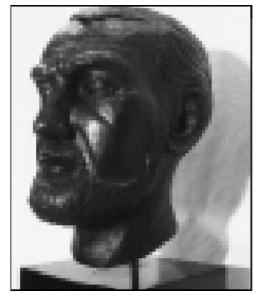
DESCARTES İLE FERMAT

ROBERT P. LANGLANDS



Yıldız Üniversitesi'nde matematik öğrencilerine verdiğim Öklid ve Descartes konulu genel dersler, sürdürmek istediğim tasarımın ilk iki bölümüdür. Amacımı kısaca anlatayım. Bu derslerimde, matematiğin birçok temel kavramı arasında, eski Yunan matematikçilerinin keşfettiği ve o zamandan bugüne önemini hiç yitirmemiş iki temel kavramı incelemek istiyorum: irrasyonel sayılar (ama özellikle irrasyonel cebirsel sayılar) ve eğrilik.

Henüz bitirmediğim bu dersler dizisinde, bu iki kavramın yüzyıllar boyunca geçirdikleri gelişmeleri izlemeye çalışacağım.

Konuyu sadece tarihsel ya da bilimsel açıdan yorumlamakla yetinmeyeceğim. Amacım, matematiğin gelişiminde önemli olan yazıları çağdaş makalelermiş gibi sunarak dinleyiciyi geçmiş yüzyılların matematik yazılarını okumaya teşvik etmek; eminim eskileri de yenilere duyulan hayranlıkla okuyacaktır.

Bugüne dek çoğunlukla Öklid ve Descartes hakkında konuştum. Gelecekte, yalnız matematiğe değil, fiziğe ve felsefeye de katkıları olan Gauss ve Riemann hakkında konuşmayı tasarlıyorum. Katkıları arasında belki de en bilineni olan eğrilik kavramı geometri ve fizikte çok önemlidir. Eğriliği ortaya çıkarmak için koordinatlara ihtiyaç doğdu. Bilindiği gibi, koordinatları Descartes ortaya çıkarmıştı. Tabii Descartes'ın koordinatları nasıl ve hangi çerçevede ortaya koyup kullandığını herkes bilmeyebilir.

Descartes (1596–1650) ve Fermat (1601–1665)

Descartes matematik hakkında az yazdı. En bilinen yazısı Fransızca kaleme aldığı (o zamanlar evrensel bilim dili Latinceydi) "La géométrie"dir. Bu yazıyı okuduğumuzda, Descartes'ın koordinatlarının bugün hem basit hem de ileri geometride kullandığımız ve eğriliğin tanımına uygun olan koordinatlardan ne derece uzak olduğunu görürüz.

Matematik Dünyası, 2005 Yaz.

Descartes'ın amaç ve yöntemlerinin matematiği nasıl etkilediğini anlatmak istemiyorum. Amacım daha sınırlı. Descartes'ın, birazdan açıklayacağımız **Pappus Problemi**'ni koordinatlar metoduyla nasıl çözdüğünü ayrıntılarla göstermek istiyorum. Pappus'ün dördüncü yüzyılda sorduğu bu soru onyedinci yüzyılda birçok matematikçiyi uğraştırmıştır. Yalnız Descartes değil, Fermat da, hatta belki o kuşaktan başkaları da bu problemi çözmüştür.

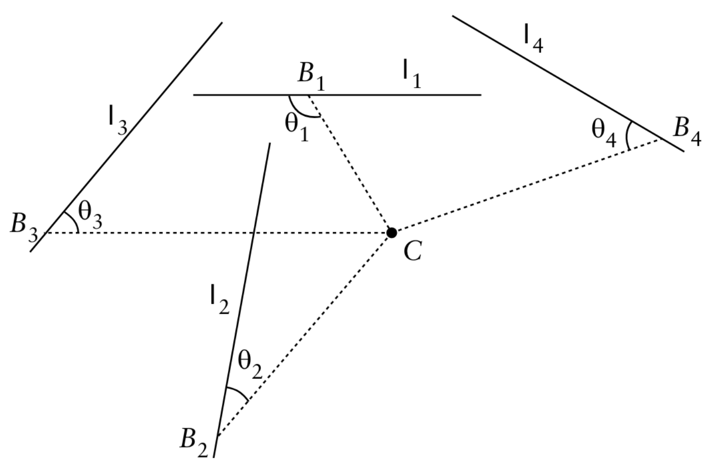
Kanıtları değişik olmasına karşın, hem Descartes hem Fermat, Apollonyus'un geliştirdiği konikler kuramını uygulamışlardır. Fermat, Apollonyus'un keşfettiği koniklerin niteliklerini kullanarak ve gereksiz sözden sakınarak kanıtını doğrudan ve dolaysız olarak sunmuştur. Öte yandan, yönteminin değeri konusunda okurlarını ayrıca ikna etmek isteyen Descartes, Fermat'nın tersine, yönteminin bazı yönlerini uzun uzadıya anlatmıştır; gene de Apollonyus'un kuramıyla ilgili önemli bazı ayrıntılara girmekten kaçınmıştır.

Rönesans dönemi, sanatta, bilimde ve dilde ve aslında her açıdan, Avrupa'nın sonraki yaşamını, dolayısıyla hepimizi çok etkilemiştir. Descartes'la Fermat'nın Pappus Problemi hakkında yazdıklarını okuyup iyi anlayarak, her ikisinin de Apollonyus'tan ne derece etkilenmiş olduğunu görüp bilim insanlarının Rönesansı nasıl yaşadığını sanki kendimiz yaşamışçasına hissedebiliriz.

Fermat eski Yunancaya Descartes'tan daha hâkim olduğundan ve kendini daha çok matematiğe adadığından Apollonyus'un yazılarını sanırım daha iyi biliyordu.

Pappus Problemi'ni anlattıktan sonra, önce Fermat'nın ardından Descartes'ın çözümünü açıklayacağım. Konuşmamı Apollonyus'un konikler kuramından kısaca sözederek bitireceğim.

Pappus Problemi. ***Pappus Problemi***'nin diğer adı ***üç ve dört doğru problemi***dir. Dört doğru problemini ele alalım önce. Aşağıdaki şekilden takip edin. Dört ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 doğrusuyla dört θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 açısı verilmiş olsun. (Elbette ne Descartes ne de Pappus benzer simgeler kullanmışlardır.) C, herhangi bir nokta olsun. Verilmiş bu her dört



doğru için, C'den geçen ve ℓ_i doğrusuyla θ_i açısında kesişen bir doğru çizelim. Tabii her $i = 1, 2, 3, 4$ için $\theta_i \neq 90°$ ise bu doğrulardan ikişer tane vardır, özel bir seçim yapmamıza gerek yok, ikisinden biri kabulümüzdür. Dört yeni doğru daha elde ettik. Bunlara, şekilde de görüldüğü gibi, CB_1, CB_2, CB_3 ve CB_4 diyelim. Daha bitmedi. Ayrıca bir de verilmiş bir α sayısı olsun ve son bir koşul daha koşalım. Verilmiş doğrulardan ikişer ikişer seçerek iki grup belirleyelim, örneğin bir yanda ℓ_1 ile ℓ_2 doğruları, öte yanda ℓ_3 ile ℓ_4 doğruları. Son koşul

$$CB_1 \cdot CB_2 = \alpha \cdot CB_3 \cdot CB_4 \tag{1}$$

denklemiyle ifade edilir, yani CB_1 ile CB_2 uzunluklarının çarpımıyla CB_3 ile CB_4 uzunluklarının çarpımı arasındaki oran α sayısına eşit olmalı.

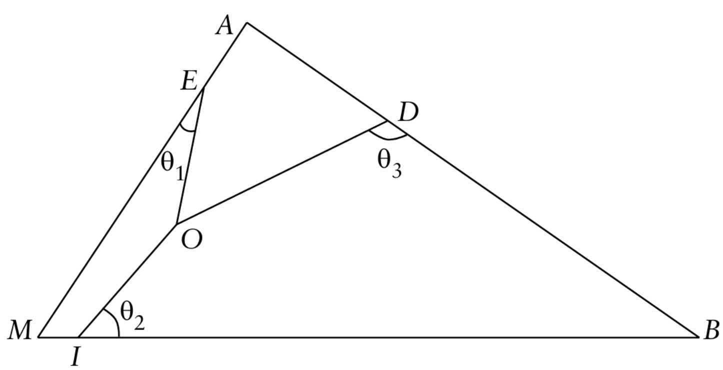
Elbette her C noktası (1) koşulunu sağlamaz, ama bazıları sağlayabilir. İşte ***Pappus Problemi,*** bu koşulu sağlayan C noktalarının oluşturduğu geometrik yerin ne olduğunu sorar.

Dört doğru problemi olarak anılan bu problem eski Yunanlılar tarafından incelenmiş, belki de çözülmüştü. 17'nci yüzyılda, Hollandalı dilci Jakobus Golius, Pappus'ün yazılarında bulduğu problemi Descartes'a, Fermat'ya ve başkalarına sordu.

Fermat, çözümüyle Descartes'tan daha usta olduğunu göstermiş olabilir, ama Descartes'ın çözümü de matematikte yepyeni bir çığır açmıştır.

Fermat'nın Çözümü. Fermat'nın çözümüyle başlayalım, onunkisi bazı bakımlardan Descartes'ınkinden daha kesin.

Fermat dört doğru problemini değil üç doğru problemini çözmüştür. Bu problemde üç doğru ile üç açı verilmiştir. Fermat'nın kullandığı simgeleri kullanarak problemi ve çözümünü anlatalım.



Yukardaki şekilde AM, MB ve BA problemde verilmiş olan ℓ_1, ℓ_2 ve ℓ_3 doğrularıdır. Ayrıca bir de θ_1, θ_2 ve θ_3 açıları verilmiş olsun. O, düzlemde herhangi bir nokta olsun. E, I, D noktaları sırasıyla AM, MB, BA doğruları üstünde olsun, öyle ki OE, OI ve OD doğrularının bu doğrularla yaptıkları açılar sırasıyla θ_1, θ_2 ve θ_3 olsun. Ayrıca,

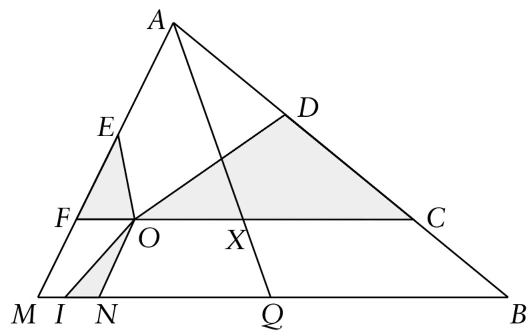
$$OE \cdot OD/OI^2 = \alpha \tag{2}$$

denklemini sağlamasını istediğimiz bir de α sayısı verilmiş olsun.

Problemde sadece O noktası keyfi seçiliyor. Bu O noktası verildiğinde OE, OI ile OD doğrularını verilen θ_1, θ_2 ve θ_3 açıları oluşacak biçimde çizebiliriz. Fakat ikinci denklemden dolayı O noktası büsbütün keyfi olamaz. İşte Pappus, yukardaki (2) koşulunu sağlayan O noktalarının belirlediği geometrik yerin ne olduğunu sorar. Fermat bu geometrik yerin bir konik olduğunu kanıtlamıştır. Kanıtını anlatmaya devam edelim. Ama önce üç doğru probleminin dört doğru probleminin özel bir hali olduğuna dikkatinizi çekerim; nitekim dört doğru probleminde $\ell_3 = \ell_4$ ve $\theta_3 = \theta_4$ alırsak, üç doğru problemini elde ederiz.

Q, MB aralığının orta noktası olsun. A ve Q noktalarını bir doğruyla birleştirelim. FOC doğrusu bir sonraki şekildeki gibi O'dan geçsin ve MB'ye paralel olsun. ON doğrusu ise, O noktasından geçip MA doğrusuna paralel olsun.

OEF, ODC ve OIN üçgenlerinin 9 açısı da problemin verileri tarafından belirlenmiştir. Anlatayım.



Bir defa, OEF, ODC ve OIN açıları θ'lar tarafından verilmiştir. Ayrıca, FC doğrusu MB doğrusuna paralel olduğundan EFO ve DCO açıları ℓ_1, ℓ_2 ve ℓ_3 doğruları tarafından belirlenir. Ayrıca ONB açısı AMB açısına eşittir ve bu son açı da ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları tarafından belirlenir.

OEF ve ODC üçgenlerinin açıları bilindiğinden OF/OE ve OC/OD oranları da bilinir. Ayrıca $EO \cdot OD/OI^2$ oranı verilmiştir. O zaman,

$$OF \cdot OC/OI^2$$

oranı

$$EO \cdot OD/OI^2 \cdot OC/OD \cdot OF/OE$$

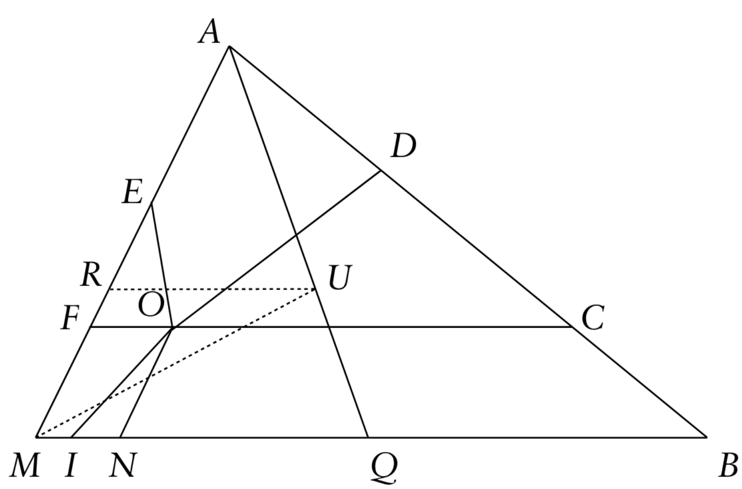
çarpımına eşit olduğundan, $OF \cdot OC/OI^2$ oranı da bilinir. OIN üçgeninin açıları bilindiğinden, OI^2/ON^2 oranı da bilinir, dolayısıyla,

$$OF \cdot OC/ON^2 = FO \cdot OC/OI^2 \cdot OI^2/ON^2$$

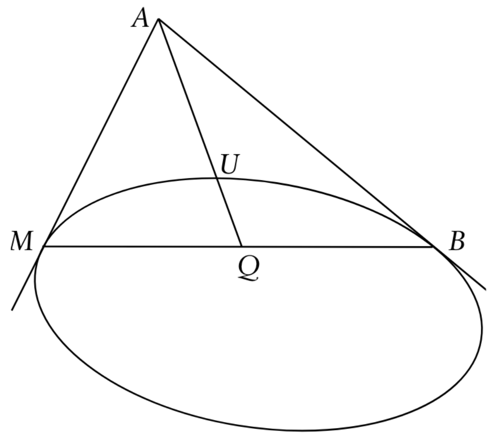
oranı da bilinir. FM uzunluğu ON uzunluğuna eşit olduğundan $OF \cdot OC/FM^2$ de bilinir. Bu sayıya β diyelim. Şimdi AQ doğrusu üzerinde öyle bir U noktası seçelim ki, eğer (aşağıdaki şekildeki gibi) UR doğrusu MB doğrusuna paralelse,

$$UR^2/RM^2 = \beta = OF \cdot OC/FM^2 \tag{3}$$

olsun. (Eğer $OF = OC$ olabilseydi, O noktası U noktası olurdu.)

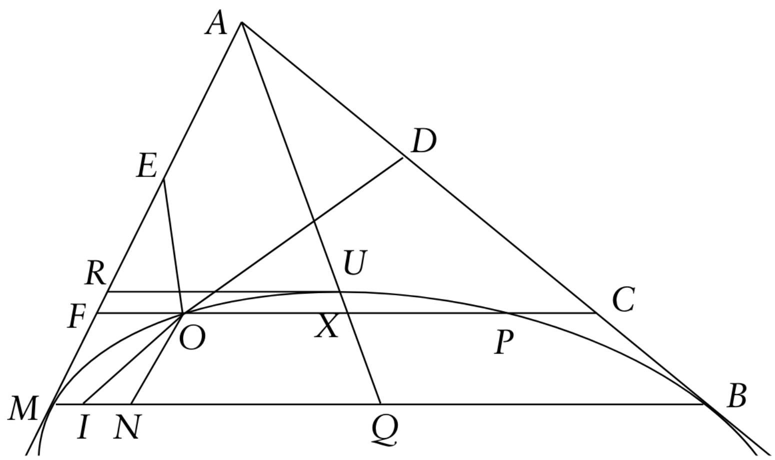


Fermat kanıtı şöyle bitirir: Aranan geometrik yer, çapı AQ olan, U, M ve B noktalarından geçen ve M ve B noktalarında teğetleri MA ve AB doğruları olan koniktir.



Fermat'nın okurlarının tersine dinleyicilerim koniklerin çapının ne olduğunu bilmeyebilirler. Bunu daha sonra anlatacağım. Okulda öğrenilenin tersine, bir konik aslında ***konik kesit eğrisi***dir; dolayısıyla şekildeki koniği üç boyutta düşünmemiz gerekiyor. Bu konuya da daha sonra değineceğiz. Fermat, okurunun Apollonyus'u iyi bildiğini varsaydığından, anlatımı bizimkinden daha kısadır.

Fermat, O noktasının bulunduğu tarafta değil de, eğrinin diğer tarafında bulunan, yukarda betimlenen konikle FC doğrusunun kesiştiği bir P noktası alır. Anlaşılan Apollonyus'un kuramını iyi bilen biri için, bu kesişimin tam iki nokta içerdiği açıktır. Öyle bile olsa bu noktalardan birinin O olduğu



kanıtlanmalı. Kanıtlayalım: Kesişim noktalarından biri P, diğeri O' olsun. $O' = O$ eşitliğini kanıtlayalım. Apollonyus'un kullandığı çap kavramını henüz anlatmadık, ama gene de kullanacağız: AQ doğrusu koniğin çapı olduğundan ve Q noktası MB aralığının orta noktası olduğundan, $PF = O'C$. Dolayısıyla $PC = O'F$. Bunları aklımızda tutalım. Kuramının çok ileri sonuçlarını içeren Apollonyus'un üçüncü kitabının altıncı önermesine göre,

$$PF \cdot O'F/FM^2 = UR^2/RM^2.$$

Bu ve (3) sayesinde

$$PF \cdot O'F/FM^2 = OF \cdot OC/FM^2,$$

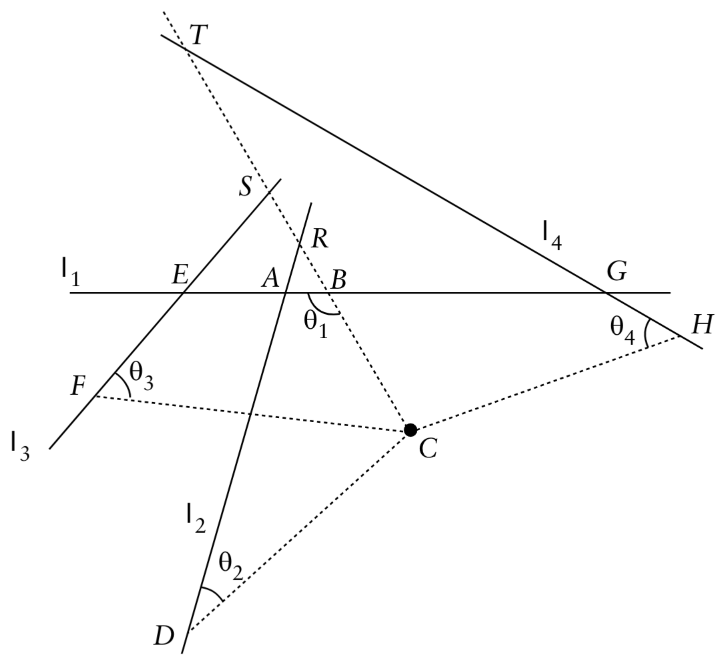
yani $PF \cdot O'F = OF \cdot OC$. Şimdi,

$$PF \cdot PC = O'C \cdot O'F = OC \cdot OF.$$

Y noktası FC doğrusunun üstünde oynak bir noktaysa, $YF \cdot YC = PF \cdot PC$ ikinci dereceden bir denklemdir, dolayısıyla iki çözümü vardır. Biri elbette P'dir. Diğeri ise, yukardaki eşitliklerden dolayı hem O hem de O''dür. Bu nedenle $O' = O$.

Konuşmanın sonunda, Descartes'ın kanıtını da verdikten sonra Apollonyus'un geliştirdiği kurama döneceğiz ve "koniğin çapı"nı tanımlayacağız.

Descartes'ın Çözümü. Descartes üç doğru problemini değil dört doğru problemini çözmüştü. O da Fermat gibi Apollonyus'un kuramına dayandırmıştı kanıtını. Fakat Descartes Apollonyus'un yazılarını Fermat kadar iyi bilmiyordu gibi geliyor bana.



Kanıtı anlatmak için Descartes'ın makalesinde bulunan ve biraz değiştirerek yukarıya aldığımız şekli kullanacağız. Bu şekildeki harşendirmeyle (1) denklemi

$$CB \cdot CD = \alpha \cdot CF \cdot CH \tag{1}$$

denklemine eşdeğerdir.

"La géométrie" adlı makale Descartes'ın ünlü felsefi eseri "Discours de la méthode"un (Metot Üzerinde Konuşma) bir ekidir. Eserinde de belirttiği üzere, Descartes, Pappus'ün problemini çözmek için felsefi eserinde anlattığı yöntemi matematiğe uyguladığını iddia eder. Descartes'ın bu iddiası biraz abartılı olsa da, hem felsefi eseri hem de ekini okumanızı tavsiye ederim.

Descartes, ana uzunluklar olarak AB ile CB uzunluklarını seçer. AB uzunluğunu x olarak ve BC uzunluğunu da y olarak gösterir. x ile y uzunluklarının daha bilinmeyen eğride bulunan C noktasının çağdaş anlamda koordinatları olduğuna dikkatinizi çekerim. (ℓ_1 doğrusu, A noktası ve θ_1 açısı bilindiğinden, x ve y uzunlukları bilinirse, önce B sonra da C noktası bulunabilir.) Elbette bu koordinatlar alışık olduğumuz dik koordinat sistemine uymuyorlar, ama gene de C noktasını belirlediklerinden koordinattırlar.

Descartes, (1) formülünde beliren CB, CD, CF ve CH uzunluklarını x, y ve bilinen uzunluklar cinsinden yazar teker teker. CB zaten y olarak verilmiştir, Descartes'ı izleyerek diğerlerini bulalım.

ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 doğruları ℓ_1 doğrusunu A, E ve G noktalarında keserler. Bu doğrular, şekilde gösterildiği gibi CB doğrusunu da sırasıyla R, S ve T noktalarında kessinler.

RAB ile RBA açıları veriler tarafından belirlenmiş (yani değişmez) olduklarından, hem ARB üçgeninin açıları hem de AB ile BR arasındaki oran belirlenmiştir. Bu oran $z : b$ olsun. Ne z ne de b niceliğinin belirlenmiş olduğuna dikkatinizi çekerim, yalnız AB ile BR arasındaki oran olan z/b sayısı belirlenmiştir. Descartes böylece $RB = bx/z$ denklemini ve buradan da

$$CR = y + bx/z$$

denklemini elde eder.

Descartes pozitif sayıları tercih ettiğinden, B'nin C ile R arasında bulunduğu durumda son denklemi kullanır, fakat Descartes için fazladan iki incelenecek durum daha vardır. R noktası C ile B noktasının arasındaysa $CR = y - bx/z$ denklemini elde eder. Öte yandan C noktası B ile R noktasının arasındaysa, $CR = -y + bx/z$ denklemini kullanır.

Anlatılan yöntemi uygulamaya devam edelim. RDC açısı verilmiş olduğundan ve CRD açısı bilinen BRA açısına eşit olduğundan, DRC üçgeninin açıları ve dolayısıyla CR ile CD kenarları arasındaki oran bilinmektedir. Bu oran $z : c$ olsun. Şu halde CR kenarı $y + bx/z$ sayısına eşit olduğundan,

$$CD = CR \cdot CD/CR = cy/z + bcx/z^2.$$

z'nin sadece her uzunluğu bir sayıya dönüştüren birim olduğunu vurgulayalım.

Ayrıca, AB, AD ve EF doğruları verilmiş olduğundan, AE aralığının uzunluğu da verilmiştir. Descartes bu uzunluğu k harfiyle gösteriyor. O zaman

$$EB = k + x$$

olur. Ama dediğim gibi, Descartes pozitif sayıları tercih ettiğinden, yalnızca şekildeki gibi A noktasının EB aralığında olduğu durumun değil, her durumun üstünde ayrı ayrı duruyor. Örneğin B noktası EA arasında bulunursa, EB uzunluğu $k - x$ sayısına eşit olur veya E noktası BA arasında bulunursa uzunluk $-k + x$ olur. Ben yalnız şekilde gösterilen durumu inceleyeceğim.

Descartes, devam ederek, ESB üçgeninin açılarının verilmiş olduğunu dikkate alıp, EB ile BS arasındaki oranın belirlenmiş olduğunu kaydediyor. Bu oran $z : d$ olsun. Şu halde

$$BS = EB \cdot BS/EB = (dk + dx)/z$$

ve durum şekildeki gibiyse

$$CS = CB + BS = (zy + dk + dx)/z.$$

Durum şekildeki gibi değilse, formül benzerdir fakat bazı artı işaretlerinin yerine eksi işaretler konması gerekir.

Descartes FSC üçgeninin her açısının bilindiğini dikkate alıyor. Dolayısıyla CF ile CS uzunluğu arasındaki oran biliniyor. Bu oran $e : z$ olsun. Demek ki,

$$CF = CS \cdot CF/CS = (ezy + edk + edx)/zz.$$

Descartes AG uzunluğunu ℓ harfiyle gösteriyor. Ondan sonra, BGT üçgeninin her açısı bilindiğinden, BT ile BG uzunluklarının oranı olarak not edilen $f : z$ de belirlenmiş oluyor. Dolayısıyla,

$$BT = BG \cdot BT/BG = (f\ell - fx)/z,$$
$$CT = BC + BT = (zy + f\ell - fx)/z$$

Nihayet Descartes TCH üçgenini kullanarak CH ile CT uzunluğu arasındaki oranın belirlenmiş olduğunu görüp bu oranı $g : z$ olarak kaydediyor ve son olarak

$$CH = CT \cdot CH/CT = (gzy + gf\ell - gfx)/zz$$

denklemini elde ediyor.

Böylece, CB, CD, CF ile CH uzunlukları bulunmuş oldu:

$$\begin{aligned} CB &= y, & CD &= \frac{czy + bcx}{z^2}, \\ CF &= \frac{ezy + dek + dex}{z^2}, & CH &= \frac{gzy + fg\ell + fgx}{z^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Yıldız'daki derslerimde bu denklemleri incelemeden önce, Descartes'ın kaydetme dediği süreci tekrar çağdaş açıdan gözden geçirmiştik. Descartes'ın matematik yazılarının hepsinin bugünkü gözle incelenmesinin çok önemli olmasına karşın, bu konuşmada Descartes'ın fikirlerinin daha derin anlamını anlatmaya uğraşmıyoruz.

Descartes'ın kanıtı nasıl bitirdiğini anlatmadan önce, bizim nasıl bitireceğimizi anlatalım. $\alpha' = \alpha eg$ alarak, (1) ve (4) denklemlerinden

$$y\left(\frac{cz}{y} + \frac{bcx}{z^2}\right) = \alpha'\left(\frac{zy + dk + dx}{z^2}\right)\left(\frac{zy + f\ell - fx}{z^2}\right) \tag{5}$$

denklemini elde ederiz. Bu, iki bilinmeyenli ve ikinci dereceden bir denklem olduğundan, bu denklemin bir konik tanımladığını biliyoruz.

Ancak Descartes'ın o zaman da mevcut olan bilgilerin hangilerini kullanıp, bulduğu denklemin tanımladığı hattın bir konik olduğunu nasıl ispatladığını anlamak istiyoruz. Bu amaçla Descartes'ın anlatısını incelemeye devam edelim.

Descartes (1) denklemini değil,

$$CB \times CF = CD \times CH \tag{6}$$

denklemini inceler. Yani Descartes α sabitini 1 alır ve ayrıca CD ile CF doğrularını değiş tokuş eder. (4) ve (6)'yı kullanarak ve biraz hesap yaparak,

$$y^2 = \frac{(-dekz^2 + cfg\ell z)y + (-dez^2x - cfgzx + bcgzx)y + bcfg\ell x - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

eşitliğine varırız. Descartes denklemi bizim gibi yazmıyor ve paydada negatif sayılar kullanmıyor. Dolayısıyla ez sayısı cg sayısından daha büyük değilse, $+$ ile $-$ yer değiştirirler. Tabii ez ile cg sayısı birbirine eşit olabilir, ama bunu gözden kaçırıyor. Hiç olmazsa böylece bu durumu incelememiş oluyor...

Her sayının pozitif olmasında ısrar ettiğinden, Descartes'ın dört farklı durumu incelemesi lazımdır. Bu dört duruma ve bazı istisnai durumlara aldırmıyoruz. Denklemi basitleştirmek amacıyla,

$$\frac{cfg\ell z - dekz^2}{ez^3 - cgz^2} = 2m$$
$$\frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2} = \frac{2n}{z}$$

tanımlarını yaparsak yukardaki denklem

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfg\ell x - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

olarak yazılır. Derecesi 2 olan bu denklemi Descartes da biz de hemen çözebiliriz:

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnx^2}{z^2} + \frac{bcfg\ell x - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}.$$

Formülü daha da kısaltmak için, Descartes o ve p tanımlarını şöyle yapıyor:

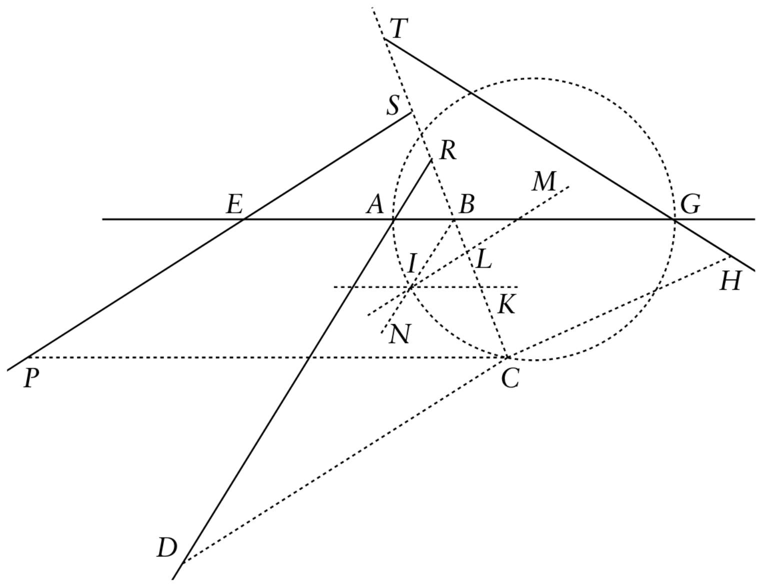
$$o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfg\ell}{ez^3 - cgz^2},$$
$$-\frac{p}{m} = \frac{nn}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}.$$

Tabii Descartes burada hiç farketmeden, m'nin sıfır olmadığını sanıyor ve böylece,

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2} \tag{7}$$

basit çözümüne ulaşıyor.

Şimdi Descartes'tan aldığım aşağıdaki şekle bakalım. (Makalesinin görebildiğim her baskısında, şekilde ILK açısı hep dik açı gibi duruyor. Şeklin tam doğru olmaması Apollonyus sayesinde o kadar önemli değil ancak anlaşılması zor ve kimse pek bir şey anlamaz gibi geliyor bana.)



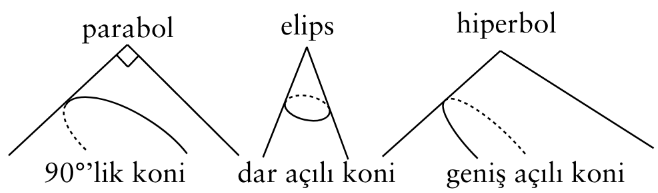
Şekilde ILM ile CLB doğruları önemlidir. (7)'de y sayısına eşit olan BC aralığı verilmiştir. BC doğrusunda bulunan L noktasını Descartes

$$LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}, \tag{8}$$

yani $BL = m - nx/z$ olacak şekilde seçmiştir. Descartes bu sayının negatif olabileceğini farketmiyor; en azından bu olanağa dikkatimizi çekmiyor. O kadar da önemli değil. Ancak ILK açısı dik değilse bile, (8)'in bir konik tanımladığı çözümün anafikirlerinden biridir. Apollonyus, genel kuramının çerçevesinde bunu MÖ ikinci yüzyılda kanıtlamıştı.

Galiba Apollonyus, Arşimet'in yanısıra Büyük İskender sonrası matematikçilerinin en önemlilerinden biridir. Apollonyus'un yazdıklarını henüz okumadım. Ancak İngiliz tarihçisi Thomas Heath'in yazdığı **Apollonyus of Perga** adlı güzel kitapta Apollonyus'un konikler üzerine yazdığı sekiz ciltten bugün mevcut olan yedisinde bulunan hemen hemen tüm önermeler yorumlanıp açıklanmıştır. Bu derin ve karmaşık kuramı bugün anlatmam mümkün değildir. Size sadece Apollonyus'un koniklere dair bazı kavramları nasıl tanımladığını ve Fermat'yla Descartes'ın uyguladığı önermelerinden en basitlerini nasıl kanıtladığını kısaca nakletmek isterim.

Önce, konikçilerin öncülerinin kullandığı konik tanımını anlatayım. Bu tanım Apollonyus'un kullandığı tanımdan değişiktir. Aşağıdaki şekilde üç koni ile üç konik gösteriliyor. Koniler dik konilerdir, yani şöyle inşa edilmişlerdir: Bir çemberin merkezinden geçen ve çemberin düzlemine dik olan bir doğru çizilsin. ***Koninin zirvesi*** bu doğrunun herhangi bir noktası olabilir. Koni, seçilen



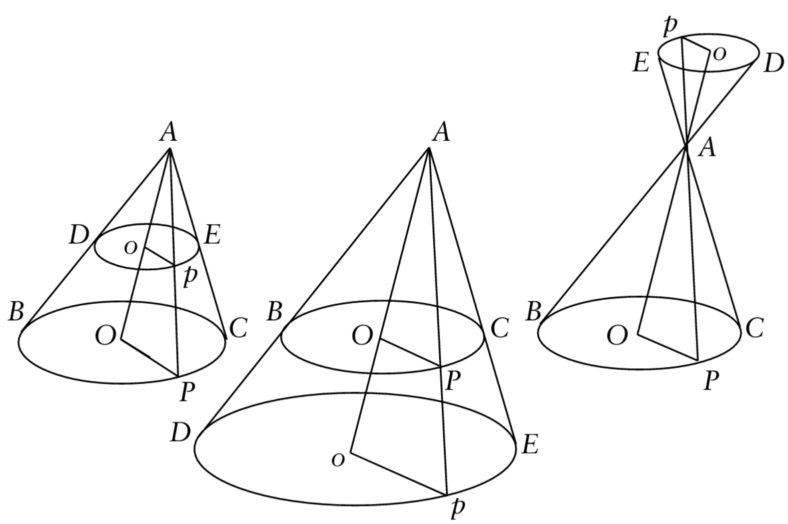
zirveyle çemberin noktalarını birleştiren ışınlardan oluşur. Bu ışınlara ***yapıcı ışınlar*** ya da kısaca ***yapıcı*** diyebiliriz. Apollonyus öncesi konikçilerin kabul ettikleri tanıma göre herhangi bir yapıcıya **dik** olan bir düzlemle koniyi kesiştirirsek bir ***konik*** elde ederiz. Şekilde, birazdan ayrıntılarıyla açıklayacağımız üç değişik şık gösteriliyor.

Zirveden ve çemberin merkezinden geçen herhangi bir düzlem alalım. Yukardaki şekilde bu düzlem sayfanın düzlemidir. Çizilmiş düzlemin koniyle kesişimi iki yapıcıdan ibarettir. Şekilde de gösterildiği gibi bu iki yapıcı arasındaki açı dik, dar ya da geniş olabilir; bu açıya göre elde edilen koniğe sırasıyla ***parabol, elips*** veya ***hiperbol*** denir.

Yukardaki tanım çağdaş tanım kadar genel değildir, zira, bugün kullandığımız anlamda, koniyi hangi düzlemle kesiştirirsek kesiştirelim gene bir konik elde ederiz. Apollonyus da bugün kullandığımız tanımı kullanmıştı.

Önce Apollonyus'un bir koniden ne anladığını anlatalım, koniğe daha sonra geçeceğiz.

Arka sayfada aynı koni üç kez çizilmiştir. Zirvesi A, tabanı ise BCP çemberidir. Tabanın merkezi olan O noktasıyla zirveden geçen doğru koninin ***ekseni***dir. Öncüleriyle Apollonyus'un tanımları arasındaki fark, Apollonyus'un tanımında, koninin ekseninin, koniyi tanımlayan çemberi içeren düzleme dik olmamasıdır. Bu daha genel tanımda konuyu oldukça basitleştiren bir fark daha vardır. Koniyi inşa ederken, zirveden geçen yapıcıyı taban çemberine değecek şekilde döndürerek bir yüzey çizeriz. Apollonyus öncesinde alışılagelmiş anlamda bir koni ele alındığından, yapıcı o zamanlar doğrunun yarısı, yani sadece bir ışındı. Ama Apollonyus'a göre koni, zirvenin her iki yönüne doğru uzayan bir çifte koni olduğundan, yapıcı tam bir doğrudur. Koninin tabanı gene bir çemberdir. Bu çemberi içeren

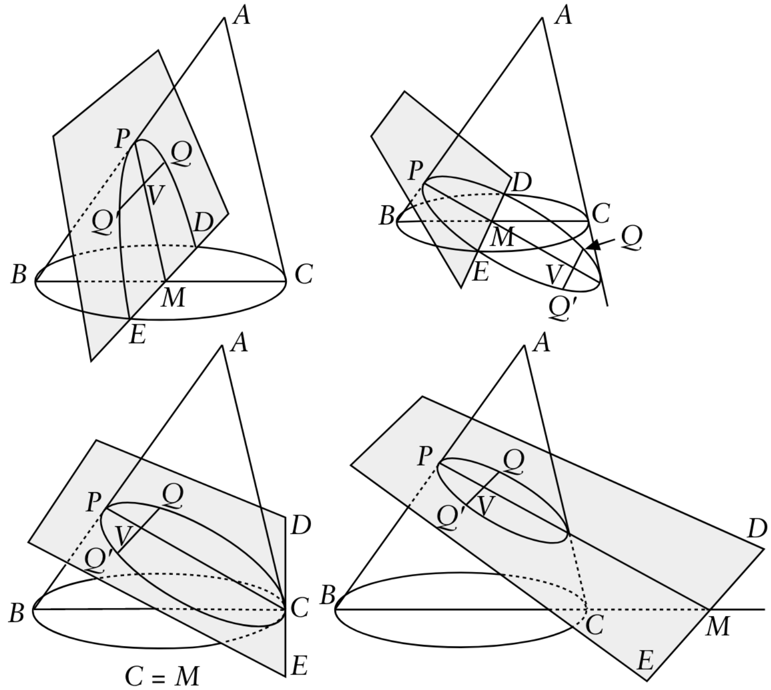


düzleme paralel olan ve koninin zirvesinden geçmeyen her düzlem koniyi gene bir çemberde keser ve bu çemberlerin her biri koninin bir tabanıdır.

Gelelim koniğe… Apollonyus'un kullandığı konik tanımıyla önceki tanım arasında en önemli fark koniyi kesen düzlemin durumudur. Öncülerinin tanımında koniyi kesen düzlem bir yapıcıya diktir, oysa Apollonyus'un tanımında düzlemin durumu keyfidir. Koni çifte koni olduğundan bir düzlemle kesişimi boş olamaz. Düzlem koninin zirvesini içermezse, kesişim Apollonyus'un anlamında bir koniktir. Kesen düzlem tabanı içeren düzleme paralel değilse, iki düzlemin kesişimi bir doğrudur. İki düzlem birbirine paralelse, tabanı değiştirerek iki düzlemin aynı olduklarını varsayabiliriz ve bu durumda da iki düzlemin kesişimi gene bir doğru içerir.

Aşağıdaki dört şekilde taban çember $BDCE$ çemberidir. Koniği belirleyen düzlem PDE düzlemidir. Tabanı içeren düzlemle eğriyi belirleyen PDE düzleminin kesişimi DME

doğrusudur (iki düzlem aynıysa, bu doğru, düzlemin herhangi bir doğrusu olabilir.) BC, çemberin DME doğrusuna dik olan çapı olsun. Eklediğimiz ABC düzlemi BC'yi içeren

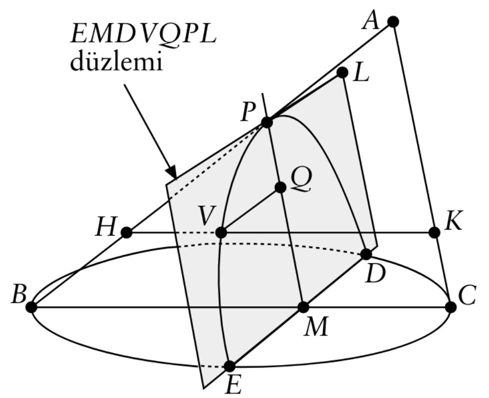


ve koninin zirvesinden geçen düzlemdir. ABC düzleminin DME doğrusuna dik olmak zorunda olmadığına dikkatinizi çekerim.

Bu temel nesneleri belirledikten sonra, koniğe dair bazı temel kavramları tanımlayabiliriz. İlk olarak, eğrinin ***ekseni*** PM doğrusudur. Apollonyus, buna eğrinin ekseni değil eğrinin ***çapı*** diyor. Ayrıca, şekilde DME doğrusuna paralel olan QQ' aralığı V noktasıyla ikiye bölünür. Bu nedenle PM doğrusuna konik kesit eğrisinin çapı denilir. Ama burada dikkatli olmak lazım: Bir konik birçok değişik koni tarafından belirlenebileceğinden, aynı koniğin birçok değişik çapı vardır. QQ', eğrinin bir ***kiriş***idir. Apollonyus QV aralığına ordinat ve PV aralığına apsis diyerek, her koniğin noktalarının birazdan aşağıda göstereceğimiz ikinci dereceden bir denklemi sağladığını kanıtlar, yani Apollonyus aslında bir bakıma Descartes'ın cebirsel yönteminin sahibidir. Biz apsis ve ordinatı Descartes gibi x ve y işaretleriyle ifade ederiz.

Şekillerde de gördüğümüz gibi, eğri elips, parabol ya da hiperbol olabilir.

Apollonyus, birinci kitabında Descartes'ın kullandığı temel teoremleri, diğer kitaplarında Fermat'nın kullandığı daha derin ve zor olan teoremleri de içeren onlarca önerme ispatlar. Ben yalnız Descartes'ın kullandığı en basit teoremleri anlatacağım. İspatları vermeyeceğim. Sadece teoremlerin önermelerini vererek Descartes'ın Apollonyus'a ne kadar borçlu, ondan ne kadar etkilenmiş olduğunu anlatabilirsem amacıma ulaşmış olacağım.



Aşağıdaki şekildeki $BECD$ çemberinin DME kirişine dik olan BC çapını içeren ABC düzleminin koniyle kesişimi AB ve AC doğrularıdır. Özel bir durum olarak, koniyi bu iki doğrudan birine (diyelim AC'ye) paralel olan bir düzlemle kesiştirelim. Böylece elde edilen koniğin çapı PM doğrusudur ve bu özel durumda AC 'ye paraleldir. Eğrinin çapıyla koninin kesiştiği P noktası, koniyle konik tarafından tamamen belirlenmiştir. PL doğru parçası, koniği tanımlayan PDE düzleminde ve PM'ye dik olsun, ayrıca $PL \times BA \times AC = PA \times BC^2$ eşitliği sağlansın. Buradan, Apollonyus'un önemli bir önermesine göre, koniğin her Q noktasının,

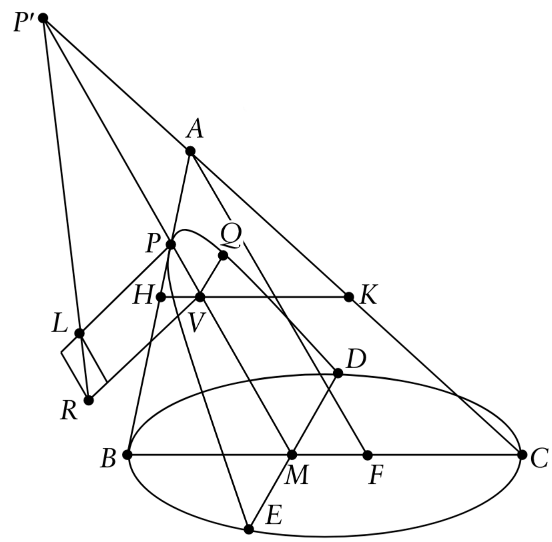
$$QV^2 = PL \times PV \tag{9}$$

denklemini sağladığı çıkar. Apollonyus denklemi bizden daha geometrik bir biçimde ifade etmişti. Oysa siz, Descartes gibi, bu denklemin

$$y^2 = \alpha x \tag{9'}$$

biçiminde olduğunu görüp bir parabol denklemi olduğunu hemen anlarsınız. Bu denklem, Descartes'ın elde ettiği (8) denkleminin özel bir durumudur. Hem Apollonyus'un hem Descartes'ın yazılarında kirişlerin genellikle çapa dik olmadığına dikkatinizi çekerim.

Parabolü hallettik. Şimdi ilkin hiperbol için, sonra da elips için Apollonyus'un ispatladığı denklemleri vereyim. Koniyi kesen düzlem bu sayfadaki şekillerdeki gibi koninin bir yapıcısına paralel değilse, çifte koniyle kesişimi ya bir ya da iki parçadan ibarettir; birinci durumda kesişime ***elips*** denir, ikinci durumda ise ***hiperbol.***



Eğer kesişim hiperbolse, hiperbolün PM çapı, ABC düzleminde bulunan CA doğrusunu P' noktasında kessin. Koniyi tanımlayan PDE düzleminde bulunup PM çapına dik olan ve P noktasından geçen PL doğru parçasının uzunluğu için

$$PL : PP' = BF \times FC : AF^2$$

denklemi doğru olsun. Bu denklem PL uzunluğunu, dolayısıyla L'yi belirliyor. VR doğrusu PL'ye paralel olsun ve PL ile VR doğruları R'de kesişsinler. Apollonyus'un bir başka önemli önermesine göre,

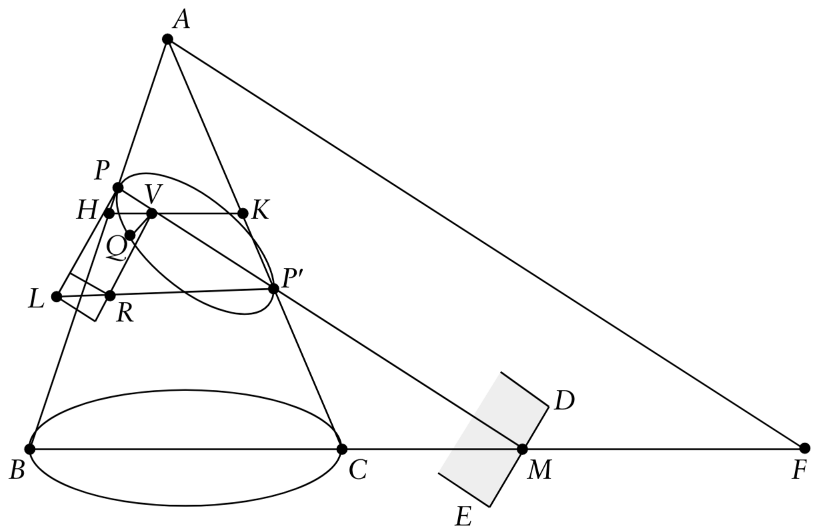
$$QV^2 = PV \times VR. \tag{10}$$

PL uzunluğunun yerine α ve PP' uzunluğunun yerine β yazarsak, bu denklemin yerine

$$y^2 = x(\alpha + \alpha x/\beta) = \alpha x + \alpha x^2/\beta \tag{10'}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem de Descartes'ın denkleminin özel bir durumudur.

Son şekli kullanarak elipsi de inceleyelim. Tabii elipse dair sav da hiperbole dair sava benzerdir. Konik elips ise eğriyi tanımlayan düzlemle AC doğrusunun kesiştiği P' noktası A noktasından başlayıp C noktasından geçen ışında bulunur. O zaman koniyi tanımlayan çemberi değiştirerek, tabanı, P' noktası A'yla C arasında bulunacak biçimde seçebiliriz. PP' doğrusu tabanı içeren düzlemle M noktasında kesişsin. A'dan geçen ve PM'ye paralel doğru BC'yi F noktasında kessin. PL aralığı gene



PM doğrusuna diktir, koniği tanımlayan düzlemde bulunur ve uzunluğu

$$PL : PP' = BF \times FC : AF^2$$

denklemiyle belirlenir. P' ile L birleştirilsin. PL doğrusuna paralel olup $P'L$ doğrusuyla R noktasında kesişen VR doğrusu çizilsin. Şu halde, Apollonyus'un üçüncü asıl önermesi olarak,

$$QV^2 = PV \times VR \tag{11}$$

denklemini elde ederiz.

Eğri elips ise, VR uzunluğu PL uzunluğundan daha küçüktür. (11) sayesinde, kenarı QV ordinatı olan karenin alanı, kenarları PL parametresiyle PV apsisi olan dikdörtgenin alanından daha küçüktür. Fark, kenarı PV ordinatına eşit olan bir karenin alanına orantılı olarak ifade edilebilir. $y = QV$, $x = PV$, $\alpha = PL$ ve $PP' = \beta$ ise, hiperbol için elde ettiğimiz (10′) denklemine benzer olan

$$y^2 = \alpha x - \alpha x^2/\beta \tag{11′}$$

denklemi doğrudur. Bu denklem de Descartes'ın denkleminin özel bir durumudur.

Bildiğimiz gibi, Descartes'ın denklemiyle başlayıp kareye tamamlayarak, biz aslında tam olarak Apollonyus'un yazısında bulunan (9′), (10′) ve (11′) denklemlerini elde ederiz. Apollonyus hem her koniğin bu denklemlerden biri tarafından belirlendiğini, hem de, biraz daha zor olarak, bu denklemlerden hepsinin bir konik belirlediğini kanıtlamıştı. Descartes Apollonyus'a ne kadar borçlu olduğunu itiraf etmez.

Bugün, Apollonyus'un birinci kitabının ardından gelen bilinen altı kitabında geliştirdiği çok daha zor kurama dokunmadık. Özellikle Fermat'nın kullandığı teoremleri anlatmadık.

Eğer Rönesans matematikçilerinin eski Yunanlı matematikçilere ne kadar yakın olduğunu biraz daha iyi anlamışsak, konuşmamın başarılı olduğunu düşünebilirim.

Compiled on April 18, 2025.