen Einzelheiten und habe bis Ende des Besuches Verschiedenes erkannt, wie man aus den in den 5. und 6. Teil von `https://publications.ias.edu/rpl` angeführten Briefen an Weil, Jacquet, Harish-Chandra, Serre und Deligne feststellen kann. Die anderen Schriften und Arbeiten, auf die ich im folgenden hinweisen werde, befinden sich auch an dieser Stelle. Die erzielten Fortschritte gebe ich hier kurz wieder:

a) eine klare Vorstellung der möglichen lokalen und globalen Korrespondenz für die Gruppe GL(2);
b) die Rolle der speziellen Darstellung innerhalb dieser Korrespondenz;
c) die Existenz der ϵ-Faktoren.

Die spezielle Darstellung war mir erst ein Rätsel, so daß ich froh war, als ich die Arbeit von Serre las, die ich in dem Brief an ihn erwähne, denn aus dieser Arbeit war mir sofort klar, daß die speziellen Darstellungen unentbehrlich waren, weil sie elliptischen Kurven mit nicht ganzzahligen j-Invarianten oder, besser, ihren ℓ-adischen Darstellungen zuzuordnen waren. Da Serre und Deligne dabei waren, das entsprechende allgemeine Phänomen für allgemeine ℓ-adische Darstellungen zu untersuchen, war es auch klar, dank ihren Ergebnissen, was im allgemeinen zu erwarten war. Ich hätte es jedoch vorgezogen, und würde es noch vorziehen, wenn zu diesem Zweck die Weilgruppe nicht durch das ersetzt würde, was heute die Weil-Deligne-Gruppe genannt wird, sondern durch ein direktes Produkt $\mathrm{SL}(2) \times W_F$. Nach dem Satz von Jacobson-Morosow sind die beiden Formen gleich nützlich. Diese zweite mögliche Form der Weil-Deligne-Gruppe hätte den Vorteil, daß sie in einer halbeinfachen, vollständig reduziblen Welt zu Hause ist.

Die Existenz der ϵ-Faktoren bot und bietet immer noch Schwierigkeiten. Ich hatte deren Existenz bewiesen, und der Beweis war vollständig, wenn ich zwei schwierige Lemmata oder Sätze, wie man will, von Dwork annahm. Auch wenn ich diese Lemmata annahm, war der Beweis schwer. Die Lemmata waren aber viel schwerer als der restliche Beweis und ihre Beweise wohl auch länger. Ich habe versucht einen vollständigen Beweis wieder herzustellen mit Hilfe der Dissertation von K. Lakkis, an den Dwork seine Aufzeichnungen geschickt hatte. Lakkis hat sie leider verwendet, nicht um die zwei Lemmata Dworks zu beweisen, sondern nur um sie bis auf das Vorzeichen zu beweisen. Mit oder ohne Vorzeichen ist es mir nicht gelungen, einen vollständigen Beweis dieser Lemmata, dessen Länge nicht unmöglich ausgedehnt war, zu finden. Deligne hat glücklicherweise oder unglücklicherweise bemerkt, daß die Existenz der ϵ-Faktoren leicht mit globalen Methoden zu beweisen war, wenn man nur ihre Gültigkeit eingesehen hatte, was meines Erachtens nicht so trivial war. Ich war froh, meine Versuche, die schon zu lange gedauert hatten, aufzugeben. Es bleibt jedoch nach wie vor wichtig, für diesen lokalen Satz einen lokalen Beweis zu finden. Obwohl ich nicht fest überzeugt bin, weil feste Überzeugungen ohne Beweis in der Mathematik nicht angebracht sind, glaube ich nichtsdestoweniger noch, daß, wenn es uns je gelingt, einen Beweis der Funktorialität im allgemeinen zu finden, dann werden wir auch fast gleichzeitig einen lokalen Beweis der Existenz des ϵ-Faktors finden. Der globale Beweis ist ein sehr willkommenes aber auch vorläufiges Hilfsmittel. Ohne ihn wären wir lange Zeit bei diesem Punkt steckengeblieben.

In dem Brief an Weil kam ein anderer Punkt vor, der mir immer wichtig war, dessen Wichtigkeit aber wohl nur in jüngster Zeit allgemein anerkannt wird, nämlich die zentrale Rolle der quasizerfallenden Gruppen. In dem Brief war sie nicht besonders hervorgehoben. In den Notes, die ich zusammen mit Jacquet schrieb, war zunächst die Wahl der Weilschen Darstellung, wie sie in Weils Behandlung von Siegels Arbeiten vorkommt, als Werkzeug ein bißchen willkürlich, weil sie den Eindruck machte, daß diese Darstellung eine grundlegende Wichtigkeit in der Theorie hatte, und das war gewiß nicht meine Meinung. In dem Brief war schon erwähnt, daß es wohl möglich sein würde, die Theorie der automorphen Formen oder Darstellungen für eine allgemeine reduktive Gruppe auf die Theorie für ihre quasizerfallende Form zurückzuführen. Aus Gründen, die mir nicht mehr klar sind, schien es während des Schreiben der Lecture Notes möglich, eine globale Behauptung dieser Art für Formen von GL(2) zu beweisen, wenn man nur wüßte, daß die lokalen Charaktere der Darstellungen von zwei Formen von GL(2), der Gruppe GL(2) einerseits und der Multiplikationsgruppe einer Divisionsalgebra anderseits, die einander mit Hilfe der symplektischen Gruppe zugeordnet sind, bis aufs Vorzeichen einander gleich sind. Es gelang Jacquet, diese Behauptung zu beweisen. Diese Korrespondenz zwischen automorphen Formen für die zwei Gruppen kam bestimmt nicht zum ersten Mal in unseren Lecture Notes vor. Andere hatten vor uns spezielle Formen des Satzes bewiesen. Aber als eine Behauptung, die kurz und einfach ausdrückt werden konnte, und die aller Wahrscheinlichkeit nach auch allgemein gültig und allgemein grundlegend war, wurde sie zum ersten Mal dort formuliert. Auch die Möglichkeit, die Weilsche Vermutung für das Volumen eines Quotienten $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ zu beweisen, indem man sie erst für quasizerfallende Gruppen mit Hilfe der Theorie der Eisensteinschen Reihen beweist, und dann mit Hilfe der Spurformel das Ergebnis für quasizerfallende Gruppen auf alle halbeinfachen Gruppen überträgt, kommt zum ersten Mal in diesen Notes vor. Diese Ideen sind jetzt in der Theorie der Endoskopie aufgenommen, zunächst in Arbeiten von Kottwitz. Andere haben später dem Thema Wesentliches beigetragen. Es gibt jedoch, noch viel zu tun.

In wie weit Weil meine Briefe gelesen hat, ist mir nicht klar. Ich bin überzeugt, daß er lange Zeit nicht versucht hatte, den ersten Brief zu verstehen. Den zweiten Brief, der die Gruppe GL(2) betraf, hatte er wohl Jacquet übergeben, und Jacquet hat ihm dann wenigstens einen Teil dieses Briefs erklärt. Vielleicht auch einen Teil dessen, was weiter in unseren Lecture Notes enthalten ist. Ihm ist dann wohl allmählich aufgegangen, daß es eine Beziehung zwischen automorphen Formen für GL(2) und zwei-dimensionalen Galoisschen Darstellungen gibt, ohne zu erkennen, daß dies ein Teil dessen war, was in meinem ersten Brief stand, was ich in den späteren Briefen bewiesen hatte, und was Jacquet ihm wenigstens teilweise erklärt hatte. Nur später, als mir klar wurde, daß in dieser Hinsicht, wenigstens unter einigen einflußreichen Zahlentheoretikern, gewisse Mißverständnisse vorgekommen waren, und daß der Inhalt meiner Briefe und des Vortrags *Problems in the theory of automorphic forms* von vielen übersehen wurde, habe ich Weil auf den Inhalt des allerersten Briefes wieder aufmerksam gemacht. Er hat sich daraufhin, mit Hilfe Borels, den Brief angesehen und ihn in so weit verstanden, daß er einsah, daß er etwas hinterherlief. Ich glaube jedoch nicht, daß er je später versucht hatte, die Tragweite der Funktorialität zu begreifen. Meine eigenen Ansichten sind ja auch nur allmählich über die Jahre gereift.

Ich gebe zu, ich stehe Weil etwas zweideutig gegenüber. Als Kollege kam ich mit ihm gut aus, obwohl wir dem Alter nach, der Bildung nach, sowie dem Milieu unserer Kindheit nach, ganz verschieden waren. Ich fand auch, daß ihm, wenn nicht Personen gegenüber, dann bestimmt Institutionen gegenüber, ein Gefühl der Dankbarkeit fehlte. Seine Persönlichkeit war in anderer Hinsicht auch schwierig. Er war aber auch charmant. Obwohl er viel Wert auf seine Bildung legte und pedantisch sein konnte, legte er auch ein echtes Interesse an kleinere, bescheidenere Sachen an den Tag, war zum Beispiel froh mit einer Mathematikerin aus Quebec zu reden, um die da geläufigen Sprachwendungen zu erfahren, und wollte auch als Zeitvertreib und Trost nach dem Tod seiner Frau an den Skulpturstunden meiner Frau teilnehmen. Er war leider dafür zu ungeschickt. Als Ersatz hat meine Frau ihm sein Porträt geschaffen, und er unterhielt sich gern mit ihr über alltägliche Sachen, als die Plastik unter seinen Augen zustande kam.

Was die Mathematik betrifft, brauche ich kaum zu wiederholen, daß Weil grossen Einfluß auf die algebraische Geometrie und auf die Arithmetik gehabt und wie kaum ein anderer Mathematiker seiner Zeit in die Tiefe ihrer gegenseitigen Beziehungen gesehen hat. Seine breiten Kenntnisse der Geschichte der Mathematik und seine Fähigkeit, diese Kenntnisse anzuwenden, um ganz neue Gesichtspunkte einzuführen, sind auch einmalig. Ich bewundere und beneide diese seine Gaben und Leistungen sehr. Ich fand nichtsdestoweniger, daß er als Analytiker, und auch als Algebraiker, eher schwach war. Er war sich dessen bewußt, wollte es aber, da es, nach seiner Meinung, seiner Stelle in der Mathematik nicht entsprach, nicht zugeben, weder sich selbst noch der restlichen Welt. Meines Erachtens, hat diese analytische

Schwäche, die er verneinte, sich seinen Bewunderern vererbt und unsere heutige Mathematik, die ihm sonst so viel verdankt, auf eine unglückliche Weise beeinflußt.

7. Yale und Bonn

Ich kehrte im Herbst 1968 aus der Türkei zurück und nahm, auf immer dachte ich, in New Haven mein normales Leben wieder auf. Als erste Aufgaben wollte ich die Ergebnisse meines Briefwechsels mit Jacquet aufschreiben, den Beweis der Existenz der ϵ-Faktoren vervollständigen, indem ich einen kürzeren Beweis der zwei Lemmata von Dwork fand. Ich war auch nach diesem Jahr in der Türkei und den mittlerweile dort erzielten Ergebnissen überzeugt, daß die im ersten Brief an Weil beschriebenen Möglichkeiten etwas an sich hatten, und daß die Zeit gekommen war, sie der Welt anzubieten. Die Lecture Notes mit Jacquet kamen ohne grosse Probleme zustande. Ein vollständiger lokaler Beweis der Existenz des ϵ-Faktors wäre auch heute nur möglich mit Hilfe von Dworks Nachlass, der in der Bibliothek der Princeton University aufbewahrt wird, den ich mir aber nie angesehen habe. Meine Beiträge sind fast vollständig an der Stelle

`https://publications.ias.edu/rpl/section/22`

zu finden. Meine erste öffentliche Darlegung der Funktorialität war in einem Vortrag enthalten, den ich 1969 in Washington hielt, und der wenig später veröffentlicht wurde. Über den Brief hinaus enthält der Vortrag einen Teil der inzwischen erzielten Fortschritte. Ich ging näher auf die lokale Theorie ein und hob die besondere Rolle der quasizerfallenden Gruppen hervor. Die Rolle der speziellen Darstellungen ist auch angedeutet. Ich erkläre auch, wie die Funktorialität verwendet werden könnte, wenn sie vorhanden wäre, um die Ramanujansche Vermutung, auch in einer allgemeinen Form, zu beweisen. Seltsamerweise berührte ich kaum die verwandte Frage der Sato-Tate-Vermutung und ihrer Verallgemeinerung. Wenn ich den Vortrag lese, habe ich den Eindruck, daß der Vortragende sich dieser Vermutung und seiner möglichen Verallgemeinerung bewußt war, daß er sich aber, wegen fehlender Kenntnisse seitens der Arithmetik und seitens der Theorie der automorphen Darstellungen, nicht traute eine allgemeine Aussage zu vermuten. Das war klug von ihm.

Die Bemerkung über die Folgen der Funktorialität für die Frobenius-Heckeschen Konjugationsklassen einer automorphen Darstellung, nämlich daß ihre Eigenwerte oft alle vom Absolutbetrag 1 sind, ist mir auf einem Bahnsteig in Philadelphia eingefallen, als ich über die berühmte Selberg-Rankinsche Abschätzung nachdachte. Da gerade diese Bemerkung wesentlich bei dem Deligneschen Beweis der vierten Weilschen Vermutung ist, hatte ich nachher einen Augenblick gedacht, als ich erfuhr, wie er sie bewies, "Wenn ich nur den Grothendieckschen Satz über die Fortsetzung der einer ℓ-adischen Darstellung zugeordneten L-Funktion gekannt hätte, ..." Jetzt weiß ich es besser. In seinem Beweis steckt viel Erfahrung und eine ausgedehnte Theorie, deren Anfänge allein ich bis heute kaum beherrsche.

Ich begann erst während dieser Jahre in Yale über solche Sachen zu grübeln, zunächst als ich das akademische Jahr 1970/71 in Bonn verbrachte. Ich nahm mir vor, Deutsch zu lernen, und mich gleichzeitig in die Arbeiten Shimuras über das, was ich später Shimuravarietäten genannt habe, einzuarbeiten, indem ich auf Deutsch über diese Arbeiten vortrug. Meine Zuhörer waren sehr höflich und sehr geduldig. Ich bin ihnen bis heute dankbar.

Meine Quellen waren die vielen Arbeiten Shimuras über dieses Thema. Ich habe zunächst mit dem einfachsten Fall, mit Modulkurven, begonnen, aber wohl gleichzeitig mich in die Arbeiten Shimuras eingearbeitet. Ein Einfall war ausschlaggebend.

Wenn die Shimuravarietät einer Gruppe G entspricht, dann liefert jedes Element $\pi = \pi_\infty$ der dieser Gruppe, eher der Zusammenhangskomponente der Gruppe $G(\mathbf{R})$, zugeordeneten diskreten Reihe von Darstellungen einen Unterraum der Kohomologie eines holomorphen Vektorbündels auf der Shimuravarietät. Die Dimension der entsprechenden Kohomologie ist die Multiplizität, mit der π_∞ in $L^2\big(\Gamma\backslash G(\mathbf{R})\big)$ vorkommt. Es ist besser, wie man es heute macht, einen adelisch definierten Raum $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A_Q})/K$ zu betrachten. Damals, vor dem Vortrag Delignes im Séminaire Bourbaki, war kein allgemeiner Begriff einer Shimuravarietät vorhanden. Shimura hatte die verschiedenen Möglichkeiten für G einzeln behandelt, wie auch in anderer Hinsicht Siegel. Weder der eine noch der andere hatte versucht, alle Möglichkeiten zu untersuchen. Siegels Zwecke waren sowieso ganz andere als die von Shimura. Ich war auf die Arbeiten Shimuras angewiesen. Offensichtlich suchte ich eine Verallgemeinerung der Eichler-Shimura-Theorie. Was ich außer der Arbeiten Shimuras zur Verfügung hatte, war die Existenz der diskreten Reihen, deren Existenz vor einigen Jahren von Harish-Chandra erkannt und dann bewiesen wurde, als er die Darstellungstheorie der halbeinfachen Lieschen Gruppen entwickelte. Außerdem hatte ich in Boulder die Beziehung zwischen der $(\mathfrak{g}, K)$-Kohomologie und der Kohomologie verschiedener Vektorbündel auf $\Gamma\backslash G/K$ gelernt. Als letztes wesentliches Element hatte ich einen Satz, den Wilfried Schmid einige Jahre vorher bewiesen hatte, nämlich die Existenz einer geometrischen Realisierung jeder Darstellung der diskreten Reihe.

Ich kann leider hier auf die Existenz der diskreten Reihen nicht eingehen. Ich wiederhole jedoch, was ich schon bei anderen Anlässen hervorgehoben habe, daß die Erkenntnis der Existenz dieser Reihen und ihr Beweis eines der großen mathematischen Ereignisse der Mitte des letzten Jahrhunderts war. Insbesondere waren ihre Existenz und ihre Eigenschaften für die Entdeckung und Entwicklung der Endoskopie unentbehrlich. Ich habe mit Bedauern festgestellt, daß dies manchem Zahlentheoretiker und manchem Geometer gar nicht bekannt ist. Es ist hier auch sehr wichtig, nicht zu vergessen, daß für eine vorgegebene Gruppe $G(\mathbf{R})$, oder wieder besser, ihre Zusammenhangskomponente $G^0(\mathbf{R})$, die diskrete Reihe nur existiert, wenn der Rang von G gleich ist dem Rang seiner maximal kompakten Untergruppe K oder ihrer Zusammenhangskomponente K_0.

Dann entspricht jeder endlich-dimensionalen irreduziblen holomorphen Darstellung σ der Gruppe $G(\mathbf{C})$ eine endliche Anzahl von irreduziblen Darstellungen in der diskreten Reihe von $G(\mathbf{R})$. Die Menge der einem gegebenen σ zugeordneten Darstellungen heißt oft ein L-Paket. Die Anzahl der Darstellungen in einem Paket ist dieselbe für alle σ, und es ist wichtig diese Anzahl zu wissen. Es sei K_0 die Zusammenhangskomponente von K und T eine Cartansche Untergruppe von K_0. Da alle Cartanschen Untergruppen von K_0 in K_0 konjugiert sind, ist K der Normalisator von K_0 in K oder in $G(\mathbf{R})$. Es sei Ω_G die Weylgruppe, also der Quotient $\mathrm{N}_T(\mathbf{C})/T(\mathbf{C})$ und Ω_K der Quotient $\mathrm{N}_T(\mathbf{R})/T(\mathbf{R})$, wobei N_T der Normalisator von T als algebraische Gruppe ist. Es sind $[\Omega_G : \Omega_K]$ Elemente in jedem L-Paket. Wir können auch eine Zahl Ω_{K_0} in derselben Weise, einführen, sowie $[\Omega_K : \Omega_{K_0}]$

Für die Gruppen GL(2) oder PGL(2), ist $[\Omega_K : \Omega_{K_0}] = [\Omega_G : \Omega_{K_0}] = 2$, $[\Omega_G : \Omega_K] = 1$ Für SL(2), die aber im Rahmen der Shimuravarietäten nicht unmittelbar vorkommt, ist $K = K_0$, so daß $[\Omega_K : \Omega_{K_0}] = 1$ und $[\Omega_G : \Omega_K] = 2$. Es ist, im allgemeinen, der normale Fall, daß $[\Omega_K : \Omega_{K_0}] = 1$.

Zunächst stellen wir uns vor, die Shimuravarietät S sei durch den Quotienten $\Gamma\backslash G(\mathbf{R})/K$ definiert. Dann definiert eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung σ von $G(\mathbf{C})$ ein Vektorbündel auf dieser algebraischen Varietät. Da meine Kenntnis der algebraischen Geometrie zu der Zeit mangelhaft war—und bleibt auch heute mangelhaft—habe ich zunächst einfach angenommen, daß diesem Vektorbündel eine ℓ-adische Darstellung τ entspricht, deren L-Funktion $L(s,\tau)$ ich untersuchen wollte. Ich hatte mich, aus Gründen, die noch zu erklären sind, auf die Kohomologie des Bündels in der mittleren Dimension beschränkt. Wie bei dem Eichler-Shimura-Satz wollte ich versuchen, zu beweisen, daß sie, bis auf eine endliche Anzahl von Faktoren, mit einem Produkt von den von mir eingeführten automorphen L-Funktionen gleich sind. Wenn man sich die Langlands-Korrespondenz als eine Identifikation einer durch Motive definierten Tannaka-Kategorie mit einer Unterkategorie einer durch automorphe Darstellungen definierten Kategorie vorstellt, war es also erst in Bonn und erst für Shimuravarietäten, daß ich mich ernsthaft mit dieser Korrespondenz beschäftigte. Meine ersten Schritte in dieser Richtung, zum Beispiel im Buch mit Jacquet, waren eher bescheiden, entweder lokale oder globale Anwendungen der Heckeschen Methode in der Formulierung von Weil, beides für die Gruppe GL(2), oder auch, ab und zu, verschiedene zögernde Bemerkungen. Insbesondere bin ich vorher kaum mit der algebraischen Geometrie in Berührung gekommen.

Was ich im Herbst 1970 erkannte, als ich an der Wegelerstraße in Bonn, nicht mehr als 200 Meter weg von Schmids Elternhaus, stand, war, daß als Folge der von ihm bewiesenen Realisierung, jedes Element der der Darstellung σ zugeordneten diskreten Reihen einen eindimensionalen Beitrag zur Kohomologie des entsprechenden Vektorbündels liefert, und zwar in dem mittleren Grad, der gleich ist der Dimension der Shimuravarietät. Genauer gesagt, wegen der Verflechtung mehrerer Elemente des L-Pakets der Zusammenhangskomponente $G_0(\mathbf{R})$ von $G(\mathbf{R})$ in ein einziges, ist die Dimension des Beitrags gleich $[\Omega_K : \Omega_{K_0}]$. Im Prinzip also, bekommt man von einem L-Paket insgesamt einen $[\Omega_G : \Omega_{K_0}]$-dimensionalen Beitrag.

Wenn wir diese Aussage, die bis jetzt ziemlich ungenau geblieben ist, besser verstehen wollen, denken wir lieber adelisch. Dann ist die entsprechende Shimuravarietät, die nicht mehr zusammenhängend sein muß, ein Quotient $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_0K_{\mathrm{fin}}$, wobei K_{fin} eine offene kompakte Untergruppe der Gruppe $G(\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ ist. Die Menge $\mathbf{A}_{\mathrm{fin}}$ ist der Ring der endlichen Adele. Der Einfachheit halber nehmen wir auch an, der Quotient $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$ sei kompakt. Dann ist die entsprechende Shimuravarietät vollständig. Die Beiträge zur Kohomologie sind Beiträge einer Darstellung $\pi = \bigotimes \pi_v = \pi_\infty \pi_{\mathrm{fin}}$, wobei π_∞ eine irreduzible Darstellung von $G(\mathbf{R})$ ist, die in dem der Darstellung σ zugeordneten L-Paket liegt, und π_{fin} eine auch irreduzible Darstellung von $G(\mathbf{A}^{\mathrm{fin}})$. Es sei $m_\pi(K_{\mathrm{fin}})$ die Multiplizität der trivialen Darstellung von K_{fin} in π_{fin}. Dasselbe σ definiere das Vektorbundel, dessen Kohomologie wir untersuchen. Es sei auch m_π die Multiplizität, mit der π in $L^2\big(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})\big)$ vorkommt. Dann liefert π einen Beitrag zur Kohomologie im mittleren Grad, dessen Dimension gleich

$$m_\pi m_\pi(K_{\mathrm{fin}})[\Omega_K : \Omega_{K_0}] \tag{1}$$

ist.

Die Darstellung π_f bestimmt die der Darstellung π zugeordnete L-Funktion bis auf die Γ-Faktoren. Es seien $\pi_\infty, \pi'_\infty, \pi''_\infty, \dots$ die Elemente des σ-zugeordneten L-Pakets und $\pi' = \pi'_\infty \otimes \pi_v$, $\pi'' = \pi''_\infty \otimes \pi_v, \dots$. Dann sind für jede holomorphe Darstellung ρ die L-Funktionen $L(s,\pi,\rho)$, $L(s,\pi',\rho), \dots$ gleich. Wenn also alle Multiplizitäten $m_\pi = m_{\pi'} = \cdots = m_{\pi_{\mathrm{st}}}$ gleich wären, wobei π_{st} die jetzt übliche Bezeichnung für das Paket $\{\pi,\pi',\dots\}$ ist, dann ist es naheliegend, daß der Teil der Kohomologie in der mittleren Dimension, der diesem L-Paket entspricht und dessen Dimension

$$m_{\pi_{\mathrm{st}}} m_\pi(K_{\mathrm{fin}})[\Omega_G : \Omega_{K_0}] \tag{2}$$

ist, wirklich ein motivisch definierter Teil der Kohomologie ist. Dann wäre es schön, habe ich mir damals gesagt, wenn es eine Darstellung ρ der Gruppe ${}^LG$ gäbe, deren Dimension genau

$[\Omega_G : \Omega_{K_0}]$ wäre, so daß man vermuten könnte, die L-Funktion dieses motivisch definierten Teils sei

$$L(s,\pi,\rho)^{m_{\pi_{\mathrm{st}}} m_\pi(K_{\mathrm{fin}})} \tag{3}$$

Ich habe dann für jede Gruppe G, die eine Shimuravarietät definiert, eifrig gerechnet und jedesmal gefunden, daß die erwünschte Darstellung vorhanden war. Es hat sich nicht viel später herausgestellt, daß das höchste Gewicht, das dabei vorkommt, von vornherein ein wesentliches Element in Delignes allgemeiner Definition der Shimuratheorie ist. Das war für mich zunächst nicht das Wesentliche. Das Beunruhigende an diesen Überlegungen war, ob die Annahme $m_\pi = m_{\pi'} = \cdots = m_{\pi_{\mathrm{st}}}$ vernünftig war. Für PGL(2) ist sie, wie schon bemerkt, wahr, weil das L-Paket aus einem einzigen Element besteht. Sonst, habe ich leicht festgestellt, gilt sie nicht immer.

Das war nicht so schlimm. Man könnte sich vorstellen, daß aus diesem oder jenem Grund in dem Motiv nur ein Teil der erwarteten ℓ-adischen Darstellung vorkam und folglich nur ein Teil der Funktion (3). Solche Überlegungen führen schnell zur Endoskopie, allerdings nicht in der jetzigen Form, sondern zu der Frage, wie in einem L-Paket die Multiplizitäten m_π von π abhängen. Dafür sind nicht allein L-Pakete im Unendlichen einzuführen, sondern auch globale Pakete und an jeder Stelle v lokale Pakete. Der erste zu untersuchende Fall war offentsichtlich die Gruppe SL(2), wo das Problem viel einfacher war als im allgemeinen. Außerdem stand für diese Gruppe die Spurformel schon zu Verfügung. Da Labesse im zweiten Semester auf einen kurzen Besuch nach Bonn kam, habe ich ihn auf diese Probleme aufmerksam gemacht. Ich habe, wenn ich mich nicht irre, schon zu dieser Zeit, Shelstad, die damals eine Studentin an Yale war, in dieser Hinsicht einige Fragen für Gruppen über $\mathbf{R}$ gestellt, für die Harish-Chandras allgemeine invariante harmonische Analysis für reelle Gruppen zu Verfügung stand. Ihre Untersuchungen, dann und später, waren für mich sehr lehrreich.

Während meines Bonner Besuches habe ich Deligne in Bonn und auch in Paris getroffen und kennengelernt. Nicht so lange nach meiner Rückkehr in Yale, nur zwei Jahre später, fand die in gewisser Hinsicht unglückliche Tagung in Antwerpen statt. Aus Freundlichkeitstreue habe ich zunächst gezögert, daran teilzunehmen, aber letztendlich zugesagt. Deligne hat mir dann vorgeschlagen, ich sollte den geometrischen Teil der Theorie übernehmen, nämlich die Eichler-Shimura-Theorie, wie er sie entwickelt hatte, und er den darstellungstheoretischen Teil, wie er im Buch mit Jacquet steht. Das war für mich ein Vorschlag wie Bochners Vorschlag, über Klassenkörpertheorie vorzutragen. Ich habe ihn zitternd angenommen. Beeinflußt von einer Idee von Ihara, wollte ich die Spurformel anwenden. Ich habe es durchgeführt, insgesamt würde ich schätzen mit Erfolg, obwohl meine mangelnde Kenntis der algebraischen Geometrie manche Lücken in meiner Darlegung ließ. Dem Veranstalter der Tagung, dem die Darstellungstheorie befremdlich war, hat der Vortrag nicht gefallen, und er hat den Saal verlassen. Die Fixpunktformel, die ich beim Vortrag vorschlug, wurde schnell von Illusie bewiesen, und spielt, glaube ich, noch heute eine Rolle in der fortgeschrittenen Theorie der Shimuravarietäten.

8. The Institute for Advanced Study

Ich kam vor fast vierzig Jahren, gleich nach der Antwerpener Tagung, an das Institute for Advanced Study und bin seitdem als fest angestelltes Mitglied der Fakultät hier geblieben, jetzt emeritiert und im Ruhestand. Die Themen, die ich am Institute angefangen oder weiter getrieben habe, beschäftigen mich noch, zum großen Teil weil ich meine Ziele nicht erreicht habe. Da es kaum ausgeschlossen ist, eher sehr wahrscheinlich, daß ich diese Ziele nie erreiche, möchte ich hier lieber die Ziele, und nicht so sehr die wenigen Errungenschaften, beschreiben, besonders da die Ziele, meines Erachtens, zum Teil mißverstanden sind. Es sind vier Themen: (i) Endoskopie; (ii) Shimuravarietetäten und Motive; (iii) Universalität; (iv) Jenseits der Endoskopie. Alle bis auf das dritte sind miteinander verwandt. Ich fange mit ihnen an und komme erst später zum dritten, wo ich mein Ziel nicht nur nicht erreicht, sondern auch nie verständlich gemacht habe.

Was ich über die Endoskopie für allgemeine Gruppen während meiner Jahre am Institute gelernt habe, habe ich in meinen Pariser Vorträgen 1980 erklärt. Die zwei späteren Arbeiten über die Endoskopie, die ich zusammen mit Shelstad schrieb, sind nicht unwichtig gewesen, aber die grundlegende Idee in diesen Arbeiten kam eher von ihr und ihren Untersuchungen für reelle Gruppen als von mir. Ich finde jedoch die Endoskopie verblüffend schön und die stabil invariante harmonische Analysis auch sehr wichtig, und freue mich über alle Fortschritte auf diesem Gebiet, wo uns noch vieles unbekannt ist.

Für die Shimuravarietäten, die in den letzten Jahren sehr populär geworden sind, habe ich mehr vermutet als bewiesen, besonders in den Berichten von der Tagung über die Hilbertschen Probleme in DeKalb und von der Tagung in Corvallis. Die Entwicklung der Theorie der Shimuravarietäten ist mit der Entwicklung der Endoskopie eng verbunden. Kottwitz hat zu beiden viel beigetragen und hat gleich am Anfang wichtige Elemente, die ich entweder übersehen oder falsch ausgedrückt hatte, eingeführt oder verbessert. Bei der Entwicklung der Ihara Methode, wie ich sie in Antwerpen darlegte, ist ein Vergleich der Spurformel mit einer Aufzählung der Punkte modulo p grundlegend. Ich habe in meinen Arbeiten über diesen Vergleich übersehen, daß die kombinatorischen Gegenstände, die bei diesem Aufzählen im Spiel sind, im wesentlichen Bahnenintegrale sind. Sie sind folglich in derselben Weise zu behandeln, nämlich mit Hilfe der Endoskopie. Die Beschreibung der Wirkung der Galoisschen Gruppe auf die Punkte einer Shimuravarietät modulo p, die ich während der Tagung in DeKalb äußerte, war auch nicht völlig richtig und mußte von Kottwitz verbessert werden. Die verbesserte Form hat er bewiesen. Die heutige Entwicklung des Vergleichs der automorphen L-Funktionen mit der einer Shimuravarietät zugeordneten L-Funktion ist von ihm stark beeinflusst.

In dem Bericht für Corvallis kamen andere Vorschläge vor, die vor allem von James Milne und seinen Mitarbeitern aufgenommen wurden, insbesondere über die konjugierten Varietäten einer Shimuravariäteten und über die dort eingeführte Taniyamagruppe, deren vermutete Beziehung zu Motiven von potentialem CM-Typus er zusammen mit Deligne begründete. Borovois endgültige allgemeine Konstruktion aller Shimuravarietäten war auch von diesem Bericht beeinflusst.

Mit Hilfe der Shimuravarietäten haben die Mathematiker gewiß eine, für mich, Hauptfrage beantwortet: wird es möglich sein, alle motivischen L-Funktionen als Produkte von automorphen L-Funktionen auszudrücken? Die Antwort ist jetzt zweifellos, “Ja!”. Obwohl kein allgemeiner Beweis vorhanden ist, ist diese Antwort von den vorhanden Beispielen und Belegstücken her völlig berechtigt. In wie fern es nötig oder nützlich ist, um den entsprechenden allgemeinen Satz zu beweisen, die Theorie der Shimuravarietäten weiter zu verfolgen, ist mir jedoch nicht klar, und ich stelle mit etwas Enttäuschung fest, daß viele jüngere Mathematiker sich mit der Theorie der Shimuravarietäten eifrig beschäftigen, ohne sich diese Frage ernsthaft gestellt zu haben. Ich komme zu ihr zurück.

Ich mache zunächst, eher nebenbei, eine kleine Bemerkung, die ich eigentlich früher gemacht haben sollte, denn meine Behauptung betreffend die Funktion (3) war nicht ganz richtig. Wir haben ein Reihe von Pfeilen:

$$\text{Darstellung } \pi \to \text{Kohomologie} \to \ell\text{-adischen Darstellung} \to \widetilde{\pi}.$$

Der letzte Pfeil ist der der (Langlands)-Korrespondenz. Was diese Korrespondenz sei, brauchen wir hier nicht zu sagen. Gewisse Eigenschaften werden erwünscht. Es ist aber durchaus möglich daß π und $\widetilde{\pi}$ nicht isomorphe Darstellungen sind, obwohl sie eng verwandt sein werden. Das hätte ich im Zusammenhang mit der Formel (3) sagen sollen. Es handelt sich aber nur um eine sehr leichte Abänderung. Es besteht in gewissen Kreisen eine starke, hartnäckige Neigung diese Abänderung wegzudefinieren, die ein grobes Mißverständnis an den Tag legt.

Ich habe schon an verschiedenen Stellen behauptet, daßes meines Erachtens nötig ist, erst die Funktorialität zu beweisen und dann nachher, mit Hilfe der damit erschlossenen Kenntnisse und zur Verfügung gestellten Hilfsmittel, eine Theorie der Korrespondenz und, gleichzeitig, der Motive, über $\mathbf{Q}$ und anderen globalen Körper, sowie über $\mathbf{C}$ zu begründen. Es ist gewiß der Fall, daß viele Forschungen der letzten Jahre, insbesondere die Untersuchung der p-adischen Theorien, für den Aufbau einer Theorie der Motive und ihrer Beziehung zu den automorphen Formen unentbehrlich ist. Die Quellen dieser p-adischen Theorien liegen sehr oft in der Theorie der Shimuravarietäten oder in verwandten kohomologischen Fragen. In wie weit eine weitere Entwicklung der allgemeinen Theorie der Shimuravarietäten selbst zu diesem Zweck nützlich oder nötig ist, ist mir nicht klar. Diese Theorie ist technisch sehr anspruchsvoll. Jetzt, da sie erschlossen ist, zieht sie viele Fachleute an.

Ich hoffe, daßich, bevor ich die Mathematik endgültig aufgeben muß, die Zeit und die Kraft haben werde, nicht so sehr zu der Entwicklung einer p-adischen Theorie—mit oder ohne Shimuravarietäten—beizutragen, sondern eher einen Überblick über ihren Zweck und ihre Möglichkeiten zu bekommen. Ich betone hier, obwohl es für die meisten Leser kaum nötig ist, daß der Aufbau einer Theorie der Motive keine leichte Sache sein kann. Er verlangt zum Beispiel einen Beweis der Hodge-Vermutung. Ich betone auch, daß bis jetzt keiner sich vorgenommen hat, diesen Aufbau gleichzeitig mit der Entwicklung der Korrespondenz zu unternehmen.

Wir sind mit der Endoskopie noch nicht fertig. Das Haupthindernis war jahrelang das Fundamentallemma, womit ich, sowie einige Studenten, Rogawski, Hales und Kottwitz, uns über die Jahre beschäftigt haben, ich für relativ kurze Zeit, Hales und Kottwitz für Jahre. Dank ihrer Beiträge und denen von Waldspurger, Laumon und letzlich Ngô ist das Fundamentallemma jetzt bewiesen, so daß wir uns jetzt der Funktorialität und ihrem Beweis zuwenden können. Das hätten wir auch vorher tun können. Für SL(2) oder GL(2) war das Fundamentallemma entweder leicht beweisbar oder überhaupt nicht nötig. Es ist doch so, daß der Gesichtspunkt Ngôs und die Einführung der Hitchinbasis uns sogar für diese zwei Gruppen einen wesentlich neuen Standpunkt anbieten. Im Rahmen der Gruppen ist diese Basis anders als im Rahmen der Lieschen Algebren, und sie wird die Steinberg-Hitchin-Basis genannt. Es scheint, daß diese Basis uns erlaubt, das Ergebnis der stabilen Spurformel—nur der stabilen (oder genauer stabilisierten)—mit Hilfe der Poissonschen Formel analytisch zu behandeln, was vorher nicht möglich war.

Unter dem Sammelnamen “Jenseits der Endoskopie” sind Methoden zusammengebracht, deren Zweck es ist, die Funktorialität, insbesondere für Homomorphismen einer endlichen Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/F)$ nach der L-Gruppe ${}^LG$ einer über dem endlichen algebraischen Zahlkörper F definierten Gruppe G zu beweisen. Diese Methoden sind denjenigen Methoden ähnlich, die in dem schon vor dem zweiten Weltkrieg veröffentlichten Bericht von Hasse zu finden sind. Das heißt vor allem, daß sie analytisch sind, und daß ihnen die Untersuchung von L-Reihen in der Nähe von $s = 1$ grundlegend ist. Um sie zu verwenden, braucht man analytische Methoden, die hinreichend stark sind, und die hatte man vorher nicht. Ob diese neuen Methoden stark genug sind, ist noch eine offene Frage, die zur Zeit untersucht wird, in, zum Beispiel, zwei Arbeiten, die in *Ann. Sci. Math. du Québec* veröffentlicht werden. Die erste wurde zusammen mit Edward Frenkel und Ngô Bảo Châu geschrieben. Der Versuch muß aber weiter fortgeführt werden. Ernsthafte Probleme sind noch nicht gelöst, auch für die Gruppe SL(2).

Um zurande zu kommen, wird noch mehr verlangt, wenigstens eine Abzählung, wie bei den Kummerschen Körpern in der abelschen Theorie, der Erweiterung mit einer vorgegebenen Galoisgruppe und vorgegebener Verzweigung. Das wird der springende Punkt sein, und auch wohl, in gewisser Hinsicht, eine Abkehr von der Kohomologie. Ich hoffe, mich in den nächsten Jahren hauptsachlich auf diesen Punkt zu beschränken, und zwar nur für Erweiterungen deren Galoisgruppe in GL(2) eingebettet werden kann.

Obwohl es im Augenblick in mancher Hinsicht vorteilhaft ist, nur die Gruppen SL(2) oder GL(2) zu behandeln, wäre es auch sehr nützlich und sehr ermutigend, die lokalen Probleme, die für SL(2) oder GL(2) gelöst sind, auch allgemein zu behandeln. Das scheint mir zugänglich über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und zwar mit den Methoden, die Shelstad für die Endoskopie verwendete. Über anderen lokalen Körpern kann es sein, daß die Lösung des Problems wesentlich schwieriger ist und die Methoden der algebraischen Geometrie verlangt, die Ngô benutzte. Dies ist auch eine Frage, die ich selbst gern überlegen möchte. Sie zu lösen kann ich nicht hoffen. Es fehlen mir die Kenntnisse und die Zeit.

Unter den vier Themen, die ich erwähnte, kam die geometrische Korrespondenz nicht vor. Dank Drinfeld und anderer, hat die Korrespondenz seit einigen Jahrzehnten insgesamt drei Formen: über algebraischen Zahlkörpern, über Funktionenkörpern der Dimension 1 über einem endlichen Körper und über Riemannschen Flächen. Ich habe die dritte hier übersehen, obwohl es bestimmt diese Form ist, der die Korrespondenz ihren Ruhm verdankt. Ich möchte gern diese dritte Theorie besser verstehen, nicht um selbst auf dem Gebiet zu arbeiten, obwohl es meines Erachtens da viel zu tun gibt, sondern weil ich neugierig bin, ihre Beziehungen zur Physik zu verstehen, und, wichtiger, weil sie der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit wesentlichen singulären Stellen nahe verwandt ist. Ich habe schon erwähnt, daß ich, als junger Mathematiker, diese Theorie erst im Buch von Coddington und Levinson kennengelernt habe, und daß ich mich seitdem mit ihr gelegentlich beschäftigt habe. Im mathematischen Sinn ist bis jetzt mit der dritten Form der Korrespondenz wenig getan worden, aber die Beziehungen zur algebraischen Geometrie und den perversen Garben, die in der Sammlung *Singularités irregulières* von Briefen und anderen Schriften von Deligne, Malgrange und Ramis angedeutet werden, finde ich anziehend.

Das dritte Thema, die Universalität hat fast keine Beziehung zu den anderen, und entspricht der Tatsache, daß ich im Grunde genommen lieber ein Analytiker geworden wäre, und daß ich nur zufällig so viel meiner Zeit mit der Zahlentheorie verbracht habe. In den letzten fünfzig Jahren haben Wissenschaftler aus verschiedenen Gebieten der Physik und der angewandtern Mathematik, aus der Quantentheorie, aus der statistischen Mechanik, aus der Hydrodynamik, den Mathematikern ein Problem angeboten, dessen zentrale Stelle in der Mathematik außer Frage steht. Meines Erachtens, könnte dieses Problem ohne allzu große Übertreibung mit den grossen Problemen verglichen werden, die im 17., 18., und 19. Jahrhunderten mit der Theorie der Differential- und Integralrechnung, mit der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und mit der Theorie der Fourier-Reihen und Fourier-Integrale gelöst wurden. Man kann offensichtlich nicht hoffen, zur Lösung dieses Problems ernsthaft beizutragen, ohne ein tiefes Verständnis der entsprechenden wissenschaftlichen Gebiete und breite Kenntnisse der nötigen Mathematik. Die besitze ich nicht. Ich habe trotzdem versucht, das Wesen des Problems zu verstehen. Obwohl ich noch nicht sehr weit gekommen bin, hege ich immer die Hoffnung, dieses Wesen anderen Mathematikern noch beschreiben zu können. Das ist auch ein Ziel für die kommenden Jahre. Mir ist es klar, daß mein Scheitern bei diesem Versuch höchst wahrscheinlich ist.

Das allgemeine mathematische Problem läßt sich kurz beschreiben. Man sucht für unendlich-dimensionale dynamische Systeme, die vorgegeben oder auch künstlich aufgebaut sind, zu beweisen, daß es Fixpunkte gibt, an denen die Funktionalmatrix nur eine endliche Anzahl von Eigenwerte hat, deren Absolutbetrag grösser sind als 1, und für die der Absolutbetrag der unendlich vielen anderen Eigenwerte sehr schnell gegen 0 konvergiert. Sogar bei einfachen künstlich definierten Systemen ist es nicht leicht, so was zu beweisen. Ein schönes Beispiel ist von Oscar Lanford mit einer Mischung von numerischen und theoretischen Methoden behandelt worden. Diese Forschung wird in seiner Arbeit *A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures* (BAMS, vol. 6, 1982) dargelegt. Ich selbst wurde auf das allgemeine Problem durch informelle Unterhaltungen mit dem Physiker Giovanni Gallavotti aufmerksam gemacht. Als ich in der einschlägigen Literatur las, bin ich auf die Perkolation gestoßen. Sie ist ein eher künstlicher Begriff, der viel weniger Kenntnisse dieser oder jener wissenschaftlichen Gebiete verlangt, als die sehr tiefliegenden Fragen der Quantenphysik, der Thermodynamik oder der Turbulenz.

Das Benehmen der Eigenwerte der Funktionalmatrix ist ein Ausdruck der Universalität des entsprechenden Fixpunktes. Universalität heißt also, daß in dem unendlich-dimensionalen Tangentialraum nur eine endliche Anzahl von Richtungen instabil sind. Der Fixpunkt ist oft unabhängig von den Einzelheiten des betreffenden physikalischen Systems. Wenn eine Unabhängigkeit dieser Art nicht vorhanden ist, ist auch keine Universitalität vorhanden.

Das erste Problem ist, daß man zunächst nicht weiß, auch für die Perkolation nicht, mit welchen Koordinaten der Fixpunkt zu beschreiben ist. Im Rahmen des Problems sind normalerweise auf dem ersten Blick keine selbstverständlichen Koordinaten vorhanden. Ohne solche Koordinaten hat man keine Handhabe für das Problem.

Für die zweidimensionale Perkolation hatte Harry Kesten bewiesen, daß die Überquerungswahrscheinlichkeiten existieren. Es schien mir, als ich sein Buch *Percolation theory for mathematicians* las, daß diese Wahrscheinlichkeiten unabhängig von der Form der Perkolation, also vom Gitter oder von den verschiedenen Wahrscheinlichkeiten, sein könnten. Wichtig ist nur, daß das Modell kritisch ist. Sie könnten folglich als Koordinaten verwendet werden, um Universalität zu untersuchen. Ich habe diese Meinung Yvan Saint-Aubin gegenüber geäußert. Er war skeptisch, so daß wir entschieden, die Frage Experimenten zu unterziehen. Die Ergebnisse habe ich später bei einem Mittagessen am Institute mit Thomas Spencer und Michael Aizenman besprochen. Aizenman hat gefragt, ob diese universalen Überquerungswahrscheinlichkeiten konform invariant waren. Saint-Aubin und ich haben nachher diese Frage numerisch untersucht. Spencer hat sofort mit John Cardy gesprochen, um seine Meinung zu erfahren. Cardy meinte zunächst, daß sie nicht konforminvariant seien, aber nach kurzer Überlegung fand er die Vermutung vernünftig. Er war imstande, das Problem auf einem höheren wissenschaftlichen Niveau zu betrachten, als wir es konnten. Er nahm die

Konforminvarianz an, und mit ihrer Hilfe hat er sehr schnell seine jetzt wohlbekannte Formel angeboten. Diese Formel stimmte mit den numerischen Ergebnissen, die wir schon in der Hand hatten und die wir mit einem anderen Ziel berechnet hatten, überein. Wir wollten Fragen über die Universalität beantworten. Unsere späteren numerischen Ergebnisse, die ich noch heute schön finde, haben Aizenmans Frage oder Vermutung weiter, in anderen Hinsichten, bestätigt. Wir haben diese Ergebnisse in einer längeren Arbeit in dem BAMS veröffentlicht, die von einigen Wahrscheinlichkeitstheoretikern gelesen wurde. Insbesondere habe ich sie mit Oded Schramm sowie mit Stanislas Smirnov besprochen, die diese Arbeit gelesen hatten. Kann es sein, daß wir die sagenhaften Physiker sind, auf deren Experimente manche unkundigen Mathematiker hinweisen, bei ihrer Beschreibung des Zustandekommens der Frage der Konforminvarianz in der Perkolation? Die Konforminvarianz als allgemeines Problem in der Quantenfeldtheorie ist allerdings etwas anderes, liegt auf einem anderen Niveau und wurde viel früher eingeführt.

Die Arbeiten von Schramm und Smirnov beziehen sich hauptsächlich auf die Konforminvarianz. Ihre Ergebnisse sind wichtig. Die SLE-Theorie von Schramm finde ich besonders schön. Ich bin nichtsdestoweniger überzeugt, daß die Tiefe des Problems in der Universalität liegt. Wenn man die Universalität beherrscht, auch nur für die Perkolation, wird, meines Erachtens, die Konforminvarianz wohl eine relativ leichte Folge sein. Das ist allerdings kein Grund, sich mit der Konforminvarianz nicht zu beschäftigen, denn die Ergebnisse sind schön, und die Konforminvarianz den Mathematikern besser bekannt als die Universalität. Ich finde es trotzdem enttäuschend, daß so viele Mathematiker der Gegenwart nicht imstande sind, zu erkennen oder gar zu verstehen, wo unsere wahren, die Geschichte der Mathematik bestimmenden, Aufgaben liegen.

9. Die Mathematik als Zugang zur geistigen Welt

Ich war versucht, als ich diesen Aufsatz anfing, einige Worte über dieses Thema hinzuzufügen, denn mein Leben als Mathematiker hat mir viele Gelegenheiten gegeben, die bunte Welt mitsamt ihrer Vergangenheit aus der Nähe kennzulernen, die ich sonst nie gehabt hätte. Aber ich habe mir das schließlich versagt. Es wäre ein Klagelied über die jetzige Lage geworden, das keiner hören möchte. Ich bewundere sehr die Beiträge, die Leistungen mancher Mathematiker der heutigen Zeit. Ich finde trotzdem, daß das mathematische Milieu, als geistiges Milieu, nicht mehr das anbietet, was es in der Vergangenheit, in meiner Jugend, anbot.

Ich möchte schließlich Volker Heiermann, Helmut Koch, und Joachim Schwermer für ihr sorgfältiges Lesen der ersten Fassung dieses Aufsatzes danken. Es bleiben noch hie und da in der Formulierung Spuren meiner Muttersprache. Ich hoffe jedoch, daß fast alle wirklichen Fehler jetzt ausgetilgt worden sind.

Compiled on February 14, 2025.