DEKART, FERMAT, GALOIS İLE GROTHENDİECK

ROBERT P. LANGLANDS

İçindekiler

Kücük Önsöz. Ben tarihci değil, matematikçiyim. O zaman buraya geldiğimde konum olarak matematiği değil matematik tarihini seçerek maksatlarım ile sebeplerim nedir diye, sorabilirsiniz. Çok genç değil ama oldukça genç olarak hem matematik zevkli olduğunu hem kendim matematik açısından tam yeteneksiz olmadığımı anladım. Elbette öğretmenlerim vardı ama en önemli olarak tek başıma matematik üzerine tefekkür etmeyi sevdiğim anladım. Çoktan sonra şimdi çalıştığım Ileri Araştırmalar Merkezi'ne gelip tarihcilerle tanıştığımda tarihle de yüzeyselce ilgilenmeye başladım. Hele daha yaşlı olarak dilini öğrenip bazı memleketlerin tarihi, simalarını yakından tanımaya başladım.

Fakat erken rastladığım bazı yazıların neticesi olarak, matematik tarihi, genellikle bilim tarihi sevmiyordum. Nedeni şimdi takdir edebilirim. Hem matematikte hem de tarihde zevkler somut ayrıntılarda saklamıştır. Matematikte kendiniz keşfettiğiniz veya en azından kendiniz tam anladığınız iddialar ile ispatlarından en çok hoşnut olursunuz. Tarihın genel zamanda akışını bilmek yetmez. Tabii olayların ne zaman meydana geldiği, insanların hangi yılda doğup öldüğünü bilmek lazım, ama tarihi meclisi canlandırmak için mektupler, şahsi hatıralar okuyarak mecliste bulunan insanlara veya olaylara yaklaşmaya ihtiyaçımız var.

Bence matematik tarihinde yayımlanmış olan yazılarda sık sık ne bilime ne matematikçilerine ile zamanına yakın yaklaşılmaz. Belki bundan dolayı bu yazılar ne öğretici ne çekici değil. Halbuki matematik hem geçmişte hem çağdaş medeniyetin tarihine bağlı temel bir öğesidir. Matematikçi, matematik öğretmen veya matematik öğrenci olmamızın sayesinde, biz tarih boyunca yazılmış olan metinler, gerekse onları yorumlayan yazılar, okuyarak matematik üstatlarla ve en iyi matematikle aracı olmadan tanışmaya yetkiliyiz. Matematikçilerle ve keşfettikleriyle tanıştığımızda iki beklenmedik şeye rastlıyoruz. Ilk olarak sık sık eserlerine girdiğimizde geçmişteki matematik çağdaşdaki kadar heyecan verici ve bazen bugün inandığımızdan daha ilginçtir. Üstelik matematikçiler geleneksel tasvirine sık sık benzemiyorlar. Bazı yazarlar gerek kasten gerek saflıkla okuyucular kandırarak şahsıyatların hayran kaldıran özelliklerini abartır. Bu yolda yazılar kahramanlarına daha hayran kaldırır sanıyorlar.

Buraya gelip matematik tarihinden konuşup yeni keşfettiğim zevki size bulaştırmak isterim. Ana sorumlarumuzun farklı olmasına rağmen, araştırmada, eğitimde, veya matematik dışında olan alanda ise, bazı anlamlarda hepimiz aynı mesleğin üyeleriyiz ve istediğimiz kadar geçmişinin sahibiyiz.

İstanbul, Mayıs, 2004.
Bu metin ağda bulunur: https://publications.ias.edu/rpl/paper/2712.

Çıkardığımız netici basittir. Isterseniz beni dinleyebilirsiniz, fakat en önemli, vaktiniz olduğunda, kendiniz eskiden ve bugünden söz ettiğim yazılara dönmenizdir. Şimdi yaptığınızı bırakmanıza çağırmada değilim. Geçmişten yazılara dikkatinizi çektiğimde, onu şimdi yaptiğınızın yerlerine geçtirmek değil, yaptiğınıza bir ilave etmek isterim.

1. **Dekart.** Pitagorcular için Eflatun da için irrasyonel sayıları matematiğin ortasında bulunuyor. İlk hazırladığım metinde anlatiğım gibi, eski Yunanlılar irrasyonel sayıları hakkında ne bildiğini öğrenmek istersek, ilk adım olarak biz Öklid'in Öğeleri'nde bulunan kavramları izlememizdir. Eski Yunanlı geometrik cebiri anlamadan kuramlarını kavrayamaz. Ama dinleyicilerin hepsinin Ögeler'den bıktıklarından korkarak, başka bir konuyu başlayayım diye Dekart'ın ünlü *Discours de la méthode*'ın *La géométrie* adlanan ilavesi'ye dönüp onun ne içerdiğini anlatayım. Basit olduğundan her biraz matematik bildiği kimseye Dekart o makalede ne yaptiğini kolay anlatabilirim. Ama on dokuzuncu yüzyildaki önemli matematik tarihcisi Zeuthen'in anlattığı gibi Dekart'ı yeni olarak ne kesfettiğini gerçekten anlamak istersek, Apollonyus (M. E. 200) ne yaptığını anlamamız gerektir. Ama Zeuthen *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* adlı kitabını başlayarak Apollonyus'un konik kesit eğrileri araştırmasının temel yöntemlerinden birinin geometrik cebir olduğunu ısrar eder. Dolayısıyla biz ister istemez Öğeler'e dönmeliyiz.

Dekart'a gelmemizden evvel, bir ilke vurgulamak isterim. İnsanoğlu olarak biz her tarihi soruya bir cevap bulmak istemiyoruz. Bu sorular sık sık çok zordur. Bazıların cevabı yok. Yaşamımızda o kadar zamanımız değil ki biz tarihi her ayrıntı incelemek istemiyoruz. Fakat hiç bilmesek, biz başkaların bize söylediği her türlü yalana inanırız. Dolayısıyla tam cahil kalmak tehlikeli olabilir. Matematik tarihinde aynıdır. Biz eski zamanda keşfedilen her teorem veya Rönesans'da kim hangi kavram oluşturduğu bütün ayrıntılarla bilmek istemiyoruz ama hiç bilgimiz yoksa biz her meslektaşımızın veya cahil yazarın saçma lafları işitip okuyarak onlara inanarız ve sonra atmasyonlarını öğrencilerimize ve arkadaşımıza aktarız.

Biz eğriliğin oluşturmasını veya sayılar ile geometri arasındaki derin ve bazı anlamlarda akıl ermez bağlantılarla tanışmak, hem geometrik cebiri hem de Dekart meydana koyduğu yöntemleri anlamamız lazım. Dekart ve yöntemleriyle tanışdığımızda Dekart'un kişiliğin ve tartışma tarzının farkına varmadan kaçınamaz. Özellikle ispatladığı önermelerden daha ortaya çıkardığı yöntemlerden kıvanç duyarmıştı. Yöntemleri vurgulama eğilimi başka Fransız matematikçilerin bir niteliğidir. Mesela Galois ve Grothendieck çok güzel cümlerle meydana çıkardıkları yöntemlerin değeri ile güçünü savunuyor. Fransız münevver parlaklıklardan örnekleri olarak, yazılarının bazı satırları sunulması faydalı olur.

Galois ile Grothendieck arasında André Weil Almanya'da on dokuzuncu yüzyıl ile yirminci yüzyılın ilk yarısı boyunca süren bir gelişmenin sonuçu olan Alman sayılar kuramını İkinci Dünya Savaşının haraplığından kurtarıp kendisi irrasyonel sayıları, özellikle cebirsel sayıları, yalnız geometriye değil fakat geometri ve topolojıya bağlayan sanılar öne sürmüştü. Bu sanılar Grothendieck'in topolojide ve cebirsel geometride oluşturduğu kavramlara ve çağdaş sayılar kuramına yol açtı. Bu gelişmenin sonuçları ile sayılar kuramının güncel durumunu basit ve her matematikçi çekici saydığı şekilde anlatıp ama aynı zamanda eski Yunan dönemden şu yana önemli meydana gelen keşifleri takip edip bizim kavramlarımız ve yöntemlerimizin onlardan nasıl kaynakladığını nakletmek çok güzel olur.

Fakat az kapsamlı bir şekilde başlayarak, biz sadece *La Géométrie*'de ne bulunduğunu incelelim. Yani baştan başlayalım.[1] Bu makale Dekart'ın temel filozof fikirlerini sunduğu *Discours de la Méthode*'ın bir ilavesidir ama bu filozof yazını okuyup anlamadan felsefe değil matematik hakkında olan ilavesini inceleyebiliriz.

La Géométrie bir açıklamayla başliyor.

Avertissement

> *Jusqu'à ici j'ai taché de me rendre intelligible à tout le monde ; mais, pour ce traité, je crains qu'il ne pourra être lu que par ceux qui savent déjà ce qui est dans les livres de Géométrie : car, d'autant qu'ils contiennent plusieurs verités fort bien démontrées, j'ai cru qu'il serait superflu de les répéter, et n'ai pas laissé, pour cela, de m'en servir.*

Yani, filozof fikirlerinin sunarak onları herkesin anladığı şekilde ortaya atmış ama matematiğe gelince, Dekart kendisinin yalnız geometri üzerinde olan kitaplarda bulunun konuları daha öğrenmiş olan kimseler için yazdığını korkuyor zira bu kitapların birçok tamamen ispatlanmış olan hakikati içerdiğinden dolayı ispatlarını tekrarlanması lüzumsuz görünüyordu ve onlardan yararlanmaktan çekinmemişti.

İlavenin kesimlerine cüz diyebiliriz. Birinci cüzde temel geometrik işlemlerin cebirsel ifadesi anlatılıyor. Başlığı söyle:

Livre premier

> *Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites.*

Başlarken yalnız çemblerler ile doğru çizgiler kullanarak hangi meselelerin çözülebilmesi anlatacak fakat ilk olarak temel ilkesini ifade ediyor.

> *Her geometrik mesele kolayca şöyle bir hale getirilebilir ki bildiğimiz gerek olan tek bir şeydir, bazı çizilecek doğru çizgilerin boyu.*

Onu uygulamadan biz bu ilkeyi anlayamayız. Dekart'ın peşinden gidince bütün aritmetiğin yalnız dört veya beş işlemden ibaret olduğunu anlıyoruz. Temel işlemler toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kökler çekilme. Söyle Dekart'a göre geometride meselenin aradığımız çözümü bulmak için tek yapacağımız şey var. Onları bulabileceğimiz için hazırlanarak, onlara başkaları topluyoruz veya onlardan başkaları çıkarıyoruz. Ya teklik adlanan bir uzunluk seçilmis ise ve başka iki sayı verilmiş ise üçüncü bir sayiyi bulabiliriz ki üçüncü sayı ile iki sayıdan birisi arasındaki oran iki sayıdan diğeriyle teklik arasındaki orana eşittir. Bu işlem çarpmaya eşdeğerdir. Ilişkiyi denklemle ifade edersek daha açık olur.

$$a : c = b : 1 \iff ab = c.$$

Ya da onun ile iki sayıdan birisi arasındaki oran teklik ile iki sayıdan diğeri arasındaki oran eşit olan bir dördüncü sayı bulabiliriz. Bu işlem bölmeye eşdeğerdir. Gene ilişkiyi denklemle ifade ederiz,

$$d : a = 1 : b \iff d = \frac{a}{b}.$$

[1]Bile Galois ile Grothendieck'e erişmezsek, Dekart ile Fermat'ın geometrik üstundeki yazıları incelip o zamanki matematiğin eski Yunanlı matematikten vasıtasız kaynaklayarak ortaya çıkmasını anlayacağız. Şöyle matematiğin gelişmesi ile olgunlaşmasını yakından seyredebiliriz.

Nihayet ikinci veya herhangi bir katta teklik ile herhangi bir doğru çizgi arasında orta orantılı bulabiliriz. Bu karakök, küp kök filan çekilmesidir. Denklem kullanarak,

$$1 : x_1 = x_1 : x_2 = \cdots = x_{k-1} : x_k = x_k : a \iff x_1^{k+1} = a.$$

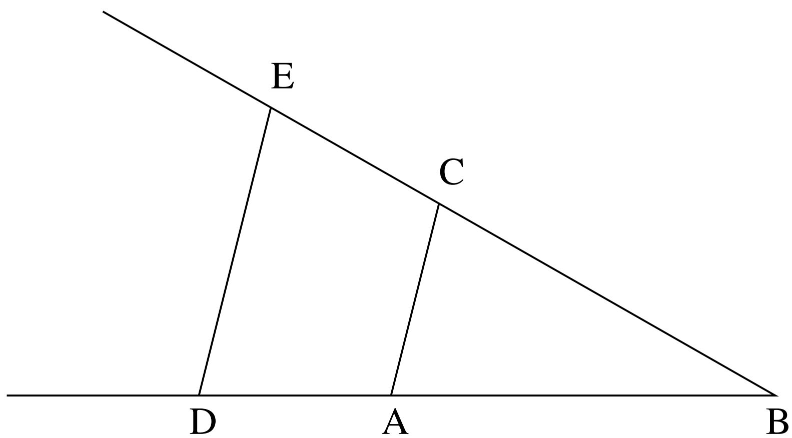
"Diyeceğimin daha kolay anlaşılacağı için bu kelimeleri geometride de öne sürmekten çekinmem" diye Dekart devam ediyor.

Çarpma geometrik nasıl yapıldığını, yöntemini hiç bir önceline hamletmeden, anlatıyor. I. Şekil'de teklik AB çizgisi olsun. BD ile BC çizgilerinin çarpması aransın. O zaman A ile C noktalarını birleştiren doğru çizgiyi çizip AC çizgisine paralel olan DE doğru çizgiyi çizir. Aradığı çarpma BE çizgidir.

Yahut BE ile BD verilseler ve BE çizgisini BD çizgisine bölmek istersek, D ile E birleştiren DE çizgisini çiziyoruz. Biz bu çizgine paralel olan AC çizgisini çizersek BC çizgi iki çizginin aradığımız bölü mü olur.

$$BE : BD = BC : BA = BC : 1.$$

Dekart'in metnini okurken, kimin geometrik ile cebirsel işlemlerin eşdeğerliğini o kadar açıllıkla ilk olarak ifade ettiğini sorarız. Olabilir ki Dekart idi. Henüz bilmiyorum



I. Şekil

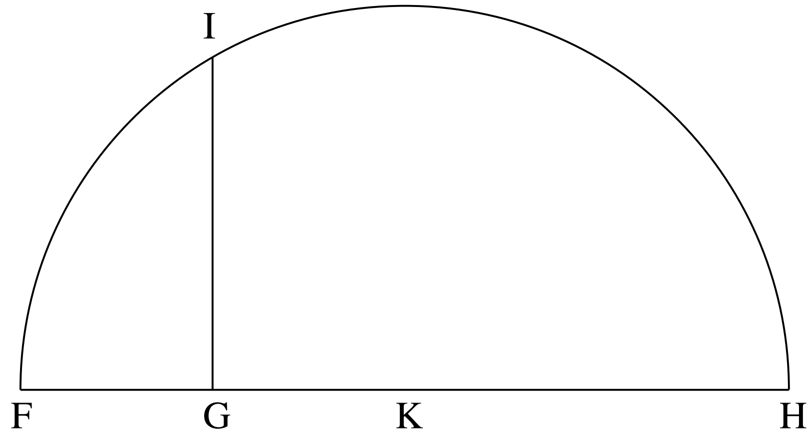
O bir karakökü nasıl çekilmesi de anlatıyor. Mesela GH çizgisinin karakökünü çekersek bu doğru çizgiyi tekliğe eşit olan FG çizgisiyle uzatarak FH doğru çizgisini elde ederiz. K noktası bu çizgiyi iki eşit olan bölüme bölsün. Yarıçapı KH olan FIH çemberini çizip G noktasından geçen ve FH çizgiye dik olan GI doğru çizgi çizir. Bu çizgi aradığı karaköktür. Yani, $a = GH$ ve $b = GI$ iseler

$$\frac{(a+1)^2}{4} = b^2 + \left(\frac{a+1}{2} - 1\right)^2$$

veya

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}.$$

Fakat ifadelerini kanıtlamadan Dekart sadece I. ile II. Şekilleri verir.



II. Şekil

Devam ederek, Dekart daha soyut, daha cebirsel bir yaklaşım sayıların geometride nasıl kullanılabileceği anlatıyor. "Sayi", yani "chiffre" yazınca Dekart değeri tespit edilmeyen cebirsel niceliği kastediyor. Bu satırlarda anlatığı yöntemlerin uslünün özü olduğu zannediyorum. Bence Dekart'ın matematik yazılarını okurken aklımıza getirdiğimiz temel bir soru var. Dekart'ın sayesinde matematikte kuşkusuz önemli olan katkılar ortaya çıkmıştı. Fakat bu katkılar ne cins olduğu nu anlamak istersek, bir yandan Onun gerçekten çözdüğü meselelerinin çözümlerini kuşağ indaki matematikçilerin çözümlerine benzetmemiz gerek öte yandan Onun genel ilkelerinin matematikte nasıl etkili olduğunu da anlamamız gerektir.

Dekart'a göre doğru çizgileri kağıtta çizmesi gerek değil. Uzunluklarının bir harfla işaret edilmesi yeter. Her uzunluğa farklı bir harf tayin edilmesi gerektir. BD ile GH aralıkları toplamak isterse birisini a başkasını b anlandırıp $a+b$ yazar. Öte yandan ikincisini birincisinden çıkmak isterse $a-b$ yazar. Onların çarpması için ab ve bölümü için $\frac{a}{b}$. a sayısı kendisiyle çarparsa aa veya a^2 yazar. Devam ederek başka işlemler cebirsel ifade eder. Mesela a^2+b^2 sayısının karekökü için $\sqrt{a^2+b^2}$ işareti kullanılır ve a^3-b^3+abb'in küpkökü için $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ işareti kullanılır. Tabii biz başka işaret kullanıyoruz. Ondan evvel aynı açıklıkla, aynı cesur arsızlıkla bu fikirlerini meydana koyan kimse var mıydı? Dekart yöntemlerini ilk uygulayan kişi ise, meydana getirdiği zamanda hangi kavramlar evvelce mevcut olmuştu?

Herhalde bazı vurguladığı ilkeler var. Mesela, cebirde olağan olan kare veya küp adlarını kullandığı halde, Dekart a^2 veya b^3 yazarak, sade doğru çizgileri anlar.

Halbuki Dekart hemen aksini iddia edip, en azından teklik belirlenmemiş ise, bir doğru çizginin her parçasının boyutu birbirine eşittir söylüyor. Mesela hem a^3, hem abb, hem de b^3 sayılarının boyutu aynıdır. Fakat Dekart'ın $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ doğru çizgisinin bu üç çizgiden ibaret olduğunu iddia etmesi beni şaşırtır. Hasıl olan $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ çizgisinin hangi anlamda üç çizgiden mürekkep olduğunu anlamam.

Fakat anladığım kadar bu boyut bir sayı değil. Dekart yazisinda boyut bir niteliktir, kare, küp, karenin karesi, filan ama Dekart onu sayıyla belirlemez.

Aklına gelen düşüncelerini anlatmaya devam edince, Dekart boyut kavramına ilave eder. Teklik belirlenmiş ise $aabb-b$ küpkökünü çıkarabiliriz, fakat önceden $aabb$ niceliğine tekliği bir defa bölmemiz ve diğer b niceliğini teklikle iki kat çarpmamız lazım.

Genel yöntem öne sürmesinden evvel, çözülecek meselede meydana çıkan doğru çizgilerin adının unutulması için bir defter tutulmasıolarak Dekart sade bir tavsiye eder. Yeni aralık eklenmesi veya bir aralık değiştirilmesi bu defterde kaydedilir. Mesela,

$$
\begin{aligned}
AB &\bowtie 1, &&\text{yani } AB \text{ tekliğe eşittir.}\\
GH &\bowtie a &&\\
BD &\bowtie b, &&\text{filan.}
\end{aligned}
$$

Dekart = işaretini değil, garip bir işaret kullanıyor. Bu işaretinin bilgisayarımda bulunmadığından $\bowtie$ işaretini kullandım.

Bu noktaya geldiğinde Dekart yöntemini anlatır. Bu anlatmanın "La géométrie"da orta yer tuttuğundan, onu önceden çağdaş imla ve harflar kullanarak Fransızca vereyim. Ondan sonra dediğini anlatarım ve Dekart kendisine göre yöntemin önemli örneği olarak Pappus'un problemine nasıl uygulamadığını izah ederiz.

> *Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, & donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues & inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre, le plus naturellement de tous, en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Équation, car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles Équations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, & que, nonobstant, on n'omette rien de ce qui est desiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée ; et lors, on peut prendre à discretion des lignes constantes, pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune Équation. Après cela, s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des Équations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues, & faire ainsi, en les demêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule, égale a quelque autre qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré du carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, &c., soit égal a ce qui se produit par l'addition, ou soustraction, de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré, ou cube, ou carré de carré, &c., multipliées par d'autres connues. Ce que j'écris en cette sorte :*
>
> $$
> \begin{aligned}
> &z \bowtie b,\\
> \textit{ou } &z^2 \bowtie -az + bb,\\
> \textit{ou } &z^3 \bowtie +z^2 + bbz - c^3,\\
> \textit{ou } &z^4 \bowtie az^3 - c^3z + d^4,\\
> &\&\ c.
> \end{aligned}
> $$
>
> *C'est à dire : z que je prens ici pour la quantité inconnue, est égale à b, ou le carré de z est égal au carré de b, moins a multiplié par z ; ou le cube de z est égal à a multiplié par le carré de z, plus le carré de b multiplié par z, moins le cube de c ; & ainse des autres.*

Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à une seule, lorsque le Problème se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit d'un ou deux dégrés plus composée. Mais je ne m'arête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous-même, & l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis, la principale qu'on puisse tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront un peu versés en la Géométrie commune & en l'Algèbre, & qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver.

C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir que, pourvu qu'en demêlant ces Équations on ne manque point à se servir de toutes les divisions qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes auxquels la question puisse être réduite.

Aktırdığım satırlar Dekart kapsamlı yöntemlerini iftiharla ve her şey önce güvenle meydana koymuştu. Yüzyıllardan sonra hem Galois hem Grothendieck, durumlarının başka olduğu halde, keşfettikleri kapsamlı kavramları ile yöntemlerinin dünyanın bilimsel hatta entelektüel tarihinde ehemmiyetinin farkında olarak kendi katkıları aynı güvenle değerlendirecekti. Dekart'ın ne yaptığını anlamamızdan sonra bu iki simanın yazılarına dönebileceğiz. Fakat yazısını incelediğimizde anlattığı yöntemleri önceden sandığımız kadar geniş olmaz gibi görünür. Buna rağmen sonradan yaklaşıp tuttuğu sorunların kapsamı büyüyor. İlk adım olarak yazısında ne iddia ettiğini inceleyelim.

Dekart "Bir problem çözmek istersek" diye başlayıp, her çözüme gerek görünen uzunluğu adlandırmamız lazım, hem bilinmeyen hem bilinen uzunlukları. Ondan sonra bilinmemiş olanları bilmiş olanlardan ayırmadan birbirine nasıl ve hangi sıra bağlı olduğunu incelemeliyiz. Mademki her aradığımız uzunluk kendisinden daha kolay belirtilen, ya bilmiş olan ya da bulunacak uzunluklarından ibarettir, problemin uzunluklarının zorluğuna göre tabii sırasını bulmalıyız. Herhalde Dekart'ın çözdüğü problemlerde şöyle bir sıra mevcuttur. Bir niceliğin iki şekille ifade edildiğine kadar sıralama süreci devam edilir, ama bu iki şekili, yani iki farklı cebirsel ifadeyi, elde ettiğimiz zaman, bir denklemeye sahibiz, zira bu iki şekil birbirine eşittir. Bulacağımız denklemlerin sayısı aradığımız henüz bilmemiş uzuklukların sayısına eşit olması gerektir. Ancak hiç atlamayarak o kadar denklemler bulmazsak çözüm tam belirlenmiş olmaması tanıtlanır. Bazı nicelikler keyfidir. Şu halde bazı belirlenmemiş niceliği her hangi bir şekilde belirleyerek kalan belirlenmemiş niceliklerin sayısı denklemlerin sayısıya eşit olacağı duruma kavuşacağız.

O zaman bu denklemleri tek tek inceleyerek veya birisini başkasıyla karşılaştırarak, sırasıyla kullanıp her henüz bilenmemiş doğru çizgi belirleyebiliriz. Devam ederek nihayet tek bir denklem ile tek bilenmemiş nicelik kalacak. Bu bilenmemiş nicelik bilmiş bir niceliğe eşit olur veya karesi, ya küpüne, ya karesinin karesine, ya üstcisime, ya da küpünün karesine filan iki ya da birkaç başka niceliğin toplaması veya çıkarmasından oluşan bir niceliğe eşit olur. Dekart'ın bu cümlelerde ne anlattığı tam belli değil.

Dekart bir sayının kendisiyle tekrarlanmış çarpılması için sade bir işarete sahip olup bizim de kullandığımız çağdaş üs işaretini kullanmasına rağmen, bize garip gelen adlar da kullanıyor. Mesela a^5 sayısına üstcisim (sursolide) ve a^6 sayısına küpün karesi diyor.

Herhalde sorunu işlenmesinin neticesi olarak ya her niceliğin derhal belirlenir ya da çözümün

$$z^4 = az^3 - c^3z + d^4$$

gibi bir denkleme indirilir. Cağdaş kavramlar kullanarak, bu süreçi anlatalım.

Bir denklemlerin takımı tarafından çok boyutlu bir yüzey tanımlanmış ise, genel ilke olarak yüzeyin boyutu denklemlerin sayısına eşittir. Tabii bu ilke sık sık yanlişır, ama buna rağmen hatta bugün boyut kavramını benzer şekilde tanımlanır. Dolayısıyla Dekart boyut kavramını anlamış olur gibi görünüyor. Çok boyutlu bir yüzeyde bir nokta bulmak istersek, bir değişkenin niceliği belirleyerek yüzeyin boyutu birden indiririz. Sürece devam ederek, boyutu sıfır olan bir yüzeyi elde ederiz.

Bu noktada Dekart Galois ilk olarak ifade edip kanıtladığı teoremi önceden zımnî tahmin eder. Galois teorisinde bir cisimin her sonlu genişletmesinin bir polinomun kökünün cisime eklenmesinden hâsil olması Galois kendisinin kanatladığı temel önermelerinden birisidir. Zımnı varsayım olarak bu önerme Dekart'ın açıklamasında meydana çıkıyor.

Gerçi Dekart'ın fikirleri makalesinin ilk bentlerini okuyarak onlar okurlara bildiği cebirsel veya çözümsel geometrinin temel olan kavramları benzer gibi geliyor, çok boyutlu hatta bir boyutlu yüzeyler Dekart'ın konusu değil. Dekart'ın önsözü okunmasından sonra Onun anlattığı yöntemleri incelerek çözümsel geometrinin olanaklarını bilen çağdaş okur hayal kırıklığına uğrar. Öte yandan bu açıklamanın ardından Dekart'ın Pappus meselesini ele aldığında her matematik sevip bilen okur hayrete düşebilir.

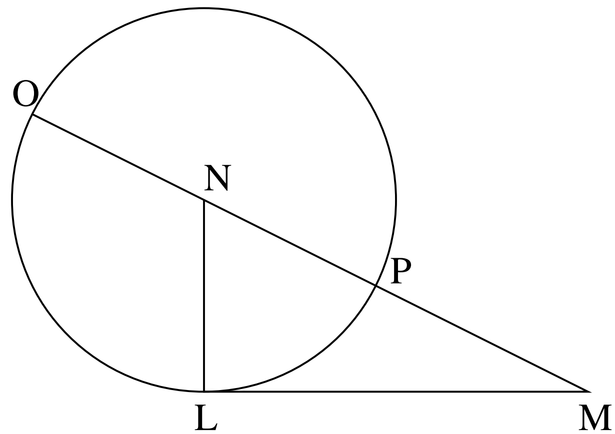
Pappus meselesine dönmemizden evvel, onların hem bize hem eski Yunanlılara basit görünmesine rağmen, Dekart'ın her ayrıntılarla açıkladığı yöntemleri hatırlıyoruz. Bir bilmemiş olan nicelik içeren denklem nihayet el ettiğimizde bazen bu denklem cetvel tahtası ile pergelle çözülebilir. Dekart'a göre

> *Et que, si elle peut être résolue par la Géométrie ordinaire, c'est à dire en ne servant que de lignes droites & circulaires tracées sur une superficie plate, lorsque la dernière Équation aura été entièrement demêlée, il n'y restera, tout au plus, qu'un carré inconnu égal à ce qui se produit de l'addition, ou soustraction, de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussi connue.*

Anlaşılan şu sade halde anlattığı sürecin neticesi olarak, Dekart aranan niceliğin

$$z^2 \bowtie az + bb$$

denkleminin çözümü olacağını tahmin ediyor. Kendi sözlerle, niceliğin karesi niceliğın kendisini içeren toplama veya farka eşit olur. Bu toplam bilmiş nicelikle aranan niceliğin çarpması ile başka bir bilmiş niceliğin karesinin toplamı olabilir. Yani aranan nicelik z ise, bu toplum $az + b^2$ olabilir. Fark ise, aynı iki niceliğin farkı olabilir.



III. Şekil

Hatta eski zamanda bu denklemlerin nasıl çözülmesi iyi anlaşılıyordu, fakat Dekart çözümünü veriyor. Mesela $z^2 = az + bb$ denklemini çözelim. III. Şekilde gibi, NLM dik üçgenini çizelim. LM kenarı bb niceliğinin karekökü olan b niceliğine eşit olsun. Gerçi amacını anlamama rağmen Dekart'ın peşinden giderek temel nicelik b değil fakat bb olur gibi, verilmiş nicelik bb olarak, b niceliğin ondan nasıl husle geldiğini belirtiyorum. LN diğer kenarı bilenen a niceliğin yarısına eşit olsun.

Üçgen tabanı olarak MN doğru çizgisini O noktasına kadar uzatırız ki NO çizgisi NL çizgiseni eşittir. Şu halde aradığımız uzunluk OM doğru çizgiye eşittir. Çözümün cebirsel ifadesi tanıdığımız

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

denklemidir.

Çözülecek denklem

$$yy \bowtie -ay + bb$$

denklemi ise, aynı şekli kullanarak, aradığımız nicelik PM doğru çizgisidir. Şu halde

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Hangi amaçla belli olmasına rağmen sürecin neticesinin

$$x^4 \bowtie -ax^2 + b^2$$

denklemi ise, Dekart çözümün aynı şeklinde bulunmasını açıklıyor.

$$x \bowtie \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}.$$

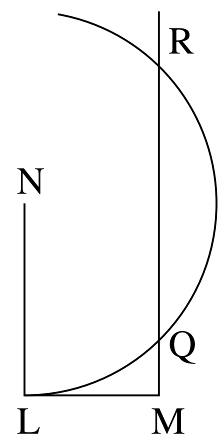
Nihayet Dekart

$$z^2 \bowtie az - bb$$

denklemini nasıl çözeceğini anlatıyor. IV. Şekil kullanılır. Şekilde NL doğru çizgisi $\frac{1}{2}a$ sayısına eşittir ve NL doğru çizgisine dik olan LM doğru çizgisi b sayısına eşittir. M ile N noktalarını birleştirilmesinin yerinde LN çizgiye paralel olan MQR çizgisi çizilsin. Merkezi N noktası ve yarıçapı NL olan LQR çemberi çizilsin. Aradığımız uzunluk hem MQ doğru çizgiye hem de MR doğru çizgiye eşit olabilir zira meselenin iki çözümü var, yani

$$z \bowtie \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$
$$\& \quad z \bowtie \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$$

Dekart'ın dikkatımıza çektiği gibi, çember M noktasından geçen NL çizgisine paralel olan doğru çizgiyle kesişmese meselenin çözümü yok.



IV. Şekil

Şimdi "La géométrie"ın Dekart'in övüngenliğe eğiliminin meydana çıktığı bir noktaya geliyoruz.

> *Au reste, ces mêmes racines se peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, & j'ai seulement voulu mettre ceux-ci, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les Problèmes de la Géométrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatres figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué ; car, autrement, ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres, où le seul ordre de leurs propositions nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.*

Dekart'ın her olağan geometrik mesele bu iki şekilden fazla araç kullanmadan çözülmesi iddiasına inanabiliriz. Fakat Öğeler'in ikinci ile altıncı cüzünü incelediğimizdan sonra Dekart'ın "eskiler" adlandırdığıYunanlılar bu ilkeyi anlamadıkları iddiasından şüphe ediyoruz. Galiba Dekart eskilerin geliştirdiği yöntemleri küçümseyerek kendi keşiflerin önemini abartmak istiyormuştu. Herhalde Dekart'ın eski gelişmelere nasıl dayandığını anlarsak, biz onun zamandaki matematik ilerlemeyi daha iyi anlarız.

Bence yöntemlerin ilk ve en çarpıcı başarısı Pappus önceden M. S. üçüncü yüzyılda öne sürdüğü bir problemin çözümümüştür. Bu defa da Dekart eskilerin ne becerdiği takdir etmemişti. Ancak o kendi katkıyı kuşkusuz vurgulayıp hatta abartmak istediği halde, Dekart Yunanlıların sorunu nasıl ele alıp çözdüğünü muhtemelen bilmemişti. Hatta Pappus kendisi Apollonyus'un ne yaptığını tam anlamamıştı, zira Apollonyus'un M. E. ikinci yüzyılda meydana çıkardığı katkılar Aristeyus ile Öklid'in önceden yazdıkları ama Pappus'un zamanda artık okunmayan metinlerine dayanmıştı. Dekart'in zamanında bu metinler artık mevcut olmamış.

Dekart Pappus'un metinin bazı bentleri aktarıyor. Herkesin aktardığı metni daha kolay anladığı için Dekart Yunanca metni değil Latince çevirisini verir. Anlaşılan o zamanki her matematikle ilgilenen kişi Latince iyi okuyabiliyormuş. Bugün bizlerden az kişinin Latince ya da Yunanca okunmalarına rağmen hem Latince hem Yunanca olarak birkaç satır verelim. Bizim ne eski lisanlar ne yeni lisanlar okuduğumuzdan hem Latince hem Dekart tarafından ilk kullanılan Fransızca ibarelerin aktarması size yararsız olur gibi geliyor.

Geçmişte olup biteni yakından anlamak için geçmiste yaşayanlar yazdığı okumamız en faydalı en verimli yöntemdir. Elbette okumadığımız lisanda aktarılan ibarelerden tek bir şey öğrenebiliriz. Bizi geçmişten ayıran engel var. Biz ise, Amerikalılar veya Avrapalılar, ilk olarak medeniyetimizi husule getiren hem Yunancayı hem Latinceyi dili bırakarak, onlardan sonra yeniçağda ilmi veya edebi lisanlar olarak geliştirilen Avrupalı dilleri de artık kullanmıyoruz, Siz ise, Türkler, kalkındırmanız uğrunda kendi tarihinizde temel olan Farsçayı ile Arapçayı reddederek, Avrupalı lisanlara dönmüştünüz, ama nihayet onları da reddedip Amerikalı İngilizcesiyle kendinizi kurtarırız umuttayınız. Ama eninde sonunda hepimiz aynı dar entelektüel durumda, benzer güçsüz siyasi durumdayız. Galiba güçsüz siyasi durumumuzdan kurtarılamayız, ama entelektüel fakirliğimiz gönl̈lüdür. Aşırı görüşlerimi anlatıp, size meydan okuduğumdan sonra, biz Dekart'ın ile Pappus'un matematiğine dönebiliriz.

Vadettiğim gibi, birkaç bentler aktarayım. Zamanınız olduğunda onları okuyabilirsiniz veya isterseniz dilin perdesinin arkasında hangi sırlar saklanıldığını merak ederek onlara bakabilirsiniz. Şimdi ise, beşinci şekil tasvir edilen Pappus meselesini anlatalım.

> *Quem autem dicit (Apollonyus) in tertio libro locum ad tres & quator lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis quae Euclides scripsit, per ea tantum conica quae usque ad Euclidis temporar praemonstrata sunt, &c.*

At locus...... devam edilecek

Pappus probleminin başka adı olarak üç ve dört doğru çizgi hattı meselesidir. Mesela, dört doğru çizgi ile dört açı verilmiş olsun. Beşinci şekilde bu dört doğru çizgi hem AB, hem AD, hem EF, hem de GH çizgisidir. Üstelik dört açı verilsin. Her açı verilmiş doğru çizgiden birisine bağlı ki biz dört çiftle başlıyoruz. Her çift bir doğru çizgi ile bir açıdan ibarettir. Anlaşılsın diye bu dört çifte işaretler bağlarım.

$$(l_1, \theta_1), (l_2, \theta_2), (l_3, \theta_3), (l_4, \theta_4).$$

Elbette ne Dekart ne de Pappus benzer işaretler kullanıyor.

C bir nokta olsun. Her dört verilmiş doğru çizgi için, biz bu noktadan geçip l_i doğru çizgisiyle kesiştiği açı θ_i olan bir doğru çizgi çizeriz. Şu halde dört doğru çizgi elde ederiz. Şu doğru çizgiler CH, CB, CD ve CF çizgileri olsun. Anlatığımız gibi, CBA, CDA, CFE ve CHG açıları verilmiş açıya eşit olsun. Nihayet verilmiş bir α sayısı ve son bir şart da var. Verilmiş doğru çizgilerden ikişer ikişer seçerek iki takım belirlıyoruz. Mesela, bir yanda $l_1 = AB$ ile $l_2 = AD$ doğru çizgileri, öte yanda $l_3 = EF$ ile $l_4 = GH$ doğru çizgileri. Son şart

$$\overline{CB} \times \overline{CD} = \alpha \overline{CF} \times \overline{CH}, \tag{1}$$

denklemiyle ifade edilir, yani CB ile CD doğru çizgilerinin çarpımı ile CF ile CH doğru çizgilerinin çarpımı arasındaki oran α sayısına eşit olmalı. Pappus problemi, bu şartlar hangi veya ne gibi hat belirler, sorular.

Bu dört doğru çizgi hattı meselesi adlanan problem Yunanlılar tarafından incelenmişti belki de çözülmüştü, ama on yedinci yüzyılda Pappus'un yazılarında meseleyi bulmuş olan Hollandalı, Jacobus Golius, onu Dekart ile başkalara sürmüştü. Problem yalnız Dekart tarafından değil, hem eski Yunanları hem de Dekart'ın kuşağından bazı ünlü matematikçiler tarafından çözülmüştü. Bu matematikçilerin çözümünün Dekart'ından daha ustalık meydana koyması mümkün olmasına rağmen, bir anlamda tek olarak onun çözümü yeni bir yol açmıştı. Çözümünü anladığımızdan sonra, Yunanlıların ve başka yeniçağ döneminin matematikçilerinin çözümlerine döneceğiz.

Problemi çözmek için Dekart anlattığı yöntemi kullanır. O ana uzunluklar olarak AB ile CB uzunluklarını seçer. AB uzunluğunu x işaretiyle ve BC uzunluğunu y işaretiyle isimlendirir. Başka üç doğru çizgiyi uzatır ki AB doğru çizgisini A, E ve G noktasında keserler. Şekilde gösterdiği gibi CB çizgisini R, S ve T noktasında kessinler. Şu halde Dekart hem temel uzunlukları hem her gerek olan noktayı adlandırır.

ARB üçgenin RAB ile RBA açlarının belirlenmiş olduğundan dolayı her açını belirlenmiş ve AB ile BR arasındaki oran belirlenmiştir. Bu oran $z : b$ olsun. Ne z ne de b niceliğin belirlenmiş olmadığını dikkatınıza çekiyorum, yalnız arasındaki oran olan z/b sayısı belirlenmiştir. İsterseniz z sadece tekliktir. Dekart şöyle iki denklem elde eder.

$$\overline{RB} = \frac{bx}{z}$$

$$\overline{CR} = y + \frac{bx}{z}$$

Dekart'ın olumlu sayılar tercih ettiğinden, B noktasının C ile R noktaların arasında bulunduğu halde şu denklemi kullanır, fakat Dekart için fazla iki incelenecek hal var. R noktası C ile B noktasının arasında bulursa

$$\overline{CR} = y - \frac{bx}{z}.$$

denklemini elde eder. Öte yandan C noktası B ile R noktasının arasında bulursa,

$$\overline{CR} = -y + \frac{bx}{z}.$$

denklemini kullanır.

Anlatılmış yöntemi uygulamaya devam ederek, DRC üçgeninin RDC açının verilmiş olduğunu ve CRD açısı bilinmiş BRA açısına eşit olduğundan dolayı hem her açısı hem de CR ile CD kenarlar arasındaki oran bilinmiştir. Oran $z : c$ oranına eşit olsun. Şu halde CR kenarının $y + bx/z$ sayısına eşit olduğundan

$$\overline{CD} = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}.$$

z sadece her uzunluğu bir sayıya değiştiren teklik olduğununu gene vurgulayaım.

Fazladan AB, AD ve EF doğru çizgilerinin verilmiş olduğundan, AE aralığın uzunluğu da verilmiştir. Dekart bu uzunluğu k harfıyla işaret ediyor. O zaman EB uzunluğu $k + x$ sayısına eşit olur. Ama dediğim gibi, Dekart olumlu sayılar tercih edip ve her olanağı incelemek isteyerek yalnız şekildeki A noktasının EB aralığında bulduğunun hali değil her hali işlıyor. Örneğin B noktası EA arasında bulursa, EB uzunluğu $k - x$ sayısına eşit olur veya E noktası

BA aras inda bulursa uzunluk $-k + x$ olur. Dekart'ın her hal işlemesine rağmen, ben yalnız şekilde gösterilen halı inceliyorum.

Devam ederek, Dekart ESB üçgeninin verilmiş olduğuna dikkat alıp, açılarının da belirlenmiş olduğundan başka verilmiş olan sayıyı kaydediyor. BE ile BS arasındaki oran $z : d$ oranına eşit olsun. Şu halde

$$\overline{BS} = \frac{dk + dx}{z}$$

ve, durum şekilde gibi ise,

$$\overline{CS} = \frac{zy + dk + dx}{z}.$$

Durum şekilde gibi değilse, formül benzerdir fakat bazı artı işaretin yerinde eksi işaretler koyması lazım.

İşlemeden önceden kaydedecek nicelikleri vermeyi henüz bittirmiyoruz. Dekart FSC üçgenin her açının bilenmesini dikkate alıyor. Dolayısıyla CS ile CF uzunluğu arasındaki oran bileniyor. Bu oran $z : e$ olsun ki

$$\overline{CF} = \frac{ezy + dek + dex}{zz}.$$

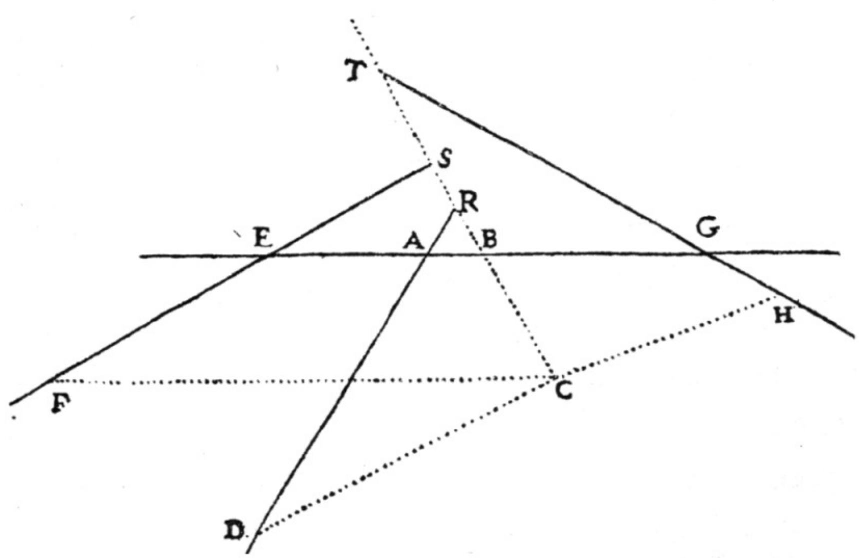
Dekart AG uzunluğunu l harfıyla kaydediyor. Ondan sonra BGT üçgenin her açısının bilindiğinden BG ile BT uzunluğu arasındaki oran $z : f$ belirlenmiştir ki

$$\overline{BT} = \frac{fl - fx}{z}, \quad \overline{CT} = \frac{zy + fl - fx}{z}.$$

Nihayet Dekart TCH üçgenini kullanarak TC ile CH uzunluğu arasındaki oran belirtip $z : g$ olarak onu kaydediyor. Son bir denklem olarak

$$\overline{CH} = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$$

denklemini elde ediyor.



V. Şekil

Bu denklemleri kullanmamızdan evvel, kaydetme süreci tekrar gözden geçirelim. Dekart'-ın uyguladığı yöntem gerçekten çok genel, çok akıllı. Onu anlamazsanız, yazık olur. Sizi anlatmamı dinlememizden sonra Dekart'ın metnini arayıp okumaya teşvik ederim.

Beşinci şekilde pek çok nokta ve pek çok açı var. C noktası bir yana, üç çeşit noktalar var. Birinci çeşit verilmiş doğru çizgilerden her ikisinin kesiştiği noktalardan ibaret olsun. Tam olarak bu çeşit $\frac{4.3}{2} = 6$ noktayı içerer, ama şekilde yalnız üçgösterilir, yani E, A ile G noktaları. İkinci çeşit C noktasından geçen dört doğru çizgiden birisinin dört verilmiş doğru çizgiden birisini verilmiş açıyla kestiği noktalardan ibaret olsun. Bu dört noktadan her birisi şekilde gösteriliyor, yani F, D, B ile H noktaları. Üçüncüsü çeşit on iki nokta içerer. C noktasından geçen dört doğru çizgi var. Her birisi verilmiş doğru çizgiyi kestiği dört noktayı içerer. Bu dört noktadan birisi ikinci çeşittendir. Diğerleri üçüncü çeşittendir. Birinci çeşitten altı nokta, ikinci çeşitten dört, ve üçüncü çeşitten on iki var. Buna rağmen Dekart'ın verdiği şekilde C noktasına ilaveten yalnız on nokta bulunur. Bunlardan üçü, yani F, A ile G, birinci çeşitten, dördü, yani F, D, B ile H, ikinci çeşitten, ve üçü, yani R, S ile T, üçüncü çeşittendir.

Fazladan tam olarak sekiz doğru çizgi var. Onların hepsi şekilde çizilir. Onlardan dördü verilmiş doğru çizgidir ve dördü arayıp belirlediğimiz C noktasından geçen doğru çizgidir. Zirvesi iki doğru çizgi birbiriyle kesiştikleri nokta olan dört açi var. Ama birbirine ters olan iki açı birbirine eşittir ve iki bitişik açının toplamı π sayısıya eşittir. Dolayısıyla bu dört açı gerçekten eşdegerdir. Sekiz doğru çizgi olduğundan, onları ikişer ikişer alarsak, $28 = 8 \times 7/2$ açı elde ederiz, fakat hatta herhangi sekiz doğru çizgi ise, bu yirmi sekiz açı tam serbest değil. Verilmiş dört doğru çizginin karşılıklı yönleri belirlemek için, biri ayırt ederiz ve diğer üçü onunla yaptığı açıyı belirleriz. C noktasından geçen diğer dört doğru çizginin yönleri aynı şekilde belirlenmiştir. Fakat istersek, her birinin yöni ona tekabül edilen verilmiş doğru çizgiyi kestiği açı tarafından da belirlenmiştir. Herhalde bu yedi açı belirlerek, biz her açıyıbelirebiliriz. Dolayısıyla tam olarak yedi serbest verilebilen açı var. Tabii problemi tanımlamak için bu yedi açı vermek lazım.

Problemde üç serbest belirlenen nicelik kalıyor, yani ayırt edilmemiş diğer üç verilmiş doğru çizgisinin ayırt edilmiş olan çizgiyi kestiği noktalar. Şöyle, bir doğru çizgi verilmiş ise, problemde tam olarak on serbest verilecek nicelik var. Biz Dekart'ın bu on nicelik nasıl kullandığını inceleyelim.

Şekilde ayırt edilmiş doğru çizgi, E, A, G noktasının bulunduğu çizgi olsun. O zaman üç verilmiş nokta E, A ile G noktalarıdır. Üç kullandığımız açı zirvesi bu üç nokta olan açılardır. Mesela BAR, BES ile BGT açıları.

Dekart açılar değil, üçgenler kullanır. Başlarak, hem verilmiş doğru çizgiden biri, yani AB çizgi, hem de onda A kesişme noktasıyıseçiliyor. B noktası verilmemesini dikkatınıza çekiyor. AB aralığının uzunluğu problemde belirlenecek bir niceliktir. İlkelerine göre, Dekart bu aradığı niceliği x harfıyla işaret eder. x uzunluğunu belirlemek için verilmişA ile belirlenecek B noktaları lazımdır. $\overline{BC}$ uzunluğu olarak, başka aradığı niceliği y harfıyla işaret eder. C noktasını belirlemek için yalnız bu uzunluk değil ama ondan fazla zirvesi B olan verilmiş ABC açısı da lazım. Fakat A noktası ve bu açı verilmiş ise, x ile y sayıları C noktasını belirler ve ters olarak C noktası A noktası ile ABC açısı belirler. Dekart şöyle bu kadar bilinmemişC noktasından fazla iki verilmiş niceliği kullanıyor, yani A noktasını ve ABC açısını. Bu açı verilmiş yedi açıdan birisidir. Bu iki nicelikdan fazla, sekiz verilmiş nicelik kalar. Dekart bu x ile y iki niceliğine ilaveten b, c, k, d, e, l, f, g (veya b/z, c/z, k/z, d/z, e/z, l/z, f/z, g/z) olarak sekiz bilinmiş niceliği kaydediyor. Sonuç olarak, bir denklem elde ediyor. Anlaşılan bu sekiz kaydettiği nicelik sekiz problemi belirleyen niceliğe karşılıyor. Bakalım.

AB aralığının belirlenmiş olduğundan zirvesi A noktası olan açı BAR üçgeni belirler. Özellikle $\overline{RB}$ uzunluğunu ve b sayısını belirler. Ondan sonra verilmiş CDR açısını kullanarak Dekart kaydettiği c sayısını belirler. Bu kadar AB doğru çizgide bulunan üç noktalardan, birisi, yani A noktası kullanılmıştır. Tam durumu belirleyen yedi açıdan üçü, yani zirvesi A, B ve D olan açılar kullanılmıştır.

Devam ederek Dekart E noktasının belirlediği $\overline{EA}$ uzunluğunu k sayısıyla kaydediyor. Zirvesi E olan açıda verilmiş olduğundan dolayı ESB üçgeninin hem her açısı hem EA ile AB aralıların toplamına eşit olan EB kenarı belirlenmiştir. Şu halde BS kenarının uzunluğu da bilinmiştir ve Dekart'ın kaydettiği d sayısı belirlenir. Hem $\overline{CB}$ ile $\overline{BS}$ uzunluğunun bilinmiş olduğundan, $\overline{CS}$ uzunluğu da bilinir. Fazladan FSC üçgeninin CSF ile CFS iki açısı bilinir. Dolayısıyla FSC üçgenin her açısı ve her kenarı bilinmiş ve şöyle belirlenmiş olan e sayısı kaydedilebilir.

Dekart'ın yönteminin nasıl uygulanmasını gittikçe anlayarak, biz kendimiz süreci bittirabiliriz. Biz şu kadar E ile A iki noktasını ve zirvesi B, A, E, D ile F beş açısını kullanarak belirlenmemiş x ile y iki sayısını ve belirlenmiş b, c, d ile e ve k beş sayıları kaydettik. Şöyle her verilmiş ve aranan nicelik bir kaydedilen sayıyı tanımlar.

Kaydetme süreci yine incelerek $\overline{AG}$ uzunluğunun veya G noktasının Dekart'ın kaydettiği l sayısını belirlediği anlıyoruz. Ondan sonra zirvesi G olan açı kaydettiği f sayısını belirler ve nihayet zirvesi H olan açı kaydedilen g sayısını belirler.

Discours de la Méthode adlı kitabına bir ilave olan *La géométrie* adlı makale üç cüz içer. Bir cüz bizim bu kadar anlattığımız malzemeden ibarettir. Kaydetme süreci anlatmayı bittirip sonuçlarının nasıl uygulanmasını kısaca açıkladığında Dekart yönteminin ilkelerini yine gözden geçiriyor. Geçirirken yöntemin genelliğini gene vurguluyor.

Dekart'ın ayrıntılar hemen vermemesine rağmen, bu son bentlere gelmemizden önce biz dört doğru çizgi hattı problemin Dekart'ın yöntemiyle nasıl çözüldüğünü anlatalım. Verdiğimiz denklemlere göre (1) denklemi

$$y \times \left(\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}\right) = \alpha\left(\frac{ezy + dek + dex}{zz}\right)\left(\frac{gzy + fgl - fgx}{zz}\right) \tag{2}$$

denklem eşdeğerdir. Bu denklemde x ile y hariç her nicelik bilenir. Şu halde bildiğimiz gibi bu denklem bir konik kesik eğrisi veya bazen bir doğru çizgi belirler. Fakat Dekart'ın veya kuşaktaki bilim adamlarının bunu nasıl bildiğini sonra sorabiliriz.

Üç doğru çizgi hattında yalnız üç doğru çizgi ve üç açı verilmiştir, mesela şekildeki EF, AD ile AF doğru çizgi ve zirveleri F, D ile B olan üç açı. O zaman koyduğumuz şart

$$\overline{CF} \times \overline{CD} = \alpha \overline{CB} \times \overline{CB} \tag{3}$$

denklemidir. Bu denklem de ikinci mertebeden olacaktı.

Ama Dekart üç veya dört doğru çizgi hattı probleminin çözümünü anlatmadan hemen yönteminin Pappus'un genel problemine nasıl uygulandığını açıklar. Daha doğrusu Dekart dört doğru çizgi hattı problemini Pappus'un genel probleminin çerçevesinde çözüyor.

Genel problemde $2n$ doğru çizgi ve $2n$ karşılıklı açı verilmiştir. Her çizgiyi onun karşılıklı açısıyla kesişen ve bulacağımız C noktasına birleştiren bir doğru çizgi parçası CD_i çizelim. O zaman $2n$ doğru çizgi hattı

$$\overline{CD}_1\overline{CD}_2 \cdots \overline{CD}_n \pm \lambda \overline{CD}_{n+1}\overline{CD}_{n+2} \cdots \overline{CD}_{2n} = 0$$

denklemiyle verilmiş ve $2n-1$ doğru çizgi hattı

$$\overline{CD}_1\overline{CD}_2 \cdots \overline{CD}_n \pm \lambda \overline{CD}_{n+1}\overline{CD}_{n+2} \cdots \overline{CD}_{2n-1} = 0$$

verilmiştir.

Dekart dört doğru çizgi hattı için gerek olan nicelikleri ve denklemleri kaydettiğinden sonra devam ediyor. Okura konuşarak, onun genel problemde her aradığı uzunluk aynı yöntemle üç niceliğin toplamı olarak ifade edilebilir, birisi x niceliğinin bilinmiş nicelikle çarpması, ikisi y niceliğinin bilenmiş nicelikle çarpması, üçü sadece bilinmiş bir niceliktir. İstisnaî olan durumlar var. Uzunluğu aradığı aralık AB aralığına paralel ise y niceliğiyle çarpılan nicelik sıfır olur. Aralık BC aralığına paralel ise, x niceliğiyle çarpılan nicelik sıfır olur. Biz çocukluğumuzdan beri Dekart'ın meydana koyduğu yöntemleri kullandığımızdan nedenini hemen anlıyoruz. İlk okurları için yöntemi o kadar açık değilmiş acaba. Dekart alışılmış uslüyle, yöntemin nasıl uygulanması o kadar açıktır ki üzerinde durmayayim diye hiç anlatmıyor. O işaretlerin her hangi bir şekilde seçilmelerine dikkatimizi çekiyor.

Biz, Dekart'ın yaptığına tersine meseleyi daha kolay anlamak için genel meseleyi değil dört doğru çizgi hattı meselesini vurguladık. Dekart genel ilkelerini meydana koymak için başlangıçtan beri genel meseleyi ileri sürer. Pappus'un sözlerini aktarmasından evvel bu kibirli görünen cümleleri yazıyor.

> *Au reste ces mêmes racines se peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, & j'ai seulement voulu mettre ceux-ci, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les problèmes de la géométrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que j'ai expliquées.* (Bu dört şekil bizim ilk dört şekildir.) *Ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué ; car, autrement, ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres, où le seul ordre de leurs propositions nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.*

Bu sözler kendinin katkıda bulunduğu keşiflerle iftihar edip ama öncellerinin ne yaptığını belki yeterli tanımayan bir dahinin söylediğine inanabiliriz. Her halde hepimizin ikna edildiği gibi Dekart'ın yöntemlerinin uygulanması eski yöntemlerin uygulanmasından daha kolaydır ki hatta oldukça yeteneksiz matematikçiler onları uygulayabilir. Ama aynı zamandan çoğumuz eskilerinin niye kavuştuğunu bilmediğimiz için Dekart'ın görüşlerinde hakkı olup olmadığı soruya bir şey söylememiz belki hale mevsimsizdir. Evvelden eski ve yeni çağda ne bilmiş olduğunu öğrenmemiz daha iyi olacaktı.[2]

Pappus'un probleme gelerek Dekart kısa bir önsözden sonra sunduğumuz Latince sözleri aktarıyor. Önsözde şöyle diyor.

> *Et on le peut voir aussi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septième livre, où, après s'être arreté quelque temps à dénombrer tout ce qui avait été écrit en Géométrie par ceux qui l'avaient précédé, il parle enfin d'une question qu'il dit que ni Euclide, ni Apollonius, ni aucun autre, n'avaient su entièrement resoudre ; & voici ses mots.*

Devam ederek Dekart bizim evvelce aktardığımız metni veriyor. Dekart'a göre Pappus'un ne Öklid, ne Apollonyus ne de hiç kimse bu soruya tam çözdiğini yazdığını dikkatınıza çekerim. Dekart'in fikirlerini daha iyi anlamamızdan sonra biz Öklid ile Apollonyus'un ne cözüp ne çözmediği soruna dönerim. Dekart kendisi genel $2n$ veya $2n-1$ doğru çizgi hattı meselesini

[2]Sözlüğe göre yeniçağ dönemi İstanbul'un fethiyle başladı ve bazı tarihcilere göre Rönesans'da ortaya çıkan matematik mültecilerin o zamanda Avrupa'ya getirdiği fikirlerden çok etkilenmişti.

inceler. Gördüğümüz gibi genel bir çözüm ileri sürüyor. Bir anlamda çözümüne o kadar önem vermez, ve onun sunduğumuz çözümünün açıklanmasından önde oldukça garip sözleri koyar.

> *Je tâcherai d'en mettre la démonstration en peu de mots : car il m'ennuie déjà d'en tant écrire.*

Yani, az sözlerle çözümü vermeye uğraşacak çünkü her halde o kadar yazmaktan bıkılıyor. Dekart'ın gerçekten ne ifade etmek istediğini merak ediyorum!

Belki Dekart için en önemli olan sorun meselenin çözümü değil fakat çözümün verdiği hatları nasıl bulunmesidir. Dekart'ın birinci cüzde anlattığı gibi genel problemde bu hatlar herhangi bir mertebeden olabilir. Birinci cüzde bu sonuca kavuştuğundan sonra başlığı *De la nature des lignes courbes* olan ikinci cüzü başlayarak Dekart genel çizgilerin veya genel hatların nasıl yapıldığını nasıl sınıflara ayırıldığını sorunu ele alıyor.

Eğri çizgiler oluşu ne olduğu sorun nedir. Dekart anlatıyor. Eskilerin tanıdıklari gibi geometride ortaya çıkan çeşitli hatlar var, hem pergel ile cetvelle inşa edilebilen hatlar, hem konik kesit eğrileri, hem de daha zorla, belki başka araçlarla inşa edilen hatlar. Her halde Dekart'a göre aslında pergel veya cetvel ile başka ondan daha bileşik olan araçlar geometrikte temel fark değil, ama biz verdiği sebeplerini tekrar gözden geçirmek istemiyoruz. Dekart'ın bu konudaki görüşlerinin geometride esaslı olmasına rağmen, biz fikirlerini surarken Pappus'un problemini vurgulamak isteriz.

Biz *La géométrie*'yi okurken tarihi bir dönemin eşiğinde bulunuyoruz. Biz hem öncesine bakabiliriz, bu yazı o zamandaki bilgi temellerinde nasıl meydana geldi? hem de ilerisine bakabiliriz, yazı gelecek kuşakları nasıl etkiledi? Pappus'un problemini vurgularak biz öncesine bakarız. Dekart kendisi şöyle başlıyor.

> *Mais il faut ici plus particulièrement que je détermine & donne la façon de trouver la ligne cherchée qui sert en chaque cas, lorsqu'il n'y a que 3 ou 4 lignes droites données ; & on verra, par même moyen, que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucunes autres que les trois sections coniques & le cercle.*

Biz de bilmek istiyoruz, hangi o zamanda mevcut olan bilgiyle Dekart bulunduğu hatların konik kesit eğrileri olduğunu ispatlayabilmişti. Bu amaçla Dekart'ın anlatmasını incelemeye devam ediyoruz. Dekart (1) denklemini değil,

$$\overline{CB} \times \overline{CF} = \overline{CD} \times \overline{CH} \tag{4}$$

denklemini incelir. Yani α sabitesi 1 olsun ve CD ile CF doğru çizgileri birbiriyle değiştirilsin. Dört denklemdeki niceliğin x ile y nicelikleriyle nasıl ifade edilmesini hatırlıyoruz. Biz gene Dekart'ın kullandığını işareti kullanıyoruz.

$$\begin{aligned} &\overline{CB} \bowtie y, && \overline{CD} \bowtie \frac{czy + bcx}{zz} \\ &\overline{CF} \bowtie \frac{ezy + dek + dex}{zz} && \overline{CH} \bowtie gzy + fgl - fgxzz. \end{aligned} \tag{5}$$

Elde edilen denklemi ilk olarak Dekart gibi yazıyorum.

$$yy \bowtie \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ -dfglz \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} -bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz}, \tag{6'}$$

Bugünkü şekilde olarak bu denklem şöyle yazılıyor,

$$y^2 = \frac{(-dekz^2 + cfglz)y + (-dezzx - cfgzx + bcgzx)y + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}. \tag{6''}$$

Dekart paydada negatif sayılar kullanmıyor. Dolayısıyla ez sayısı cg sayısından daya büyük değilse, her $+$ ile her $-$ işareti değiştirir. Tabii ez ile cg sayısı birbirine eşit olabilir, ama bu olanağı farketmiyor. Hiç olmazsa onu incelemez.

Dekart'ın her sayı positif olduğunu işrar ettiğinden, dört farklı olan durumu incelemesi lazım. Beşinci şekilde C noktası ya DAG açısında olabilir, ya DAE açısında, ya EAR açısında, ya da RAG açısında. Duruma göre her işaret değiştirilmeli. Dekart'a göre her dört durumda y niceliği sıfır ise, o zaman çözüm yok. Fakat bence bu görüşün aksine bu durumda çözüm olabilir. C noktası EG doğru çizgisinde bulunur. Beşinci denklemi çözerek, x sayısını buluruz. Tabii beşinci denklemin dört denklemden ibaret olduğundan çözümünün olması kesin değil. Dekart y sıfır olmasının olanağını incelemiyor.

Basitleştirerek

$$\frac{cfglz - dekzz}{ez^2 - cgzz} = 2m,$$
$$\frac{dezz + cfgz - bcgz}{cz^2 - cgzz} = \frac{2n}{z}$$

yazıyor. Şu halde altıncı denklem şöyle yazılıyor,

$$yy \bowtie 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}.$$

Bu ikince mertebeden olan denklemi hem Dekart hem de biz hemen çözebiliriz.

$$y \bowtie m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}.$$

Formülü kısaltmak için, Dekart

$$-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} = o;$$
$$\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz} = -\frac{p}{m}.$$

Tabii Dekart burada hiç farketmeden, m sıfır olmadığı kabul ediyor. Bu şekilde çözümüne basit şekli veriyor,

$$y \bowtie m - \frac{n}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}. \tag{7}$$

Bu formül elde ettiğinde Dekart onun genel olduğunu vurgulıyor. Gerekse bazı $+$ veya $-$ işaretleri değiştirilmeleri lazım. Farkettiğimiz gibi bu iddia tamamen doğru değildir. Bazen paydalarda bulunan nicelikler sıfırdır. O zaman çözümünün farklı ifade edilmesi lazım olacaktı. Halbuki biz Dekart'ı takip ederek bu istisnalara aldırmayız.

Altıncı şekile bakalım. Bu şekli Dekart'tan aldım. Ona bakarken dikkat etmemiz lazım. Mesela ILK açısı dik açı değildir. Biz sonradan nedeni vereceğim. Buna rağmen bana Dekart zaman zaman bu açı dik olduğunu sanır gibi geliyor.

Şekilde iki doğru çizgi önemlidir, ILM ile CLB doğru çizgiler. Beşinci denklemde BC aralığını verilmiştir. BC doğru çizgisinde bulunan L noktası Dekart'ın tarafından şöyle seçilmiş ki

$$\overline{LC} \bowtie \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}, \tag{8}$$

yani

$$\overline{BL} = m - \frac{n}{z}x.$$

Dekart bu sayının negatif olduğunun olanağını farketmez. En azında bu olanağa dikkatımızı çekmiyor. Sayı negatif ise, L noktası EG doğru çizgisinin yukarısında bulunur. Oysa n/z negatif ise, L noktasının KC aralığında bulunduğuna dikkat ediyor. K noktası şöyle seçilmişsin ki $\overline{BK}$ uzunluğu m sayısına eşittir. KI araliği AB aralığına eşit ve paraleltir. Tabii, Dekart bu aralığa ait bir cümle ekliyor,

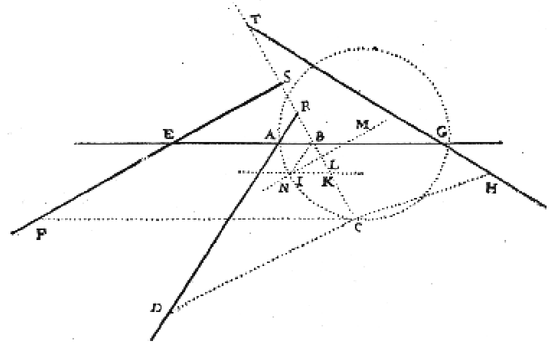
> *Je l'aurais ajoutée en tirant cette ligne IK de l'autre côté, s'il y avait eu $-m$; & je ne l'aurais point de tout tiré, si la quantité m eût été nulle.*

Herhalde bir nicelik negatif ise, Dekart'ın formüllerini nasıl değiştirdiğini biz şimdi anlıyoruz.

IK uzunluğu x sayısı olur ve KL uzunluğu nx/z dir. Dekart'a göre KL ile IL arasındaki oran da bilinir. O $n : a$ oranı olsun diye, a sayısını belirlıyor. En azından a şöyle belirlenebilir. Halbuki Dekart hiç bir formül vermez. Başka b, c, d filan sayıları için de hiç bir formül vermiyor. Bildiğimiz gibi, gerek ise trigonometri kullanarak formülleri çıkarabiliriz.

Bu noktaya eriştiğimizde, biz Dekart'ın yaptığını iki açından göz önünde tutabiliriz. Biz hem yöntemi uyguladığında Dekart'ın cebirsel becerisini takdir edebiliriz hem de onaltıncı yüzyılında yine meydana çıkan Yunanlı matematiği Rönesans matematikçilerin nasıl kullandığını seyredebiliriz. Bence Dekart'ın metnini kendi okumanız en iyi olur. Fakat bunu tek başınız yapmanız lazım. Ben ise, sizi metnini elde almaya teşvik edebilirim. Belki ben sadece Dekart kendisinin Apollonyus'u aktarıp anlattığı iddiaları hiç yorumlamadan size sunersem, size kandırabilirim. Maalesef benim gibi iseniz, konik kesit eğrilerin kuramı yeterli iyi bilmediğinizden, ben hiç yorumlamazsam siz hiç anlamazsınız.

Şimdi Dekart'ın her iddiası tekrarlarım. Bazı iddialar açıktır; başkalar için Apollonyus'un ispatladığı teoremler lazımdır. Tefrik etmeden hepsini veririm. Sonradan ispatlarına döneceğiz. Durumu açıklamak için hemen anlatacağımız şeyler var. Birincisi, ABL açısının belirtlenmiştir ve C noktasına bağlıdeğil. İkincisi $\overline{AI}$ uzunluğunun m sayısına eşit ve $\overline{BL}$ uzunluğunun $m - \frac{n}{z}x$ sayısına eşit olmaları sayesinde, LK uzunluğu $\frac{n}{z}x$ sayısına eşittir. Dolayısıyla IL doğru çizgisi ne x sayısına ne de C noktasına bağlıdır. ABL açısına belki dik açı olmamasına rağmen, biz yedinci denklem sayesinde hattın hangi cins konik kesik eğrisi olduğuna hemen tanıyabiliriz. Dekart kendisi ne der?



VI. Şekil

m, o ile p/m üc sayıları sıfıra eşittir, C noktası IL doğru çizgisinde bulunur. Dolayısıyla problemi çözen hat bir doğru çizgidir. m sayısı sıfır ise, p/m sayısı anlamsız dersiniz, fakat işarete rağmen, Dekart p sayısı ayrıca tanımlamadan p/m sayısını doğrudan tanımlar. Devam etmemizden önce bir şey nlatayım. Dekart'ın cebirsel ifadelerinde belirli işaretler koymasına rağmen, dört başta verilmiş doğru çizginin durumu başka olmuş ise veya B noktasının bulunduğu yer başka ise, ifadelerdeki işaretler de başka olacaktı. Bulduğu denklemin neticeleri anlatarak, Dekart'ın sarahatle anlattığı gibi, $mm + ox - p/mxx$ kareköku cebirsel çekilebilirse, o zaman C noktaşı başka IL doğru çizgisinden farklı olabilen bir doğru çizgide bulunur. Mesela hem mm hem $\frac{p}{m}xx$ positif işaretle belirirse ve

$$pm = 4\frac{p}{m}mm$$

sayısı oo sayısına eşit ise,

$$mm + ox + \frac{p}{m}xx = (\alpha + \beta x)^2, \qquad \alpha = m, \quad \beta = \frac{o}{m}$$

ve

$$y = \pm(a + \beta x).$$

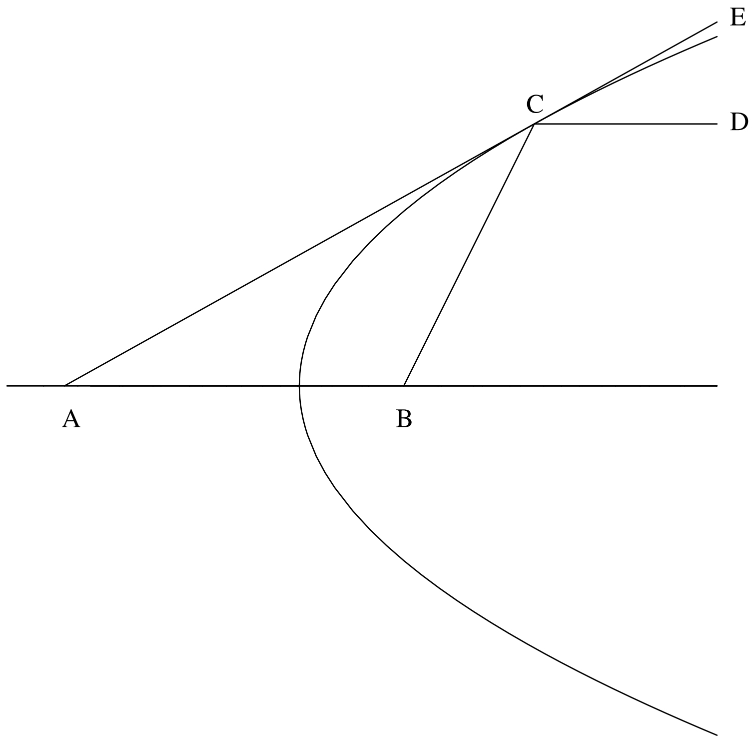
Bir yandan mm ile ox sayıları sıfır ise $y = \pm\beta x$. Öte yandan ox ile $\frac{p}{m}xx$ sayıları sıfır ise $y = \pm\beta$. $y = \pm(\alpha + \beta x)$ denklemi iki doğru çizgiyi belirler. Oluşan hat bozulmuş bir konik kesit eğrisidir. Dekart ise, bu başka doğru çizginin bulmasının kolay olduğunu diyor.

> *ce point C se trouverait en une autre ligne droite qui ne serait pas plus malaisée à trouver que IL.*

Karakökü cebirsel çekilebilmezse, C noktası muhakkak bir konik kesit eğrisinde veya bir çemberde bulunuyor. Problemi çözen hat bu konik kesit eğrisidir. IL doğru çizgisi bir çapıdır. Dekart'a göre, LC doğru çizgi ise, ya IL karşılıklı bir çapıdır ya da IL karşılıklı çapa paraleldir. Fakat biz kullandığı kelimeler belki anlayamiyoruz. Dekart kendisi durum şöyle ifade ediyor

> *l'un des diamètres est en la ligne IL, & la ligne LC est l'une de celles qui s'appliquent par ordre à ce diamètre, ou au contraire LC est parallèle au diamètre auquel celle qui est en la ligne IL est appliquée par ordre.*

Siz belki bu cümleyi anlamıyorsunuz. Fransızca okumamanızdan değil, ama kullanılan matematik kavramları tanımamanızdan, hiç olmazsa Dekart'ın kullandığı sözçükleri tanımamanızdan. Biz sonradan her gerek kavramı anlatacağız ama önceden Dekart'ın anlattığını aktarıyoruz.



VII. Şekil

Yedinci denklemde bulunan $\frac{p}{m}xx$ ifadesi sıfır ise, konik kesit eğrisi bir paraboldur. Öncedeki işaret positif ise, hiperbol dur, işaret negatif ise, elipstir. Bir istisnaî hal var. aam ile pzz sayıları (Dikkat! Dekart şöyle yazar, ama gerçekten aa ile $\frac{p}{m}zz$ sayılarını yazmalı.) eşit ise ve ILC açısı dik bir açı ise, o zaman hat elips değil, çemberdir. Dekart kendisinin ILC açısı veya ona eşit olan ILK açısının dik olmadığını tanıdığını hemen vurgulıyorum. Sonradan yazdığına göre bana O bu açı gerekli dik olduğunu iddia eder gibi geliyor.

IK uzunluğunun x sayısına eşit olduğu, KL uzunluğunun nx/z sayısına eşit olduğu, ve IKL açısının verilmiş olduğunundan, KL ile IL uzunlukları arasındaki oran belirtlenmiştir. $n : a$ olsun.

Hattin parabol olduğu hal en kolay haldir. Hat parabol ise, Dekart bulduğu parabolun temel niteliklerini verdiğinden sonra, Apollonyus'un konik kesit eğrileri üstünde olan eserine başvurarak bilinmiş teoremleri kullanıp hattın hangi parabol olduğunu belirtiyor. Hat parabol olması hal için, ILK belki dik açı olmaması nedeni şimdi anlatabilirim. Sonradan hatırlatacağımız gibi IL doğru çizgisinin yönü parabol tarafından belirlenir. Meselenin verilmiş şartların arasında ABC açısı bulunduğundan, BC doğru çizgisinin yönü de verilmiştir. IL doğru çizgisi gerekli BC doğru çizgisine dik ise, IL yönü de verilmiş olur. Fakat x ile y koordinatlar seçerek, biz verilmiş dört doğru chizgisi, yani EG çizgisini seçmelidik. TH doğru çizgisini aldıysak, BC doğru çizgisinin yerine HC doğru çizgisini elde ederiz. Başka seçmenin neticesi gine aynı parabol olur, ama yeni IL benzer doğru çizginin yönü başka olur. Bu çelişmeden ILK açısının muhakkak dik bir açı olmadığını sonuçlandırabiliriz.

Dekart anlattığını tekrarlayıp Apollonyus'un eserinde ne bulunduğu açıklamadan evvel, biz belki umuttuğumuz parabol hakkındaki temel tanımları hatırlayalım. Tabii Dekart'tan sonra gelişmiş olam yöntemler kullanacağız. Bildiğimiz gibi, koordinatlar u ili v iyi seçersek, parabolun denklemi şöyle yazılır,

$$v^2 = \alpha u.$$

α sayısı bir sabitedir ve bu sabite parabolun tek bir sayı niteliğini belirliyor. Ona Latince "latus rectum" denir. Parabolun tanıdığımız bir ocağı var. Yani ekseni $v = 0$ doğru çizgisidir. Her bu doğru çizgiye paralel olan doğru çizgi parabolun bir çapı denilir. $v = \beta$ bir çapı olsun. Bu çapın parabolla kesiştiği C noktası $(\beta^2/\alpha, \beta)$ noktasıdır. Yedinci şekilde görülen bu noktadan geçen parabolun teğetinin meyili

$$2v\frac{dv}{du} = \alpha$$

denklemi tarafından tanımlanır. Dolayısıyla bu noktada meyil $\alpha/2\beta$ sayısına eşittir. Teğetini tanımlayan denklem

$$(y - \beta) = \frac{\alpha}{2\beta}\left(x - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

denklemidir. Mesela $y = 0$ ise,

$$x = \frac{\beta^2}{\alpha} - 2\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{\beta^2}{\alpha}.$$

$(\alpha/4, 0)$ noktası, yani şekildeki B noktası, parabolun ocağıdır. Gerçekten

$$\beta^4 + \left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{4}\right)^2 = \left(\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{4}\right)^2$$

denklemi sayesinde yedinci şekilde ABC üçgeninde AB ile BC kenarları birbirine eşittir ve CAB ile BCA açıları da birbirine eşittir. Dolayısıyla bu iki açı ECD açısına da eşittir ve DC ışınının teğette veya parabolda yansısı CB ışınıdır. Bildiğimiz gibi her eksenine paralel olan ışının yansısı parabolun ocağından geçer.

Parabol tanımlayarak biz dikgen olmayan koordinatlar kullanabiliriz. Mesela sekizinci şekilde (u, v) bir noktasının dikgen koordinatları ise, (s, t) dikgen olmayan koordinatları olabilir.

$$t^2 = \alpha s \tag{9}$$

denklemiyle bir parabol tanımlanar.

$$\begin{aligned} t &= \frac{v}{\sin\theta}, \\ s &= u - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}v \end{aligned} \tag{10}$$

denklemleri şekilden açıktır. Dokuzuncu denklem şöyle

$$v^2 = \sin^2\theta\alpha\left(u - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}v\right)$$

veya

$$\left(v + \frac{\alpha}{2}\sin\theta\cos\theta\right)^2 = \theta\sin^2\alpha\left(u + \frac{\alpha}{4}\cos^2\theta\right)$$

eşdeğerdir.

$$\begin{aligned} v_1 &= v + \frac{\alpha}{2}\sin\theta\cos\theta, \\ u_1 &= u + \frac{\alpha}{4}\cos^2\theta \\ \alpha_1 &= \sin^2\theta\alpha \end{aligned}$$

koysak, hattın denklemi

$$v_1^2 = \alpha_1 u_1 \tag{11}$$

olur. (u_1, v_1) koordinatları dikgendir, fakat yeni merkez $(u_1, v_1) = 0$, eski koordinatlarla

$$\left(-\frac{1}{4}\cos^2\theta\alpha, -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\alpha\right).$$

noktasıdır. Dolayısıyla "latus rectum" α değil, α_1 dır. $v = 0$ doğru çizgisi bir çapı olmasına rağmen, parabolun eksen bu çizgi değil,

$$v = -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\alpha$$

doğru çizgisidir.

Sonuçlar olarak, biz bildiğimiz gibi, koordinatların dikgen olmamalarına rağmen, dokuzuncu denklem bir parabol tanımlar. Çoktan beri bildiğimizi hatırlanmama rağmen, ben bizim bildiğimizi anlatmak istemem, Dekart'ın ne bilip anlattığını anlatmak isterim. Anlatma en kolay yöntem olarak, ilk önce belki unuttuğunuz matematiği size hatırlattığım sonra, Dekart ne yaptığını inceleyebileceğiz. Maalesef, fikirlerini Dekart'ın kuşağının saf gözlerle izlememiz mümkün değil. En iyi olarak, kendiniz onun yazılarını okumanız olur. Sizi bu girişime teşvik etmek için bu dersleri veriyorum.

Yedinci denklemden faydalanarak, Dekart çözümünün denklemini şöyle yazabilir,

$$w = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}. \tag{12}$$

Kullandığı iki x ile w koordinatları dikgen değil. Aldırmadığımız bir işaret bir tarafa koyarak w koordinatı LC uzunluğdur ve IL parabolun bir çapıdır. w koordinat uzunluklar ölçer. Halbuki IL doğru çizgisinde x uzunluklar ölçmez. IK uzunluğu x ise, IL uzunluğu $\frac{a}{z}x$. Dolayısıyla IL doğru çizgisinde uzunluklar $t = \frac{a}{z}x$ koordinatla ölçülür. Parabol içın dokuzuncu denklem

$$w^2 = mm + \frac{oz}{a}t.$$

Koordinatları gine değiştirip,

$$s = t + \frac{a}{oz}mm$$

alırız ki

$$w^2 = \frac{oz}{a}s. \tag{13}$$

Anlatığım gibi, (s, w) koordinatlar dikgen değil. Dolayısıyla Dekart'ın ve onun peşinden giden Schooten'in yazmasına rağmen olağan olarak parabolun "latus rectum"u oz/a değil. Açıkça bence ikisi şöyle bir hata yaptıklarına inanamıyorum. Dekart kendisi küçük bir hata yapabilmişti, fakat Schooten dikkat edip Dekart'ın her hesap tekrarlamıştı. Belki kullandıkları koordinatların gerçekten dikgen olmadıklarından ikisi bilinçli değildiler. Bu çözeceğiz küçük bir muammadır.

Dekart parabolun "latus rectum"unun oz/a olduğunu yazdığından sonra şöyle yazıyor

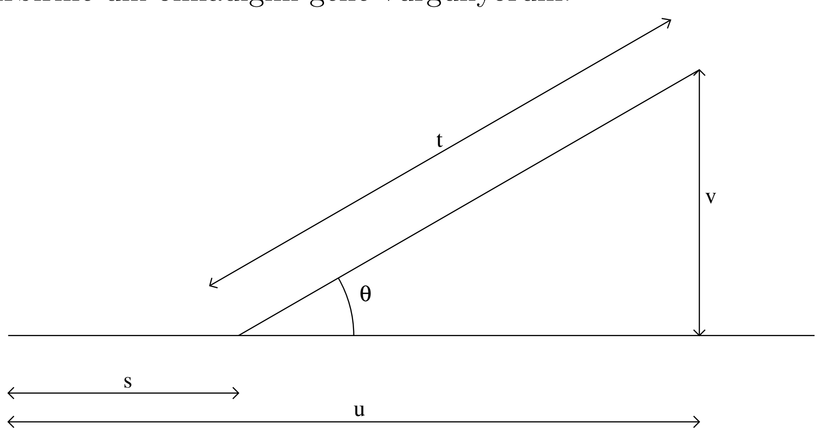
& son diamètre est toujours en la ligne IL

Bir çapından değil onun çapıdan söz eder. Olağan olarak parabolun tek bir ekseni olmasına rağmen, çapılarının takımı sonsuz sayıdadır. O zaman Dekart ne demek ister? Gerçekten makalesinin İngilezce çevirmesinden birinde *diameter* değil *axis* yazılıyor. Herhalde IL doğru çizgi genel olarak parabolun ekseni değil parabolun bir çapıdır. Devam ederek, Dekart yazıyor

pour trouver le point N, qui en est le sommet, il faut faire IN égale à amm/oz.

N noktası parabol ile IL doğru çizgisinin kesiştikleri noktasıdır. Dolayısıyla bu noktada $\overline{LC} = 0$ ve $mm + ox = 0$. Ama x sayısının IL doğru çizgisinde uzunluklar ölçmediğinden dolayı $\overline{IN}$ uzunluğu mm/o değil $a/z \times mm/o$ dir. Dekart iddia ettiğini bu kadar doğrulayabiliriz. Halbuki genel olarak IL ekseni olmadığından N noktası parabolun zirvesi (yani *le sommet*) değildir. Hattın parabol olması halın incelenmesini biterek, Dekart N noktasının o sayısının öncedeki işaret göre gerek I noktasının sağında veya solunda bulunur. Yani $LC \bowtie \sqrt{mm \pm ox}$.

Öncedeki sözleri yazdığım sonra, Apollonyus'un katkıları nihayet öğrendiğimde, benim evvelce bir şey kavramadığımı takdir ettim. Dekart benimden başka eksenin, zirvenin ile parametrenin veya latus rectum'nun tanımını kullandıyor. Yani Dekart Apollonyus yazılarında meydana konan tanımları kullanıyor. Bu o kadar önemli olup Apollonyus'dan Dekart'a geçişin doğru ve çatlaksız olduğunu gösteren tanımları Apollonyus'un katkılarını ele almamızdan evvel Dekart'ın Pappus'un problemine ait her iddiasını vermeyi vadetmeme rağmen, en azından parabol için Apollonyus'un genel kavramları ile yöntemlerini sunarım. Göreceğiniz gibi, anlattığımın ve çağdaş tanımların tam tersine, Apollonyus'un işlemesinde parabolun tek bir zirvesi değil, konik kesit eğrisinin onu tanımlayan koniyle ilişkisine göre başka bir zirvesi ve bu sebepten başka bir parametresi var. Tanımlayan koniye göre her çapının parabolla kesiştiği nokta zirvesi olabilir. Mesela, gerek koni vermemesine rağmen, Apollonyus'un tanımına göre Dekart'ın verdiği IL çapının parabolla kesiştiği N noktası zirvesi olabilir. Fakat IL ile LC doğru çizgilerinin birbirine dik olmadığını gene vurgulıyorum.



VIII. Şekil

Apollonyus M. E. 262 yılı çevresinde doğup Arkımedes'den yaklaşık yirmi beş yıl daha genç olmuştu. En ünlü yazıları olan konik kesit eğrileri üzerinde sekiz kitap yazmıştıĖutokyus (M. S. 500 yılı) ilk dört kitapların bir tabını hazırlayıp tefsir de etmişti. Matematik üzerindeki ve Heath'ın yazdığı bir kitaba göre, M. S. dokuzuncu yıyılda başka işler arasında Rum İmparator VI. Leo Konstantinya Üniversitesini şehirde yeni kurup matematik bilimin eski kuvvetini yerine getirmişti. Leo'nın sayesinde özellikle Eudokyus'un tabını o zaman taklit edilmişti.

Sonradan sırasında bu metinler taklit edilerek artık mevcut olan el yazmaları hazırlanmışlardı. Heath'ın yazmasının tam tersine olarak, Encyclopedia Britannica'da Leo'dan başka görü bulunuyor. Bu görüşe göre Leo budala bir hükümdar olmuştu. Ünlü fakat bazen abartan veya yanlışı çıkan tarihci Gibbon'a göre, *bilge* veya *filozof* takma adların Leo'ya takılmıştı zira

> *He was less ignorant than the greater part of his contemporaries in church and state, that his education had been directed by the learned Photius, and that several books of profane and ecclesiastical science were composed by the pen, or in the name, of the imperial philosopher.*

Bu kaynaklardan hangisinin daha güvenilir olduğunu kendiniz karar verebilirsiniz.

Herhalde yalnız ilk dört kitablar Rumca olan mevcuttur. Sekizinci kitap tam kaybedilmiş, fakat diğer üçü Arapca olarak mevcuttur. İlk dört kitabın Latince çevirmesi ilk olarak, 1537'de[3] Venedik'te basılmıştır. Ondan sonra ilk önemli Latince bası olarak, 1566 yılında basılmıştır. Dekart belki bu basıyı kullandı. Elbette O Rumcadan Latince daha iyi okuyabiliyormuş. Diğer üç kitabın Arapçadan yalnız 1661 yılında çevrildiğinden, onları hiç okuyamazdı.

Bildiğiniz gibi Dekart 1596 yılında doğmuştu. Apollonyus okulda okumayacaktı. 1630 yılında o kadar genç olmayan Dekart matematik ögrenci olarak Leyden Üniversitesi tarafından kabul edilmişti. 1624 yılından beri şark dillerden sorumlu ama 1629 yılından beri matematik de sorumlu olan Yakobus Golyus profesör unvanı sahibiymiş. Özellikle konik kesit eğrilerinin bir uzmanidı. 1631 yılının sonunda Dekart dahil bazı meslektaşlarına Pappus'un problemini göndermişti. Anlasılan bu zamandan evvel Dekart'in en azından Apollonyus'un birinci kitabınıbiliyormuş zira altı hafta sonra Apollonyus'un yazılarında bulunan teoremler kullanarak problemi cözmüştü.

Dekart aktardığımız iddialarından sonra ispat vermıyor. O bu bentleri okucuyu sadece Apollonyus yazılarına gönderiyor.

> *Au moyen de quoi il est aisé de trouver cette parabole par le* 1^{re} *problème du* 1^{re} *livre d'Apollonius.*

Zeuthen Dekart'ı eleştirerek bu göndermeye ait görüşünü ifade eder.

> *Was nun Descartes' eigene fernere Bestimmung desselben geometrischen Ortes betrifft, so begnügt er sich damit ein Paar konjugierter Durchmesser und die Form zu finden, welche die Gleichung durch Beziehung auf diese annimmt. Dadurch ist die Kurve allerdings bestimmt, abr nur weil man dann auch weiß, daß die Gleichung der Kurve dieselbe Form durch Beziehung auf ein Paar rechtwinliger Axen, die sich dann auch bestimmen lassen, behält. Für diese letztere Bestimmung, weklche, wie aus der elementaren analytischen Geometrie bekannt ist, den schwierigsten Teil der Bestimmung eines durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades gegebenen Kegelschnittes ausmacht, giebt Descartes in seiner Geometrie keine Anleitung, sondern er bezieht sich ganz einfach auf Apollonius. Dazu ist er sebstverständlich vollkommen berechtigt, aber seine herabsetzenden Bemerkungen über die Geometrie der Alten werden dadurch noch unbilliger.*

Zeuthen'in elestirmesi yalnız hattın parabol olması hala değil hem elips hem hiperbol olmasın hala aittir. Parabol olduğunda eleştirmesinin anlamı anlatmak daha kolaydır. Aynı zamanda Dekart'ın atladığı açıklama ile hesaplar diğer hallar kadar ciddi değil. Yani parabolu belirtmek için, çağdaş anlamda, ekseni bulunması lazım. Hesabımıza göre, Dekart'ın verdiği onikinci

[3] Fetihden önce!

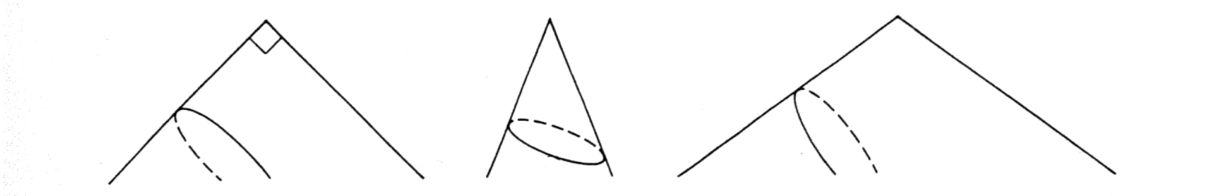
veya onüçüncü denklemden başlarken biz anlatığım yöntemle çok çabalamadan onbirinci denkleme erişebiliriz.

2. **Apollonyus.** Apollonyus kendi yazılarının okunması zordur. Hele Rumca yazıldığından, ve ondan sonra önce Arapca ile Latince çevrildiğinden, ama aynı zamanda iddialar ile kanıtlar sunduğu tarzının bizimki olmadığından, metinlerinin zor anlaşılır. Gerçi hem Almanca ile hem İngilizce çevrilmesi var, ama bunlar bizim kütṗhanemizde mevcut olmadığından, ben Apollonyus geliştirdiği teoriyi sadece Heath'in *Apollonius of Perga* adlı güzel kitabında sunduğu şekilde veririm. Giriş olarak onun yaklaşımı faydalı olabilir.

Eski Rumca belki okuyabilirsiniz veya okumayı öğrenmek istediğiniz halde, Apollonyus'un yazmasindan size bir örnek göstermek için bu sayıların tam sonunda Heath'in kitabinda verdiği metin ve kendisinin kelime kelimesine tercüme ettiği çevirmesinden üç sayısını sunarım.

Apollonyus'un verdiği teoremler anlatarak, Heath aynı zamanda tarihi oluşu nakleder. Biz bu anda eski tarihi değil, Rönesans döneminde yeni mathematiğin eski mathematikten nasıl doğduğunu gösterdiği bir olay incelemek isteriz. Dolayısıyla Apollonyus kendisinin kesfettiğini öncellerden aldığından ayırma istekte bulunmuyoruz. Biz sadece Dekart'ın Apollonyus'un o zaman elde mevcut olan metinlerden ne alabildiğini daha iyi anlamak isteriz. Kimin hangi dönemde hangi teorem ispatladığı bilmamız maksadımıza lazım değil.

Yine de Apollyonus'un yazılarında bulunan teoremler vermemizden evvel, öncellerini kısa hatırlatırız. Heath'e göre dört önemli ad var. İmlasını tekrarlıyorum, ama adlarını kendiniz Türkçe yazmak istediğiniz halde onları Rumca da veriyorum): Menaechmus (M. E. 340 yılın çevresi—Μέναιχμος); Aristaeus (M. E. 320—Ἀρισταῖος); Euclid (Öklid, M. E. 290—Εὐκλείδης); Archimedes (M. E. 250—Ἀρχιμήδης). Apollonyus (Ἀπολλώνιος M. E. 230 yılın çevresinde yaşdığından dolayı tam gelişme bir yüzyıl içinde tamamlanmıştı.



IX. Şekil

Heath'in naklettiğini kısa hatarladttığımızda, eski matematik hakkında tarihin bazen olaylardan yüzyıllardan sonra yazılmış ve sayısı çok az olan kaynaklar kullanarak yaratılmasını unutmamamalıyız. Kaynaklara göre hacimi verilmiş bir küpün haciminin iki mislisi olan bir küpün geometrik inşa yapısının iki verilmiş sayının oranlarıaynı iki orta orantılının inşa yapısının bir neticesi olduğunu Hippokrat[4] keşfetmişti. Yani iki sayi a ve b iseler, iki

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \tag{14}$$

denklemleri çözen sayı aranır. Şu halde

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{a}{b}.$$

Özellikle

$$\frac{a}{b} = 2$$

[4]M. E. 430, dolayısıyla Apollonyusdan iki yüzyıl evvel.

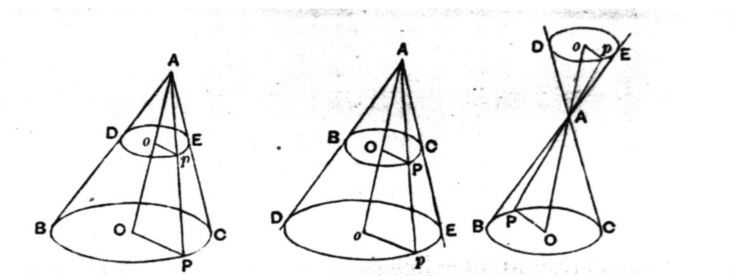
alarak, bir küpün hacimi ikileyen küpü bu şekilde bulunur.

Onüçüncü denklemler üç

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx, \qquad xy = ab \tag{15}$$

denklemden her hangi ikisiye eşdeğerdir. Fakat eski Yunanlı matematekçi isek, biz bu denklemlerin somut bir çözüm bulmak isteririz. O zaman geometrik çözümden başka muhakkak genel çözümün bulunmaz gibi geliyor bana. Geometrik çözüm kesinlik ve açıklıkla ifade edilmiş talimatlara uyarak aranan noktalar veya hatlar inşa edebilmemizdir. Mesela cetvel tahtasıyla bir doğru çizgi veya pergelle bir çember her çocuk inşa edebilir. Uzamda bir verilmiş noktadan geçen veya başka niteliklerle düzlem de inşa edebiliriz. Ya da verilmiş zirveyle verilmiş çemberden geçen koni en azında havada nasıl çizilmesi biliyoruz. Halbuki ondördüncü denklemlerden birinin tanımladığı hattının nasıl çizilmesi bilmiyoruz.

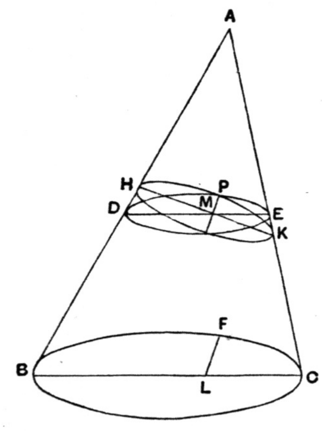
Verdiğimiz basit cebirsel şekilde denklemler verilmemişti belki kullanmamıştı ama anlarsam Manaechmus'un keşifi denklemlerin tanımladıkları hatlarınu bir koniyle bir düzlemin kesişmesi elde edilmesiymişti. Ben Menaechmus'dan Apollonyus'a kadar gelismeleri burada anlatmak istemediğim halde, bir önemli değişim vurgulamak isterim. Dokuzuncu şekilde üç koni ile üç konik kesit eğrileri gösteriliyor. Koniler dik konilerdir, yani konilerden birini inşa etmek için, inşaatına gerek olup bir düzlemde bulunan çemberin merkezinden geçip düzleme dik olan bir doğru çizgi çizilsin. Koninin zirvesi bu doğru çizgide bulunur. Şu halde zirveden ve çemberin merkezinden geçen her hangi bir düzlem çemberin bir çapından geçer ve koninin kesişerek zirvede bir açı tanımlar. Şekilde gösterilmiş gibi su açı dar, dik veya geniş olabilir. Bu açı seçilmiş düzleme bağlı değil. Koninin içerdiği ve açıyı tanımlayan doğru çizgiler onun yapıcı çizgilerdir, mesela seçilmiş düzlem iki yapıcı çizgiler içer. Herhalde bir yapıcı doğru çizgiye dik olan bir düzlemle koniyi kestirirsek, konik kesit eğrisi elde ederiz. Menaechmus bu sözleri kullanmamıştı ama açıya göre elde edilen konik kesit eğrisi parabol, elips, veya hiperbol olur. Açı dar ise, elipstir; dik ise parabol; ve geniş ise hiperbol.



X. Şekil

Bu o zaman kullanılan tanım çağdaş tanımdan daha dardır zira bugünkü kavrama göre biz koniyi herhangi bir düzlemle kestirirsek, konik kesit eğrisi elde alırız. Halbuki ilk başta düzlem koninin bir yapıcı doğru çizgisine dik olmalımıştı. Oysa Apollyonus şimdi kullandığımız tanımı kullanırdı. Bu daha geniş kavram Apollonyus kendisi kesfetmemişti. Mesela, Arkimedes'in yazılarında daha geniş tanımın izleri var. Öklid'in adını tanıyoruz, ama ondan önce doğmuş olan Aristeyus'un adı Öklid'in adısına kadar ünlü değil. İkisinden her biri konik kesit eğrileri üzerinde ama artık mevcut olmayan bir kitab yazmıştı. Öklid Aristeyus tarafından etkilenmişti ve Apollonyus ikisi tarafından etkilenmiş. Tabii Apollonyus kendisi yeni teoremler keşfetmişti. Halbuki bizi şimdi ilgilendiren soru karşılıklı etkileri değil. Biz Dekart ile başkalarının Apollonyus'un yazılarında ne bulup kullandığını öğrenmek isteriz.

Onun genel kavramını verdik. Heath'in açıklamalarını kullanarak, Apollonyus kavramdan çıkardığı sonuçları anlatmak isteriz. Onuncu şekilde bir koni çizilir. Zirvesi A noktasıdır. Tabanı olan çember BCP çemberidir. Çemberin merkezi olan O noktası ile zirvesinden geçen doğru çizgi koninin eksenidir. Menaechmus ile Apollonyus'un tanımları arasında önemli fark olarak, akseni çemberin tanımladığı düzleme dik değil. Başka bir fark da var. Halbuki bu fark açıklamamız için çok önemli değil. Koniyi inşa ederken, biz zirvesinden geçen bir doğru çizgi çevirerek bir düzey çiziriz. Bu doğru çizgilerden her birisi başka bir çemberde bulunan bir notktadan geçer. İlk başta, doğru çizgi bir doğru çizginin yarısıdı ki çizilmiş düzey alışılmış anlamda bir koniydi. Ama Apollonyus kitapta doğru çizgi tam doğru çizgidir ki elde edilen koni gerçekten bir çifte konidir. Olağan olarak şekillerde bu çifte koninin yarısıgösterilir.



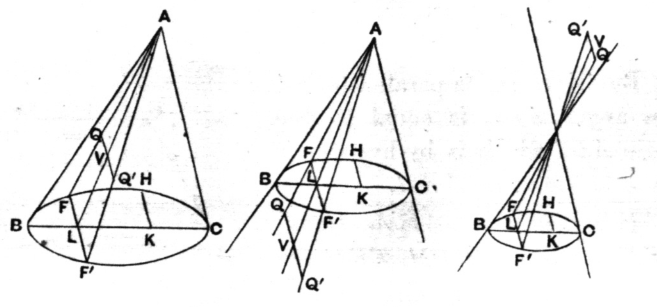
XI. Şekil

Apollonyus kullandığı tanım ilk tanımla arasında en önemli fark koniyi kestiren düzlemin durumudur. Menaechmus'us tanımında kesen düzlem bir yarıcı doğru çizgiye dik olduğu halde Apollonyus'un tanımında düzlemin durumu keyfi olabilir. O zaman zirvesindeki açı koniyi kesen düzleme dik olan bir düzlemde tanımlanabilir. Mesela on ile onbirinci şekillerde koniyi kesen düzlem gösterilmez, fakat ona dik olan zirvesiden geçen düzlem ABC düzlemidir. Bu düzlemin taban düzlemine hem dik olup hem koninin tabanı olan çemberin merkezinden geçtiğinden dolayı iki düzlemin kesiştiği doğru çizgi çemberin bir çapıdır.

Onikinci şekilde de koniyi kesen düzlem açık görünmüyor. Fakat eklemiş ABC düzlemi ve ona dik olan AFF' düzlemi çizilir. Apollonyus V noktası QQ' aralığı ikiye böldüğünü kanıtlar. Elbette kanıt oldukça kolay. V, Q, ile Q' noktaların temel olan ortak nitelikleri nedir. İlk olarak Q konide bulunan keyfi noktadır. Q verilmişise V noktası Q noktasından geçip FF' doğru çizgiye paralel olan doğru çizginin eklemiş düzlemle kesiştiği nokta olmak üzere tanımlanır. O zaman Q' noktası VQ doğru çizginin kestiği ikinci noktadır.

Koniyi kesip konik kesit eğrisini tanımlayan düzlem eklemiş ABC düzleme dik olan herhangi bir zirvesinden geçmiyen düzlem olabilir, mesela onüçüncü şekilde görülen $PDME$ düzlemi gibi. Konik kesit eğrisi DPE hattıdır. Demin anlattığımız iddiaya göre bu şekilde çizilen QQ' araliğının orta noktası V noktasıdır. Bundan önemli bir sonuç elde alarız. Şekilde M çemberin çapında bulunan bir noktadır. DE doğru çizgi ona diktir ve QQ' doğru çizgi DE doğru çizgiye paralel ve koninin bir kiriştir. V noktasını şöyle değistirerek ki PM doğru çizgisinde kalır biz çeşitli kirişler elde ederiz ama onların hepsinin orta noktası PM doğru çizgide bulunur. Bu nedeniyle PM doğru çizgisi hem koninin hem de konik kesit eğrisinin bir çapı adlanır.

Dekart çap adını bu anlamda kullanır. Genel olarak çap ikiye böldüğü kirişlere dik değil. Eklenmişolan düzlem koninin tabanını içeren düzleme dik ise, o zaman çapı ikiye böldüğü kirişlere diktir. Mesela eklenmişolan düzlem koninin ekseni tabanı içeren düzleme dik ise.



XII. Şekil

M noktası koniyi tanımlayan düzlem bulunur, ama onuncu şekilde gördüğümüz gibi koni tek bir düzlem tarafından tanımlanmaz. Şekilde iki çember görünüyor. Iki çemberi içeren iki düzlem paraleldir ve koniyi çizip tanımlamak için çemberlerden her birisini kullanabiliriz. Dolayısıyla M noktasi koniden çıkıncaya kadar, verilmiş PM doğru çizgi boyunca değistirebiliriz. Konik kesit eğrisi hiperbol veya parabol ise M noktası koniyi çıkmıyor, fakat elips ise çıkabilir. Her üç halde konik kesit eğrisinde bulunan Q noktasına iki sayıbağlıdır. Birisi *ordinat* adlanan QV uzunluğudur. Ikisi *absis* veya *fasla* adlanan PV uzunluğu.

Ben Apollonyus bu iddiaları nasıl ispatladığını anlatmadım. Fakat şekillerden ispatları oldukça açıktır. Tabii kitabında ilerleyerek ispatlar gittikçe daha zorlu olur. Biz bu dizide daha basit olan ilk teoremleri inceleyeceğiz.

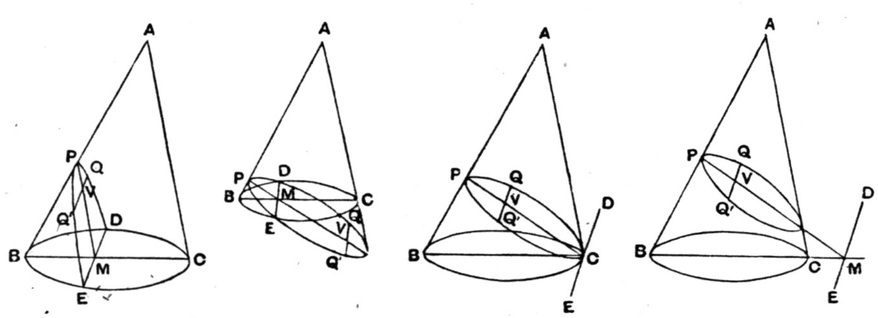
Ondördüncü şekile bakalım. Ekleme düzlemin koniyle kesiştiği hat bir açı tanımlayan iki doğru çizgiden ibarettir. Şekilde bu iki doğru çizgi AB ile AC doğru çizgidir. Özel durum olarak konik kesit eğrisinin çapı bu iki doğru çizgilerden birisine paralel olsun. Şekilde öyledir. Çapı PM doğru çizgisidir. P noktası koni ile konik kesit eğrisi tarafından tamamen belirtilmiştir. PL aralığı koniyi kesip eğriyi tanımlayan düzlemde bulup ekleme düzleme dik olsun. Uzunluğu

$$PL : PA = BC^2 : BA : AC$$

şartı tarafından belirtilsin. Şu halde her konik kesit eğrisinde bulunan Q noktası için

$$QV^2 = PL \times PV. \tag{16}$$

Elbette Apollonyus denklemi cebirsel ifade etmiyecekti. Siz bu denklemin bir parabolun denklemi olduğu hemen tanıyacaksınız. Dolayısıyla eğrinin bir parabol olduğu kabul ettiğimiz şartın sonucudur.



XIII. Şekil

Onbeşinci denklemi ispatladığımız sonra Pappus'un problemini çözen hattın bir parabol olduğunda Dekart'ın Apollonyus'dan niye ihtiyacının olduğunu anlatacağız. Ondördüncü şekili yorumlayalım. Anlattığımız gibi ABC düzlem eklenmiş olan düzlemdir. BC çizgisi koninin tabanının bir çapıdır. V noktasından geçen ve BC doğru çizgisine paralel olan HK doğru çizgisi çizilsin. QV doğru çizgisinin DE doğru çizgisine parale olduğundan dolayı HQK düzlemi koninin tabanına paralel olur. Apollonyus'un evvelden kanıtladığı ve biz de kolay kanıtladığımız gibi, şu halde HQK düzlemi koniyle bir çemberde kesişir. QV doğru çizgisinin HK doğru çizgisine dik olduğundan dolayı, Öklid'in Öğeler'de ispatladığı ve her okuyucu kuşkusuz bildiği gibi

$$HV \times VK = QV^2.$$

Eklenmiş düzlemde inceleyip şekilde aynı olan üçgenler kullanarak, biz iki denklem ispatlayabiliriz.

$$HV : PV = BC : AC,$$
$$VK : PA = BC : BA.$$

Dolayısıyla

$$HV \times VK : PV \times PA = BC^2 : BA \times AC$$

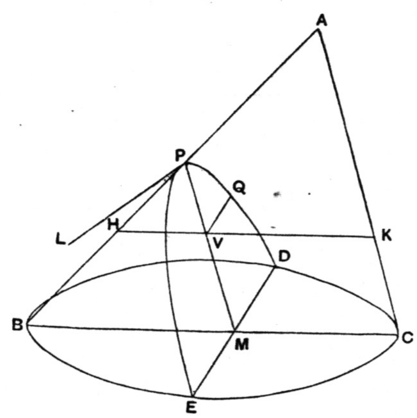
ve PL tanımı sayesinde

$$QV^2 : PV \times PA = PL : PA = PL \times PV : PV \times PA.$$

Nihayet

$$QV^2 = PL \times PV$$

denklemini elde ederiz.

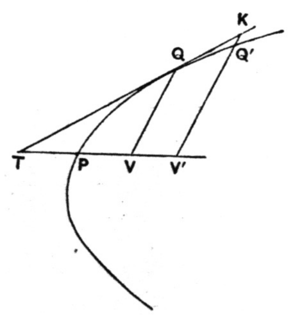


XIV. Şekil

Netice başka şekilde ifade edilebilir. Kenarı QV olan kare yüksekliği PV olup PL aralığe üzere koyulan bir dikdörtgene eşdeğerdir. Yaklaşık *yaklaşmak* veya *varmak* diyen Rumca παραβάλλω fiilden çıkmış olan "parabol" sözü bu durumu ifade eder. Eskiden aynı durumu, yani kenarı QV olan karenin PL aralığında PV yüksekliğiyle kesilen dikdörtgene eşit olduğunu ifade edilen *kat'ı mükâfi* sözu kullanılır. Arapça sözünü bırakıp Fransızcadan alınmış olan Rumca sözünü kullanarak ilerletilir.

Dekart'ın "La géométrie"sine döneceğimizde hiperbol ile elips için onbeşinci denkleme benzer denklemler bulacağız. Fakat Dekart'a dönmemizden evvel, Apollonyus ispatladığı parabolun basit niteliklerini inceleyeyim. Birkaç teoremi ispatlıyor. Birinci olarak, konik kesit eğrisinde bulunan noktadan geçen teğeti bulur. Onbeşinci şekilde gibi, bu nokta Q noktası olsun. Eğrinin çapı $TPVV'$ doğru çizgisi olsun. Q noktasına ait ordinat QV aralıktır. T noktası şöyle seçilsin ki TP ile PV aralıklar birbirine eşittir. *Şu halde TQ doğru çizgizi Q noktasından geçen teğettir.*

Bu teorem elde edilmiş olarak Apollonyus genel olarak parabolun çapı ortaya koyar. Onaltıncı şekilde gibi *EF tanımladığı çapıya paralel olan her hangi bir doğru çizgi olsun. Konik kesit eğrisini Q noktasında kessin. RR' kirişi eğrisinde bulunan Q noktasından geçen teğete paralel olsun. O zaman EF doğru çizgisi kirişi ikiye böler.* Bu nitelikten dolayı her ilk tanımladığı çapıya paralel olan doğru çizgi eğrinin çapı adlanır. Devam edip Apollonyus her hangi bir çapıya ait absis ile ordinat meydana koyar ve PL yerine yeni bir parametre kullanılırsa bu yeni iki sayılar onbesinci denkleme benzer bir denklem doğru kalır. Şöyle, bildiğimiz gibi, tek bir parabol farklı denklemler tarafından tanımlanabildiğini gene takdir ederiz.



XV. Şekil

Parabol'un düzlemdeki denkleminde üç şey var. Ilk olarak genel anlamda çapı, ikinci olarak kirişin çapını kestiği açı, üçüncü parametre. Bu üç öğeden birisi yoksa parabol tanımlanmaz. Ama bazı sorunlar var. Bu üç şey keyfi mi? Tabii çapı olarak seçilmiş doğru çizgiyi keyfi belirtebiliriz, ama parametreyi veya açıyı değistirerek parabolu değistirebiliriz. Aynı zamanda parabolu değistirmeden parametre ile açı değiştirebiliriz. Apollonyus her gerek teorem ispatlar. Parametre ile açı keyfidir. Parametre iyi seçildiyse açı bir dik açı olur. O zaman çap adladığımız parabolun eksini olur. Dekart Apollonyus'un kitabında bulunduğu teoriyi küçümsemesine rağmen bu teoriyi kullanmadan Pappus'un problemini hiç çözemez!

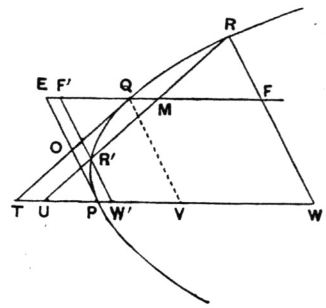
Dört doğru çizgi hattının çözümünün hiperbol veya elips olması hale dönmemizden evvel bu iki konik kesit eğrisinin Apollonyus'un sunduğu temel teorisini hatırlatayım. Ilk önce hiperbol için ve ondan sonra elips için Apollonyus'un çıkardığı denklemleri vereyim. On yedinci şekilde gibi koni kesit eğrisini tanımlayan düzlem CA doğru çizgisinin uzatımını P' noktasınında kessin. Konik kesit eğrisini tanımlayan PDE düzlemine dik olup P noktasından geçen PL aralığının uzunluğu için

$$PL : PP' = BF \times FC : AF^2$$

denklemi doğru olsun. AF doğru çizgisi PM doğru çizgisine paraleldir ve tabanın BC çapısiyla F noktasında kesişir. VR doğru çizgis PL doğru çizgisine paralel olarak çizilsin ve $P'L$ ile VR aralıklarının uzatımları R noktasında kesişirse,

$$QV^2 = PV \times VR. \tag{17}$$

Gene QV konik kesit eğrisinde bulunan bir noktanın ordinatıve absisi PV aralığıdır.



XVI. Şekil

Gördüğümüz gibi kenarları PV ile RV olan dikdörtgenin alanı kenarı PV ile VR olan dikdörtgenin alanından daha küçüktür. Fark alanının kenarı QV karenin alanıyla orantılı olduğu LR dikdörtgene eşdeğerdir. Bu iddiayı çağdaş bir şekilde ifade edersek,

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$$

denklemi elde ederiz. Denklemde $y = QV$, $x = PV$, $p = PL$ ve $d = PP'$. Tabii bu hiperbolun bildiğimiz denklemidir, ama eksenlerin biribirine dik olmayan koordinatlar kullanılıyor. Yani şekilde QV ile PV doğru çizgilerinin birbirine dik görünmesine rağmen olağan olarak birbirine dik değil. Herhalde eğri hiperbol ise, kenarı ordinat olan karenin alanı bir kenarı absis olup diğer kenarı PL paremetresine eşit olan dikdörtgenin alanından daha büyüktür. Anlaşılan hiperbol sözü *aşmak* diyen ὑπερβάλλω Rumca fiilden çıkar. Evvelden Arapça aynı anlamı ifade eden *kat'ı zaid* sözü kullanılmıştı.

Onaltıncı denklemi kanıtlayalım. Evvelce gibi BC aralığına paralel olan HK aralığı çizilsin. Şu halde

$$QV^2 = HV \times VK.$$

Şekilde aynı olan üçgenler teorisini kullanarak

$$HV : PV = BF : AF,$$
$$VK : P'V = FC : AF$$

denklemi elde ederiz. Dolayısıyla

$$HV \times VK : PV \times P'V = BF \times FC : AF^2$$

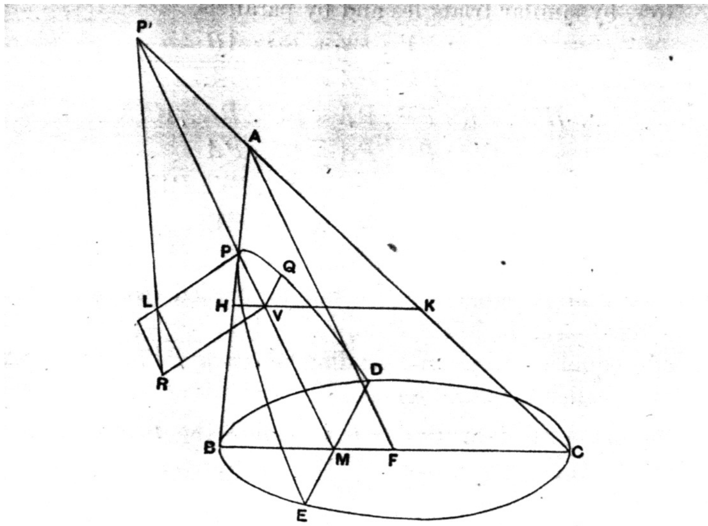
ve

$$\begin{aligned} QV^2 : PV \times P'V &= PL : PP' \\ &= VR : P'V \\ &= PV \times VR : PV \times P'V. \end{aligned}$$

Nihayet

$$QV^2 = PV \times VR$$

sonucu çıkarız. PL uzunluğu eğrinin *latus rectum*'u veya *parametre*'si adlanır.



XVII. Şekil

Şimdi onsekizinci şekili kullanarak elips de inceleyelim. Tabii iddia ile ispatı hiperbola ait iddia ile ispata benzer olur. Şekilde gibi eğri elips ise e griyi tanımlayan düzlem ile AC doğru çizgisinin kesiştiği P' noktası di ger A noktas inda başlayan C noktas indan geçen yarı doğru çizgide bulunur. O zaman koniyi tanımlayan çember değistirerek tabanı şöyle secebiliriz ki P' A ile C noktas inın aras inda bulunur. Şekilde gibi PP' doğru çizginin tabanı içeren düzlemle kesiştiği nokta M nokta olsun. F noktası BC doğru çizgisinde bulunur ve AF doğru çizgisi PM doğru çizgisine paraleldir. PL aralığı gene PM doğru çizgi diktir ve konik kesit eğrisini tanımlayan düzlemde bulunur. Uzunluğu

$$PL : PP' = BF \times FC : AF^2$$

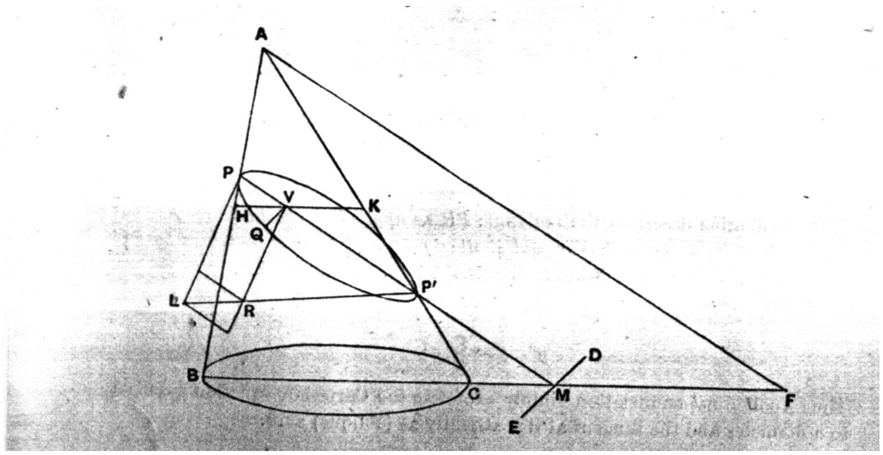
denklemle belirtilir. P' ile L birleştirilsin ve PL doğru çizgisine paralel olup $P'L$ doğru çizgisiyle R noktasında kesişen VR doğru çizgisi çizilsin. Şu halde

$$QV^2 = PV \times VR. \tag{18}$$

Şekil ile onyedinci denlemden gördüğümüz gibi, eğri elips ise, kenarı QV ordinatı olan karenin alanıkenarları PL parametresi ile PV absisi olan dikdörtgenin alanından daha küçüktür. Fark kenarı PV ordinatıya orantılı olan bir karenin alanına eşit tir. Hiperbol için gibi $y = QV$, $x = PV$, $p = PL$ ve $PP' = d$ ise

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$$

denklemi doğrudur. Rumca karenin alanının daha küçük olduğu *varmamak* diyen ἐλλείπω fiil'den çikma sözüyle ifade edilir, Eskiden aynı kavramı Arapça *kat'ı nakıs* sözüyle ifade ettiniz.



XVIII. Şekil

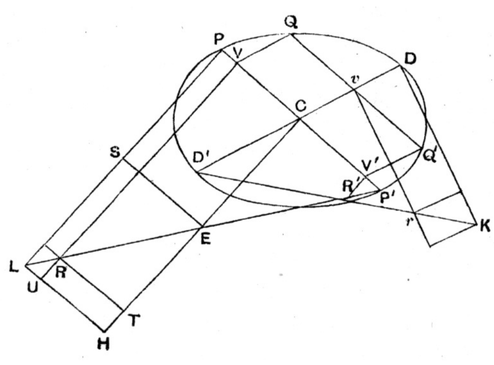
Onyedinci denklemin kanıtı onaltıncı denklemin kanıtı aynıdır. Onu çabuk anlatabiliriz. Şekilde V noktasından geçip BC doğru çizgisine paralel olan HK doğru çizgisi çizilir. Evvelden gibi

$$QV^2 = HV \times VK.$$

Şekilde anyı olan üçgenler gene kullanarak benzer denklemleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} HV : PV &= BF : AF, \\ VK : P'V &= FC : AF, \\ HV \times VK : PV \times P'V &= BF \times FC : AF^2, \\ QV^2 : PV \times P'V &= PL : PP' \\ &= VR : P'V \\ &= PV \times VR : PV \times P'V, \\ QV^2 &= PV \times VR. \end{aligned}$$

Devam etmemizden evvel Apollonyus'un ispatlarını anlatarken sık sık cebirsel ifade ettiğimiz denklemler geometrik cebirde anlamda anlamalıyız.



XIX. Şekil

Biz çap kavramını henüz tamamen anlatmadık. Konik kesit eğrisini tanımlayan düzlemi kullanarak eğrinin bir çapını belirttik. Genel kavrama göre bir koninin birbirine paralel olup bir düzlemde bulunan kiriş toplamasından her birini ikiye bölen bir doğru çizgi koninin bir çapı adlanır. Biz eklenmiş olan düzlemi kullanarak konik kesit eğrisinin ile koninin bir çapını belirttik. Halbuki diğer çapları var. Parabol için biz bunu evvelce anlattık. Her çapı birisine paraleldir. Yanı istersek, fakat bildiğim kadar Apollonyus şöyle düşünmüyormuştu, parabolunun her iki çapı sonsuzlukta kesişir.

Elips için çapları üzerinde olan Apollonyus verdiği önemli bir teorem anlatalım. Teoreme ait durum ondokuzuncu şekilde çizilir. Önce tanımladığımız çapi PP' doğru çizgidir. Koninin DCD' kirişi bu çapa karşılır ki C noktası DD' aralığını ikiye böler. Dolayısıyla tanıma göre hem DC hem de $D'C$ konik kesit eğrisinin ordinatıdır. İspatlayacağımız teoreme göre şu halde, C noktası PP' ikiye bölerse, DCD' her PP' paralel olan kiriş ikiye böler. Dolayısıyla DD' aralığı PP' paralel olan elipsin kirişlerinin toplamasına ait çaptır.

Bu iddianın kanıtı zordur. Onu anlatmamızdan evvel PP' ile DD' kirişleri arasında bir karşılıklı ilgi bu iddiayla meydana çıktığını dikkatınıza çekiyorum. Yani aynı zamanda DD' aralığı PP' doğru çizgisine ait bir kiriştir ve PP' aralığı DD' doğru çizgisine ait bir kiriştir. Teoremden dolayı en azından her elipsin iki çapı var. Apollonyus'un sonradan kanitladığı teoremleri inceleyip göreceğimiz gibi her bu iki çapı birbiriyle kesiştiği noktadan geçen doğru çizgi elipsin bir çapı belirtir. Hem elips hem hiperbol için bunu ayrıntılarla anlattığımızdan sonra Dekart'ın anlatmasına döneceğiz.

Fakat şimdiye kadar her konik kesit eğrisinin ayırt edilmiş olan tek bir çapı var, yani eklenmiş olan düzlemin eğriyi tanımladığı düzlemle kesiştiği doğru çizgi. Fakat her verilmiş bir düzlemin içerdiği konik kesit eğrisi düzlemin pek çok koniyle kesiştiği hat olmak üzere belirtilebilir. Çap kavramını tamamlamak için düzlemde her hangi bir eğrinin her çapının uygun bir koniyle belirtilebilmesini ispatlamalıyız. Birinci kitabında Apollonyus teoriyi bu kadar geliştirmişti. Belli ki Dekart da teoriyi bu kadar anlamıştı. Acaba Apollonyus'un katkılarını açıkça tanımak istememişti.

Ondokuzuncu şekli kullanarak anlattiğımız teoremi ispatlayalım. QV aralığı PP' çapıya herhangi bir ordinat olsun. Q noktasından geçip PP' doğru çizgisine paralel olan QQ' doğru çizgisi çizilsin. Q' bu doğru çizginin elipsi kestiği noktadır. Doğru çizgi ile DD' doğru çizginin kesiştiği nokta v noktası olsun. QV aralığına paral olan yarı kiriş veya ordinat $Q'V'$ olsun. Q noktasının keyfi bir ordinat olduğundan birbirine paralel olup DD' geçen QQ' kirişlerden çıkma toplantı elde ederiz. Her Q için v noktası QQ' aralığını ikiye bölürse, bu toplantının tanımladığı çap DD' aralıgıdır.

Devam etmemizden evvel Apollonyus tanımlarının ve kanıtlarının Öklidin'den daha sezgisel ve az mantıklı gözükmesini dikkatınıza çekiyorum. Bunun eski Yunanlı matematikte genel bir oluşa ait olup olmadığını bilmiyorum.

Onyedinci şekilde gibi onsekizinci şekilde PL uzunluğu paremetre olsun. V, C ve V' üç noktasından birer birer geçip PL doğru çizgisine paralel olan VR, CE ve $V'R'$ üç doğru çizgi çiziriz. R, E ve R' noktaları $P'L$ doğru çizgisinde bulunur. Biz evvelce

$$QV^2 = PV \times VR,$$
$$Q'V'^2 = PV' \times VR'$$

denklemlerini ispatladık. Hem QV doğru çizgisinin $Q'V'$ doğru çizgisine hem de QQ' doğru çizgisi PP' doğru çizgisine paraleldir. Dolayısıyla $QV = Q'V'$. Bundan

$$PV \times VR = PV' \times V'R'$$

denklemini ȷkarız. Bu denklemin sonucu olarak biz ardından gelen birinci denklemi elde ederiz.

$$PV : PV' = V'R' : VR = P'V' : P'V.$$

Ikincisi şekilde aynı olan üçgenler kuramının bir sonucudur. $PV : PV' = P'V' : P'V$ denkleminden

$$PV : VV' = PV : (PV' - PV) = PV : PV' - 1$$
$$= P'V' : P'V - 1 = P'V' : (P'V - P'V') = P'V' : VV'$$

yani

$$PV = P'V'$$

denklemini çıkarız. Bu denklemi bildiğimiz $CP = CP'$ denklemiyle birleştirerek CV uzunluğuna CV' uzunluğuna eşit olması sonuç alırız. Bu eşitlikten aradıgımız $Qv = vQ'$ sonucu hemen elde ederiz.

Şimdi DD' aralığın elipsin bir çapı olduğunu biliyoruz. Fakat ilk tanımladığımız çap ikinci bir niteliğe sahiptir. Parametre PL kullanılarak tanımlanan VR niceliğinin ile her hangi bir eğrideki Q noktasının ordinati ve absisi görüdüğu için onyedinci denklem doğrudur. Yeni ortaya çıkardığımız çap için benzer denklem doğrudur.

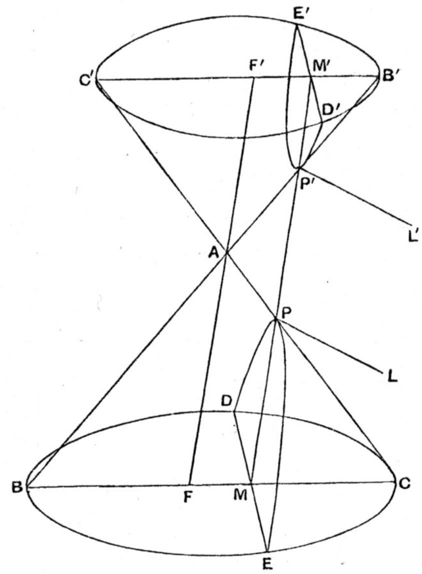
Onsekizinci şekilde DD' doğru çizgisine dik olan DK aralığı çizilir. Uzunluğu

$$DD' : PP' = PP' : DK$$

denklemine göre belirtilir. O zaman her hangi bir eğrideki Q noktası için onyedinci denkleme benzer

$$Qv^2 = Dv \times vr$$

denklemi doğru olur. v noktasının V noktasına tekabül ettiği gibi r noktası R noktasına tekabül eder. Noktalar in karşılıklı durumu şekilde gösterilir. D' ile K noktalar birleşilsin ve DK doğru çizgisi paralel olan vr doğru çizgi $D'K$ doğru çizgiyle r noktasında kesişsin. Bundan fazla hepsi PP' doğru çizgiye paralel olarak TR, LUH ve ES doğru çizgileri çizilsin.



XX. Şekil

Bildiğimiz eşitlikleri ile şekilde aynı olan üçgenler kuramı kullanarak

$$PC = CP', \qquad PS = SL, \qquad CE = EH$$

üçdenklemi elde ederiz. Hemen (PE) ile (SH) iki paralelkenarın eşit olmasını sonucu alırız. Şekli incelemeye devam ederken

$$(PR) = (VS) + (SR) = (SU) + (RH)$$

denklemlerini dikkate alırız. (SR) ile (RH) dikdörtgenlerin birbirine eşdeğer olduğunu geçen yılda ispatladık. Dolayısıyla

$$(PE) - (PR) = (RE).$$

Biz onsekizinci denklemi hem QV için hem de CD için kullanarız.

$$CD^2 - QV^2 = PC \times SE - PV \times VR = (PE) - (PR) = (RE) = RT \times TE.$$

Öte yandan

$$CD^2 - QV^2 = CD^2 - Cv^2 = D'v \times vD.$$

Buradaki iki denklem cebirsel achıdan bellidir fakat geometrik kanıt isterseniz Öklid'in ikinci cüzünün beşinci önermesine bakabilirsiniz.

Iki henüz elde ettiğimiz denklemden

$$D'v \times vD = RT \times TE \tag{19}$$

denklemi hemen çıkarız.

DK uzunluğu şöyle belirtildi ki

$$DD' : PP' = PP' : DK.$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} DD' : DK &= DD'^2 PP'^2 \\ &= CD^2 CP^2 \\ &= PC \times CE : CP^2 \\ &= RT \times TE : RT^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Ikinci eşitlik $2CD = DD'$ ile $2CP = PP'$ denklemlerinin bir sonucudur. Üçüncü eşitlik onyedinci denklemin bir sonucudur. Dördüncü denklem RTP ile $P'CE$ üçgeninin şekilinin aynı olduğunun bir sonucu olan

$$CE : CP = TE : RT$$

denklemine eşdeğerdir.

Aynı zamanda $D'DK$ ile $D'vr$ üçgenlerin şekilinin aynı olduğundan dolayı

$$DD'DK = D'v : vr = D'v \times vD : vD \times vr. \tag{21}$$

Ondokuzuncu ile yirminci denklemerini kullanarak

$$D'v \times vD : vD \times vr = RT \times TE : RT^2$$

denklemini elde ederiz. Şimdi onsekizinci denklemi kullanarak istediğimiz

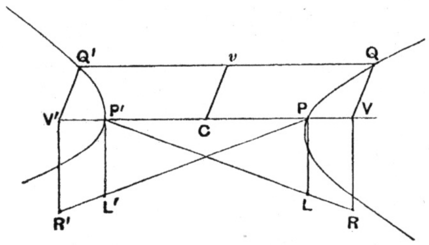
$$Dv \times vr = RT^2 = CV^2 = Qv^2$$

denklemi çıkarız. Dolayısıyla DK yeni DD' çapının parametresidir.

Apollonyus'un ispatladığı iddia şöyle ifade edilebilir, elipsin bir çapının orta noktasından geçen kirişi her PP' çapısına ait kirişi yani her PP' çapısına ait ordinatı ikiye böler ve kendisi elipsin başka bir çapı olur. PP' aralığı elipsin bu çapı ait bir kirişi olur. Elipsin iki çapı şu halde birbirine bağlı ise karşılıklı çapı adlanır.

Şimdiye kadar, elipsin ya da her konik kesit eğrisi verilmiş bir koni ile verilmiş bir düzlem tarafından tanimlanır. Dolayısıyla ayırt edilmiş bir çapı var. Konik kesit eğrisi bir elips ise, bu çapı sınırlı. Çapının orta noktası elipsin merkezi adlanır. Ama ayırt edilmiş çapından fazla başka çapları var. Onlardan birisi henüz bulduk.

Apollonyus'us kuramında elipsin merkezinden geçen her kiriş elipsin bir çapıdır. Üstelik herhangi bir çapı verilmiş ise, biz elipsi tanimlayan bir koni ile bir düzlem bulabiriz ki bu koni ile bu düzlem ayırt ettiği çap elipsin verilmiş çapıdır.

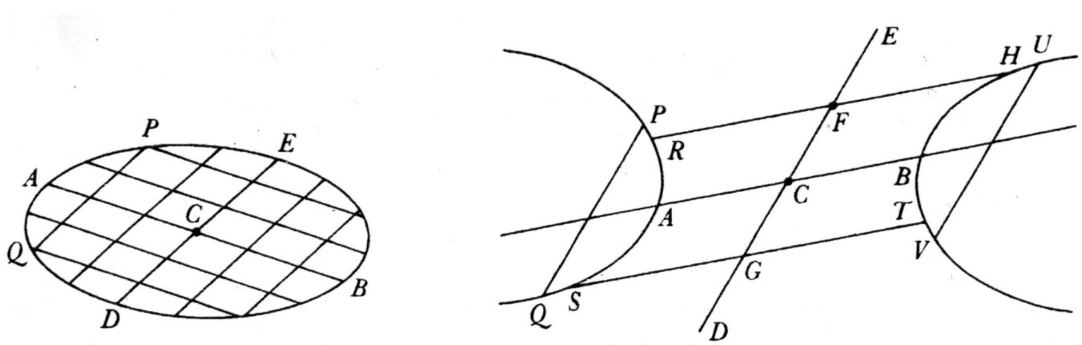


XXI. Şekil

Elbette hiperbol için benzer iddialar doğrudur. Elips için kuramı anlatmaya devam etmeden evvel, hiperbollar inceleyelim. Ilk önce onbirinci şekilde gibi eklemiş ABC düzlemi koniyi keserek koninin zirvesinden geçen AB ile AC iki doğru çizgisini belirtiyor. Konik kesit eğrisi elips veya parabol değilse, onu tanımlayan düzlem yirminci şekilde gibi gözüküyor. Yani Apollonyus için koni tek bir koni değil çifte konidir. Parabol veya elips tanımlarken iki koni farkedilmez çünkü eğriyi tanlayan düzlem tek bir koniyle kesişir. Parabol ise düzlem AB ile AC iki doğru çizgisinden birisine paraleldir. Elips ise düzlemin AB ve AC doğru çizgiyle kesiştiği noktalar aynı konide bulunur. Iki kesiştiği nokta farklı konide bulunursa konik kesit eğrisi bir hiperboldur ve o zaman çapında bir ayırt edilmiş sınırlı aralık var. Yirminci şekilde bu aralık PP' aralığıdır.

Onyedinci şekilde de bu sınırlı aralık PP' aralığıdır. Bu aralığın orta noktası hiperbolun merkezi adlanır. Yirmibirinci şekilde merkez C noktasıdır. Biz hiperbol için genel bir çapın tanımı meydana koyabiliriz. Konik kesit eğrisinin birbirine paralel olan kirişlerinden her birisini ikiye bölen bir doğru çizgidir.

Bu bakımdan yirmibirinci şekile bakalım. Bu şekilde QV ile $Q'V'$ aralıkları PP' çapına ait yarı kirişlerdir. Hatırladığımız gibi çapıya ait yarı kiriş bir ordinattır. Şekilde QQ' hiperbolun bir kiriştir fakat kirişin hiperbolla kesiştiği iki nokta hiperbolun farklı dallarında bulunur. Bu kirişin orta noktası v noktasıdır. Apollonyus'a göre Cv doğru çizgisi de hiperbolun bir çapıdır, fakat ayırt edilmiş çapın özelliklerine sahip değil. Cv doğru çizgisi hiperbolu kesmez.



XXII. Şekil

Yirmi ikinci şekilde elips ile hiperbol arasındaki fark görünebilir. Ikisi için AB ile ED karşılıklı çaplarıdır. Hem elips için hem hiperbol için merkez C noktasıdır. Halbuki elips için AB ile ED doğru çizgisi veya araliğının durumu aynıdır oysa hiperbol için durumları farklıdır. Apollonyus'un ispatladığına göre her merkezinden geçen doğru çizgi gerek elipsin gerek hiperbolun bir çapıdır. Dolayısıyla ED doğru çizgisini çevirerek onu AB yerine getiriyoruz. Doğru çizgi çevirken bir anda hiperbolun sonuşmazı olur. Sonuşmazları hiperbolun çapı değil. Hakikaten verilmiş bir çapa ait her kiriş ya aynı dalda bulunan iki nokta birleştirir ya farklı dalda bulunan iki nokta birleşir. Çevirilen doğru çizginin sonuşmazdan geçtiğinde tanımladığı çapına ait kirişler bir durumdan diğer duruma geçer.

Apollonyus ise, hiperbol için ispatladığı teoremi şöyle ifade ediyor,

> *Iki dallı olan bir hiperbolun çapının orta noktasından geçip çapa ait olan kirişlere paralel olan bir doğru çizgi çizilse, o doğru çizgi ilk çapına karşılıklı bir çapı olur.*

Yirmibirinci şekile bakalım. PP' hiperbolun ayırt edilmiş çapıdır. Bu çapa paralel olan doğru çizgiyi çiselim. Bence o kadar açık olmamasına rağmen, bu doğru çizgi hiperbolu iki noktada kesir. Bu iki nokta Q ile Q' noktaları olsun. Bu iki noktadan geçen ordinatlar QV ile QV' aralıkları olsun. Tanımlara göre bu iki ordinatlar birbirine paralel olur. Şekildeki C noktası PP' aralığın orta noktasıdır. Cv doğru çizgi iki ordinata paralel olsun. Şu halde meselemiz v noktası QQ' aralığın orta noktasının olmasınıispatlamaktır.

PL ve PL' hiperbolun iki dala ait parametreler olsun. Bunu ispatlamamıza rağmen iki parametresi birbirine eşittir. Şimdi hiperbolun ispatladığımız temel bir özelliğini hatırlıyoruz. PL doğru çizgisine paralel olan VR araliğını çizelim. Bu doğru çizgide bulunan R noktası şöyle belirtilmiş ki uzatılmış $P'L$ doğru çizgisini R noktasından geçer. Şu halde

$$QV^2 = PV \times VR.$$

Öte yandan $Q'V'$ diğer ordinatıyla başlayarak, $V'R'$ aralığını elde ederiz ve

$$Q'V'^2 = P'V' \times V'R'.$$

Dolayısıyla

$$PV \times VR = P'V' \times V'R'$$

veya

$$V'R' : VR = PV : P'V'.$$

Yirmibirinci şekilde şekilin aynı olan bazı üçgenler var. Onları kullanarak

$$PV' : V'R' = PP' : P'L' = P'P : PL = P'V : VR$$

denklemlerini çikarız. Bu denklemlerin sonucu olarak

$$PV' : P'V = V'R' : VR = PV : P'V'.$$

Dolayısıyla

$$(PV' + PV) : PV = (P'V + P'V') : P'V'$$

veya

$$VV' : PV = VV' : P'V'$$

Biz

$$PV = P'V'$$

denklemini hemen elde ederiz. CP ile CP' aralığının birbirine eşit olduğundan dolayı biz $CV = CV'$ ve $Qv = Q'v$ denklemlerinin doğru olması sonuç alırız.

Parabolları inceleyerek biz her parabol için sayıları sonsuz olarak genel çapı kavramını meydana koydu. Az ispatlayarak biz Apollonyus'un kuramını aktarıp her çapı tarafından tek bir parabolun benzer fakat farklı denklemle tanımlandığı iddia ettik. O elips ve hiperbol için benzer kuram geliştirmişti. Ilk önce parabolun aksine olarak elips ile hiperbol için bir merkez belirtilmiştir. Istersek parabolun merkezi sonsuzlukta olduğunu söylebiliriz. Konik kesit eğrisi elips veya hiperbol ise her merkezinden geçen doğru çizgisi bir çapıdır. Bunlardan başka çapı yok. Verilmiş çapı ve ona ait kirişlerini kullanarak (17) veya (18) denklemlerine benzer denklemi elde edebiliriz.

Konik kesit eğrisinin bir çapı ile ona ait kirişlerini vermek iki belki dikgen olmayan koordinat eksen vermek eşdeğerdir. Herhalde çap, ona ait kirişler ve parametre verilmiş ise, parametrenin verdiği denklem bir hat belirtir. Dekart'ın yazdiğından sonuçlayabilmemizin aksine bu hattın konik kesit eğrisi olduğu hemen açık değil. Yani Apollonyus'un kuramında konik kesit eğrisi bir koni ile onu kesen düzlem tarafından belirtilir. Tamam kuram geliştirmek istersek, çap ile kirişler ile parametresiyle başlayarak hattı tanımlayan koni ile düzlem bulmalıyız.

Kısa söz. Geçen yılda söylediğim gibi, matematiğe genç ama çok genç değil gelmiştim. Hemen yıllar boyunca matemat'ğe dalmıştım. Artık genç olmayan ilk defa olarak Ingilizce konuşan Kuzey Amerika'nın sınırlarıaşıp Türkiye'yi geldim. Burada bir kalmama rağmen dilinizi iyi öğrenmemiştim. Az zaman sonra Avrupa'ya gidip orada kalıp anadilimden başka diller gerçekten konuşup yazmayı ögrenmek başlamıştım. Yukarıda anlattığım gibi yaklaşık aynı zamanda hâlâ kaldığım Princeton'daki Ileri Araştırmalar Merkezi'ne atandığımda tarihcilerle temasa gelip tarihi ilgilendirmeye başlamıştım. Tabii yeni öğrenilmiş çağdaş Avrupalı diller tarihde çok faydalıydı. Aynı zamanda matematikçi kalıyordum ve tarih için ilgi de yüzeysel kalıyordum. Ya çoğrafyaya ait ayrıntılar ya şahsi hatıralar ve mektuplar ya da genel bakışlar seviyordum. Çok geç olarak bilim tarihi özellikle matematik tarihe geliyorum, ama bununla beraber ilk konuşmak istediğim yabancı dile dönerim. Kuzey Amerika'nın taşrasında doğup yetişen arada ihtiyarlamış ilime eğilimli bir oğlan için, bu gelişme tabiidir. Çerçevesinden çikmadan evvel Avrupalı mirasımızı tam olmasa an azından kısmen tanımamız lazımdır.

Halbuki Dekart'ın veya Fermat'ın yazılarını incelerken biz yakındaki yüzyıllarının tarihini ile dillerini bilmemiz yetmediği anladım. Dolayısıyla buraya, Türkiye'ye gelip matematik tarihi üzerine seminerler verdiğimde iki yönde şimdiye kadar bulunduğum entelektüel sınırları aşmalıyım. Ilk olarak ülkemde geleneksel Amerikalı ve Avrupalı medeniyete bağlı bakışlarımızdan kendimi kurtarmalıyım. Hele bizim Avrupalı ana dillerden birisi olmayan dillerin çağdaş dünyada yararlılığı hakkında bakışlarımızı yenmeliydim. Aynı zamanda bizim bırakıp bilmediğimiz eski Avrupalı dünyaya, Yunanlılara ve Romalılara yeni dönemem lazım. Mesela Apollonyus'un yazılarını okumadan Dekart'ın veya Fermat'ın yazılarının köklerini anlamak mümkün değil. Öte yandan bazen çevirmelerinin mevcut olmasına rağmen Apollonyus'un ve başka Yunanlı matematikçilerin veya Rönesans matematikçilerin her ilgilendiğiniz yazılarını yakından incelemek isterseniz, Rumca ve Latince az olsa bilmelisiniz.

Şöyle bu dersleri verdiğimde önümde iki önemli engel var. Düşüncelerimi Türkçe anlaşılan ve çirkin olmayan bir şekilde ifade etmem ve belli belirsiz olsa olsun iki eski dil yorumlamam. Bu işin hakkıdan gelsem, ondan sonra öğrenip anladığımı yazınca, kısmı atıp kısmı saklayarak canlı kandırıcı bir kitapcık yaratmak umuttayım. Başarılı olup olmayacağımı henüz bilemeyiz. Herhalde bu maksatın sayesinde gelecek yıllarda işim güçüm olacak.

II. 50 [Prop. 50 (Problem)].

(So far as relating to the *hyperbola.*)

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

To draw a tangent to a given section of a cone which shall make with the axis towards the same parts with the section an angle equal to a given acute angle.

* * * *

Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ δοθείς· ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΕ, ΔΕΓ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΧΕ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Χ. πρὸς δὴ θέσει εὐθείᾳ τῇ ΧΕ καὶ δοθέντι τῷ Χ διῆκταί τις ἡ ΓΧ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ ΓΧ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ διῆκται ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

Let the section be a hyperbola, and suppose it done, and let PT be the tangent, and let the centre C of the section be taken and let PC be joined and PN be perpendicular; therefore the ratio of the rectangle contained by CNT to the square on NP is given, for it is the same as that of the transverse to the erect. And the ratio of the square PN to the square on NT is given, for each of the angles PTN, TNP is given. Therefore also the ratio of the rectangle under CNT to the square on NT is given; so that the ratio of CN to NT is also given. And the angle at N is given; therefore also the angle at C is given. Thus with the straight line CN [given] in position and at the given point C a certain straight line PC has been drawn at a given angle; therefore PC is [given] in position. Also the section is [given] in position; therefore P is given. And the tangent PT has been drawn; therefore PT is [given] in position.

ἤχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ΖΧ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. μείζων ἄρα ἔσται ἡ ὑπὸ ΖΔΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΖΧΔ. δεήσει ἄρα εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

Let the asymptote LC of the section be drawn; then PT produced will meet the asymptote. Let it meet it in L; then the angle LTN will be greater than the angle LCT. Therefore it will be necessary for the synthesis that the given acute angle should be greater than συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΧΖ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἡ ὑπὸ ΚΘΗ, καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΗΘ τὸ Η, καὶ ἤχθω ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΘΚ κάθετος ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῇ ὑπὸ ΛΘΚ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Κ γωνίαι ὀρθαί, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ. ἡ δὲ ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς ΚΗ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἐὰν δὴ ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἔστω τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΜΚ τοῦ ὑπὸ ΜΚΘ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὅμοια ποιήσει τὰ τρίγωνα, καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ. κείσθω δὴ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ τεμεῖ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὅμοιον

the half of that contained by the asymptotes.

Thus the synthesis of the problem will proceed as follows: let the given hyperbola be that of which AA' is the axis and CZ an asymptote, and the given acute angle (being greater than the angle ACZ) the angle FED, and let the angle FEH be equal to the angle ACZ, and let AZ be drawn from A at right angles to AA', and let any point D be taken on DE, and let a perpendicular DF be drawn from it upon EF. Then, since the angle ZCA is equal to the angle HEF, and also the angles at A, F are right, as CA is to AZ, so is EF to FH. But EF has to FH a greater ratio than it has to FD; therefore also CA has to AZ a greater ratio than EF has to FD. Hence also the square on CA has to the square on AZ a greater ratio than the square on EF has to the square on FD. And, as the square on CA is to the square on AZ, so is the transverse to the erect; therefore also the transverse has to the erect a greater ratio than the square on EF has to the square on FD. If then we make, as the square on CA to the square on AZ, so some other area to the square on FD, that area will be greater than the square on EF. Let it be the rectangle under KFE; and let DK be joined. Then, since the square on KF is greater than the rectangle under KFE, the square on KF has to the square on FD a greater ratio than the rectangle under KFE has to the square on FD, that is, the square on CA to the square on AZ. And if we make, as the square on KF to the square on FD, so the square on CA to ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΘ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΧ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΜ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Κ γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

another area, [the ratio] will be to a smaller area than the square on *AZ*; and the straight line joining *C* to the point taken will make the triangles similar, and for this reason the angle *ZCA* is greater than the angle *DKF*. Let the angle *ACP* be made equal to the angle *DKF*; therefore *CP* will cut the section. Let it cut it at *P*, and from *P* let *PT* be drawn touching the section, and *PN* perpendicular; therefore the triangle *PCN* is similar to *DKF*. Therefore, as is the square on *CN* to the square on *NP*, so is the square on *KF* to the square on *FD*. Also, as the transverse is to the erect, so is both the rectangle under *CNT* to the square on *NP* and the rectangle under *KFE* to the square on *FD*. And conversely, as the square on *PN* is to the rectangle under *CNT*, so is the square on *DF* to the rectangle under *KFE*; therefore *ex aequo*, as the square on *CN* is to the rectangle under *CNT*, so is the square on *KF* to the rectangle under *KFE*. Therefore, as *CN* is to *NT*, so is *KF* to *FE*. But also, as *PN* is to *NC*, so was *DF* to *FK*; therefore *ex aequo*, as *PN* is to *NT*, so is *DF* to *FE*. And the angles at *N*, *F* are right; therefore the angle at *T* is equal to the angle *DEF*.

Compiled on July 30, 2024.