**Об аналитическом виде геометрической теории автоморфных форм**

ROBERT LANGLANDS

*Had we but world enough, and time, . . .*
*Andrew Marvell, 1621–1678*

Содержание



Ещё одно заглавие – несчастья и тяжёлые испытания пожилого математика в дебрах дифференцьной геометрии. Хотя я и старик, эта статья стала своего рода Bildungsroman!

## I. Введение

Геометрическая теория автоморфных форм было введена русскими математиками, например Владимиром Дринфельдом, и развитая русско-американской школой,[1] но этой теорией я недоволен. Современная арифметическая теория автоморфных форм возникла в шестнадцатых годах двадцатого столетия из четырёх источика: из возобновления Зигелем исследований девятнадцатого столетия; из теории Гекке; из теории полей классов; из теории представлениeй групп, в которой важным имена Фробениуса, Германа Вейля, Хариш-Чандры. В этой арифметической теории, незаменимой составной частью являются собственные числа Гекке. Воспользовавшись этими числами, мы определяем чрезвычайно важные $L$-функции. Эти числа собственные числа операторов Гекке. Эти операторы определёны в арифметической теории но не в той геометрической теории которая представлена Гайцгори или Френкелем.[2] Трудность том, что в теории русско-американской школы собственные векторы заменены собственнами пучками, существование которых затруднительно до сих пор невозможно доказать. Кроме того, описание классифицирующего пространства в этой теории представлено понятями из теории пучков, стеков и топологическими вопросами, введенными чтобы создать теорию классифицирующего пространства, которая вполнит по большей части функториальные требованиия Гротендика. Эта теория важна, но по моему она не та теория которая неходима для высказываний и доказательств геометрического вида, те которые я назвал в арифметической теории функториальностей и взаимностей. По причине которую я объясню поже, может быть что в геометрической теории лучше сказать двойственность, но функториальность следствие двойственности. Одна из целей арифметической теории, доказать функториальность и пользуясь этой функториальностью построить автоморную группу Галуа,[3] но в геометрической теории эта группа Галуа уже дана. Однако нужно доказать, что данная группа обладает желанными свойствами. То что необходимо знать для основ геометрической теорий, вводимой в этой статье, это общеприятные определения из сферы множеств, пространстов и мер.

Цель этой статья описать то, что кажется мне подходящим аналогом арифметической теории, и доказать это для интересного, даже разительного, но легко доступного случая: группы GL(2) над эллиптической кривой. Но существуют две геометрические теории, над полем Галуя[4] и другая, как в этой статье, над полем комплексных чисел. Я внимательно не рассмотрел ни [G] ни [L], но мне кажется(!) что [L] предлагает для поля функций над конечном полем теорию которая совместима с Розетским камнём Андре Вейля[5]. Кроме того, и по-моему очень интересно, согласно [L, Th. 0.1] для такого поля автоморфная группа Галуа изоморфна $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. С другой стороны, точно так же как теорема Пэли-Винера или теория преобразований Фурье для обобщенных функций

[1][G] Доклад *Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique,* Sém. Bourbaki, Janvier, 2016 написан Денисом Гайцгори удобная ссылка.

[2][F] *Lectures on the Langlands program and conformal field theory, Frontiers in number theory, physics, and geometry.*

[3]Это было существенное непонимание с моей стороны. Он исправлен в примечании

https://publications.ias.edu/sites/default/files/discovery.pdf

[4][L] V. Lafforgue, *Chtoucas et programme de Langlands pour les corps de fonctions* (`https://arxiv.org/abs/1404.3998`)

[5][W] *De la métaphysique aux mathématiques,* Oeuvres scientifiques, vol. II стр. 408–412.

Шварца не заменают $L^2$-теорию преобразований Фурье на $\mathbf{R}$ или на $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$, по-моему теория предложенная в [G] не заменяет $L^2$-теорию операторов Гекке. Я думаю что такая теория чуществует для каждой редуктивной группы на произвольной поверхности Римана. Порой я буду касаться обшиего случая но я серьёзно о нём не размышлял. Цель этой статьи описание теории для группы GL(2) над эллиптической кривой, для которой она уже доступнее. Хотя я могу представить себе общий спектральный вид геометрической теории, я не могу представить себе теории, которая объединяет её с теорией описанной в [G]. Как последнее наблюдение, геометрическая теория относится отчасти к комплексно-дифферентиальной геометрии, но эта статья написана для специалистов по теории автоморфных форм, которым эта геометрическая теория может быть неизвестна. Вследствие такой собственной слабости, я включил некоторые элементарные объяснения понятий в [AB]. Эти объяснения часто представляют собой растянутые отступления. Сверх того, я позволил себе многие другие отступления, некоторые довольно элементарные, исходя из предположения, что большинство читателей так же как я имеет как можно меньше опыта с дифференциальной геометрией, так как я.

Концовка несколько резкая, но появление решительного знака в месте, где я меньше всего его ожидал, подтвердило мою уверенность в правильности моего убеждения. Мне больше не нужно было убеждать в этом.

Изложение недостаточно подробно, но тема нова а наше понимание несовершено, поэтому полное объяснение было бы здесь неуместным.

**Автоморфная группа Галуа.** Так как гпавная цель этой статьи, введение в геометрическую теорию и предварительное – возможно временное, возможно окончательное – построение соответствуюшего математического предмета, я предпочитаю определить её тотчас. Это предполагает введение такой группы, которая поставляется с предписаниями для превращения гоморфизма, от неё к группе ${}^LG$, к собственному сопряженному сечению. Эти сечения определены ниже. Эти предписания могут быть сложными. Например они пользуются теоремой Атьи-Ботта. В любом случае, мы подверждаем закон взаимности для GL(2) и эллиптической кривой, сначала вычисляя соственные значение операторов Гекке, а затем связности Янга-Миллса. Не предполагая, что это предприятие каким-либо образом имеет такое же значение как достижения Дедекинда, просто как легкомысленное замечание, я предлагаю в качестве другого названия, Was ist und was soll die geometrische Theorie der automorphen Formen? ■[6]

**Замечания о слоге и содержании этой статьи.** Она написана для математиков, знакомых с теорией автоморфных форм над числовыми полями но, как и я, с небольшим знанием дифференциальной геометрии, в частности векторных расслоений и связностей. Поэтому значительное место отвеленно простым или известным понятиям. Немного знакомства с ними недостаточна, как я понял при изучении [A] и [AB]. Объяснения этих авторов являются краткими и гладкими, но редко точными и редко подробными, повидимому, потому, что они предполагали у читателя некоторого знакомства с основными понятиями. Я думал, что у меня оно было, но сначала этого было недостаточно для точного понимания их выводов и даже их основных утверждения. Поэтому я добавил сюда все дополнительные размышления, которые я считал необходимыми или полезными, но только по мере этой необходимости.

[6]Этот квадрат указывает на конец отступления.

Есть простое но полезное замечание. В доводах этой статьи есть три степени: чёткое установление собственных функций и собственных значений операторов Гекке; чёткое установление связностей Янга-Миллса; их сравнение.

Я пришёл к пониманию необходимой основы теории только в ходе чтения ссылок и написания статьи, таким образом, что это началось с утверждения, для которого доказательство могло быть обеспечено только медленно, когда я пришел к пониманию соответствующей теории. Мое первоначальное понимание доказанной теоремы не содержало ни точного утверждения, ни большого знания дифференциально-геометрического основания. Поэтому, было много чего я не мог предвидеть и не был готов. Это привело к избыточности и отступлениям, некоторые элементарные, которые будут обузой для геометра, но, возможно, могут помочь специалистам в областях, относящихся к фундаментальной проблеме этой статьи, а именно взаимности и функториальности в теории автоморфных форм, а не только в одно из её трёх разновидностей, но во всех, хотя эта статья посвящена исключительно геометрической теории.

В конце концов, я не заявил теорему, хотя мог бы, и читатель мог бы заключить соответствующее утверждение. То, что поразительно, - это точное сцепление вычислений собственных сопряженных сеченний Гекке и строения теории Янга-Миллса. Хотя на данный момент я не имею точного воспоминания о вычислениях в классической теории, (либо начальные вычисления в Гаусс, либо более поздние расчеты в Hasse и я начинаю опасаться, что я не изучил их достаточно), мне кажется что существует непризнанное сходство между ними и теми что в этой статье. В обоих случаях два, по-видимому, разных объекта связаны третьим чувствительным часовым механизмом. В этой статье это выглядит как последовательность сходств между двумя довольно сложными, но конкретными, вычислениями, и в самом конце сравнение может быть завершено только благодаря удивительной детали, которая появляется в обоих, хотя по разным причинам. Прятать это в утверждении теоремы, которая, в конце концов, будет только особым случаем, казалась хамским.

Построение статьи просто. К концу раздела §III, разъяснены цели функториальности в геометрическом контексте. В §IV я напоминаю классическую теория эллиптических кривых, из которой мы черпаем, чтобы сделать наше обсуждение как можно более прочным. Следующие три раздела посвящены введению операторов Гекке и вычислению их собственных функций и собственных значений, но в рамках пространства Гильберта. После этого в §VIII и §IX вспоминается необходимая дифференциальная геометрия, иногда на основном уровне. В §X и §XI дальнейшее обсуждение теории Янга-Миллса приводит к сравнению с ранними расчётами в теории Гекке, а затем лёгко к желанному сравнению. Последний раздел краток. Я позволил себе многие отступлений, некоторые довольно элементарные, исходя из предположения, что большинство читателей будут иметь как можно меньше опыта с дифференциальной геометрией, так же как я.

Наконец, слово о языке. Когда я записался в университет в Ванкувере в возрасте шестнадцати лет, прибывший из деревни, я был посвящен в новый мир не только математики, но также был осведомлен о том, что в мире существует большое количество языков, некоторые из которых в настоящее время необходимы для успешной жизни как математик. Хотя и медленно, я узнал, что они предлагают гораздо больше, чем саму математику. К сожалению, по причинам, которые здесь не нужно подробно описывать, математическая профессия больше не предлагает это окно миру. Тем не менее желание написать статью на русском языке оставалось. Эта статья была моей последней возможностью сделать это.

Размышляя над этой статьей, после того, как она была завершена, и над её стилем, я был озадачен многими отступлениями и их отношением, но тогда причина стала очевидной. Это связано с тем, что основная часть работы посвящена моим усилиям по пониманию понятий, взятых из [A] и небольшой части [AB]. После того, как строение $\mathrm{Bun}_G$ и природа связностей Янга-Миллса стали поняты, моя единственная идея было введение операторов Гекке, как операторов в гильбертом пространстве. Это было просто, хотя ново и даже несколько революционно, ибо привязанность математиков к пучкам была универсальна. В этой статье пучков нет.

В окончательном заключении я подчеркиваю свое недовольство изложенным здесь, но достаточный отчёт требует краткого но полного общего изложения теории Янга-Миллса, а также понимание последних абзацев этой статьи, в которых появляются прямые изображения расслоений и индуцированных представлений, но понимаемые при общих условиях. В настоящее время это вряд ли доступно. Это задача предлагаемая читателю. ■

## II. Основные понятия общей теории

В первую очередь нам нужна редуктивная алгебраическая группа $G$ над компактной неособой алгебраической кривой $M$ над $\mathbf{C}$ и её классифирующее пространство $\mathrm{Bun}_G$. Я буду разъяснять общее предложение, которое буду доказывать главным образом для группу $G = \mathrm{GL}(2)$ над эллиптической кривой $M$. Этот случай уже поразителен. Я использую заключения из статьи Атьи.[7] Возможно, они достаточны также для группы $\mathrm{GL}(n)$.

Пусть $F$ поле мероморфных функций над $M$. Пусть $\mathbf{A}_F$ алгебра аделей поля $F$ и $F_x$ локальное поле в точке $x \in M$. Кольцо $\mathcal{O}_x$, кольцо целых элемент в $F_x$ и $\mathcal{O} = \prod_x \mathcal{O}_x$. Отношение

$$\mathrm{Bun}_G = G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O})$$

известно. Оно доказано в ([F],§3). Я объясню его ниже. Позже, мы кратко объясним каким образом для нас $\mathrm{Bun}_G$ представляет собой топологическое пространство хотя и не хаусдорфново пространство и что он носитель локально метрической структуры и меры $\mu$. Для $G = \mathrm{GL}(2)$ и эллиптическая кривая $M$ струкура и мера просты.

Операторы Гекке - линейные отображения пространства $L^2(\mu)$. Главная тема этой статьи операторы Гекке и их собственные значения. Для каждой точки $x \in M$ существует коммутативная алгебра Гекке $\mathfrak{H}_x$. Эти алгебры коммутативны и попарно коммутативны. Пусть $\Theta \in \mathfrak{H}_x$, тогда то эрмитово сопряженный оператор $\widetilde{\Theta}$ - тоже оператор Гекке. Следовательно существует соответствующее спектральное разложение пространства $L^2(\mu)$ и цель этой статьи - описание собственних значенией и собственных функции этого разложения. Хотя в этой статье говорится преимущественно об эллиптических кривах, я не могу держаться от нескольких общих замечаний. С божьей помощью я вернусь к общей кривой позже. В следующем разделе я сформулирую общие предположения,

[7][A] *Vector bundles over an elliptic curve,* Proc. London Math. Soc. vol. 7, 1957

которые я докажу позже для эллиптической кривой. Каждый оператор Гекке $\Theta$ определится соответствием $\Theta$. Это соответствие подмножество множества $\mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G$. Это соответствие также носитель меры, которую будет лучше описать позже.

## III. Гипотеза

Хотя мы докажем эти предположения только для кривых первого рода один а не для высших родов, и только для группы $\mathrm{GL}(2)$, мне кажется что они также справедливы для $\mathrm{GL}(n)$, благодаря статье [A]. Вообще есть две ступени: (i) $\mathrm{GL}(2)$ замено другой группой; (ii) $M$ замено произвольной компактной поверхностью Римана. Я ещё не размышлял об этих серьёзно. Я предложу однако убедительную гипотезу, но чтобы утвердить её для $g > 1$ необходимо будет продумать сложности структуры $\mathrm{Bun}_G$. Есть конечно ещё одна ступень, разветвленная теория, но об этой я никогда не размышлял.

Известно что алгебра Гекке группы $G = \mathrm{GL}(2)$ или произвольной редуктивной группы, - в этом разделе речь идёт об этим - изоморфна кольцу представлений двойственной группы ${}^L G$ и что каждый гомоморфизм этой алгебры в $\mathbf{C}$ задан полупростым классом $\theta$ в ${}^L G$. Следовательно, собственной функции всех операторов Гекке или лучше собственным значениям соответсвует функция значения которой в точке $x \in M$ представляют полупростый класс $\{\theta(x)\}$. Мы называем это собственным сопряженным сечением или, более кратко, собственным сечением. Структура множества этих сечениией неясна. Известно что есть такая же теория для всех $M$ и всех $G$ и мы рассматриваем в этом разделе общий случай.

В теории автоморфных форм понятие функториальностей выражает то, что множество сечениией или множество тех сечениией которые принадлежают $L^2$-теории дано гомоморфизмами, или унитарными гомоморфизмами, предполагаемой автоморфной группы Галуа в ${}^L G$. Пседставляется, что различие между арифметической и геометрической теорией заключается в то, что геометрическую теорию можно описывать простым употреблением обычных понятий. В арифметической теории это не так. В этом разделе я описываю общую гипотезу, которую я докажу позже, после некоторой подготовки.

Понятие связанное с автоморфной групой Галуа приводится в статье Атьи и Ботта.[8] Эта статья, вместе с уже упомянутой статьей Атьи, оказала большое влияние на настоящую статью. Это понятие есть группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ ([AB, Th. 6.7]). Для кривой рода $g$ эта группа - продолжение центрального расширения

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow 1\ , \quad \Gamma_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} \Gamma. \tag{1.a}$$

Группа $\Gamma$ порождена элементами $A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g$ и $J = 1 \in \mathbf{Z}$ с одным отношением

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = J, \quad J = 1 \in \mathbf{Z}. \tag{1.b}$$

В следующих разделах, где $g = 1$, установлено что $A_1$, $B_1$ представляют петли $(0, 2\omega_1)$, $(0, 2\omega_2)$ в эллиптической кривой $M$.

Мы интересуемся только с такими представлениями $\phi$ группы $\Gamma$ что порядки элементов $\phi(A_i)$, $\phi(B_i)$ и $\phi(J)$ все конечны. Они называются допустимыми. Нам нужна также группа $\widetilde{\Gamma} = \mathbf{Z} \times \Gamma$. Возможно что порядок элементов $\phi(z \times 1) \in \mathbf{U} \times 1$, $z \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{U} = \{\, w \in \mathbf{C} \mid |w| = 1 \,\}$, $1 \in \Gamma$, бесконечен. Слагаемое $\mathbf{Z}$ не проявляется в [AB], потому что в этой статье класс Черна расслоения задан так что $\mathrm{Bun}_G$ становится связанным, то есть связанным компонентом правильного $\mathrm{Bun}_G$. Вложение этого $\mathbf{Z}$ в $\widetilde{\Gamma}$ несколько

[8] [AB] *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces,* Phil. Trans. Royal Soc. Lond., vol. 308, 1983

произвольно. Оно связано с выбором расслоения $A = A_0$ в [A, Th. 6], и §IV настоящей статьи. Сейчас[9]

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1}\cdots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1} = 0 \times J. \tag{1.c}$$

Эту новую группу я называю автоморфной группой Галуа. Более точно, автоморфная группа Галуа $\Gamma_{\text{aut}}$ является произведением $\mathbf{Z}$ с обратным пределом всех конечных групп дробей группы $\widetilde{\Gamma}$. В этой группе (на каждом конечном уровне этой группы – это то, что важно) порядки образов элементов $\phi(A_i)$, $\phi(B_i)$ и $\phi(J)$ все конечны. Например сперва мы строим пересечение $\Gamma_2$ всех ядер гомоморизмов группы $\Gamma$ к группе с порядком который делится на 2, тогда пересечения $\Gamma_{36}$, $\Gamma_{27000}$ и так далее. Тогда

$$\Gamma_{\text{aut}} = \varprojlim \mathbf{Z}/n(k)\mathbf{Z} \times \varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}, \tag{1.d}$$

где $n(k) = (k!)^k$. Эта досадная щепетильность необходима потому что связности и собственные сопряженные сечения взаимно связаны, но различны. В частности дополнительное $\mathbf{Z}$ нужно потому, что $\mathrm{Bun}_G$ несвязно. Как будет объяснено позже, недаром $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma_{\text{aut}}$ оба определены как изменение группы $\Gamma$. Собственные сопряженные сечения и связности Янга-Миллса тесно связаны. Я замечаю также, что в $\Gamma_{\text{aut}}$ уравнение $J = 1$, $1 \in \mathbf{Z}$ заменяется

$$J = 1,\ 1 \in \varinjlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z},$$

где $z \mapsto nz/m$, $m|n$ в возрастающей последовательности направо.

Пусть ${}^LG_{\text{unit}}$ - компактный вид группы ${}^LG$. Я предположу это, но только приблизительно потому что это предложение позволяет извежать эндоскопические трудности, что существует биективное отображение множества собственных сопряженных сечений с множеством гомоморфизмов группы $\Gamma_{\text{aut}}$ в ${}^LG_{\text{unit}}$. Цель настоящей статьи доказать это для группы $\mathrm{GL}(2)$, хотя мне кажется что статья [A] позволила бы получить доказательство для $\mathrm{GL}(n)$. Есть здесь однако трудность. Я ещё не знаю как распознавать неприводимое представление групой $\Gamma_{\text{aut}}$ в $\mathrm{GL}(n)$, если размер $n$ больше чем двух даже для эллиптической кривой. Читателю будет ясно что я стал понимать статьи [AB] и [A] только тогда, когда я писал эту статью. Первоначально моё стремление было скромнее, но мне сейчас кажется что главные утверждения геометрической теории над $\mathbf{C}$ удивительно просты, хотя неочевидны. Я не знаю если читателям [G] или [L] нужно или даже полезно их понимать.

**Случай нулевого рода.** Если род равен нулю, уравнение (1.b) бессмысленно, так что $\Gamma_{\text{aut}}$ нужно определить по-другому. Мне кажется, что нет иного выбора, кроме предположения, что оно равно $\mathbf{Z}$. Это совместимо с тем, что для рода нуль, все расслоения являются прямыми суммами линейных расслоений, каждое из которых сам является степенью одиночного линейного расслоения степени нуль. Этот случай явно исключен

[9]Полезно заметить что

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & \alpha & 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2\cdots\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots \alpha^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & \alpha & 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2\cdots\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots \alpha^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \exp(2\pi i/n)$. Это простой пример уравнения (1.c).

из обсуждения в [AB]. Всюду в этой статье читателю будет ясно, что она была бы лучше написана, как в отношении ясности, так и в точности, если бы я лучше разбирался в теории Янга-Миллса в частности, и в дифференциальной геометрии в целом. ■

Есть два важных замечания. Во-первых, я рассмотрю только неразветленную теорию. Во-вторых, в арифметической теории существование автоморфной группы Галуа эквивалентно функториальности.[10] Тесная связь между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических кривых над $\mathbf{C}$ была описана Дедекиндом и Вебером в статье [DW][11]. Теория алгебрайческих кривых над полем Галуа прибавлена Андре Вейлом [W].

Теории двух статей [A] и [AB], мне и моим читателям по большей части незнакомы . Поэтому я пространно объясню нескольких понятий.

## IV. Теория приведения для эллиптической кривой

Эта важная теория достигла своего окончательного вида над полем алгебрайческих чисел в докладе Бореля и Хариш-Чандры[12] но для римановой поверхности её ещё нет. В статье [A], Lemma 4 есть начало этой теории для произвольного рода, но для $g = 1$ завершенная теория есть для $\mathrm{GL}(2)$ и даже для $\mathrm{GL}(n)$ в самой статье, которую я объясняю в первую очередь для $\mathrm{GL}(2)$, но без доказательств. Эта теория - законченное описание $\mathrm{Bun}_G$, то есть описание всех двумерных векторных расслоений. Для того, чтобы доказать её нужна современная теория связок, но чтобы описать её я предпочитаю применять теорию Вейерштрасса как она представлена в книге Уиттекера и Ватсона.[13] Это конечно не необходимо. Скорее это проба моего знания теорий Атья и Атьи-Ботта и признак моих математических пристрастий! Концепции в [AB], которые отражают конечно современние понятия комплексной дифференциальной геометрии, а следовательно - топологии и комплексного анализа, исключительно элегантны. Но они абстрактны и новичку легко проглядеть их сложность и тонкость, что часто случалось со мной при чтении их работ. Я пришёл к выводу, что конкретное выражение их, предохраняет от неправителього понимания. Итак если $L = 2\mathbf{Z}\omega_1 \oplus 2\mathbf{Z}\omega_2$, $\omega_1$, $\omega_2 \in \mathbf{C}$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$. тогда кривая $M = \mathbf{C}/L$. В этой статье $\mathrm{GL}(n)$-расслоение, это такая матричнозначеная мероморфная функция[14] $M(z)$, $z \in \mathbf{C}$, что $M(z+\lambda) = M(z)K_\lambda(z)$ для всех $\lambda \in L$, где матрица $K_\lambda$ голоморфна.

В теорий Вейерштрасса сигма-функция $\sigma(z)$, $z \in \mathbf{C}$, играет оснавную роль. Вот её свойствы: (i) она голоморфна; (ii) её разложение в степанной рад $\sigma(z) = z + \cdots$; (iii) $\sigma(z+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$, $\sigma(z+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z)$; (iv) $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i/2$; (v) если $\sigma(z) = 0$ тогда $z \in L$.

---

[10]Это заявление ошибочно. Оно будет исправлено в другом месте. Тем не менее в геометрической теории эта группа очень важна! Его замена в арифметической теории обсуждается в краткой записке

Last or very well last thoughts on the theory of automorphic forms.
https://publications.ias.edu/sites/default/files/discovery.pdf

[11][DW] R. Dedekind и H, Weber, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen,* 1880

[12][BH] Borel, Armand; Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups,* Bull. Amer. Math., 1961, v. 67, 579–583 и Borel, Armand; Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups,* Ann. of Math., 1962, v. 75, 485–535.

[13][WW] *A Course of Modern Analysis,* Camb. Univ. Press, 1958

[14]$z = x + iy$ служил координатой в $\mathbf{C}$ и иногда другами целями.

Пусть $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ точки в $\mathbf{C}$. Тогда

$$\phi(z) = \frac{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)\cdots\sigma(z-a_m)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)\cdots\sigma(z-b_n)} \tag{2}$$

мероморфная функция от $z \in \mathbf{C}$. Кроме того

$$\begin{aligned}\phi(z+2\omega_1) &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_1(m-n)(z+\omega_1)}e^{-2\eta_1\left\{\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j\right\}}\\ &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_1(m-n)(z+\omega_1)}e^{-2\eta_1\theta}\end{aligned} \tag{2.a}$$

$$\begin{aligned}\phi(z+2\omega_2) &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_2(m-n)(z+\omega_2)}e^{-2\eta_2\left\{\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j\right\}}\\ &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_2(m-n)(z+\omega_2)}e^{-2\eta_2\theta},\end{aligned} \tag{2.b}$$

где $\theta = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Функция $\phi$ периодическа, только если $m = n$. В этом случае она обычная $\phi$ функция над $\mathbf{C}$, которое накрывает кривую $M$. Если $m = n$ и $\theta = 0$, тогда $\phi$ функция над $M$. Если $\sigma$ заменено функцией $\sigma'(z) = \sigma(z)\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, тогда уравнения (iii) заменёняются уравнениями

$$\sigma'(z+2\omega_i) = -e^{2\eta_i+2\lambda\omega_i}\sigma'(z) = -e^{2\eta_i'}\sigma'(z), \quad \eta_i' = \eta_i + \lambda\omega_i. \tag{2.c}$$

То есть, эти уравнения являются только нормализацией функции $\sigma$ или, если хотите $\sigma$ и $\sigma'$ определяют различние, но эквивалентние линейние расслоения. Уравнение (iv) при этом не изменяется. Уравнени (iii) опредалают склеивание и не меняет расслоения. В области $2x\omega_1 + 2y\omega_2$, $0 \leqslant x, y < 1$ у функции $\sigma$ есть только один нуль. Это причина уравнения (iv).[15] Вообще $\phi$ определает линейное расслоение $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ для которого оно само является многозначным сечением. Два расслоения $\Lambda$ и $\Lambda' = \Lambda(a_1', \ldots, a_{m'}', b_1', \ldots, b_{n'}')$ изоморфны если и только если $m - n = m' - n'$, и

$$a_1 + \cdots + a_m - b_1 - \cdots - b_n = a_1' + \cdots + a_{m'}' - b_1' - \cdots - b_{n'} \mod 2\pi\omega_1\mathbf{Z} + 2\pi\omega_2\mathbf{Z}.$$

Тогда степень расслоения есть $n-m$. По-моему это описание линейных расслоений самое ясное, но для расслоений больше размерности, подобно тем что в статье Атьи, часто нужно пользоваться когомологическами методами. Теоремы и леммы Атьи разборчивы, возможно потому, что множества которыми он занимается тоже стеки, хотя ни в статье Атьи ни здесь стеков нет. Для него они пространства а для нас - пространства с локальной метрикой и с мерой. Здесь я хочу прежде всего описать пространство $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}(2)}$ подражая Атье.

Над эллиптической кривой имеется два рода двумерных расслоений, разложимые расслоения, $\Phi = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, и расслоения рода Атья, то есть другие. Пусть $\mathfrak{D}(m, n)$ множество $\Phi = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ для которых $\deg \Lambda_1$, то есть степень $\Lambda_1$, которая равна $m$ и

---

[15] Правильное условие, для того чтобы делитель $(a_1, \ldots, a_n)$ был эквивалентным $(b_1, \ldots, b_n)$, описывается уравнением

$$\theta = a_1 + \cdots + a_n - b_1 - \cdots - b_n \in 2\mathbf{Z}\omega_1 + 2\mathbf{Z}\omega_2, \quad k = 1, 2.$$

То есть, если эти урапнения в силе, то есть такое $\lambda \in \mathbf{C}$, что функция $\exp(-\lambda z)\phi(z)$ периодчична по отношению к $2\mathbf{Z}\omega_1 + 2\mathbf{Z}\omega_2$. Для этого, нужно чтобы $-2\lambda\omega_k - 2\eta_k\theta \in 2\pi i\mathbf{Z}$ для $k = 1$, 2. Пусть $\theta = 2\omega_1$. Есть два числа: для $k = 1$, $-2\lambda\omega_1 - 4\eta_1\omega_1$, и для $k = 2$, $-2\lambda\omega_2 - 4\eta_2\omega_1$. Если $\lambda = -2\eta_1$, то первое число 0 а второе $4\eta_1\omega_2 - 4\eta_1\omega_2 = 2\pi i$. Если $\theta = 2\omega_2$ то довод сходен. Такие рассмотрения излишны, но утешительны.

степень $\Lambda_2$ которая равна $n$. Множество расслоений рода Атья есть объединение

$$\left\{\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\mathfrak{A}(m,m)\right\}\cup\left\{\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\mathfrak{A}(m+1,m)\right\}.$$

Для общих кривих имеются разложимые и неразложимые расслоения. В статье Атьи множество этих последних есть $\mathfrak{E}(r,d)$ где $r$ ранг и $d$ степень. Перед тем как я опишу эти расслоения я отмечу что $\Lambda_1\oplus\Lambda_2$ эквивалентно $\Lambda_1'\oplus\Lambda_2'$ тогда и только тогда, когда $\{\Lambda_1,\Lambda_2\}=\{\Lambda_1',\Lambda_2'\}$. Следовательно $\mathfrak{D}(m,n)$ двумерное комплексное многообразие. Если $m=n$ то это есть особая кривая, для которой $\Lambda_1=\Lambda_2$.

В противоположность арифметической теории приведение, в геометрической теории точно. То есть фундаментальная область точно описана. В статье Атьи (Lemma 3) как первый шаг и как следствие теоремы Римана-Роха для расслоений более высокой размерностей доказано что, для двумерного расслоения над эллиптической кривой есть представитель

$$\Theta=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & *\\ 0 & \Lambda_2\end{pmatrix},\quad \deg\Lambda_2\leqslant 2+\deg\Lambda_1. \tag{3}$$

Хотя это и не нужно, Атья предпочитает предполагать достаточность сечений у данного расслоения $\Theta$, то есть, что для каждой точки $x\in M$ отображение $\Gamma(\Theta)\mapsto\Theta_x$ сюръективно, где $\Gamma(\Theta)$ состоит из сечений $\Theta$. Для этого достаточно заменить расслоение $\Theta$, расслоенией $\Theta'=\Lambda\otimes\Theta$, где $\Lambda$ подходящое линейное расслоение. Каждое заключение для $\Theta'$ является также заключением для $\Theta$. Вообще, если у расслоения любой размерности достаточность сечений, тогда у него есть верхный треугольный представитель. Как вторая Л (Lemma $6'$) Атья утверждает (Lemma $6'$) что если расслоение $\Theta$ неразложимо и если $\Gamma(\Theta)\neq 0$, тогда у него есть такое максимальное расщепление

$$\Theta\simeq\begin{pmatrix}\Lambda_1 & * & *\cdots\cdots * \\ 0 & \Lambda_2 & *\cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots\Lambda_n\end{pmatrix}, \tag{4}$$

что $\Lambda_i\geqslant\Lambda_1\geqslant 1$, $\Gamma\operatorname{Hom}(\Lambda_1,\Lambda_i)\neq 0$, $i=2,\dots,n$ и $\Gamma(\Lambda_1)\neq 0$. В данный момент $n=2$, но полезно говорить об общем случае. Это опять следствие теоремы Римана-Роха.

Но следующая аргументация Атьи трудна и я хочу объяснить только выводы, которые для нас важны, иногда отложая объяснение, и другие, которые нам не нужны, даже пропустить. Я пользуюсь старомодными понятиями. Есть в теории Вейерштрасса вторая важная функция, эта функция

$$\zeta(z)=\frac{d}{dz}\ln\sigma(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}. \tag{2.d}$$

Она удовлетворяет аддитивнам условиям,

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1,\quad \zeta(z+2\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2. \tag{2.e}$$

В фундаментальной области для группы $L\subset\mathbf{C}$ у неё есть только один полюс и этот расположен в точке 0. Матрица

$$M(z)=\begin{pmatrix}1 & \zeta(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\exp\begin{pmatrix}0 & \zeta(z)\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

удовлетворяет мултипликативнам условиям,

$$M(z+2\omega_i) = M(z)\begin{pmatrix}1 & 2\eta_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad i=1,2.$$

Следовательно, она определяет GL(2)-расслоение $\Pi$. Если $\Lambda$ линенейное расслоение тогда $\Lambda\otimes\Pi$ тоже GL(2)-расслоение $\Lambda\otimes\Pi$ и $\Lambda'\otimes\Pi$ эквивалентны только если $\Lambda$ и $\Lambda'$ эквивалентны ([A], Th. 5). Степень $\deg(\Lambda\otimes\Pi)$ равна $2\deg\Lambda$. Множество таких расслоений с степенью $2m$ есть множество $\mathfrak{A}(m,m)$. Более общий вид определения (4) привдится в ([A], Th. 5)

$$F_r = \exp\left(\begin{pmatrix}0 & \zeta(z) & 0\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & 0 & \zeta(z)\cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots \zeta(z)\\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots\cdots 0\end{pmatrix}\right) \tag{6}$$

матрица порядка $r$. Нужно будеть доказать что $F_r$ неразложимо, но мы ограничиваемся группой GL(2). Расположение полюса можно перенести, умножив слева на

$$\begin{pmatrix}1 & h(\cdot)\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где $h(\cdot)$ - мероморфная функция с полюсами в 0 и любой другой точке для которых, конечно, сумма вычетов равна нулю.

Определить множество $\mathfrak{A}(m+1,m)$ в одном смысле труднее, потому что канонического выбора нет, но в другом смысле легче. Оно состоит из

$$F(d) = \begin{pmatrix}1 & \phi(z)\\ 0 & \sigma^{-1}(z-d)\end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \frac{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)}, \tag{7}$$

где $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ фиксированны, $a_1+a_2=b_1+b_2$, $a_1-a_2\neq b_1-b_2$ но $d$ переменно. Это значит что как множество $A(m,m)\simeq A(m,m+1)\simeq M$. Возможно что это описание покажется несколько произвольным но нужно просматреть [A], чтобы понять что оно неизбежно. Попутно я признаю что понять [A] мне трудно.[16]

Описать общие выводы Атьи ([A, Th. 6]) полезно и в данной статье нам это нужно. Он описывает все неразложимые расслоения $M$ размерности или ранга $r$ и степени $d$. Полезно сначала выбрать данное линейное расслоение $\Lambda_0=\Lambda_{A_0}$ степени один. Это расслоение задано выбранной точкой $A_0$. Тогда расслоение каждой ступени $d$ определено: если $d=0$ расслоение тривиально; если $d>0$ то имеется сечение с единственным полюсом и его степеню $d$ в точке $A_0$, но никакого нуля; если $d<0$ то нуль заменяется полюсом. С этими выборами, для данного $r$ множества $\mathcal{E}(r,d)$, которые мы введём, все отождествлены.

Пусть теперь $d=ar+d'$, где $0\leqslant d'<r$. Если $a=0$ то мы перейдём непосредственно к второй стадии. Если $a>0$ тогда

$$N = A^a\otimes N',$$

[16]Эти слова были написаны, когда я начал писать эту статью. Они остаются справедливыми и когда я заканчиваю её спустя два года, то есть в течении почти трех лет. Я начал думать о геометрической теории в 2011 году. Утешает то, что $F_r$ в [A, Th. 5] просто выражается через знакомую функцию $\zeta(\cdot)$.

где $N'$ неразложимое расслоение размерности $r' = r$ и степени $d'$. Следовательно мы можем перейти к второй стадии и преположить что $d' = d - ar < r' = r$. Если $d' = 0$ эта стадия последная, но если $d' > 0$

$$N' = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & N'' \end{pmatrix},$$

где $I$ единичная матрица ранга $s < r'$. Пусть $r''$ ранг $N''$. Тогда $r''$ меньше чем $r'$ и степень $d'' = d'$. Точный вид матрицы $*$ не относится к делу. Важно только то, что $M'$ неразложимо. Тогда ранг $r'' = r - s < r$. Начальная раздвоённость появляется здесь снова. Продолжая мы придём к паре $(\widetilde{r}, \widetilde{d} = 0)$, $\widetilde{N} = F_{\widetilde{r}}$. Для расслоений высшего порядка можно заменять (7) матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 & \phi(z) \\ 0 & 1 \cdots\cdots 0 & \phi(z) \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \phi(z) \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & \phi(z) \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & \sigma^{-1}(z-d) \end{pmatrix} \tag{7'}$$

Множество $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}(r)}$ есть постройка в которой имеются $r$ ступенек между этажими.

Описание Атьей этого превращения различно, но очень поучительно. Полезно дать его но с несколькими дополнительными подробностями. Пусть $\mathcal{E}(r,d)$ множество неразложимых расслоений размерности $r$ и степени $d$, и пусть $h$ общий наибольщий делитель $r$ и $d$. Атья описывает отображение $\alpha_{r,d} : \mathcal{E}(h,0) \to \mathcal{E}(r,d)$ которое обратно к нашему превращению. То есть, он строит элементы в $\mathcal{E}(r,d)$, тогда как мы разбираем их. Составные части его строения: (i) $\alpha_{r,0} : F_r \to F_r$; (ii) $\alpha_{r,d+r}(E) : E \to A \otimes \alpha_{r,d}(E)$; (iii) если $0 < d < r$, тогда

$$\alpha_{r,d}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 & * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \\ 0 & 1 \cdots\cdots 0 & * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \alpha_{r-d,d}(E) \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & \end{pmatrix}, \qquad E \in \mathcal{E}(h,0). \tag{8}$$

Это продолжается до тех пор, пока $r' = r - nd < d = d' + r'$. Затен применяем (ii) и продолжаем. Таким образом, для данного $r$ и каждого $d$, множество $\mathcal{E}(r,d)$ отождествляется с эллиптической кривой $M$ и все ступени бесконечной лестницы, $-\infty < d < \infty$, почти одинаковы.

Пока, структуру в множество $\mathrm{Bun}_G = G(F)\backslash \mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O})$ мы ввели недостаточно. Есть топология но она бесполезна. Множество в $\mathrm{Bun}_G$ открыто если и только если его прообраз в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O})$ открыт. Тем не менее существует разложение $\mathrm{Bun}_G$ отношение которого к его топологии по большой части не важно. А именно, каждое расслоение есть прямая сумма неразложимых расслоений размерности $r_1, \dots, r_k$, $r_1 + \cdots + r_k = r$. Оказывается, что для операторов Гекке, множество $\mathrm{Bun}_G$ состоит из отдельных множеств $\mathcal{D}(r_1, \dots, r_k)$ согласно неупорядоченному множеству $\{r_1, \dots, r_k\}$, которое опредалает сопряженный класс подгрупп Леви. Пусть $\mathcal{E}(r)$-множество неразложимых расслоений размерности $r$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_k(r)$ - симметризированное $k$-кратное произведение $\mathcal{E}(r)$ с собой. Тогда

$$\mathcal{D}(r_1,\dots,r_k)=\widetilde{\mathcal{E}}_{k_1}(s_1)\times\cdots\times\widetilde{\mathcal{E}}_{k_l}(s_l),$$

$\{r_1,\dots,r_k\}$ состоит из $s_1$ повторенных $k_1$ раза и так далее. В сущности $\mathcal{D}(r_1,\dots,r_k)$ есть произведение множеств

$$\bigcup_{d=-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(r,d), \tag{9}$$

где $r$ задано и $\mathcal{E}(r,d)$ есть множество неразложимых расслоений размерности $r$ и степени $d$. Как топологическое пространство это приблизительно $\mathbf{Z}\times M=\mathbf{Z}\times\mathbf{U}\times\mathbf{U}$, где $\mathbf{U}=\left\{\,z\in\mathbf{C}\;\middle|\;|z|=1\,\right\}$. Это тоже топологическая группа и её группа характеров есть $\mathbf{U}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Можно полагать, что она также параметризает (приблизительно) собственные функции операторов Гекке. Имея это в виду мы перейдем к гипотезе но сперва обнадёживающее замечание. Согласно Теореме 7 в [A] если $\chi$ характер группы $\mathcal{E}(1,0)$ тогда $\chi$ опредалает функцию с значениями в $\mathbf{U}$ над каждом $E(r,d)$ в множестве (9). Если $z\in\mathbf{U}$, тогда вторая функция $\eta_z: N\to z^d$. Итак возможно что есть простое или скорее несложное описание, полного множества собственных функций операторов Гекке. Мы дадим его для $r=2$.

Для эллиптической кривой $g=1$ и группа $\Gamma$ порожденна элементами $A$, $B$,

$$ABA^{-1}B^{-1}=1\neq 0\in\mathbf{Z}.$$

Согласно гипотезе, собственные функции операторов Гекке для $\mathrm{GL}(n)$ соответсвуют представлениям $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ размерности $n$. Параболические собственные функции соответсвуют неприводимам представлениям. Пусть $\rho$ есть такое представление. Тогда $\rho(1)=\zeta\in\mathbf{U}$ и

$$\rho(A)\rho(B)\rho(A)^{-1}\rho(B)^{-1}=\zeta I.$$

Так как $\det(\zeta I)=1$, $\zeta$ есть корень из единицы. Пусть $k$ его порадок. Кроме этого $\rho(B)$ и $\zeta\rho(B)$ подобные матрицы. Пусть $k|n$ порядок $\rho(B)$. Самый простой пример

$$A=\lambda\begin{pmatrix}0&1&0&0\cdots\cdots 0\\0&0&1&0\cdots\cdots 0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&0\cdots\cdots 0\end{pmatrix},\quad B=\mu\begin{pmatrix}1&0&0\cdots\cdots\cdots 0\\0&\eta&0\cdots\cdots\cdots 0\\0&0&\eta^2\cdots\cdots\cdots 0\\ \vdots&\vdots&\vdots\qquad\vdots\\0&0&0\cdots\cdots\cdots\eta^{k-1}\end{pmatrix},$$

$\lambda$, $\mu\in\mathbf{C}^\times$, $\eta^k=1$. Но в этой статье я рассматриваю только $\mathrm{GL}(2)$

В следующих трёх разделах я рассматриваю операторы Гекке для группы $\mathrm{GL}(2)$. Последный раздел самый важный, самый замечательный, но первый и второй разделы содержают необходимую подготовку.

## V. Соответствия Гекке

Для каждой точки $x\in M$ есть коммутативная алгебра $\mathfrak{H}_x$, определенная соответствием и мерой. Мы начинаем с группы $\mathrm{GL}(2)$ и эллиптической кривой и для этой группы и этой кривой эта мера будет очевидна. Поэтому я откладываю её общее определение, надеясь позже на случай чтобы её объяснить. Подходящие понятия привелены в [AB, §9]. Алгебра $\mathfrak{H}_x$ произведена двумя двойными модулями. Один из них лёгок. Есть конечно очевидная локальная координата $z$ над $M=\mathbf{C}/L$, но чтобы ввести операторы Гекке нужно уточнить точку $x \in M$ и лучше пользоваться произвольной координатой $z_x$, $z_x(x) = 0$ потому что $x$ существенный параметр оператора. Для данной точки есть два основных оператора, то есть два основных смежных класса по модулю $G(\mathcal{O}_x)$:

$$\Delta_1 = G(\mathcal{O}_x)\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}G(\mathcal{O}_x); \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix}G(\mathcal{O}_x)$$

Чтобы определить соответствующих два оператора нужно ввести меру $\mu$ на $\mathrm{Bun}_G$ или $G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O}_F)$. Общее определение мера трудно, но для группы GL(2) будет очевиден выбор, которым мы пользуемся как временным определением. Второй оператор есть просто

$$\Theta_2 = \Theta_{2,x} : f \to f',\ f'(g) = f\left(g\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix}\right),$$

но первой оператор

$$\Theta_1 = \Theta_{1,x} : f \to f',\ f'(g) = \int_{h \in g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x)} f(h)\,dh. \tag{10}$$

Первый интеграл по точке и мера такова что мера точки равна 1. Мы описываем область итегрирования для второго оператора. Этот оператор не эрмитов, но если мы прибавим исправленый оператор $\Theta_2^*$ порожденная алгебра коммутативна и эрмитово замкнута.

Мы рассмотрим разные случаи: (a) $g \in \mathfrak{D}(m,n)$, $m-n \geqslant 2$; (b) $g \in \mathfrak{D}(m,n)$, $m-n=1$; (c) $g \in \mathfrak{D}(m,n)$, $m-n=0$; (d) $g \in \mathfrak{A}(m,n)$, $m-n=1$; (e) $g \in \mathfrak{A}(m,n)$, $m-n=0$. Важно замечать что комплексная размерность $\dim \mathfrak{D}(m,n) = 2$ и что $\dim \mathfrak{A}(m,n) = 1$. Тогда соотсветственно этим пяти возможностям элемент $h$ в (10) находится в

(a) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{D}(m,n+1)$;
(b) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{D}(m,n+1) \cup \mathfrak{A}(m,n+1)$, где $m = n+1$;
(c) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{A}(m+1,n)$, где $m = n$;
(d) $\mathfrak{D}(m,n+1) \cup \mathfrak{A}(m,n+1)$ где $m = n+1$;
(e) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{A}(m+1,n)$ где $m = n$.

Случаи $m = n$, $m = n \pm 1$ подчёркнуты, потому что они соответствуют расслоениям рода Атьи. Есть другой образ, чтобы выразить эти заключения. Если носитель функции $f$ в (a) $\mathfrak{D}(m,n)$, $m-n \geqslant 2$; (b) $\mathfrak{D}(m,n)$, $m-n=1$; (c) $\mathfrak{D}(m,n)$, $m-n=0$; (d) $\mathfrak{A}(m,n)$, $m-n=1$; (e) $\mathfrak{A}(m,n)$, $m-n=0$ тогда носитель функции $f'$ в (10) находится соответственно в (a) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{D}(m,n+1)$; (b) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{D}(m,n+1) \cup \mathfrak{A}(m,m)$; (c) $\mathfrak{D}(m+1,m) \cup \mathfrak{D}(m,m) \cup \mathfrak{A}(m+1,m)$; (d) $\mathfrak{D}(m,m) \cup \mathfrak{A}(m,m)$; (e) $\mathfrak{D}(m+1,m) \cup \mathfrak{A}(m+1,m)$. Это несколько щепетильно, но я не совсем уверен.

Я начинаю с описания представителей левых смежных классов в

$$G(\mathcal{O}_x)gG(\mathcal{O}_x),\ g = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Они данны умножением $g$ слево матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbf{C}. \tag{12}$$

Это даёт

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_x^{-1}a & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{C}. \tag{13}$$

Нужно напомнить что в этих двух уравнениях $\mathbf{C} \subset \mathcal{O}_x$. Если $\lambda$ скаляр, то есть $\lambda \in \mathbf{I}_F = \mathbf{A}_F^{\times}$, и $f_1(g) = f(\lambda g)$, тогда $f_1'(g) = \Theta_1 f_1 = f'(\lambda g)$. Это позволяет сделать несколько упрощений в вычислениях.

Лёгко описать элементы $G(F_x)$ и даже элементы $G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$, но трудно описать элементы $G(\mathbf{A}_F)$ или $G\big(\mathbf{A}_F/G(\mathcal{O}_F)\big)$, потому что в принципе нужно задавать бесконечное множество координат, но можно принять почти всюду единичную матрицу. Этих координат я не привожу.

Если мы начинаем с $g \in \mathfrak{D}(m,n)$ то мы можем взять:

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ m \neq n = 0; \\ &= \begin{pmatrix} z_u/z_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ m = n = 0. \end{aligned}$$

потому что оператор Гекке коммутирует с умножением на линейное расслоение. Мы умножаем $g$ с права с матрицами (13). Если $m \neq 0$ это дает[17]

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

которая принадлежает $\mathfrak{D}(m+1,0)$, и

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x^{-1} a & z_u^{-m} \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{14$'$}$$

Все выборы $a \neq 0$ дают эквивалентные расслоения. Если $a = 0$, расслоение принадлежит $\mathfrak{D}(m,1)$. Мы выбираем $a = 1$ и переставляем столбцы. Тогда $(14')$ равно

$$z_x^{-1} \begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14$''$}$$

Если $f \in F$ мы можем умножить налево с

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[17]Описание элемента в $\mathrm{Bun}_G$ или даже в $G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_F)$ трудно потому что большая часть координат излишня. Кроме того, представитель элемента в $\mathrm{Bun}_G$ в $G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_F)$ не уникален. Нужны добрая воля и внимание читателя! Например, если $u \neq x$ вместо (14) лучше написать

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{y \neq x,u} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

и вместо $(14')$

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1} a & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

чтобы получать

$$z_x^{-1}\begin{pmatrix} z_u^{-m}z_x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}+fz_u^mz_x^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Есть три случая: $m \geqslant 2$, $m = 1$, $m = 0$. Мы описали в теории Вейерштрасса все мероморфные функции над $M$. Если $m \geqslant 2$, мы можем выбрать такое $f$, что $z_x^{-1} + fz_u^mz_x^{-1} \in \prod_x \mathcal{O}_x$ даже если $u = x$. Следовательно, расслоение (15) есть разложимое расслоение

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix} \tag{15$'$}$$

в $\mathfrak{D}(m, 1)$. Остаётся $m = 1$,

$$\begin{pmatrix} z_u^{-1}z_x^{-1} & z_u^{-1}\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1}z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

и $m = 0$ случаи, которые различны. Если $g_1$, $g_2 \in G(\mathbf{A}_F)$, $g_1 \sim g_2$ выражает равенство в $\mathrm{Bun}_G$.

Если $m = 1$, пусть $u + x$ и $2v$ линейно эквивалентны. Мы рассматриваем

$$z_v\begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1}z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}. \tag{16$'$}$$

Необходимо знать когда расслоение (16′) изоморфно (5). Если $u = x = v$, то очевидно что это так. Пусть $u \neq x$ и пусть $\Lambda_1 = (z_v/z_u)$, $\Lambda_2 = (z_v/z_x)$. Тогда $\mathrm{Hom}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$. Согласно [A, Lemma 5] это подразумевает что расслоение (16′) разложимо. Можно проверяет это прямо потому что матрица в (16′) равна

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\right\}$$

где первая матрица справо находится в $\mathrm{GL}(2, F)$. Эта матрица в $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A}_F)$ но кроме точки $\{u, x\}$ она в $G(\mathcal{O}_w)$. Мы расматриваем факторы в $u$ и $x$ отдельно

$$\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_u^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-z_u\\ 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_u^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{16.a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix} \tag{16.b}$$

Если $m = 0$, мы получаем

$$\begin{pmatrix} z_uz_v^{-1}z_x^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_uz_v^{-1}z_x^{-1}a & z_uz_v^{-1}\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix} \tag{17}$$

Первое расслоение находится в $\mathfrak{D}(1, 0)$. Если $a = 0$, то второе расслоение тоже в $\mathfrak{D}(1, 0) = \mathfrak{D}(0, 1)$. Для других случаев, все $a \neq 0$ дают одинаковое расслоение, заданое с

$$\begin{pmatrix} z_uz_v^{-1}z_x^{-1} & z_uz_v^{-1}\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_uz_v^{-1} & z_uz_v^{-1}z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}, \tag{17$'$}$$

потому что

$$\begin{pmatrix}\alpha a & \beta\\ \gamma & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\quad a\in\mathbf{C}^{\times}.$$

Если $u=v$

$$\begin{pmatrix}z_x^{-1} & 1\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}.$$

Если $u\neq v$, пусть $v-u\sim x-y$. Существует функция $f$ с нулями в $y$, $v$ и полюсамы в $x$, $u$. Значит $\mathrm{Hom}(\Lambda_1,\Lambda_2)\neq 0$, если $\Lambda_1=(z_u/z_v)$, $\Lambda_2=(1/z_x)$ и можно, читать что $(17')$ неразложимо.

$$(17'')\qquad \begin{pmatrix}z_uz_v^{-1} & z_uz_v^{-1}z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\sim z_uz_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_y^{-1}\end{pmatrix}.$$

Если $x_1\neq x$, $x_1\neq y$, есть такая функция $f\in F$, что в $x_1$ ведет себя как $f\sim 1/z_{x_1}$, а в $x$ её поведение сходное $f\sim -1/z_x$, где $f$ голоморфна в остальных точках, и $f(y)=0$. Мы умножаем слево с матрицой

$$\begin{pmatrix}1 & f\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

чтобы получить

$$(18)\qquad z_uz_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_{x_1}^{-1}\\ 0 & z_y^{-1}\end{pmatrix}=z_uz_v^{-1}\Theta_y,\quad x_1\neq y.$$

Матрица $\Theta$ преставлена в (4). Другой представитель расслоения

$$(18')\qquad \Theta\sim\begin{pmatrix}1 & z_w^{-2}\\ 0 & z_w^{-1}\end{pmatrix},\quad w\sim v+y-u\sim x.$$

Эти эквивалентности объяснены в [A]. Я признаю что моя уверенность в этих вычислениях ограничена. Мне не по себе с множеством $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O}_F)$.

В случае (d) мы выбираем представление $(18')$ множества $\mathfrak{A}(1,0)$ но, меняя обзначение, $w$ на $u$. Умножая на матрицы (13) получаем

$$(19)\qquad \begin{pmatrix}z_x^{-1} & z_u^{-2}\\ 0 & z_u^{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}z_x^{-1}a+z_x^{-1}z_u^{-2} & 1\\ z_u^{-1}z_x^{-1} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}a+z_x^{-1}z_u^{-2}\\ 0 & z_u^{-1}z_x^{-1}\end{pmatrix}$$

Если $u=x$ первое расслоение равно

$$(19')\qquad z_x^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

которое рода $\mathfrak{A}(1,1)$. Если $u\neq x$ мы рассматриваем

$$(19'')\qquad \begin{pmatrix}1 & f\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_x^{-1} & z_u^{-2}\\ 0 & z_u^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_x^{-1} & fz_u^{-1}+z_u^{-2}+cz_x^{-1}\\ 0 & z_u^{-1}\end{pmatrix},$$

где $c\in\mathbf{C}$ и $f\in F$. Мы выбираем $f$, с полюсами только в $x$ и $u$, так что полюс в $u$ устранён и затем такое $c$, что полюс в $x$ тоже устранён. Тогда можно также устранить члены нижного порядка в верхном правом коеффициенте, чтобы получить

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix} \tag{19'''}$$

рода $\mathfrak{D}(1,1)$.

Для матрицы второго рода в (19) есть несколько возможностей. Перед тем, как их рассмотреть нужно объяснить особенность теории Атьи. Она не предлагает чёткий рецент чтобы установить, если данное расслоение разложимо или нет. Рассмотрим на пример расслоение

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ d \in \mathbf{I}_F,\ b \in \mathbf{A}_F.$$

Пусть

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Theta_2 = \begin{pmatrix} d \end{pmatrix}.$$

Мы предполагаем что $\deg(\Theta_2) > 0$ и что $\Theta \simeq \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ разложимо. Если $\Lambda_i \neq (1,0)^{\mathrm{tr}}$, $i = 1,\, 2$, тогда $\Lambda_i \to \Theta_2$ сюръективно и $\deg \Lambda_i \geqslant \deg \Theta_2$. Сдедовательно

$$\deg \Theta_2 = \deg \Lambda_1 + \deg \Lambda_2 \geqslant 2 \deg \Theta_2$$

и это невозможно. Иначе говоря, либо $\Lambda_1$ либо $\Lambda_2$ равно, лучше эквивалентно, $(1,0)^{\mathrm{tr}}$. Пусть $\Lambda_1 = (1,0)^{\mathrm{tr}}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix} = \Theta g,\ g = \prod_{v \in M} g_v \in G(\mathcal{O}_F),\ g_v = \begin{pmatrix} 1 & \beta_v \\ 0 & \delta_v \end{pmatrix},\ \beta_v \in \mathcal{O}_v, \delta_v \in \mathcal{O}_v^{\times}, \tag{20}$$

и

$$\Lambda_2 = \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_i \in F, i = 1, 2, \tag{21}$$

где $\Lambda$ линейное расслоение, и $(b + \beta_x d)/\delta_x d = (\phi_1/\phi_2)_x$ мероморфная функция от $x \in M$. Мы пользуемся этим выводом чтобы доказывать неразложимость различных расслоений. Он кажется мне несколько неуклюжим и больше всего неподходящим когда род $g > 1$, но в данный момент у меня другого способа нет.

Расмотрим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} a + z_x^{-1} z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} z_x^{-1} \end{pmatrix} \tag{22}$$

из (19). Если $a = 0$ тогда это расслоение эквивалентно

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-3} \\ 0 & z_x^{-2} \end{pmatrix},\ b = z_x^{-3}, d = z_x^{-2}, \quad u = x; \tag{23.a}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} z_x^{-1} \end{pmatrix},\ b = z_x^{-1} z_u^{-2}, d = z_x^{-1} z_u^{-1}, \quad u \neq x. \tag{23.b}$$

и у $(b + \beta_v d)/\delta_v d$, $v \in M$, есть единственный полюс в точке $u$. Но такой мероморфной функции нет. Сдедовательно (21) неразложимое.

Если $a \neq 0$ лучше нужно писать (19) точно как

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}a + z_x^{-1} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Но есть опять у $(b + \beta_v d)/\delta_v d$ единственный полус в нокте $u$. Следовательно (24) неразложимо. Согласно [A] есть четыре неразложимых расслоения с данным детерминантом четной степеней. Поэтому если $x$ дано, четыре $u$ дают данное расслоение.

Случай (e) самый лёгкий. Так как операторы Гекке коммутифуют относительно тензорного произведения с линейным расслонением, для данного $x$ достаточно рассмотреть

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(0,0). \tag{25}$$

Преобразование этой точки дано двумя родами точок,

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(1,0),$$

и

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1}a + z_x^{-2} & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Но

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1}a + z_x^{-2} & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_x^{-2} & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-2} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(1,0).$$

Хотя доказательства выглядять неудовлетворительны, эти выводы представлятся убедительным. Объясним!

Сперва мы подведём итоги наших размышлений. В частности, мы узнаем что размерность $\dim\bigl(g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x)\bigr)$ всегда равно 0, хотя это подмножество множества $G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O}_F)$ или его образ в $\mathrm{Bun}_G$, может содержать больше одного элемента. Следовательно область интегрирования в (9)-конечное множество. Вообще, хотя я этого здесь не объясню, мера этого интеграла определёна формой Пфаффа, но для конечного множества это определенно так, что мера каждой точки 1. Значит, мы можем отложить введение общой теорий этой формы на потом.

Рассмотрим пять случаев (a),…,(e). Для каждого случая мы пользуемся отношениями

$$\Theta_i f_z(g) = f_z'(g),\ f_z(g) = f(zg),\ f_z'(g) = f'(zg),\ f'(g) = \Theta_i f(g),\ i = 1, 2,\ z \in \mathbf{A}_F^\times$$

То есть отображения $\Theta_i$ и $f \to f_z$ коммутируют.

(a) Если $m - n \geqslant 2$ тогда образ матрицы

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & z_v^{-n} \end{pmatrix}$$

состоит из двух точек

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x^{-1} & \\ 0 & z_v^{-n} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & z_v^{-n} z_x^{-1} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

(b) Если $m-n=1$ он состоит из (26) и, согласно (16′),

$$z_u^{-m}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathfrak{A}(m,m),$$

если дивизор $m\cdot u-n\cdot v$ линейно эквивалентен дивизору $x$.

(c) Если $m-n=0$ то образ состоит опять из (26), но сейчас согласно (18),

$$z_u z_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_{x_1}^{-1}\\ 0 & z_y^{-1}\end{pmatrix},\quad v-u\sim x-y.$$

если $u\neq v$ и

$$g=z_v^{-k}\begin{pmatrix}z_u/z_v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Theta.$$

Обозначение несколько изменено относительно (18). Я замечую что $u=v$ даёт не больше чем (26).

(d) В (19) $u$ пробегает $M$ и уместная область определения $\Theta_1$

$$\begin{pmatrix}1 & z_u^{-2}\\ 0 & z_u^{-1}\end{pmatrix},$$

и образы, то есть область значений оператора $\Theta_1$ с областью определенности $\mathfrak{A}(1,0)$, даны (19). От первых элементов множества (19) мы получаем сначала, при $u=x$, точку (19′) в $\mathfrak{A}(1,1)$. От других $u$ мы получим точки (19″) в $\mathcal{D}(1,1)$. С первого взгляда на (19′) кажется, что есть только одна недостающая точка, $u=x$, но $\mathcal{D}(1,1)$ двумерцо! Вторые элементы множества (19) все неразложимые, с детерминантом $z_u^{-1}z_x^{-1}$. Согласно статье [A], есть точно четыре точки в $\mathfrak{A}(1,1)$ с данным детерминантом. В $\mathfrak{A}(1,0)$ есть только одна. То есть соответсвие $\mathfrak{A}(1,0)\to A(1,1)$, соответсвие рода $4\to 1$.

(e) Для данного $x$ общий элемент области определения дан матрицам

$$z_u z_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathfrak{A}(0,0),\tag{27}$$

то есть как расслоение (27) независимое от $x$. Преобразование есть либо

$$z_u z_v^{-1}\begin{pmatrix}z_x^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathfrak{D}(1,0),\tag{27′}$$

либо

$$z_u z_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-2}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\in\mathfrak{A}(1,0).\tag{27″}$$

Для $A(m,m)$, $m\neq 0$, $z_u z_v^{-1}$ заменяется на $z_u^{-m}$. Соответсвие $\mathfrak{A}(0,0)\to\mathfrak{A}(1,0)$ биективно.

## VI. Операторы Гекке

Хотя $\mathrm{Bun}_G$ как топологическое пространство трудно определить, даже для случая $G = \mathrm{GL}(2)$ и эллиптической кривой $M$, оно просто как дифферентиально-геометрическое пространство, хоть бы для этой пары. Мы расмотрим сейчас этот случай. Для него многообразие Пикара $\mathrm{Pic}(M)$ за дано произведением двух окружностей с $\mathbf{Z}$. Согласно статье [A], множество $\mathrm{Bun}_G$ дано как объединение

$$\mathfrak{D} = \left\{ \bigcup_{m>n} \mathfrak{D}(m,n) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{m} \mathfrak{D}(m,m) \right\},$$

следовательно симметрического произведения $\mathrm{Pic}(M)$ с собой, и

$$\mathfrak{A} = \cdots \cup \mathfrak{A}(-1,-1) \cup \mathfrak{A}(-1,0) \cup \mathfrak{A}(0,0) \cup \mathfrak{A}(1,0) \cup \mathfrak{A}(1,1) \cup \mathfrak{A}(2,1) \cdots$$

Обозначения здесь слегко произвольны. Позднее мы введем меру на этом пространстве; она будет по существу фактор-мера меры Хаара, итак это мера Лебега $\mu$. Операторы Гекке образуют алгебру коммутирующих ограниченных операторов на $L^2(\mu)$, замкнутую относительно эрмитого-сопряженных операторов.

Я подчёркиваю что $\dim \mathfrak{A} = 1$, хотя $\dim \mathfrak{D} = 2$, что $L^2(\mu) = L^2(\mu, \mathfrak{D}) \oplus L^2(\mu, \mathfrak{A})$ и что непрерывные функции с компактном носителем плотны в $L^2(\mu)$. Удивительно, и даже сначала тревожно, что эти два пространства инвариантны относительно операторов Гекке. Я поясню. Это очевидно для $\Theta_{2,x}$. Оператор $\Theta_{1,x}$ представляется как

$$\begin{pmatrix} DD & DA \\ AD & AA \end{pmatrix}.$$

Нужно доказать, что $DA = 0$, $AD = 0$, то есть что они нуль как операторы от $L^2(\mathfrak{A})$ в $L^2(\mathfrak{D})$ соответственно $L^2(\mathfrak{D})$ в $L^2(\mathfrak{A})$. Эти два уравнения выражают то, что я называю преобладанием диагональных клеток. Возможно, что принцип которого они примером является вообще правилен. Если так, то он главный вывод этой статьи.

Согласно (10), для $\Theta_{1,x}$ нужно расмотреть сначала:

(i) для данного $g \in \mathfrak{D}(m,n)$ множество $g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x) \cap \mathfrak{A}$;

и тогда

(ii) для данного $g \in \mathfrak{A}(m,n)$ множество $g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x) \cap \mathfrak{D}$.

Эти пересечения определяют или ограничивают носитель $f'$ в (10). То есть, они дают носитель, может быть не самой маленький, функции (10) в том или другом множестве. Ядро оператора $\Delta_{1,x}$ - род матрицы строки или столбца которые параметрированы множеством $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{A}$. Следовательно, это ядро состоит из четырёх блоков, диагональных блоков $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ и недиагональных блоков $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})$. Мы интересуемся сейчас недиагональными блоками.

В первом случае, для которого соответствие $\mathfrak{D} \to A$ носит $\mathfrak{D}$ к $\mathfrak{A}$ и переносит функции с $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{D}$, множество уместных элементов в блоке пусто, если $m - n \neq 0, \pm 1$. Если $m = 1$, $n = 0$, это по существу $(16')$ если $u = x$. Более точно, множество состоит из

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Lambda$ произвольно линейное расслоение. То есть если $f$ непрерывно с носителем в $\mathfrak{A}(n,n)$, функция $f'$ в (10) как функция на $\mathfrak{D}$ понесёна

$$\left\{ \Lambda\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \Lambda \text{ линейное расслоение} \right\}.$$

То есть, его носитель подмножество этого множества. Но такая функция как функция в $L^2(\mathrm{Bun}_G)$ есть нуль-функция, потому что это множество как комплексное многообразие одномерно а $\mathfrak{D}$ двумерно. Общий случай $m = n+1$ - тот же самый. Однако этот довод неудовлетворителен. Блок $AD$ равен 0 по двум причинам: (i) нет естественного средства ограничения $L^2$-функтции на пространсво более низкой размерности; (ii) операторы Гекке эрмитовы. Следовательно указом! То есть этот блок 0. Но это даёт правильные заключения и убедительую теорию. Оно представдляет также существенный довод в следующих замечаниях.

Если $m = n$ мы предполагаем что $m = n = 0$, тогда класс расслоения $(17'')$ определён точкой $y$, потому что $v - u \sim x - y$ и $x$ данн. То есть образ множества $\mathfrak{A}(0,0)$ и вообще образ $\mathfrak{A}(m,m)$ в $\mathfrak{D}$ одномерен. Следовательно $DA = 0$.

В втором случае обязательно что $m - n = 0, \pm 1$. Если $m = 1$, $n = 0$, то пересечение $g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x) \cap \mathfrak{D}$ заданно $(19''')$ с произвольным $u \in X$. То есть, размерность пересечения равна 1. Следовательно, оно не может носить нетривиальную $L^2$-функцию. Если $m = n = 0$ тот же самый вывод, есть следствие уравнения $(27')$.

Возможно что эта самостоятельность $L^2(\mu, \mathfrak{D})$ и $L^2(\mu, \mathfrak{A})$ то, что отличает $L^2$-теорию от пучковой теории в [G].

## VII. Собственные значения и собственные функции операторов Гекке

Перед тем как мы рассмотрим спектр операторов Гекке мы возвращаемся к лестнице $\mathcal{E}(r,d)$, $d = -\infty, \dots, \infty$ для $r = 2$. Мы не рассматриваем случай общего $r$. И особый случай и общий случай расмотрены в [A]. Для $r = 2$, лестница

$$\dots, \mathfrak{A}(-1,-1), \mathfrak{A}(0,-1), \mathfrak{A}(0,0), \mathfrak{A}(1,0), \mathfrak{A}(1,1), \mathfrak{A}(2,1), \dots \tag{28}$$

Если $\Lambda$ линейное расслоние степени 1 тогда $\Theta \mapsto \Lambda \otimes \Theta$ такой изоморфизм что

$$\mathfrak{A}(j,j) \mapsto \mathfrak{A}(j+1,j+1)$$

и

$$\mathfrak{A}(j,j-1) \mapsto \mathfrak{A}(j+1,j),$$

но оператор Гекке $\Theta_1$ такой, что

$$\mathfrak{A}(j,j) \mapsto \mathfrak{A}(j+1,j), \quad \mathfrak{A}(j,j-1) \mapsto \mathfrak{A}(j,j).$$

Я начинаю с исправления или лучше с более точным видом теоремы [A, Th. 6] и следующих теорем, то есть $\deg A = 1$, где $A$ линейное расслоение этой теоремы. Пусть $\mathrm{Pic}_n(M)$, множество линейных расслоений степени $n$. Я предпочитаю формулировать [A, Lemma 16, Th. 5,6,7], выше всего Th. 6, сдедующим образом. Есть такое биективное отображение $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathrm{Pic}(M)$, что:

(i) если $\Lambda_1$ линейное расслоение и $\Theta \leftrightarrow \Lambda$ тогда $\Lambda_1 \cdot \Theta \leftrightarrow \Lambda_1 \cdot \Lambda$;
(ii) расслоение $F_2$ в Th. 5, или в определение (6), соответствует тривиальному расслоению;
(iii) если $\Theta$ дано с (4) и $\Lambda = (\sigma^{-1})$ тогда $\Theta \leftrightarrow \Lambda$.

Следовательно, мы можем отождествить $\mathfrak{A}$ с $\mathrm{Pic}(M)$, но это отождествление искусственное, и $\mathfrak{D}$ с симмитрическим произведением $\mathrm{Pic}(M)$ с собой. Кроме того, каждая неупорядоченная пара $(\chi_1, \chi_2)$ унитарных характеров группы $\mathrm{Pic}(M)$ определяет функцию,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \to \chi_1(\alpha)\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta) \quad \alpha, \beta \in \mathrm{Pic}(M) \tag{29}$$

над $\mathfrak{D}$. Мы докажем что эти функции дают все собственные функции ореraторов Гекке, в смысле этой теории, с носителём $\mathfrak{D}$ и что собственный класс функций (29) в точке $x$

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{-1}(x) & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1}(x) \end{pmatrix} \tag{30}$$

для всех $x$ в $M$. Достаточно доказать, что все эти функции собственные функции, потому что очевидно что они дают спектральное разложение. Я напомню что собственная функция определяет для каждой точкой $x$ полупростый, даже унитарный, собственный класс в $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, а именно детерминант с $\Theta_2$, но это очевидно, и след с $\Theta_1$.

Мы утверждаем это сперва для $\mathfrak{D}$, откладывая рассмотрение множеста $\mathfrak{A}$. Есть опять два существенных случая:

$$g = \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, m \neq n = 0; \quad g = \begin{pmatrix} z_u/z_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, m = n = 0.$$

Я замечаю, что $z_u^{-m}$ и $z_u/z_v$ изображают дивизоры $m \cdot u$ и $v - u$. Из (14) и (14$''$) мы заключаем, что если $m \neq 0, \pm 1$ функция помножена на $\chi_1(z_x^{-1}) + \chi_2(z_x^{-1})$ в точке $g$, то есть

$$\chi_1(\alpha)\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta) \tag{30.a}$$

заменено суммой[18]

$$\chi_1(\alpha)\chi_1(z_x^{-1})\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_2(z_x^{-1})\chi_1(\beta) + \chi_1(\alpha)\chi_2(\beta)\chi_2(z_x^{-1}) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta)\chi_2(z_x^{-1}),$$

которая равна произведению

$$\big\{\chi_1(\alpha)\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta)\big\}\big\{\chi_1(z_x^{-1}) + \chi_2(z_x^{-1})\big\}$$

Если $m = 1$ такой же вывод следует из уравний (14) и (16.a) с (16.b), скорее из (25). Для $m = 0$ довод тот же. Очевидно, что функции (30.a) давают польное множество собственных функций над $\mathfrak{D}$.

Мы рассматриваем теперь $\mathfrak{A}$. Комбинатарный анализ этого случая несколько сложен. Собственная функция определает собственный сопряженный класс, итак для каждой точки в $M$ нужно вводить два собственных числа. Для $\mathfrak{D}$ мы пользовались двумя самостоятельними характерами, но для $\mathfrak{A}$ двух правдиво самостоятельних характеров нет.

Пусть $\mathfrak{L}$ множество линейных расслоений и $\mathfrak{L}_m$ те из них степень которых равна $m$. Тогда, согласно [A], $\mathfrak{A}(m, m) = \{\Lambda \otimes F_2\}$ и $\mathfrak{A}(m+1, m)$ множество $\big\{\Lambda \otimes F(d)\big\}$, где $\Lambda \in \mathfrak{L}_m$, где $F(d)$ одна из матриц (7), дана но кроме этого произвольна. К тому же $\Lambda_1 \otimes F(d) \sim \Lambda_2 \otimes F(d)$ тогда и только когда $\Lambda_1^2 \sim \Lambda_2^2$. Будет лучше объяснить следствя эього тотчас же.

[18]К сожалению обозначение, $\chi(z_x^{-1}) = \chi^{-1}(x)$ плохое. Я надеюсь что это приемлемо! Выбор сделан в (30).

**Лемма 1.** *Соответствие* $\Delta_1 : \mathfrak{A}(j,j) \to \mathfrak{A}(j+1,j)$ *четырех-однозначное, но соответствие* $\Delta_1 : \mathfrak{A}(j,j-1) \to \mathfrak{A}(j,j)$ *одно-четырехзначное.*

Это следствие трёх обстоятельств: (i) $\Delta_1$ коммутирует с умножением на линейное расслоение; (ii) над $A(j,j)$ детерминант четырех-однозначен; (iii) над $A(j,j+1)$ детерминант взаимно однозначен. Первое утверждение очевидно и другие доказываны в [A, Th. 7]. Например, если в матрице

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}$$

класс второго фактора не изменяется при замене

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda^2 \sim 1,$$

но класс второго фактора в (19′) изменяется если $\Lambda$ нетривиально. Самый лучший приём чтобы параметризовать элементы в $\mathfrak{A}$ следующый:
(i) сперва, один параметр есть степень его детерминанта; (ii) если эта степень нечётна, то этот детерминант сам представляет второй параметр; (iii) если степень чётная, то этот элемент равен $\Lambda F_2$, где $F_2$ дано в (6), и его второй параметр есть $\Lambda$. Следовательно, параметр задан степенью и линейым расслоением, из которых первый излишен.

Первый оператор Гекке $\Theta_1$ повышает степень на единицу. Детерминант умножается на $\Lambda = (z_x^{-1})$. Соответсвенно лемме, над $\mathfrak{A}(m,m+1)$ отображение которое дано соответствием Гекке $1:4$, а над $\mathfrak{A}(m,m)$ оно $4:1$.

Данной характер $\chi$ группы $\mathrm{Pic}(M)$ определяет функцию $f'_\chi$ на множестве

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{even}} = \bigcup_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathfrak{A}(m,m) = \left\{ \Lambda \otimes F_2 \;\middle|\; \Lambda \in \mathrm{Pic}(M) \right\}, \tag{31}$$

именно, $f'_\chi : \Lambda \otimes F_2 \mapsto \chi(\Lambda)$. Если $\chi$ тривиально над $\left\{ \Lambda \in \mathfrak{A}_{\mathrm{even}} \;\middle|\; \Lambda^2 = 1 \right\}$ тогда имеется такое $\widetilde{\chi}$ что $\chi(\Lambda) = \widetilde{\chi}(\Lambda^2)$. Пусть функция $f'_\chi$ такое расширение $f_\chi$ до $\mathfrak{A}$, что $f'_\chi(\Lambda) = \widetilde{\chi}(\det \Lambda)$. Если $\chi$ не такое, тогда $f'_\chi$ равно нулю над $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, дополнением множества $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$ в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}} = \bigcup_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathfrak{A}(m,m+1). \tag{31.a}$$

Эти функции составляют полное множество собственных функций операторов Гекке с носителём в $\mathfrak{A}$. Точнее, пространство функций над $\mathfrak{A}$ состоит из четырёх подпространств. Первое $\mathfrak{S}_0$ состоит из таких функций $f$ что $f(\Lambda \otimes \Theta) = f(\Theta)$ если $\deg \Theta$ чётно и $\Lambda^2 = 1$, но если $\deg \Theta$ нечётно такого условия нет. Функция произвольна над $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, но неприрывна или с интегрируемным квадратом в зависимости от обстоятельств. Есть три других подпространста, $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $\chi_i$, $i = 1, 2, 3$ не-единичный характер группы $\mathrm{Pic}_2(M) = \left\{ \Lambda \in \mathrm{Pic}(M) \right\}$, такой что $\Lambda^2 = 1$. Я замечаю что порядок этой группы четыре и что квадрат каждого $\Lambda \in \mathrm{Pic}_2(M)$ тривиальный. Пусть $\mathfrak{S}_i$ множество таких функций $f$ что $f(\Lambda\Theta) = \chi_i(\Lambda) f(\Theta)$, $\Lambda \in \mathrm{Pic}_2(M)$ и $f(\Theta) = 0$ если $\deg \Theta$ нечётно. Для теорем полноты нужно требовать чтобы квадрат, то есть его абсолютная величина, этих функций был интегрируем, но иногда другое условие лучше, например для описания собственных функций и собственных сопряженных классов ореаторов

Гекке. Следующая лемма непосредственное следствие первой леммы. Третье утверждение есть следствие уравнения (32.a).

**Лемма 2.** (a) *Над каждым пространством $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, 3$ оператор $\Theta_1$ есть нуль.* (b) *Каждое пространство $\mathfrak{S}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ инвариантно при $\Theta_2$.* (c) *Все собственные сечения возникают в $\mathfrak{A}$ с кратностью* 1

Следовательно, для $i = 1, 2, 3$ и всех $x \in M$ вид собственных классов есть

$$\begin{pmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & -\alpha_x \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{C},\ |\alpha| = 1, \tag{32}$$

то есть его след есть нуль. В самом деле, собственные функции $f$ для $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, 3$, такие функции что $f = 0$ над $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$ и что $f(\Lambda\Theta) = \chi_i(\Lambda)f(\Theta)$ если $\Lambda \in \mathrm{Pic}_2(M)$. Полное множество этих собственных функций составлено ограничениями к множеству $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$ таких функций $\Lambda F_2 \to \chi(\Lambda)$, где ограничение характера $\chi$ к $\mathrm{Pic}_2(M)$ равно $\chi_i$. Следовательно[19]

$$\alpha_x = \pm\sqrt{-f(z_x^{-1})}. \tag{32.a}$$

Знак не изменяет сопряженный класс (32). Мы можем выбрать квадратный корень непрерывным образом, а затем глобально определить его до знака.[20] Мы возвратимся к доказательству третьего утверждения в §XI.

Оставленное пространство составлено функциями детерминанта, $\Theta \to f(\det\Theta)$. Которые из этих функций есть собственные функции операторов Гекке? Пусть $\rho(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathrm{Pic}(M)$ равно 1/2 если $\deg\Lambda$ чётно и 1 если $\deg\Lambda$ нечётно. Тогда собственные функции даны как $\rho\chi$, где $\chi$ характер $\mathrm{Pic}(M)$. Собственные значения $\Theta_{1,x}$ и $\Theta_{2,x}$ равны $2\chi(x)$, $\chi^2(x)$ и собственный сопряженный класс дан матрицей

$$\begin{pmatrix} \chi(x) & 0 \\ 0 & \chi(x) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Комбинаторика здесь несколько необычна. Я подчёркиваю, оказывается что кратность каждого собственного сопряженного класса в $L^2(\mathfrak{A})$ одна. Но эти оставленные собственные сопряженные классы появляются также в $L^2(\mathfrak{D})$. Это кажется мне удивительным.

Есть один пункт который необходимо но подчёркивать и несколько других, которые полезно помнить. Множество характеров группы $\mathrm{Pic}(M)$ - объединение множества пар $\{\chi, \eta\chi\}$, где $\eta(\Lambda) = (-1)^{\deg\Lambda}$. Каждой паре ассоциирован собственный класс.

Я замечаю также, что чрезвычайно трудно отличить собственные функции, собственные точки и собственные значения. Существует произвольный выбор, неявный в первом, но не в других. Важно различать их свойства, но это не легко!

**Лемма 3.** *Это построение инъективно.*

[19] Когда я впервые пришёл к этому вопросу, я не знал об осложнениях, незначительных, но важных, возникающих в этом описании. Функция $f$ однозначна, но функция $\alpha_x$ не всегда является таковой. То, что мы можем и должны сделать, это выбрать её так, чтобы она была однозначна на одном из трех двойных покрытий $M'$ кривой $M$. Тогда ясно, что собственные функции образуют полный ортогональный базис. Я надеюсь что это короткое объяснение достаточно.

[20] Чрезвычайно трудно различить собственные функции, собственные классы и собственные значения. Существует произвольный выбор, неявный в первом, но не в других. Важно отличать их свойства, но это не лёгко!

След матрицы (32) нуль для всех $x$. Для следа класса находящегося в главном ряду, то есть присоединяющегося к паре характеров $\mathrm{Pic}(M)$, это невозможно. Следовательно, достаточно рассмотреть классы присоединеные к $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда след есть единично нуль. Следовательно только детерминант здесь уместен. Но согласно уравнению (32.a) детерминант равен $f^2(z_x)$. А допустимые функции такови, что если $f_1$, $f_2$ допустимы и $f_1 = \pm f_2$ всюду, тогда $f_1 = \epsilon f_2$ всюду с константой $\epsilon$.

Окончательная теория будет теорией для редуктивных групп. Итак возможно что группа $\mathrm{GL}(2)$ вводит в заблуждение. Поэтому мы кратко рассмотрим группу $\mathrm{SL}(2)$, для которой параболический спектр конечен. Вероятно что это справедливо для всех полупростых групп. Мы не рассмотрели этой группы и её операторов Гекке, но $\mathrm{Bun}_{\mathrm{SL}(2)} \subset \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}(2)}$ и их собственные функции получёны ограничением. Я ещё не проверил что явление преобладающих диагональных клеток[21] обосновано для умножения, для всех операторов Гекке и для $\mathrm{SL}(2)$, в частности для оператора определенного матрицой

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_x \end{pmatrix}.$$

Тем не менее я искользую это. Ограничение каждого пространства $\mathfrak{S}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, на $\mathrm{SL}(2)$ одномерно. Поэтому, параболический спектр группы $\mathrm{SL}(2)$ четырехразмерен. Один из этих собственных сопряженных классов тоже параболический. Я склонен думать, что для всех полупростых групп параболический спектр конечен, но я ещё не знаю как это посчитать.

Перед тем, как обратиться к основному вопросу есть несколько простых замечаний. Если два характера $\chi_1$, $\chi_2$ такие, что присоединенные функции $f_1$, $f_2$, $f_i : \Lambda F_2 \to \chi_i(\Lambda)$ дают тот же собственный сопряженный класс (31.a), то есть $\chi_1(z_x^-) = \pm\chi_2(x^{-1})$ всюду, тогда $f_1 = f_2$. Кроме того $\Lambda \to \det \Lambda F_2$ даёт естественное покрытие четвертого порядка. Может быть что неважно, но для $i = 1, 2, 3$ периоды сопряжённого класса (32) $\omega_1$ и $\omega_2$.

**Периоды и функции.** Прежде чем мы закончим этот раздел, я хотел бы, сделать очевидное небольщое наблюдение, потому что это то что смутило меня, связано в конце концов с важными частями теории, которые просмотрели обычно проницательные авторы статьи [AB]. Кривая $M$ задана решёткой $L = 2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_2\mathbf{Z}$, то есть её точки даны как $\mathbf{C}/L$. Но функции, связности и т.д. даны как $\mathbf{C}/\widetilde{L}$, где $\widetilde{L} = 2\eta_1\mathbf{Z} + 2\eta_2\mathbf{Z}$. Но мы встречаем выше не только эти параметры но также те что даны как $\mathbf{C}/2\widetilde{L}$ из-за того, что есть двумерный детерминант, который появляется в §IX по другим причинам. Последная возможность не была замечена в [AB].

## VIII. Связности и кривизна

Теорема Атьи-Ботта описана в следующем разделе, но чтобы доказать эту теорему им нужны несколько основых результатов построеных из глобальной дифференциальной геометрии, которые не были мне известны. Возможно что они известны читателям, но, скорее всего, они не знают о них больше, чем я. Поэтому я предпочитаю объяснить их здесь, хотя и только те которые нам нужны. Дело в том, что нам нужно быть знакомые не только с основными определениями дифференциальной геометрии, но нам также нужны некоторые навыки в их использовании.

[21]то есть равенство $AD = DA = 0$.

В [AB], прежде чем объяснить теорему, авторы ввели $\mathbf{U}(1)$-расслоение $Q$ которое я хочу здксь описать для кривой $M$. По словам [AB] “let $Q \to M$ be a $\mathbf{U}(1)$-bundle with Chern class 1 endowed with a fixed harmonic or Yang-Mills connection. If we normalize the metric on $M$ so that it has total volume 1 the curvature[22] of this harmonic connection on $Q$ is $-2\pi i\omega$, where $\omega$ is the volume form on $M$ The universal covering $\widetilde{M} \to M$ is of course a flat $\pi_1(M)$-bundle, so that the fibre product $Q \times_M \widetilde{M}$ is a $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M)$-bundle over $M$ with connection still having curvature $-2\pi i\omega$. In particular this connection $A$ is a Yang-Mills connection. . . ” Утверждение что класс Чженя равен 1 значит, что у сечения есть ещё один нуль, скорее чем полюсы. Хотя для геометра эти предложения и эти утверждения ясны и привычны, для меня не так. Для меня и для нескольких других читателей легко лишь неправильно понять. Поэтому я описываю понятия обстоятельно, особено расслоение $Q$ и связность $A$.[23] Но, откуда берется эта связность? Сначала трудно было понять!

Здесь есть объяснительная трудность. Это не вопрос одного или двух определений. В [AB] предположено, что у читателя имеются некоторые знания в дифференциальной геометрии. Мне кажется, что в этой статье это неблагоразумно предполагать. Для меня и для читателя необходимо пояснить некоторые понятия более подробно и приобрести подлинное знакомство с ними и их возможностям. Понятие связности Янга-Миллса, последствия которого сложны, само по себе нелегко понять. Я начинаю с материала из статьи [AB], но только для эллиптических кривых.

Хотя это и необходимо, я предпочитаю описание в рамках более знакомой мной теории Вейерштрасса. В сущности связность дана локально функцией $\sigma$ в (2.b), но полное описание сложнее. Необходимо так же вывести из неё расслоение Янга—Миллса. Но условие Янга—Миллса, которое я объясню позже, определяется кроме того не только метрикой на расслоении но также метрикой на $M$. Это уже вторичный вопрос.

Возможно что читатель также незнаком с комплексной дифференциальной геометрией как и я. Поэтому я предлагаю, для него и для себя, несколько основных определений, которые находятся в [AB] и с которами геометры знакомы. Насколько мне известно, кривизна, которая так важна дла настоящей статьи, отсутствует в русско-американской математической теории [G], хотя возможно что уравнение Янга-Миллса, как физическая теория, возникает на её задном плане. Это существенно для наших целей, потому что теорема Атьи-Ботта необходима, хотя и второстепенна. Мне кажется также, что полезно и даже необходимо не смешивать геометрическую теорию автоморфных форм с конформной теорией полей или теорией калибровочных полей. Я сперва кратко объясню

[22] Здесь есть недосказанное предположение или условие о котором я сделаю замечание позже. Введение сомножители $\pi_1(M)$ в [AB, 6.5] действует на группу расслоении но не на её алгебру Ли. Поэтому понятие кривизны мало изменено. Тем не менее присутствие группы будет важно. Это будет объяснено более подробно позже. Мне понадобилось некоторое время, чтобы понять это важное строение. Пока я ограничусь одним замечанием. Если $G = \mathbf{U}$, $\rho|\mathbf{Z}$ обязательно равно единице. Если, однако, $g = 1$, а также если $g > 1$, но мы рассматриваем особые случаи, тогда мы можем изменить значение $\rho(A)$ и $\rho(B)$ как нам нравится. Потребность в этом проявляется в разделе X.

Оказывается, к моему большому удивлению, что в настоящей статье только расслоения $\mathbf{U}(1) = \mathbf{U}(1)^n$ нулевой степени $n = 0$ важны, то есть тривиальное расслоение с постоянной метрикой. Я понял это только после значительного размышления над вопросами статьи и выводами [AB].

[23] [T] Что касается основных определений, книга Clifford Taubes, *Differential Geometry* - полезная дополнительная ссылка.

отношение теории в [AB] к собственным значениям операторов Гекке. Несколько понятий, связанных с кривизной и связностями, будут разъяснены на следующем примере.

Дело в том, что собственные значения операторов Гекке даны функцией на $M$ значение которой в точке $x \in M$ находится в эрмитовом компоненте алгебры Ли группы ${}^LG$. Если $G = \mathrm{GL}(2)$, компактный вид которого есть унитарная группа $\mathbf{U}(2)$, ${}^LG = G$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ прямая сумма $\mathbf{U} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h} = i\mathbf{U}$ пространство двумерных эрмитовых матриц. С другой стороны, есть связности значение которых в ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, но[24] мы интересуемся по большой части тими, значении которых в ${}^L\mathbf{U}$. Мы докажем, что собственные значения[25] операторов Гекке даны интегралами связности Янга-Миллса с соответствующими начальными условиями и умножены на $i = \sqrt{-1}$. Я конечно полагаю что такое утверждение вообще правдиво, но даже для $\mathrm{GL}(2)$ и эллиптической кривой нужно ещё много понять и много объяснить. Это соответствие есть следствие отношения деталей этих двух множеств.

Понятие о связности Янга-Миллса определено только для унитарной связности. В любом случае я рассматриваю только такие связности. Следующие объяснения взяты из [AB, §3,4,5,6], хотя обозначение слегка изменено. Пусть $P$ расслоение для группы $\mathbf{U} = \mathbf{U}(2)$, то есть для её алгебры Ли $\mathbf{U}(2)$. Связность $A$-расщепление последовательности

$$0 \longrightarrow T_FP \longrightarrow \mathrm{TP} \longrightarrow \pi^{-1}\,\mathrm{TM} \longrightarrow 0\ , \tag{34}$$

где $T$ обозначает касательное пространство и ${}_FP$ слой расслоения. Сверх того, нужно чтобы расщепление было инвариантно относительно $\mathbf{U}$! То есть связность определена $\omega_A : \mathrm{TP} \to T_FP$ с простыми нужными свойствами, которые очевидны. Поэтому можно поднять векторное поле $X$ с TM к TP. Пусть $X \to \widetilde{X}$. Тогда $F_A(X,Y) = \omega_A[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ мера кривизны связностей. Как функция пары $\{X,Y\}$, $F_A$ дифференцтальная форма значения которой находятся в алгебре Ли $\mathbf{U}$. Вообще к расслоению $P$ и каждому представлению $\mathfrak{g}$ или $\mathbf{U}$ – первые получены из вторых – присоединено векторное расслоение. Очевидно, что $F_A$ сечение расслоения, определеного тензорным произведением двумерной формы с присоединенным представлением. К счастью $*F_A$ проще. Оно - сечение расслоения $P$ и это сечение инвариантно.

Это замечание важно для доказательства теоремы в [AB, §6, Th. 6.7]. Итак его нужно понимать. Так как $F(A) \in \Omega^2\big(M;\mathrm{ad}(P)\big)$, $*F_A \in \Omega^0\big(M,\mathrm{ad}(P)\big)$, то есть $*F_A$ функция значения которой в слое лежат в $\mathrm{ad}(P) = \mathbf{U}$. Так как $A$ инвариантно $*F(pg) = \mathrm{Ad}\,g^{-1} * F(p)$. Поэтому его сопряженный класс постоянен внутри слоя. Глобальное постоянство есть следствие условия Янга-Миллса, которое мы объясним ниже. Я заметил что условие Янга-Миллса, хотя и важно для теоремы Атьи-Ботта, первоначально не относится к делу.

Здесь есть возможность путаницы. Построение расслоения $Q$, как расслоение Янга-Миллса нужно, но его точное построение с постояной кривизной не нужно. Тем не менее, оно полезно для сравнения с теорией операторов Гекке.

---

[24]Я признаюсь что то обстоятельство, что касательное пространство $n$-мерного комплексного расслоения на одномерной комплексной кривой $4n$-мерное, всегда смущает меня.

[25]Лучше напомнить что локальная алгебра Гекке изоморфна кольцу представлений ${}^LG$ и что характер этого кольца, соотвецвующий $\gamma \in {}^LG$ дан следом $\pi \mapsto \mathrm{tr}\,\pi(\gamma)$. Обычно $\gamma$ унитарно, но у следа такого $\gamma$ различающего свойства нет.

Мы рассматриваем связности на римановых поверхностях и у них есть особые свойствя.[26] Мне трудно не забыть то, что в первую очередь $M$ в [AB] есть вещественное многообразие! Итак звезда Ходжа[27]

$$* : \Omega^1_M(\mathbf{C}) = \Omega^1_M \otimes \mathbf{C} = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M) \to \Omega^1_M(\mathbf{C})$$

такая что $* = -i$ на $\Omega^{1,0}$ и $* = i$ на $\Omega^{0,1}$. Мы выбрали такую метрику, постоянную метрику, что соответствующая комплексная структура дана обычными $d' = \partial/\partial z = d/dx + id/dy$, $d'' = d/dx - id/dy$. С этим построением мы преобразуем действительое пространство в комплексное пространство. Это мы можем повторить с разложениями, создавая $d'_A$ и $d''_A$ от $\mathbf{U}$-связностей $dA$. Так как эта статья не адресована дифференциальным геометрам я объясняю. Присоединеным к связности $A$ и всем ассоциированным разложениям есть ковариантная производная и её сопряжённый дифференциальный оператор $d_A$.

Я напоминаю что вышеизложенное справедливо также для разложения,

$$\Omega^1_{\mathbf{C}}\big(M, \mathrm{ad}(P)\big) = \Omega^{1,0}\big(M, \mathrm{ad}(P)\big) \oplus \Omega^{0,1}\big(M, \mathrm{ad}(P)\big). \tag{35}$$

Эти пространства - собственные пространства оператора $\star$. Пусть $d_A$ ковариантное дифференцирование присоединено к $A$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{1,0}\big(M, \mathrm{ad}(P)\big) \arrow[r, "d''_A"] & \Omega^2_{\mathbf{C}}\big(M; \mathrm{ad}(P)\big) \\
\Omega^0_{\mathbf{C}}\big(M, \mathrm{ad}(P)\big) \arrow[u, "d'_A"] \arrow[r, "d''_A"] & \Omega^{0,1}\big(M; \mathrm{ad}(P)\big) \arrow[u, "d'_A"']
\end{tikzcd} \tag{35.a}$$

Есть обратное построение к этой диаграмме, которое дано в [GH]. Полезно подчеркнуть различное отношение построения в [AB] и [GH] к этой диаграмме. В [AB] метрикой вместе с унитарной связностью к голоморфной структуре; но в [GH] метрикой вместе с голоморфной структурой к унитарной связности.

Я несомненно слишком подробно объясняю но важно понимать основные определения точно. Вействительности я не достаточно объяснил, потому что я по началу недостаточно понимал. В [AB] доказано, что нижняя стрелка в (35.a) определяет комплексно-аналитическую структуру над расслоением. С другой стороны в [GH, стр. 72] объяснилось как векторное расслоение с комплексно-аналитической структкой и эрмитовой метрикой определяет связность. В настоящем обсуждении это значит, что диаграмма (35.a), в которой связность только подразумеваема, дана двумя разными множествами. Я пришёл к понимананию этой эквивалентности но довольно медленно. Я повторяю, что для меня настоящая статья повод к изучению комплексной дифференциальной геометрии. Эта теория даёт [AB, Th. 6.7] которая вдохновляет определение автоморфной группы Галуя. Мы объясним позже построение этой метрики для особого случая.

Сперва я хотел бы кратко объяснить отношение [AB] и [GH] к диаграмме (35.a). В [AB] метрика дана и ограничивает связность, которая даёт стрелки; в [GH] метрика тоже дана но с стрелкой $d''_A = \overline{\partial}$, и оба определяют связность. Следовательно, если размерность расслоения равна одному и если есть голоморфное сечение, и если конечно такое сечение локально, то оно и его переменная длина определают, по крайне мере локально, связность,

[26] [AB, §4,5] или [GH] *Principles of Algebraic Geometry,* стр. 72, P. Griffiths, J. Harris.

[27] Как я многократно замечал, я выучил дифференциальную геометрию в то время как я писал эту статью. Поэтому иногда определения были данны преждевремено, неправильно или неполно. Например, для построения [GH] метрика на $M$ не относится к делу. Я вернусь к этому вопросу позже.

которая совместимая с метрикой, или если мы так предпочтём, то мы можем поменять метрику так чтобы она была совместима с связностью. Я подчёркиваю, что есть две метрики, олна на $M$ и другая на расслоении. Сейчас мы имеем дело с метрикой на расслоении. Эта связность независима от голоморфных сечений и следовательно она определена глобально.

Моё построение расслоения связно с теорией Вейерштрасса. Это не необходимо и даже неуклюже, по крайней мере сначала, но, для меня, ставит его в более знакомую и более убедительную рамку. В начале мне всё было в новизну: построение связности, если метрика на расслоении дана [GH, стр. 73]; кривизна; тесное отношение связностей Янга-Миллса с постоянством [AB].

Подходящее расслоение $Q$ для [AB, Th. 6.7] мы получаем от тривиального расслоения, если мы позволяем полюс в нуле. Я написал эти слова несколько месяцев назад, но не понимал их правильно, причиняя себе значительное замешательство.[28] Это подразумевает, что нет канонического выражения сечения в окрестности нуля. Функция $\phi$ с полюсом порядка один выбрана, на пример $\sigma^{-1}$ или $\zeta$, и действительное сечение $\psi$, то с полюсом, написано как $\psi(\cdot) = f(\cdot)\phi(\cdot)$. Сечение $f$ не каноническая потому что $\phi$ не каноническое. Функция $\sigma^{-1}$ лучше, потому что она может использоваться везде в $\mathbf{C}$.

Чтобы пользоваться леммой в [GH],[29] которая даёт связность, нам нужна эрмитова метрика на $Q$. Так как размерность $Q$ равна 1, достаточно ввести такую положительную функцию $s(z) > 0$ что[30]

$$s(z)\big|\sigma(z)\big|^{-2} = s(z{+}2\omega_i)\big|\sigma(z + 2\omega_i)\big|^{-2} = s(z{+}2\omega_i)\exp\Big(-4\,\mathrm{Re}\big(\eta_i(z + \omega_i)\big)\Big)\big|\sigma(z)\big|^{-2}. \tag{36.a}$$

Прежде тем, чем мы докажем, что есть такая функция, я отмечу следующее. Пусть $g(\cdot)$, возможно, неголоморфное локальное сечение расслоения.[31] Тогда $f(z) = g(z)\sigma(z)$ всюду конечно и метрика на $Q$ определена:

$$\big(g(z), g(z)\big) = \big|f(z)\big|^2 s^{-1}(z). \tag{36.b}$$

[28] Мне было неожиданно трудно понять построение пучков $Q$.

[29] Эта лемма не нужна для определения связности потому что она даёт знакомую функцию, но этот очерк уставляет также повод узнать немного дифференциальной геометрии. кдоме того я начинал с этой леммы и только после полного размышления признал, что она не совсем уместна для потребностей статьи. В частности, я не признавал преимуществ, возможно, необходимости введения функции $s(\cdot)$.

[30] Читателю придется простить меня, но для вопросов дифференциальной геометрии есть две метрики, которые нужно учитывать, та, что на базисе, и одна на слое. Кривизна отражает и то, и другое. То есть, кривизна определена разностью быстроты вращения в слое, порожденного движением в базисе. На базисе, из-за его метрики, в каждой точке есть эталонная площадь, так что переменное действительное число эквивалентно изменяющейся площаде и наоборот. Связности Янга-Миллса, по крайне мере если размерность равна одному, таковы что их кривизна $F$ постоа, то есть она удовлетворяет уравнению $\star F = 0$. Мне трудно было понять как это может быть для связности $Q$. Одна цель, начальная цель, этого раздела - понять это, но я быстро узнал что их было гораздо больше которые я не понимал.

Построение которое объяснено в [GH], независимо от метрики на $M$, но кривизна зависима от неё. С другой стороны, связность Янга-Миллса такова, что кривизна постояна. Мне не ясно, как метрика на слое влияет на кривизну. Я предлагаю два примера, один более привлекательный, чем другой. Я замечаю, что конечная цель, сравнение двух неземных вещей, сопряженных классов Гекке, которые меняются от точки к точке, и интегралов связностей Янга-Миллса, природа которых объяснёна до некоторой степени в [AB]. Для эллиптических кривых трудности относительно простые.

Оказывается, что построение в [GH] не совсем то, что нам нужно, но оно предлагает первоначальное понимание методов построения связностей с предписанными свойствами.

[31] То есть, если $\lambda \in L$ и $g$ определено в точке $\lambda$, тогда функция $(z - \lambda)g(z)$ конечна в точке $\lambda$.

У меня нет другого основания для её введения, только то, чтобы оно служило цели.

Уравнение (36.a) эквивалентно

$$s(z+2\omega_i) = s(z)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_i(z+\omega_i)\big)\Big). \tag{36.c}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} s(z+2\omega_1+2\omega_2) &= s(z+2\omega_1)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_2(z+\omega_1+\omega_2)\big)\Big) \\ &= s(z)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_1(z+\omega_1)\big)\Big)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_2(z+\omega_1+\omega_2)\big)\Big); \\ s(z+2\omega_2+2\omega_1) &= s(z+\omega_2)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_1(z+\omega_2+\omega_1)\big)\Big) \\ &= s(z)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_2(z+\omega_2)\big)\Big)\exp\Big(4\,\mathrm{Re}\big(\eta_1(z+\omega_2+\omega_1)\big)\Big). \end{aligned}$$

Это возможно только если

$$\exp\big(4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_1)\big) = \exp\big(4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_2)\big), \tag{36.d}$$

которое есть следствие уравнения $2\eta_1\omega_2 - 2\eta_2\omega_1 = \pi i$ [WW, стр. 446].

Мы сперва определим $s$ и затем напомним о доводе в [GH]. Пусть $z = 2a\omega_1 + 2b\omega_2$, $a$, $b \in \mathbf{R}$. Для настоящих целей $a$, $b$ удобные действительные переменные.[32] Пусть

$$s(z) = s(a,b) = \exp(\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2 + \delta a + \epsilon b). \tag{36.e}$$

Тогда согласно (36.c) нужные уравненя

$$\begin{aligned} s(a+1,b) &= s(a,b)\exp\big(8\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_1 a) + 8\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_2 b) + 4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_1)\big), \\ s(a,b+1) &= s(a,b)\exp\big(8\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_2 b) + 8\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_1 a) + 4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_2)\big); \end{aligned} \tag{36.f}$$

но согласно (36.e) действительные уравнения

$$\begin{aligned} s(a+1,b) &= s(a,b)\exp(2\alpha a + \alpha + \beta b + \delta), \\ s(a,b+1) &= s(a,b)\exp(\beta a + 2\gamma b + \gamma + \epsilon). \end{aligned} \tag{36.g}$$

Сравнение этих уравнений даёт $\alpha$, $\gamma$, $\delta$, $\epsilon$ без труда, но для $\beta$ есть два определения, которые дают самое значение из-за (36.d). Значения этих пяти числа:

$$\alpha = 4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_1),\ \beta = 4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_2) = 4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_1),\ \gamma = 4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_2),\ \delta = \epsilon = 0. \tag{36.h}$$

---

[32] Для следующих вычислений я замечу что

$$z\overline{\omega}_2 - \overline{z}\omega_2 = 2a(\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2);\ \ z\overline{\omega}_1 - \overline{z}\omega_1 = 2b(\omega_2\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2\omega_1).$$

Следовательно линейные отношения линейных переменых $a$, $b$ к переменным $z$, $\overline{z}$ даны

$$a = \frac{1}{2}\frac{z\overline{\omega}_2 - \overline{z}\omega_2}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2},\ b = \frac{1}{2}\frac{z\overline{\omega}_1 - \overline{z}\omega_1}{\omega_2\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2\omega_1}; \tag{37}$$

и

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2},\ \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\omega}_1}{\omega_2\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2\omega_1},\ \ \frac{\partial a}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{-\omega_2}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2},\ \frac{\partial b}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{-\omega_1}{\omega_2\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2\omega_1}.$$

Для ясности мы устраним из этих выражений общий знаменатель $\eta = \omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2$, чтобы получить

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\overline{\omega}_2}{2\eta},\ \frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{\overline{\omega}_1}{2\eta},\ \ \frac{\partial a}{\partial \overline{z}} = -\frac{\omega_2}{2\eta},\ \frac{\partial b}{\partial \overline{z}} = \frac{\omega_1}{2\eta}. \tag{37.a}$$

Я добавлю что, с точностью до множителя $\pm 1$, число $\eta$ дважды площадь параллелограмма со сторонами $\omega_1$, $\omega_2$.

На этом месте мы уже выбрали метрику на слое, как в [GH]. Позже мы выбираем в качестве дополнительного опыта разную. Однако, мы отступаем сейчас от метода в [GH], в котором голоморфная структура обеспечивает дополнительное условие (то есть $D'' = \overline{\partial}$ [GH, стр. 73]) и вводим прямо угловое движение связности. Я вернусь позже к этому доводу в рамках попытки достаточно понять понятие кривизны, поскольку оно появляется в теории Янга-Миллса.

Кривая $M$, как вещественное многообразие, двумерна и связность двигается в $\mathbf{C}$ которое тоже двумерно. Следовательно эта связность определена инфинитезимально четырьмя вещественнами параметрами. Условие унитарности уменьшает их до двух, которые чисто мнимы. Мы вернемся к этим двум параметрам позже, потому что они дают кривизну. Глобально у нас есть сейчас комплексное линейное расслоение с метрикой. Я повторяю. Если $z_1 - z_2 \in L$, тогда $\big(z_1, \sigma(z_1)^{-1}\big)$, $\big(z_2, \sigma(z_2)^{-1}\big)$ представляют такую же точку в расслоении, только если $\sigma(z_1) = \sigma(z_2)$ и это маловероятно. Если $f \in \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}$, и $\lambda \in L$, тогда $(z, f)$ и $(z + \lambda, f)$ представляют такую же точку в расслоении. Ещё раз, главный предмет функцая $\sigma(\cdot)$ но она не однозначно. Тем не менее она определяет метрику на слое и комплексную структуру расслоения. Эта метрика $f(\cdot) \to s^{-1/2}(\cdot)\big|\sigma(\cdot)\big|\big|f(\cdot)\big|$.

Когда я писал зту статью я узнал что было несколько основных математических понятий, моё понимание которых было недостаточно или даже ошибочно. Я объясню их в следующих строках, но не обращая особого внимания на мои недоразумения, например значения леммы Пуанкаре. В самом деле, то что, нетривиальное дифференциальное уравнение $\overline{\partial} f = 0$ таково, что множество его решении замкнутно относительно умножения, это обстоятельство, непривычности которого я не признавал годами, хотя его важность очевидна. Итак построение $Q$, существование которого очевидно для Атьи и Ботта, восполняет несколько пробелов в моём образовании.

Хотя я объясню построение в [GH] позже, вернувщись к этому обращению в рамках попытки достаточно понять понятие кривизны, поскольку оно появляется в теориия Янга-Миллса, я предпочитаю начинать с простого описания и построения подходящих одномерных связностей. Обыкновенно и предпочтительно движение написать логарифмически $\eta_1 = \exp(\rho_1 + i\theta_1)$, где $\rho_1$ и $\theta_1$ вещественные функции. Функция $\rho$ полностью определяется метрикой. Связность дана выражением

$$\frac{\eta_1'}{\eta_1} = \rho_1'(\cdot) + i\theta_1'(\cdot).$$

Можно определить $\eta_1$ в отношении данного сечения, которое может быть $\sigma^{-1}$, то есть определить

$$\eta_1(\cdot) = \eta(\cdot) - \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \eta = \rho + i\theta. \tag{37.b}$$

Обозначение здесь таково, что второй член, хотя и со знаком минус, есть связность! Я замечаю, что она связность, кривизна которой равняется нулю, то есть её интеграл $\sigma^{-1}$ однозначно определен локально.

Поскольку связность унитарна ,

$$s^{-1}(\cdot)\big|\sigma(\cdot)\big|^2 \exp(2\rho) = \text{constant}.$$

Следовательно, $d\rho(\cdot)$ однозначно определено. Оно дано уравнением

$$2\frac{d\rho}{\rho} = \frac{ds}{s} - \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{d\overline{\sigma}}{\overline{\sigma}}.$$

Однако это не $\rho$ которым мы интересуемся, это $\theta$. Хотя я долгое время не признавал этого, есть очевидный выбор, мнимой аналог уравнений (36.g) и (36.h),

$$\frac{ds}{s} = (2\alpha a + \beta b)\, da + (\beta a + 2\gamma b)\, db,$$

то есть[33]

$$(2\widetilde{\alpha} a + \widetilde{\beta}_1 b)\, da + (\widetilde{\beta}_2 a + 2\widetilde{\gamma} b)\, db, \tag{36.i}$$

где $\widetilde{\alpha} = 4\,\mathrm{Im}(\eta_1\omega_1)$, $\widetilde{\beta}_1 = 4\,\mathrm{Im}(\eta_1\omega_2)$, $\widetilde{\beta}_2 = 4\,\mathrm{Im}(\eta_2\omega_1)$, $\widetilde{\gamma} = 4\,\mathrm{Im}(\eta_2\omega_2)$. Размещение двух чисел в значительной степени произвольно. Их можно переставлять. Следствие - только замена знака. Те, кто знакомы с кривизной немедленно признают, что полученная кривизна $\widetilde{\beta}_1 - \widetilde{\beta}_2 = 2\pi$. Нужно однако признать, что это кривизна относительно координат $(a, b)$ и что относительно этих координат, площадь фунаментальной области равна 1! Итак эти вычисления совместимы с утверждениями в [AB]. Я подчеркиваю во-первых, что этот вывод предполагает особенный выбор метрики на $M$, именно линейно инвариантную метрику, и во-вторых, что выбор $\theta$ хотя и естественный, но тоже произвольный.

Мы ввели изменение связности довольно случайно, но это очень важное изменение, которое даёт нам выбор расслоения $Q$, представленного на стр. 560 из [AB]. Так как кривизна расслоения постоянна и метрика на $M$ инвариантна относительно переносов, эта измененная связность рода Янга-Миллса. Я признаюсь, что здесь я несколько нерешителен, потому что утверждение требует толкование уравнения [AB, 6.1] а именно для данной связности и для рассматриваемой метрики кривизна $\star F$ постоянна - кажется, что постоянная кривизна является свойством пары, связности и метрики. Кроме того, как я довольно робко замечу опять в другом месте статьи, действие $d_A$ - это для обычных функций перенос, так что по отношению к нему $\star F$ не меняется. Это уравнение [AB, 6.1]. Я считаю, что это толкование надумано, но оно подтверждено предложением (6.1) в [AB].

Чтобы убедиться в правильности нашего довода, мы должны повторить вычисления из (36.a)–(36.h), но в логарифмическом виде и только для мнимой части. Поэтому это очевидно. Тем не менее, чтобы успокоить себя и читателя, я проведу вычисление. По мере того, как я продолжаю пытаться достаточно понять [AB], чтобы применить его к геометрической теории автоморфных форм, я становлюсь более непринужденным в ображении с основными дифференциально-геометрическими понятиями. Тем не менее, я продолжаю испытывать недостаток доверия при произвольном вставлением полюса или нуля, путем склеивания вокруг круга! Я не могу сказать, что я полностью это понимаю.

Например, изменение действительной части связностей, мультипликативно как в (36.a) или логарифмически, не изменяет кривизну, поскольку они определяются логарифмической производная функции, определенной на покрытии $\mathbf{C}$ кривой $M$. Мы можем сделать то же самое для мнимой части, для которой кривизна важнее. Для GL(1)-расслоения над кривой, отношение двух локальных параметров $z_1$ и $z_2$ дано показательной функцией

$$\frac{z_1}{z_2} = \exp(c + di), \quad c, d \in \mathbf{R}, \tag{36.j}$$

[33] Обозначение вводит в заблуждение. Значения $a$ и $b$ являются сдвигами, но $da$ и $db$ являются дифференциалами в начальной точке, которая сама не имеет значения.

с $c$ и $d$ вещественными и с $d$ локально однозначно определенными с точностью до константы в $2\pi\mathbf{Z}$. Число $c$ однозначно определено. Выражаясь просто, в показателе присутствует аддитивная неоднозначность, и она лежит в $2\pi\mathbf{R}$.

**Передышка для размышлений.** Введение нулей и полюсов является особенностью теории линейных расслоений на кривых, и лучше спросить себя, что именно происходит? Я признаюсь, что в целом и, в частности, для GL(1), мне трудно помнить, что связность даётся логарифмической производной. Дело в том, что обсуждение в предыдущем абзаце справедливо тоже для двух дивизоров с нулями и полюсами при условии, что порядки нулей и полюсов везде одинаковы, скорее для дроби двух функций, представляющих один и тот же дивизор. Предыдущее обсуждение (36.j) было для одного полюса или одного нуля. Я понимаю, что это разборчиво. Но одно дело что опытный геометр просматривает подробности, другое для престарелого нарушителя. Читатель может задаться вопросом, что меня беспокоит? Вопрос в том, «почему введение нулей и полюсов в унитарном расслоении, связанное с комплексным расслоением, является четко определенной операцией?» Ответ лежит в отношении (36.j)! ■

То, что я предлагаю в (36.i), состоит в том, чтобы воспроизвести порядок (36.a)–(36.j) для чисто мнимой части связности, в отличие от чисто реальной части. Таким образом, формулы для $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{\beta}_2$, $\widetilde{\gamma}$ достаточно ясны.

**Ненужные или преждевременные объяснения.** Тем не менее они все подходящи! Это скорее краткое отступление, значение которого для этой статьи не проявится до тех пор, пока мы не придем к уравнению (53). Оно предвидит и частично совпадает с последующими объяснениями. Как я уже отмечу в другом месте этого текста или как я отмечу ниже, главный вывод – это взаимно однозначное отображение между двумя множествами, и элементы этих множеств сами множественны, так что важно выбрать самые простые представители. Скорее всего - одно этих множеств определено только после того, как мы выбрали несколько других определяющих параметров. Это особенно важно для связностей Янга-Миллса, для которых необходимо выбрать связность $Q$ с классом Чженя 1 а также метрики на $M$ и на $Q$. Я сделал это и невольно, больше от удачи, чем от хорошего управления, мы пришли к постоянным связям, как и выше, а затем, как показано ниже, при показательных функциях (53), которые мы можем сравнивать с выводами в VII. Случай $G = \mathrm{GL}(1)$, конечно, особенный, потому что сопряженные классы имеют уникальные представители, но для GL(2), которое перестает быть таким, это не так. Как мы увидим в XI, сравнение всё же возможно.

В §IX мы ссылаемся на комментарии [AB] о линейных расслоениях, особенно тех, которые имеют степень 0. Для эллиптических кривых они особенно просты. Они даются $\Lambda_0\Lambda_1^{-1}$, где $\Lambda_0$ - выделенное линейное расслоение первой степени, а $\Lambda_1$ - его перевод. Мы можем также предположить, просто для определенности что $A_0$ и $\Lambda_0$ связаны с $0 \in L$. Мы также можем просто перевести точку 0 на $z \in \mathbf{C}$ чтобы получить $\Lambda_1$. Кривизна произведения - это разность кривизны линейних расслоений, одна из которых является переходом другой. Связность, соединённая с произведением $\Lambda_0\Lambda_1^{-1}$, является разностью двух связностей вида (36.i), то есть

$$\Big(2\widetilde{\alpha}(a_0 - a_1) + \widetilde{\beta}_1(b_0 - b_1)\Big)\, da + \Big(\widetilde{\beta}_2(a_0 - a_1) + 2\widetilde{\gamma}(b_0 - b_1)\Big)\, db. \tag{36.k}$$

Коэффициенты теперь все постоянны, так что кривизна равна нулю. Двумерный вектор

$$\begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ b_0 - b_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \tag{36.l}$$

произволен но

$$\begin{pmatrix} 2\widetilde{\alpha} & \widetilde{\beta}_1 \\ \widetilde{\beta}_2 & 2\widetilde{\gamma} \end{pmatrix} \tag{36.m}$$

дано. Есть формулы для $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{\beta}_2$, $\widetilde{\gamma}$ как функции $\omega_1$, $\omega_2$, потому что существуют формулы для $\eta_i$, $i = 1, 2$, [WW, стр. 445–446]. Тем не менее, я не знаю, как ведёт себя определитель этой матрицы, например, где он исчезает, но это не кажется соответствующим целям настоящей статьи. Мы вернемся к этому вопросу позже, но без полностью обоснованного ответа на него. Возможно что не очевидно читателю, что, выбирая метрику на слое, определяемую $s(\cdot)$ и связность, определяемую уравнением (36.i), я некоторое время не признавал, что я выбирал метрику и связность, введенные на [AB, стр. 560]. Поиски связности с постоянной кривизной занимали мои мысли. Сначала я не понимал, что постоянная кривизна с стандартной метрикой на $M = \mathbf{C}/L$ подразумевает, по определению, что связность была связность Янга-Миллса. Целью была простота. Эта простота делает окончательное сравнение с выводы §VII намного проще. Я привлеку внимание читателя на то, что постоянство связности Янга-Миллса в (36.k) это не то, которое появляется позже в (53).[34]

Последнее находится на тривиальном линейном расслоении на $M$, первое же на расслоении, в котором введены нуль и полюс. Похоже, что первое не имеет отношения к нашей цели. Я упоминаю его только для того, чтобы поместить наше обсуждение в надлежащий свет. Существует такая путаница понятий, которая кажется неизбежной стороной сложной дифференциальной геометрии, что может быть полезно указать, что комплексная связность к унитарной связности на унитарном расслоении, или, вернее, к связанному с ним вещественному линейному расслоению, означает, что иначе смущающие полюса исчезают.

С другой стороны, я не уверен, что моё понимание унитарных связностей достаточно. Я хотел бы привести его здесь к осмотру читателя. Речь идет о преобразовании локально мероморфного сечения комплексного расслоения в непрерывное сечение вещественного, то есть унитарного, расслоения, которое связанно с его, то есть определяемое мнимой частью его логарифма, то есть его полярной частью. Локально, мы пишем мероморфную функция как $az^k \exp\bigl(\varphi(z)\bigr)$, $k \in \mathbf{Z}$, где $a = |a| \exp(i\eta) \neq 0$ с $\eta \in \mathbf{R}$ действительная константа, $\varphi(0) = 0$, $z = r\exp(i\theta)$, $r \geqslant 0$. Унитарная связность определена этой функцией и дана как $ik\eta + i \operatorname{Im} \varphi(z)$.

[34]Напротив, они постояны с нулевой кривизной и линейными интегралами, как в (53). Таким образом, они являются связями Янга-Миллса, то есть они удовлетворяют уравнению [AB, 6.1]. Я оставляю это предложение, чтобы дать понять, насколько теория, представленная или поставленная в этой статье, зависит от деталей и как медленно я это понял. Попутно, я замечаю, еще одно обстоятельство, значение которого я не сразу понял. Расслоение $Q$ из [AB] совпадает с расслоением $A$ в [A], которое в настоящей статье стало $A_0$. Степень $A_0^n$, которая встречается в описании связки вида Янга-Миллса, соответствует коэффициенту $u \mapsto u^n$, $u \in \mathbf{U}(1)$ в соответствующем гомоморфизме $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в $\mathrm{GL}(1)$, [AB, (6.6)]. В качестве дополнительного комментария к формализму, линейное расслоение $Q$ является рассслоением вида Янга-Миллса потому, что уравнение [AB, (6.1)] аддитивно относительно тензорных произведений.

Это достаточно ясно, но характер унитарной связности, который так определен, трудно найти. Он определяется склеиванием, как и начальное мероморфное расслоение, но в центре разрывается. Клочки имеют небольшой центральный круг с внешним соединением, локальное определение которого в области, непосредственно окружающей клочок, не является трудным. Это, однако, влечет сдвиг вдоль прямой действительных чисел, поскольку введение (мнимого) логарифма потребовало замены окружность показательной функция с прямой её логарифма. Это происходит на границе малого круга, но только на границе. В центре круга остаётся какая-то тайна, где некоторые рвутся.

Есть еще одно побочное замечание в связи с расслоениями как $\Lambda = \Lambda_0\Lambda_1^{-1}$. Мы воображаем, что $M$ - это море и что связьность описывает поток. На пример, поток $\Lambda$ есть сочетание $\Lambda_0$ и $\Lambda_1^{-1}$. У первого есть особенность, водоворот (вихрь); у второго тоже есть особенность, тоже водоворот, но в противоположном направлении. Возможно даже, что они будут выбраны с разными силам. Если они имеют одинаковую силу, то они будут компенсироватьсяся, когда две точки будут перемещаться вместе. Мне это трудно понять, как геометрически, так и физически, но физический аналог его облегчает. Я предлагаю его тем математикам, которые, как и я, с трудностей понимают сложности расслоений и связностей. ■

Но то, что для нас важно, кривизна постояна и она не равна нулю. Сечение, определенное функцией $\sigma^{-1}$, по-видимому не имеет кривизны, но это не так. Кривизна скрыта в полюсе в точке 0. Более важным является сравнение собственных сопряженных сечений с интегралами связностей Янга-Миллса. Эти предметы определяются их представителями, которые выбраны в некоторой степени произвольно. Трудно объяснить цель этой статьи, сравнение собственных сопряженных классов с связностями Янга-Миллса и с представлениями автоморной группы Галуя. По крайне мере, трудность является следствием двух, даже трёх факторов. Класс сопряженности описывается выбором представителя, который является несколько произвольным. Сверх того, класс изменяется от точки к точке; к тому же понятие связности Янга-Миллса зависит от выбора метрики на $M$. Предпочтительнее выбирать те, которые делают природу выводов наиболее ясными. Я предпочитаю представить сейчас последствия неудачного выбор метрики и звязности. Есть конечно две метрики, на $M$ и на слое.[35]

**Затянутое отступление.** Это отступление несколько растянуто. Дело в том, что невозможно понять природу связностей без четкого понимания отношения между связностями и функциями. Они могут быть действительнозначнымы, мнимозначными или комплекснозначнымы. Теория для них одинакова, хотя в третьем случае мы имеем

[35]Читатель заменит мою тревогу и неуверенность, когда я пытаюсь освоить незнакомую дифференциальную геометрию. Я опять обращаю его - или её - внимание на одно уравнение, особенный вид которого важен для этой статьи. Это уравнение Янга-Миллса [AB, 6.1], то есть $d_A \star F(A) = 0$, но для линейного расслоения на кривой так, что расслоения $\mathbf{U}(1)$. Напомним [AB, стр. 548], что $F(A) \in \Omega^2\big(M, \mathrm{ad}(P)\big)$. Как представление $\mathrm{ad}(\mathbf{U})$ тривиально $\Omega^2\big(M, \mathrm{ad}(P)\big) = \Omega^2(M)$ и $\star F(A)$ находится в тривиальном расслоением где связность тривиальна. Итак, связность, которую мы только что построили, связность Янга-Миллса. Хотя я ещё не понимаю многих последствий этого понятия, я утверждаю, что это замечание основное для этой статьи! Мы имеем дело с линейным расслоением, таким образом, с абелевой группой $G$. Это предвидение общего довода в [AB, стр. 560], который так важен для этой статьи. Повторяясь, я подчёркиваю, что в наших обстоятельствах вместе, линейное расслоение и равномерная (инвариантная относительно переносов) метрика на базисе $M$, знак связности Янга-Миллса является постоянной кривизной. Значение кривизны определяется классом Чженя расслоения.

дело с контурным интегралом, для которого кривизна нуль. Проще всего думать о действительнозначных функциях.

Первоначальное вычисление для связности определенной (37.b) дано в (2.e). Область - фундаментальная область данная $\{\, a\omega_1 + b\omega_1 \mid -1 \leqslant a, b \leqslant 1 \,\}$. Так как множество $L$ не пересекает её границу, мы можем вычислить интеграл связности по этой границе без дополнительного определения. По причинам, требующим дальнейшего объяснения, которые мы откладываем, только мнимая часть выражения (37.a) имеет значение. Согласно (2.d) эта мнимая часть $\zeta(z)\,\partial z$. Интеграл по границе сумма

$$\begin{aligned}\int_{(-\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,-\omega_2} \zeta(z)\,dz + \int_{(\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,\omega_2} \zeta(z)\,dz &= \int_{(-\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,-\omega_2} \big(\zeta(z) - \zeta(z+2\omega_2)\big)\,dz \\ &= -\int_{(-\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,-\omega_2} 2\eta_2\,dz = 4\omega_1\eta_2 \end{aligned} \tag{38.a}$$

и

$$\begin{aligned}\int_{(\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,\omega_2} \zeta(z)\,dz + \int_{(-\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,-\omega_2} \zeta(z)\,dz &= \int_{(-\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,-\omega_2} \big(\zeta(z) - \zeta(z+2\omega_1)\big)\,dz \\ &= -\int_{(-\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,-\omega_2} 2\eta_1\,dz = -4\omega_2\eta_1. \end{aligned} \tag{38.b}$$

Следовательно эта сумма равна $4\omega_1\eta_2 - 4\omega_2\eta_1 = -2\pi i$, как объясняется в [WW], где это уравнение овосновывается аргументами из теории голоморфных функций одной переменной. Этот расчет явно связан с тем, что приводит к выражению (36.i) но их отношение, с первого взгляда, непонятно неясно. Прежде всего я замечаю, что согласно (2.d) функция $\zeta(\cdot)$ - логарифмическая производная функции $\sigma(\cdot)$, так что интеграл функции $\zeta(\cdot)$ дан выражением $\ln\sigma(\cdot)$, которое не однозначно.

Однако, мы создаем трудности, смешивая две разные операции или два понятия: интегрирование комплексной функции комплексной переменной и кривизна, которая влияет на интеграл от действительной функции двух вещественных переменных. Я вставляю признание.

Я признаю что, хотя я и пожилой, но я никогда достаточно не понимал понятия кривизны. Эта статья по необходимости есть повод сделать это. Так как она написана главным образом как вклад в теорию автоморфных форм, я без колебаний включил свой обзор некоторых основных понятий. Изменение контекста является формальным. Я заменяю алгебру Ли $\mathbf{U}(1)$ алгеброй Ли $\mathbf{R}$ и область $\mathbf{C}$ областью $\mathbf{R}+\mathbf{R}$. Это показывает то, что мне представляется сущностью понятия кривизны. Связность есть дифференциальная форма $\alpha(x,y)\,dx + \beta(x,y)\,dy$. Вопрос в том, как может

$$\int_{(u_1,v_1)}^{(u_2,v_2)} \big\{\alpha(x,y)\,dx + \beta(x,y)\,dy\big\} \tag{39}$$

не быть независимым от кривой интегрирования? Иначе говоря, как интеграл по замкнутой кривой $C$ не может быть равен нулю?

Пусть в этом коротком отступлении $\epsilon$ малое, даже инфинитезимальное, число. Мы покрываем плоскость решёткой $\{m\epsilon, n\epsilon\}$, $m$, $n \in \mathbf{Z}$ и берём объединение $X$ тех ячеек, $B$ которые находятся во внутренней части $Y$ этой (простой) замкнутой кривой. Эта внутренность (приблизительно!) эсть объединение, то есть

$$\int_Y f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{B\subset X}\int_B f(x,y)\,dx\,dy + O(\epsilon). \tag{39.a}$$

Пусть $f(x,y) = d\alpha/dy - d\beta/dx$. Это будет кривизна. Граница каждого $B$ задана четырьмя упорядоченными рёбрами в порядке против часовой стрелки $e_1(B)$, $f_2(B)$, $e_2(B)$, $f_1(B)$, где, на пример, $e_1$ дано как $\{(a,b),(a+\epsilon,b)\}$. Оставляя в стороне погрешность, мы получим из суммы в (39.a) сумму

$$\sum_{B\subset X}\left\{\int_{e_1(B)}\alpha\,dx + \int_{e_2(B)}\alpha\,dx + \int_{f_2(B)}\beta\,dy + \int_{f_1(B)}\beta\,dy\right\}.$$

Это равно

$$\begin{aligned}(39.b)\qquad &\sum_{B\subset X}\left\{\int_{\widetilde{e}_1(B)}\{\alpha(x,y)-\alpha(x,y+\epsilon)\}\,dx + \int_{\widetilde{f}_1(B)}\{-\beta(x,y)+\beta(x+\epsilon,y)\}\,dy\right\}\\ &= \sum_{B\subset X}\left\{-\epsilon\int_{\widetilde{e}_1(B)}\frac{d\alpha}{dy}\,dy + \epsilon\int_{\widetilde{f}_1}\frac{d\beta}{dx}\,dx\right\} = \sum_{B\subset X}\int_B\left\{\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right\}dx\,dy\\ &= \int_Y\left\{\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right\}dx\,dy + O(\epsilon)\end{aligned}$$

где, чтобы быть ясным, я ввёл два осевых ребра, $\widetilde{e}_1 = e_1$, $\widetilde{f}_1 = -f_1$. Это значит, что (39) не зависит от кривой если кривизна

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0. \tag{39.c}$$

Выражаясь просто выражено, разности переносов на противоположных горизонтальных сторонах на отличаются от $O(\epsilon^2)$. Если кривизна равна нулю, эта разность $O(\epsilon^3)$. Это рассмотрение поднимает два вопроса. До какой степени кривизна зависит от метрики и от координат? Я не уверен, что эти вопросы важны. В данный момент они неуместны. Важно то, что интеграл кривизны по внутренности простой замкнутой кривой равен нтегралу связности по самой криве. В любом случае замечания после уравнения (36.i) оправданы некоторой степени, так же как утверждение, взятое из статьи [AB].

Мы ещё не ввели метрики на $M$. Следовательно нам не можно говорить о связности Янга-Миллса. Тем не менее мы уже ввели пример связности, кривизна которой постояна. Это уже хороший знак. Я хотел доказать это с помощью геометрического довода, таким образом, что оно является утверждением о кривизне. Но я был убежден, что пункт $0 \in L$ ничего не принесёт, и поэтому, запустив его, я неоднократно смущался. Я неделями искал свою ошибку, которая оказалась довольно очевидной. Следующие несколько страниц, в качестве помощи читателю, я пытаюсь объяснить себе источники своих ошибок, сами по себе поучительные.

Я много раз ссылался на лемму в [GH], которая предлагает построение связностей с тем или иным свойством, но упустил возможности очевидного факта, что логарифмическая производная функция к функции, которая нигде не равна нулю и которая может быть либо положительной, либо с абсолютной величиной равной одному, либо помплексной, определяет связность, даже связность относящуюся к настоящему обсуждению. Это не было преднамеренным. Оно было поступком невинного, ошеломленного сложностью предмета. Я осознавал возможности, которые были предложены, но только неявно. У меня не было здравого смысла заявлять о них явно. Это значит, что понимание леммы в [GH] полезно, но не обязательно для наших целей. Трудно поверить, что я недостаточно сознавал утверждение о том, что нулевая кривизна, помимо некоторых тонкостей, является необходимым и достаточным условием того, что связность определяется функцией

В то же время я рассматриваю обратное построение которое дано в [GH, стр. 72]. На комплексной плоскости или на римановой поверхности имеются три вида одномерных связностей: одномерная действительная связность, чисто мнимая одномерная связность, комплексная связность, то есть, например, $f(\cdot)\,dz$ или $f(\cdot)\,d\bar{z}$. Каждая из них представляет собой функцию на переменном одномерном комплексном пространстве, то есть на касательном пространстве. Область значения первых двух является одномерной но для третьей она двумерная. Построение в [GH] даёт связность третьего рода и полезно раздумывать о ней. Локально, связность присваивает направлению в двумерном касателтном пространстве, направление во двумерном слое. То есть, локально или в точке она дана четырьми числами, потому что она приписывает к каждому из двух векторов другой вектор, но условие $D'' = \overline{\partial}$ ([GH], стр. 73) уменьшает это число до двух. Умный довод, который использует их второе условие, то есть условие совместимости с метрикой, а затем определяет связность полностью.

Есть, однако, функция соответствующая нашему расслоению и она $\sigma^{-1} = \epsilon\exp(i\theta)$, где $\epsilon > 0$, хотя она и не однозначна. Её логарифмическая производная определает связность. Для этого довода выбор метрики на слоях важен и я выбрал $f(\cdot) \to s^{-1/2}(\cdot)\big|f(\cdot)\big|$, которая не та, чтои мы только что использовали, хотя она и похожа. У неё есть существенный недостаток, так как она даёт метрику, которая не определена в точках множества $L$. Это не важно в данным момент, но оно источник явления, с которым мы будем иметь дело. В предыдущем объяснении можно было не рассматривать точки в $L$. Они не были, по сути, особенными. Сейчас это не так. Я хочу объяснить, что с этой связностью точки в $L$ вызывают трудности. Связность и метрика на слоях перестают определяться. Поэтому метрика на слоях должна быть изменена. Как следствие, связность перестает быть связность Янга-Миллс, понятия, которая еще предстоит определить. Но это лёгко. То, что неприятно, для восстановления свойства Янга-Миллса мы должны ввести искусственную и неприятную метрику на основе $M$ либо искусственную связность. Это урок, для тех, которые хотят рассматрипать общую теорию.

Мы напоминаем о нынешних обстоятельствах. Мы рассматриваем функции $f(\cdot)$ на комплексной плоскости, периодические по отношению к решётке $L$, и допускающие полюс первого порядка в точках этого множества. Сперва метрика на слое $f(\cdot) \to \big|f(\cdot)\big|$ но это неудовлетворительно в $L$ из-за возможных полюсов. Нужно изменить[36] её в окрестности $L$.

[36]Тут ужно поместить дополительное замечание. Функция $\sigma^{-1}$ определает связность на голоморфном расслоении и, как мы объясним, на этом расслоении есть метрика. Согласно с леммой в [GH] голоморфная структура вместе с метрикой определает связность. Эта связность, связность Янга-Миллса но только по отношению к искусственной метрику на $M$. Этот пример поучителен.

Для этого[37] мы умножим $s(z)$ на такую гладкую периодическую функцию $m(z) = m\big(|z-\lambda|\big)$, $\lambda \in L$, что $m(z) = |z-\lambda|^2$ если $|z-\lambda|$, $\lambda \in L$, очень мало, на пример $|z-\lambda| < \delta/2$, что $m(z) > 0$ если $z \notin L$ и $\delta/2 < |z-\lambda| < \delta$ для одного $\lambda \in L$, что $m(z) = 1$ если $|z-\lambda| \geqslant \delta$ для всех $\lambda \in L$. Если $\lambda \in L$ лучше предполагать что $\lambda = 0$. Это изменение метрики которое даёт сечениям с полюсом порядок которого равен одному и с ограниченной длиной в окрестности нуля. С этим построением $\sigma^{-1}$ локальное сечение расслоения с конечной длиной. Другое толкованое то, что это локальые сечения после умножения на $\sigma(\cdot)$, но это нам не нужно! Сперва нужно ввести в построение сечения, в его бесконечно малом виде, дополнительный аддитивный член [GH, стр. 73]

$$\frac{1}{m(z)}\frac{\partial m}{\partial z}\,\partial z = \frac{1}{m(z)}\,\partial m = \frac{\partial m}{m(z)}. \tag{41}$$

Можно вычислять его независимо. Данное вычисление остаётся справедливым в области в которой коэффициент $m(\cdot)$ равен одному, но вне этой области есть дополнительный аддитивный член. То, что я не понял изначально, было то, что вклад выражения (40) был нуль и что вклад выражения (41) суть дела. Цель длиного отступления этого раздела, приобретение понятий и вычислений, подразумеваемых в понятии кривизны и необходимых для понимания связности $A$. Главная тема отношение связь между интегралом связности по границе данной области и интегралом её кривизны по этой области.

Я хотел доказать это с помощью геометрического довода, таким образом, что оно явно есть утверждение о кривизне. Но я был убежден, что пункт $0 \in L$ ничего не принесёт, и поэтому, опустив его, я неоднократно получал нуль. Я неделями искал ошибку, потому что такая ошибка может быть легко вызвана неправильным знаком и именно, как добавление путаницы есть уравнение Коши-Римана.

Пусть[38] $\sigma = \epsilon e^{i\theta}$, $\epsilon \geqslant 0$, $\theta \in \mathbf{R}$. Тогда $\ln\sigma = \ln\epsilon + i\theta$ голоморфна. Следовательно

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y} = -\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2\ln\epsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial y}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\ln\epsilon}{\partial y}\right\} = -\frac{\partial^2\ln\epsilon}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2\ln\epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\ln\epsilon}{\partial y^2} = 0.$$

То есть $\ln\epsilon$ – а также $\theta$ – гармонические функции. Я пересматривал эти основые отношение частично, потому что прошло много времени, что я прочитал книгу Вейля, но тоже потому что знаки так важны при расчете кривизны. Мне казалось возможным, что я мог ошибочно прийти к $\partial^2\epsilon/\partial x^2 + \partial^2\epsilon/\partial y^2$ а не к $\partial^2\epsilon/\partial x^2 - \partial^2\epsilon/\partial y^2$. Имея это

[37] Я стараюсь сейчас пользоваться не только методом но также обозначением из [GH], которое обычно но хитроумно. Например я различаю $\partial$ и $d = \partial + \bar{\partial}$. Тем не менее $d\sigma = \partial\sigma$! Я замечаю также что $d\sigma$ комплексный дифференциал, который мы можем интегрировать вдоль кривой в $\mathbf{C}$, то есть $dz$ спарен с $1/dt$ и кривая дана $z = z(t) \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$. Современный дифференциально-геометрический язык приглаженный и всеобъемлющий, но он часто не раскрывает ключевого вопроса. Я замечаю также, что оператор $\partial/\partial z$ превращает вещественную функцию в комплексную функцию. Я повторяю, 'комплексная дифференциальная геометрия чужда мне.' С обозначением в [GH], которое мы иначе не используем,

$$\theta = \frac{1}{s(z)}\frac{\partial s(z)}{\partial z}\,dz - \frac{d\sigma(z)}{\sigma(z)} = \frac{\partial s}{s(z)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\,dz, \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\,dz = \frac{\partial\sigma}{\sigma(z)}, \tag{40}$$

потому что $\sigma$ голоморфно.

[38] Знак $\theta$ переопределяется.

в виду, я искал долгое время для такой ошибки но тщетно. Наконец, поннявши что кривизна лежит в поведении на особой точке 0, я быстро понял правильные определения, чувствуя, конечно, себя довольно глупым.

В самом деле, эта статья дала мне повод подумать над понятием кривизны, чего я никогда не делал раньше. Но прежде чем мы перейдем к кривизне, я хотел бы признать что есть основное, даже элементарное утверждение значение которого я не понимал, то есть уравнение

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{df}{dx}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{df}{dy}\right\} \tag{42}$$

для функции двух переменных. В самом деле, по капризу моего образования возможно что я его принял без доказательства. Во всяком случае, одномерная унитарная связность дана локально определенным угловым изменением $\varphi$, которое изменяет скорость при линейном движении и которое само по себе линейно. Итак, изменение $\varphi$ при движении $(dx, dy)$ дано $\alpha\, dx + \beta\, dy$. Однако возможно что это движение при интегрировании не производит функции потому что для такой функции $f$ нужно будет, чтобы

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d}{dy}\left\{\frac{df}{dx}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{df}{dy}\right\} = \frac{d\beta}{dy}$$

а обычно для заданной связности

$$\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \neq 0. \tag{42.a}$$

Левая часть этого неравенства даёт определение кривизны. Это простое неравенство значит, что кривизна часто не равна нуль. Но нам нужен был длинный ряд размышлении чтобы прийти к (42.a).

Так как выражение (42.a) линейное, мы можем вычислить вклады выражений (40) и (41) раздельно. Прежде чем мы начнём необходимое замечание. Как определено нами, каждый слой расслоения отождествляется с **C**. Таким образом, на инфинитезимальном уровне, движение связностей дано однозначно определеной суммой действительного движения и мнимого движения. Действительное движение однозначно определено метрической инвариантностью. Его цель - поддерживать постоянную длину. Итак только мнимое движение относится к делу.

Возможно что полезно, если мы продолжим обсуждение кривизны с некоторыми краткими объяснениями, прежде чем мы начнём вычисления необходимые для настоящих целей. Моё понимание более уверенно, если оно отражается в простых расчётах.

Мы начинаемся с мнимой части выражения (40), то есть с мнимой части выражения $\partial\sigma/\sigma(z)$, которая равна $\partial \ln \sigma = \zeta(z)\, dz$. Только мнимая часть этого выражения относится к делу:[39]

$$\partial \ln\sigma = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x} - i\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y}\right\} dz + \frac{i}{2}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right\} d\overline{z},$$

где $\theta$ угловая переменная. Мнимая часть этого выражения $i = \sqrt{-1}$ дважды

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x}\,dy - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y}\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\,dx - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dy = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\right)dy\right\}.$$

Следовательно кривизна равна половине выражения

$$-\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \ln\epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln\epsilon}{\partial y^2} \tag{43}$$

Очевидно что сумма первых двух членов равна нулю, сумма вторых двух членов также равна нулю из-за уравнений Коши-Римана. Хотя я еще неспокойно отношусь к моим расчетам, они, по крайней мере, дают заключение согласующееся с признанной теорией.

Последное и решающее вычисление кривизны вклад - функции переменной $r$, который дан (41). Я хочу сперва, просто улучшить свое понимание, описать вращательно-симметрическую связность. Она дана инфинитезимальным поворотом, и гладкая даже в $r = 0$.

$$g^{-1}\,dg = \alpha(x,y)\,dx + \beta(x,y)\,dy.$$

Я хочу чтобы эта связность была вращательно симметричной, следовательно инвариантной относительно

$$(x,y) \to (\cos\varphi x - \sin\varphi y, \sin\varphi x + \cos\varphi y)$$

или

$$\alpha(x,y) \to \alpha(x,y)\cos\varphi x + \beta(x,y)\sin\varphi x, \quad \beta(x,y) \to -\alpha\sin\varphi x + \beta\cos\varphi x,$$

которое равно

$$\begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}, \tag{44}$$

[39]Чтобы быть уверенным что я понимаю обозначение книги [GH], я вычисляю

$$\begin{aligned} dz\cdot\frac{\partial}{\partial z} + d\overline{z}\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}dz\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}d\overline{z}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}(dx + i\,dy)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(dx - i\,dy)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= dx\cdot\frac{\partial}{\partial x} + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

где $a$ and $b$ фукций $r$ и $(x, y) = r(\cos\psi, \sin\psi)$. Вычислим кривизну.

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta}{dx} &= \frac{da}{dr}\frac{dr}{dx}\sin\psi + a\cos\psi\frac{d\psi}{dx} + \frac{db}{dr}\frac{dr}{dx}\cos\psi - b\sin\psi\frac{d\psi}{dx} \\
&= \frac{da}{dr}\cos\psi\sin\psi - a\cos\psi\sin\psi/r + \frac{db}{dr}\cos^2\psi + b\sin^2\psi/r. \\
\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{da}{dr}\frac{dr}{dy}\cos\psi - a\sin\psi\frac{d\psi}{dy} - \frac{db}{dr}\frac{dr}{dy}\sin\psi - b\cos\psi\frac{d\psi}{dy} \\
&= \frac{da}{dr}\sin\psi\cos\psi - a\sin\psi\cos\psi/r - \frac{db}{dr}\sin^2 y - b\cos^2\psi/r
\end{aligned}$$

Разность равна

$$0 + 0 + \frac{db}{dr} + b/r = \frac{db}{dr} + b/r = \frac{1}{r}\frac{d(br)}{dr}. \tag{45}$$

Итак кривизна не зависит от коэффициента $a$.

Согласно уравнениям в [GH, стр. 72], дополнительный фактор $m(\cdot)$ вводит аддитивный член (41). Кривизна вычисляется так же как (43), но первые два члены отсутствуют и $\ln\epsilon$ заменяемся функцией $\ln m(\cdot)$. Но в противоположность члену $\ln\epsilon$, член $\ln m(\cdot)$ не гармоническая функция. Игнорируя на мгновение множитель $1/2$, подразумеваемый в (41), мы вычисляем

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{dm}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{x}{r}\frac{dm}{dr}, \qquad \frac{\partial \ln m}{\partial y} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{dm}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{y}{r}\frac{dm}{dr}$$

Продолжая и дифференцируя ещё раз, мы находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln m}{\partial x^2} &= -\frac{1}{m^2(x,y)}\left(\frac{x}{r}\frac{dm}{dr}\right)^2 + \frac{1}{m(x,y)}\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2m}{dr^2} + \frac{1}{m(x,y)}\left\{\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right\}\frac{dm}{dr} \\
\frac{\partial^2 \ln m}{\partial y^2} &= -\frac{1}{m^2(x,y)}\left(\frac{y}{r}\frac{dm}{dr}\right)^2 + \frac{1}{m(x,y)}\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2m}{dr^2} + \frac{1}{m(x,y)}\left\{\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right\}\frac{dm}{dr}
\end{aligned}$$

Сумма равна

$$-\frac{1}{m^2(x,y)}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 + \frac{1}{m(x,y)}\frac{d^2m}{dr^2} + \frac{1}{m(x,y)}\frac{1}{r}\frac{dm}{dr} \tag{46}$$

и произведение этого выражения с функцией $r$ и забытым сомножительнем $1/2$ равно производной функции $df/dr$ если

$$f = \frac{r}{2m}\frac{dm}{dr} \tag{46.a}$$

Функция $m(x, y) = m(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Значение $f(0)$ однозначно определено и равно 2. Если $z > \delta$ значение $f(z) = 1$. Следовательно интеграл кривизны

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^2 \ln m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln m}{\partial y^2}\right\}dx\,dy = \pi\int_0^{\infty}\frac{df}{dr} = -2\pi. \tag{47}$$

С этим вычислением мы подверждаем, что касается кривизны то наша связность, такая же как связность в [AB, стр. 560]. Возможно, что есть изменение в знаке, но это неважно.

Есть ещё две побочных предмета которые нужно объяснять, первый, чтобы сравнить определение кривизны, описанное выше, вторым определением, которое дано в [AB], и второй, чтобы объяснить в этих простых рамках понятие связности Янга-Миллса. Хотя это может быть важно в других случаях, особенно если размер больше чем один, понятие связности Янга-Миллса вряд ли имеет существенное значение в данном случае. Действительно, цель нашего краткого объяснения, сделать это ясно. Тем не менее лучше приспособиться к условию [AB, стр. 560]. Дело в том, что необходимо выбрать метрику на $M$, относительно которой данная связность связность Янга-Миллса. Это то, что я начально думал, и то что я сейчас объясняю. Поучительно объяснить различные стороны этого понятия по одному, поскольку они себя представляют.

Мы можем сейчас воспользоваться определением кривизни этой связности данным в [AB]. Исходы двух определений, того что выведено из (39.c) и того что в [AB], те же, и сами определения едва различны. Но мы рассматриваем то что в [AB] потому, что построение в [AB, §7] так важно для нас. Понятие которыми мы пользуемся нужно объяснять осторожно . Действительно, читать [AB] для меня удовольствие, но понимать его трудно. Доводы слишком легки, слишком свободны и трудны, не для его двух авторов но для меня, которому теория связностей была незнакома. Пожалуй это тоже справедливом для читателя. Если я не добавляю несколько вычислений я непрваильно понимаю. Возможно что читатель также. Я действительно несколько раз непрваильно понимал. Итак я вывожу формулу для $F(A)$ [AB, §3] для простого случая которым мы интересуемся. Определение $F(A)$ важно для высказывания [AB, Th. 6.7]. Следовательно оно нам нужно. Кроме того оно связано с теорией Янга — Миллса.

Возможно что моё объяснение неясно, но мы перешли с метрики на унитарную связность. Мы можем сейчас воспользоватся определением кривизни этой связности, данным в [AB]. Исходы двух определений, того, что выведено из (39.c) и того что в [AB], те же. Но мы осматриваем то в [AB] потому что построение в [AB, §7] так важно для нас. Понятие которыми мы пользуется нужно объяснить осторожно.

Вычисления локальны, слой одномерен, то есть $\mathbf{U}(1)$ или $\mathbf{R}$, и база открытое множество в $\mathbf{C}$ с координатамы $x$, $y$. Уместные определения находятся в [AB, §3]. Достаточно рассматривать два касательных векторных поля $X = \frac{d}{dx}$, $Y = \frac{d}{dy}$. Связность придаёт каждому векторному полюсу или направлению над базисом, горизонталтный векторный полюс, так что

$$\begin{aligned} X \mapsto \widetilde{X} &= \left\{\frac{d}{dx}, a(x,y)\frac{d}{d\theta_1}\right\}, \quad a(x,y) = \frac{\partial\theta}{\partial x} \\ Y \mapsto \widetilde{Y} &= \left\{\frac{d}{dy}, b(x,y)\frac{d}{d\theta_1}\right\}, \quad b(x,y) = \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{aligned} \tag{48}$$

где $\theta_1$, которое несвязано с $\theta$, координата на слое и $d/d\theta_1$ только неподвижный касательный вектор в слое. Сверх того $a(x,y)$, $b(x,y)$ существенно параметры которые определены функцией $\theta = \operatorname{Im}\log\sigma$. Я повторяю что $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ перемещения, определенные связностей.

Мы начинаем вычисления сейчас, но полезно объяснять руководство потому что есть ряд особенных обстоятельств которые дают вывод. Первое условия Коши-Римана и потом различные отношения в теории Вейерштрасса. Последовательность математики поразительна!

Вторые члены в скобках дают отображение $\omega_A$ [AB, §3] и определяют кривизну, которая дана

$$\widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X}. \tag{48.a}$$

Мы можем заменять пару $\{X, Y\}$ парой $\{fX, gY\}$ но как замечано в [AB] легко проверять что $[fX_1, gY_1] = fg[X_1, Y_1]$ для всех $\{X_1, Y_1\}$. Следовательно достаточно рассматривать избранную пару. Связность определена функциией $a(\cdot,\cdot)$ и $b(\cdot,\cdot)$. В противоположность авторам [AB] я употребляю обыкновенные координаты для $\mathbf{U}(1)$ и $\mathbf{U}(1)$.

Хотя эта щепетильность, которая авторам [AB] не нужна, я вычисляю прежде $F_A(X, Y)$ и тогда $\int_M F(A)$. Мы начинаем с уравнениями

$$\widetilde{X}\widetilde{Y} = \frac{d^2}{dx\,dy} + \frac{db}{dx}\frac{d}{d\theta_1} + a(x,y)b(x,y)\frac{d^2}{d\theta_1^2};$$
$$\widetilde{Y}\widetilde{X} = \frac{d^2}{dy\,dx} + \frac{da}{dy}\frac{d}{d\theta_1} + b(x,y)a(x,y)\frac{d^2}{d\theta_1^2}.$$

в которых члены

$$a(x,y)\frac{d^2}{dy\,d\theta_1}, \quad b(x,y)\frac{d^2}{dx\,d\theta_1}$$

отсутствуют потому что $d/d\theta_1$ независимо от $x$ и $y$. Действительно, несмотря на обозначение, $d/d\theta_1$ вектор в $\mathbf{U}(1)$. Следовательно

$$\widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X} = \left\{\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}\right\}\frac{d}{d\theta_1}$$

и кривизна дана

$$F_A(X,Y) = \left\{\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}\right\} dx \wedge dy = \frac{db}{dx}\,dx \wedge dy + \frac{da}{dy}\,dy \wedge dx. \tag{48.b}$$

Это обозначение статьи [AB], где 2-форма $(X, Y) \to F_A(X, Y)$ написана как $F(A)$.

Позвольте мне добавить слово о теории Янга-Милса. Чтобы определить связность Янга-Милса или звезду Ходжа нужно выбрать метрику на $M$. Эта метрика (met) дана, звезда Ходжа определена как в [T] уравнением,

$$v \wedge \star v' = (v, v')\,\mathrm{vol}_M, \tag{49}$$

где $(v, v')$ задано метрикой и $\mathrm{vol}_M$ дифференциальная форма. Наше построение таково, что оно не ссылается на метрику. Следовательно оно свободно. Но нужно выбрать его правильно. Условие этого дано как уравнение (6.1) в [AB, стр. 559],

$$d_A \star F(A) = 0. \tag{49.a}$$

То есть, применение звезды Ходжа к кривизне $F(A)$ даёт сечение неподвижное относительно $dA$. В [AB] есть обозначение связности $A$ или $d_A$, но $D$ есть её обозначение в [GH]. Эта кривизна дана. До сих пор метрика не имела значения, но теперь она должна быть определена так, чтобы это условие удовлетворялось. Звезда Ходжа дана метрикой на $M$.[40]

[40] Следующее соотношение, конечно, имеет основное значение для понятия уравнений Янга-Миллса и, как представляется, относится к несколько сложным понятиям, но на данный момент мы имеем дело только с алгебраическими кривыми. Итак, $\star F$ - это просто вещественнозначная функция, поэтому сечение не какого-либо расслоения, которое должно быть определено, а тривиального линейного расслоения. Следовательно, уравнение означает, что $\star F$ постояно, но мы выбрали на эллиптической кривой постянную метрику с постоянной кривизной, так что это эквивалентно требованию, чтобы $F$ была константой. Метрика относится к делу для формы с степенью один или даже два, но не для тривиального расслоения, где находится $\star F$. По этому вопросу я, возможно, повторяюсь или повторюсь. Но сначала это было тонкое различие, которое мне не было ясно.

Кривая $M$ дана как факторпространство $\mathbf{C}/L$. Мы начинаем с обычными координатамы $(x, y)$ на $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}/L$ и обычной метрикой $\sqrt{x^2+y^2}$. В областе где $|z-\lambda| \geqslant \delta$ для всех $\lambda \in L$ мы не меняем этого. В этой области кривизна равна нулю, $\star dx = dy$, $\star dy = -dx$, и (49.a) справедливо. Там, где $|z-\lambda| < \delta/2$, кривизна дана (43), которое равно

$$-\frac{1}{r^4} \cdot 4r^2 + \frac{1}{r^2} \cdot 2 + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2r = 0.$$

Следовательно мы не меняем метрику на $\mathbf{C}$ ипи на $\mathbf{C}/L$ в этой области. В кольце $\delta/2 \leqslant |\lambda| \leqslant \delta$, мы меняем метрику на коэффициент $g(\cdot)$, который вращательно-симметричен, то есть $g = g(r)$, который постоянен внутри и вне кольца и который гладок. Я замечаю, что мы не обращаем внимания на члены связности которые даны (40), потому что они ничего не вносят в кривизну. Выше я был слегка небрежен. Точнее, кривизна $F(A)$ не действительна, чисто мнима. Но это не важно. Значение (49.a) то, что итог движения $d_A$ и движения $F(A)$ отменяется умножением $\star$, то есть её инфинитезимальным действием. Это определяет объём, то есть площадь, в кольце $\delta/2 \leqslant |z| \leqslant \delta$. Вне кольца мы умножаем площадь на постоянную если необходимо.

Я замечаю, что звезда Ходжа определена в [T] только для особенных расслоений но определение повсеместно справедливо. Особенная черта (49) в том, что $v$, $v'$ в слое но $\mathrm{vol}_M$ относится к касательному пространству. Хотя я описал довольно пространно этот пример связности Янга-Милса я не уверен, что это понятие важно для геометрической теории автоморфных форм в которой базовое пространство комплексной размерности один. Предыдущий раздел, в котором подтверждается начальное утверждение о существовании связности Янга-Миллса, есть подготовка к следующему.

Трудность возникнет, но лучше отложить её разрешение до тех пор, пока она становится ясной. Тем не менее мы можем описать её сразу. Ниже в теореме я пользуюсь понятием связностей Янга — Миллса, то есть метрика на $M$ выбрана. Потом я сравню следствия теоремы с следствиями раздела VII, то есть с описанием собственных сопряженных классов. Но такой класс дан одним из его представителей. На удачу мы выбрали удобные представители. С другой стороны выбор метрики, то есть выбор связности не оказался полезным. Хотя мы спасены общей теорией и овладением этой теорией обоими авторами, к счастью, мы можем тоже работать в рамках обычной метрики. Лучше сказать, что наш выбор метрики на расслоении нехорош и что необходимо было ввести несколько произвольных исправлений. Это было неуклюже, как мы объясним ниже. ■

**Дополнительное объясненение и исправление.** Этот раздел был посвящен объяснению построения незаменимого расслоения $\mathbf{Q}$. Чтобы упростить мои усилия, я ввел удобную метрику в отклонении. Но для нас главное утверждение в [AB] Th. 6.7, тема которого связности Янга-Миллса. Их определение так, что метрика на $M$ оказывает решающее влияние на их свойства. Это особенно справедливо для эллиптических кривых, для которых существует естественные выбора метрики, то есть постоянные метрики. Это постоянство нарушено введением точки $Q$. Функция $\sigma^{-1}$ многозначенное сечение расслоения $\mathbf{Q}$.

Я уже сказал это, но для меня дифференциальная геометрия лабиринт, в котором я вошёл потому, что сходство двух теорий, арифметической и геометрической, настолько поразительно. Кстати возникает вопрос, который я не пытался ответить. Именно в этой статье речь идёт о комплексной дифференциальной геометрий комплексных кривых и о теории Янга-Миллса связанной с ними. Я не знаю, относится ли теория Янга-Миллса для многообразий более высоких размерностей к теории автоморфных форм. Мне кажется маловероятно, но я ещё не знаком ни с первой, ни со второй из этих двух теорий, ни с другой теорией, то есть ни с дифференциальной геометрий ни с теории Янга-Миллса более высокой размерности. Это в сторону, мне кажется, что в [AB] главная особенность теорий её линейность.[41]

Эта линейность не проявилась в наших расчетах, для которых мы ввели несколько произвольный множитель $m(\cdot)$ но без изменения предлагаемой связности. Она проявилась с измененем связности. Мы лучше выберем её внизу. ■

## IX. Теорема Атьи-Ботта

[42] Доказательсво будет более важно чем теорема, но начинаем с теоремы. Чтобы заявить теорему нужно будеть вывести подходящую $\Gamma_{\mathbf{R}}$-связность. Тогда для каждого гомоморфизма[43] $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ есть индуцированная $G$-связность $A_\rho$. Утверждение теоремы просто ([AB, Th. 6.7]).

**Теорема.** *Преобразованое $\rho \to A_\rho$ определяет взаимно однозначеное отображение между классами сопряженных гомоморфизмов $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ и классами эквивалентности связностей Янга — Миллса над $M$.*

Помимо отступления уясненного в предыдущей главе, это первое появление связности, и в итоге - дифференциальной геометрии, в доводе этой статьи и причина предыдущей объяснения. Я не хочу давать полное доказательство этой теоремы, но комплексная дифференциальная геометрия весьма развитая область, понимание которой требует опыта и понимания. Легко неправильно понимать рассуждение опытных геометров, а авторы [AB] несомненно опытны, из-за недостаточого понимания существенного представления как кривизны. Для меня было так, но многие заблуждения были исправлены при помощи классической теории эллиптических кривих.[44]

Есть столько сторон теории, которые я изначально неправильно понимал, так что мне приходилось повторно пересматривать то, что я писал. На пример, ни группа $G$ в теореме ни $\Gamma_{\mathbf{R}}$ не обязательно связны. Тем не менее, для доказательства в [AB] предполагается, что группа $G$ связна. Мне кажется было бы полезно добавить несколько слов об общем случае. В самом деле, мне казалось, что их доказательство влечёт за собой переход к

[41] Эта проявляется только с счастливым совпадением метрик на слое и на кривой $M$. Одна деиствует на построение взято частично из [GH], другая на понятие связности Янга-Миллса. Соответствующий выбор был сделан в этой статье.

[42] Читатель может или не может заметить, что есть существенное улучшение понимания и лёгкости между этим разделом и следующим. Этот раздел нуждается в пересмотре, но я предпочёл оставить его по двум причинам. Первая ленивость, и, возможно, более убедительная, во-вторых, потому что многие возможные читатели разделяют мое первоначальное невежество. Есть также моё убеждение в том, что, если будет обеспечено последовательное объяснение, ему лучше подождать, пока теория вудет в целом лучше понятна.

[43] В самом деле в этом отображении нужно заменить группу $G$ группой ${}^LG$, но если $G = \mathrm{GL}(n)$ тогда $G = {}^LG$. Авторы статьи [AB] не сознавали понятия группы $L$. Есть точная последовательность

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{U}(1) \times \pi_1(M) \longrightarrow 1 \quad .$$

Так как группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{U}(1) \times \pi_1$ некомпактны, последующее построение не совершенно наглядно.

[44] Этот абзац и первые несколько из следующих абзацев были написаны как я старался утвердить подозрение или надежду что теорема Атьи-Ботта была один из ключей к взаимности в геометрической теории. Я решил сохранить их. Они отражают мои трудности с [AB], из которого обозначение берётся.

группе меньшей размерности, которая может быть несвязной. Я объясняю трудность, хотя для нас она не тяжела. В [AB, стр. 561], авторы предполагают что $G_X = G$, но было бы возможно что $G_X$ несвязно даже если $G$ связно. Следовательно переход к группе $H \times S$ был бы поспешный. Однако, как я объясню ниже, это не так, хотя есть тонкость.

Большинство трудностей было вызвано моими недостаточным пониманием доводов. Сначала словосочетание '$\widetilde{M} \to M$ is of course a flat $\pi_1(M)$-bundle' казалось мне пустымы словамы и значение и правда словосочетания '$A$ is a Yang-Mills connection' казались ясными. Оборот 'of course'- соблазн для неопытного читателя, не слишком тщательно думающего о заявлении, которое он читает. Поэтому он это не веполно понимает. Эти слова не пусты. Фундаментальная группа определена петлями выходящими из точки. Следовательно она локально однозначно определена, но не глобально. Глобально она определяется до изоморфизма данного путем от одной точки до другой. Итак понятие фундаментальная группы тонко. Она скорее пучок или тоже пучок. Во всяком случае то, что я медленно оценил, это отношение $\Gamma_{\mathbf{R}}$ связности к $G$-связности. Это было вопросом неопытности. Переход так ровен. К тому же я не достаточно сознавал простейшие примеры, например логарифимической функции на $\mathbf{C}^\times \subset \mathbf{C}$ с тривиальным расслоением в котором введен полюс в точке 0. Важно понимать, что ни $\Gamma_{\mathbf{R}}$, ни $G$ не обязательно связны.

Во всяком случае, как только мы поймем связь между $M$, $\widetilde{M}$, $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и расслоением связанным с ними, мы поймем как перейти от гомоморфизма $\Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ к $G$-расслоению Янга-Миллса. Нужно подтвердить, что таким образом мы получаем каждое $G$-расслоение. То что это построение даёт связность ясно из определений.

Следующие строки предназначенны для читателей которые так же неопытные геометры как и я, но чтобы понять довод из [AB, стр. 560/561] нужно схватить построения в простейшем виде. Например, вместо того, чтобы вставлять полюс или нуль, мы выбираем постоянную точку $n \in \mathbf{Z}$ и вставляем в окрестности данной точки простую функцию $f(re^{i\theta})$ с значениями в $\mathbf{U}(1)$, но склеивание с функцией $g$ дано уравнением $f(re^{i\theta})\exp(in\theta) = g(re^{i\theta})$. Если $n \neq 0$, сравнение происходит только в клине. Невозможно что 'функция' или 'сечение' в полной окрестности точки. Это определение подходит для строительства $\mathbf{U}(1)$-расслоения на [AB, стр. 560]. Построение $\pi_1(M)$-расслоения из представления группы $\pi_1(M)$ знакома. Эти замечания позволяют нам следовать доводу на страница 560–561.

Довод в направлении: от гомоморфизма до связности - почти формальный. От связности до гомоморфизма первый шаг - использовать определение, главным образом постоянство функции $\star F$, то есть условие Янга-Миллса, чтобы определить $X \in \mathfrak{g}$, алгебре Ли.[45] Благодаря условиям, описанным в сноске,[46] группа $G_X = G$, введенная в начале страницы [AB, стр. 562], связана. Это, по-видимому, подразумевается неявно в обсуждении на этой странице. Существование точки $X$ и группы $G_X$ необходимо для описания связностей на этой странице. На странице есть также разрешение трудности, которая беспокоила меня во время всех моих размышлений об этих вопросах. То есть

[45] С одной стороны мы ввели $L$-группу, с другой стороны мы не старались использовать или описать его формальные свойства, связанные с закручиваниями и расширениями полюса. Группы GL(1) или GL(2) никоим образом не закручены. Довод на [AB, стр. 561–562] иногда неясен, так что я хочу, чтобы мои предположения были чёткими.

[46] Согласно [K] A. Knapp, *Lie groups Beyond an Introduction,* Second Edition, Birkhauser, Boston, 2002, Corollary 4.51, то есть "In a compact connected Lie group, the centralizer of a torus is connected."

собственное значение Гекке в данной точке класс сопряженных элементов, который дан путем выставления одного элемента класса. Которого? Есть ещё что-то, которое нужно объяснить. Но я в первую очередь хочу рассмотреть классификацию[47] [AB, (6.12)] для группы GL(2).

Мне кажется, что полезно nfописывать сейчас возможные образы группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, по меньше мере, для неприводимых унитарных представлений $\rho$ в GL(2). Группа $\Gamma_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} \Gamma$ определена $A$, $B$, $1 \in \mathbf{R}$ и $ABA^{-1}B^{-1} = J = 1 \in \mathbf{R}$, в котором 1 не единичный элэмент. Если $G = \mathrm{GL}(1)$, ${}^LG = \mathrm{GL}(1)$, и представления $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathrm{GL}(1)$ легко описываются. Они даны с отношениями: $A \to \alpha \in \mathbf{U}(1)$, $B \to \beta \in \mathbf{U}(1)$, $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $x \to \chi(x) \in \mathbf{U}(1)$, где $\chi$ характер группы $\mathbf{R}$. Если $G = \mathrm{GL}(2)$, ${}^LG = \mathrm{GL}(2)$, $\det \rho(J) = 1$, $J$ централльно и есть две возможности:

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} \chi_1(A) & 0 \\ 0 & \chi_2(A) \end{pmatrix}, \quad \rho(B) = \begin{pmatrix} \chi_1(B) & 0 \\ 0 & \chi_2(B) \end{pmatrix}, \quad \rho(J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{50.a}$$

где $\chi_i(\cdot)$, $\chi_i(\cdot)$ два непрерывных унитарных характера группы $\mathbf{Z} \times \Gamma$, определеной группой линейно эквивалентных дивизоров;

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \rho(B) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{50.b}$$

$a$, $b \in \mathbf{C}^\times$, $|a| = |b| = 1$. К тому же нужно, что связность определит $\rho$ на $\mathbf{R}$ и $\alpha = \det \rho$ получается из $\rho$.

Сейчас необходимо признать основную путаницу в моих размышлениях о собственных функциях и связностях Гекке. Связь между первой и второй косвено опосредствована двумя группами: $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma_{\mathrm{aut}}$. Не нужно вводить посреднические связности. Увлеченный моим первоначальным невежеством связностей, я полностью потерял своё время на попытках понять их. Однако это не было потерей. Мы не понимаем арифметической взаимности в широком смысле, и тесная связь между теорией Янга-Миллса и геометрической взаимностью не может быть полностью случайностью, так что время не было потеряно. Кроме того, хотя я часто забываю природу отношения между этими двумя множествами, оно прямое! Собственные сопряженные сечения определяются как интегралы связности.

Как я объяснил, я понимаю что лицам следующим в теории расслоений, существование $Q$ знакомо, но мне это не так и я предпочитал, по крайней мере частично, описание в рамках более знакомой теории Вейерштрасса. Сначала мне трудно было понять как расслоение и связность даны локально функцией $\zeta$ в (2.e). Я не понимал также нужные изменения метрики на $M$ и на расслоении. Я сделал всё возможное, чтобы представить необходимые объяснения в предыдущей главе, хотя, как, может быть, заметил читатель, мне было иногда трудно полностью выпитывать первые абзацы раздела [AB, §4]. Итак в этой главе мы можем обсудить доказательство теоремы Атьи-Ботта. Читателю тоже благоразумно справляться в статье [AB, стр. 560], где уравнение $d_A \star F = 0$ важно.

Загадочное заявление или переход на странице 561 - это неявное и неосторожное предположение при переходе от строки 5 к строке 6, что $G_X = G$ связно. Это всего

[47]**Предостережение.** Топологи не похожи на остальных из нас. То, что им ясно, нам трудно. Я хотел бы перевести два предложения из [AB, стр. 561], чтобы быть уверенным, что я правильно их понял. ‘Any $G$-bundle $P$ with connection induces a $\overline{G}$-bundle $\overline{P}$ with connection. Conversely if $\overline{P}$ lifts to $P$ then $P$ is unique and inherits a connection from that of $\overline{P}$. То есть группа $\overline{G}$ группа добрей группы $G$ конечной подгруппой. То есть, если $\overline{g} \in \overline{G}$ пусть $G_{\overline{g}} = \{\, g \in G \mid g \to \overline{g} \,\}$.

лишь неосторожная ошибка, но нам будет важно изучить особый случай и описать необходимое изменение.

На этом месте необходимо чётко объяснить разницу между настоящими условиями, то есть условиями следующего раздела **IX**, и условиями [AB]. Мы хотим описать собственные сопряженные классы и собственные функции операторов Гекке. Эта функция на $\mathrm{Bun}_G$ у которого есть бесконечное множество связных компоненты. Следовательно нужно рассчитывать на непрерывное множество собственных сопряженных класс. Это отражается в множителе $\mathbf{Z}$ в уравнении (1.d). С другой стороны, из непрырывного семейства данного теоремой Атьи-Ботта относятся к делу только те связности для которых интеграл однозначен. Это будет обсуждено в следующем разделе. Сейчас мы рассматриваем довод статьи [AB].

Есть, однако, ещё одно затруднение. Нам нужно будет сравнивать описание Атьи-Ботта, которое предполагает данный класс связностей Янга-Миллса, то есть данную метрику на $M$, с нашим описанием собственных функций Гекке. Скорее, мы должны убедиться, что описание Атьи-Ботта не зависит от метрики, итак от неявной зависимости на ней понятия связностей Янга-Миллса. Нужно также понимать как оно зависит от выбора $Q$. В предыдущем разделе я старался объяснить это с примерами. Мне кажется что это достаточно. Такая брезгливость необходима, потому что геометры имеют опыт и понимание для усвоения разных осуществления такого же понятия но у меня этого опыта нет. Но лучше что я объясняю в первую очередь доказательсво теоремы Атьи-Ботта и потом рассматрю различные отождествления. Читателю несомненно лучше пропустить их сначала. Возможно, что я тоже не вернусь к ним. Как я уже писал, в данный момент предварительные объяснения достаточны.

Прежде чем я продолжу обсуждение доказательства Атьи-Ботта, я хотел бы признать, что я неправильно, по меньшей мере недостаточно ясно, понял то, что я пытался доказать. Я продолжу введение двух множества параметров, чьи отношение, одно к другому, несколько сложно. Оба даны представлениями группы в ${}^LG$, которое в этой статье обыкновенно GL(2), но GL(2), PGL(2) и SL(2) сходны. Для теоремы Атьи-Ботта эта группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$; для теории Гекке эта группа $\Gamma_{\mathrm{aut}}$. Итак они тесно связаны. Их представления параметризуют подобные предметы: для теоремы Атьи-Ботта это связности Янга-Миллса, для теории Гекке это собственные сопряженные сечения. Надо полагать, что это влечет за собой связь между множествами параметров. Очевидное построение интегрирование связности, но оно требует начальное значение, и поэтому дополнительные параметры. Точнее, начальное значение нужно на одном связном компоненте. Это тоже, как мы увидим, не совсем правильно.

Моя первоначальная цель состояла в том, чтобы создать начало теории автоморфной группы Галуа в рамках геометрической теории. Мне казалось, что оно находилось в [AB, Th. 6.7], но оказалось, что нужно не только понимание кривизны но также понимание вариационного исчисления, хотя и скромным образом. Необходимо также исправить теорему, насколько это уместно в наших условиях.

Наше описание собственных функций Гекке и собственных классов для эллиптической кривой показало, что на каждом компоненте множества $\mathrm{Bun}_G$ они даны матрицами коэффициенты которых даны показательными функциями показатель которых линейеи, то есть каждой компонент дан как $\mathbf{C}/L$ и поднятый показатель линейен. Таким образом она дана интегралом плоской связности. То есть, по счастливой случайности связностью

Янга-Миллса. Линейность показывается потому, что у множества $M$ есть подразумеваемая структура группы.[48] Таким образом вообще мы ожидаем многообразия Якоби или дискретное скопление произведения таких многообразий. Но у меня нет ни времени, ни мужества предугадать общий случай.

Чрезвычайно трудно отличить собственные функции, собственные точки и собственные значения. Существует произвольный выбор, неявный в первом, но не в других. Важно различать их свойства, но не легко!

Я признаюсь также, что вопрос о параметрах меня немного озадачивает. С точки зрения opeраторов Гекке, аддитивный или линейный параметр на $M$ подходящий, особено для $\Theta_2$. С точки зрения гармонической теории есть две возможности: сперва метрика тогда связность как в [AB]; сперва свазность - тогда метрика как в этой статье, по крайне мере порой. Они могут навести на разные понятия гармонической звязности. Я выбрал вторую но в [AB] первая употреблена. Поэтому возникает вопрос об эквивалентности. Я оставляю его в стороне. Этот вопрос и другие подобные вопросы подразумеваемы в [AB] где они не обсуждались. Надо полагать что нужные доказательства нетрудны. В самом деле, вопрос для них настолько лёгок, что я просмотрел их объяснение, например, уравнению (6.10), $F(A) = X \otimes \omega$, $X \in \mathfrak{g}$. Здесь я позволяю себе предположение. В теории Гекке это постоянство выражение влияния якобиана, а в теории Атьи-Ботта оно отражает условие Янга-Миллса.

**Воспоминание о строении множества** $\mathrm{Bun}_G$**.** Сперва возникает несколько побочных вопросов. Прежде всего собственная функция операторов Гекке, функция на $\mathrm{Bun}_G$, которое несвязно. Следовательно она не везде дана интегралом. Но мы выбрали в §IV линейное расслоение $\Lambda_0 = \Lambda_{A_0}$, которое разрешает нам отождествлять множество неприводимых расслоений ранг которых, то есть размерность, равна $r$ и степень равна $d + rn$, $0 \leqslant r < d$, $n \in \mathbf{Z}$ с множеством расслоений ранг которых равен $r$ и степень равна $d$, $M \leftrightarrow M \otimes A_0^n$ [A, Th. 6]. Для $d = 2$, случай который мы рассматриаем, это имеет отношение к $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$, $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$ в §5. Когда мы рассмотрим следствия этого, мы поймём, что для группы GL(2) необходимо в первую очередь различать два рода собственных функций, носители которых, как не странно, без общих элементов. Первый род соответстует прямой сумме двух линейных расспоений. Второй род описан в §VII. Наше намерение в этом разделе объяснить теорему Атьи-Ботта.[49] Однако мы можем перейти к наложению кривой $M$. Комбинаторика [AB] требует, я считаю, большого внимания. Например, для $G = \mathrm{GL}(1)$ и $M$ эллиптической кривой, одномерное представление произвольно на $A$ и $B$, но обязательно равно 1 на $J$ в (6.6) и, следовательно, на $\mathbf{Z}$, но это не так для представлений более высокой размерности. Мне кажется что авторы объяснят это в (6.12) на стр. 561, но возможно что это не сразу ясно.

Это значит не только изменение заявления но также различия между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma$ и $\Gamma_{\mathrm{aut}}$. Второе множество связано с $\mathrm{Bun}_G$ для которого есть параметр, то есть степень, которая связана с умножением на $\Lambda_0 = \Lambda_{A_0}$. Это позволяет, для каждой собственной функция $f$ и каждого числа $\alpha \in \mathbf{U}(1)$, введение другой функции $N \mapsto f(N)\alpha^{\deg N}$. Это множитель $\mathbf{Z}$ в (1.d), который проверяет $\alpha$. Этот множитель отсутсвует в (1.a).

[48] Лучше не принимать этого утверждения всерьёз.

[49] **Незначительный недосмотр.** В их доказательстве имеются незначительные упущения, как показывает пример уже группы GL(2). Но, возможно, что я неправильно понял четвёртую строку в [AB, стр. 561].

Оставляя это рассмотрение в стороне, есть вторая разница между связностями и собственными сопряжными сечениями, кроме тех, которые очевидны. Прежде всего, величины первых лежат в алгебре Ли (группы ${}^LG$!), а величины вторых лежат в группе Ли (${}^LG$), но если $G = \mathrm{GL}(2)$, $G = {}^LG$. Следовательно, для сравнения нужно не только интегрирование но также начальное значение.[50]

Мы вернемся к этому вопросу в следующем разделе, но сначала необходимо понять довод в [AB, §6], то есть доказательство теоремы 6.7 и нужные изменения. Мы начинаем с уравнения (49.a) и его значением, не забывая, что мы не занимаемся только линейными расслоениями, то есть только расслоениями размерность которых равна единице. Оно выражает отношение связности к метрике, на $M$ и не на расслоении. Мы уже видели как переходить от связности на метрику. Авторы замечают, что эта связность, группа которой $\Gamma_{\mathbf{R}}$ [AB, стр. 596, (6.5)] не компактная.

Мы уже[51] осмотрели уравнение $d_A \star F = 0$ как уравнение которым определено $F$ но с другой целью. Я нахожу довод и заключение в [AB] чудесными. Однако, чем больше человек думает об этом, тем больше понятие в его простоте становится ясным, по крайней мере, на несколько часов. Я предполагаю, что для многообразий большей размерности, он действительно сложный

Есть важная подробность определения в [AB, стр. 560/561]. В начале [AB, стр. 526] группа $G$ компактна но не обязательно связна. Это важно, потому что $G_X = G$ [AB, стр. 561], так что первая группа тоже не обязательно связна. Но она неожиданно и неуместно принята связной в следующем абзаце. Мне кажется, что в случае (50.b) $G_X$ обязательно несвязно. Следовательно в [AB] эсть небольшая ошибка. По-моему это существенная ошибка, которую можно исправить, перейдя к конечному наложению $M$, которое для (50.b) тоже эллиптическая кривая. Мы вернёмся к этому.

Сначала $F \to \star F$ превращает кривизну $F \in \Omega^2(M, \mathrm{ad}\,\mathfrak{g})$ в $\star F$ функцию, которая эквивариантная в отношении действия $G$ (вернее ${}^LG$). Авторы приходят сперва [AB, стр. 560] к выводу, что $\star F = \star F(A)$, $A = A_\rho$, постояно по горизонтальным кривым. Это позволяет им приводить структурную группу с $G$ к $G_X$, стабилизатор точки $X$ в $\star F = \star F(A)$. Точка $X$ произвольно выбранный элемент из орбиты точки $\star F$. Пусть $P_X = \star F^{-1}\{X\}$. Тогда $P_X/G_X = M$. Следовательно $F = F(A) = X \otimes \omega$ где $\omega$ объём. Так как $X \in \mathfrak{g}$, возможно что его показательный интеграл, значения которого находятся в $G$ и который определен начальным условием, даёт собстенное сопряженное сечение оператов Гекке. Мы овъясним это в следующем разделе но только для эллиптических кривих. Вероятно, что вообще теория сходна. Но я хочу объяснить доказательство на [AB, p. 561] для эллиптической кривой и группы GL(2).

Мы сначала продолжим обсуждение их доказательств, взяв $G = G_X$. Это важное упрощение, но прежде нам нужно понять заявление, 'The Yang-Mills connection $A_\rho$ defined by a homomorphism $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ has curvature $X_\rho \otimes \omega$ where $X_\rho$ is the element of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of $G$ defined by $d\rho : \mathbf{R} \to \mathfrak{g}$.' Я замечаю, что в предыдущем разделе размерность расслоения была равна единице. Сейчас она произвольна. Следовательно

[50] Это дано значением в $A_0$ характера, определенного на дополнительном сомножителя $\mathbf{Z}$ в (1.d) Сверх того, нужно чтобы интеграл, а скорее его сопряженный класс, был однозначным. Это причина, что я вывожу группы $\Gamma/\Gamma_n$ в (1.d).

[51] С геометрической точки зрения наши примеры очень просты! Полезно напомнить, что назначение $\star$ Ходжа перестановка функции и дву-форм. Сверх того можно расширать его определение для всех векторных расслоений.

сейчас выражение (48.b) становится кососимметрической формой, значения которой в $\mathfrak{g}$. Следовательно [AB, стр. 561] $\rho(\Gamma_{\mathbf{R}})$ коммутирует с $X = X_\rho$ и $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G_X = G$.

Мы интересуемся теорией в [AB] только в связи с автоморфными формамя, но полезно сначала описать их заключения для группы GL(2) [AB, стр. 561]. Пусть $H = \mathrm{GL}(1)$, $S = \mathrm{SL}(2)$, $G = \mathrm{GL}(2)$. Есть гомоморфизм $H \times S \to G$ с ядром $D = \{\pm 1\}$. Пусть $\overline{G} = G/D$, $\overline{H} = H/D$, $\overline{S} = S/D$. Итак $\overline{G} = \overline{H} \times \overline{S}$. Скрытое в обсуждении [AB, стр. 611] есть нечто, похожее на отношение дискретной серии к компактным подгруппам Картана. Оно появляется в виде поднятия связности и её интегралов, который напоминает общую связь между подгруппами Картана и классификацией представлений или автоморфных форм. Однако с точки зрения, взятой в статье [AB] неявно или бессознательно, это означает переход к двойному наложению, которое сводит группу $G$ к группе $G_X$. Другими словами, либо $G = G_X$ либо необходимо перейти на однозначно определеную вдвойне накрывающую эллиптическую кривую перед введением описания, которое появляется на [AB, стр. 561]. Эта раздвоенность, которая появляется в [50.a/50.b]. Таким образом, появляется возможность трех параметров для одной и той же связности. Это должно быть проверено.[52]

Соответствие описания (50.a) прямым суммам одномерных связностей ясно. В противном случае есть однозначно определеное квадратическое наложение кривой $M$ над которым $G$ заменяется его связной компонентой. После этого шага, мы можем обратиться к описанию [AB, (6.12)]. Отображение $\beta$ в (6.12) проективный образ отображения $\rho$ в (50.b). Однако на этом этапе, необходимо обратиться к предложению, появляющейся на нескольких строках раньше, ‘Conversely if $\overline{P}$ lifts to $P$, ...’ Я замечаю, что я исправляю их упущение только в рассматриваемом особенном случае, а не вообще. Это я оставляю другим. Я добавлю также, что существует три возможных квадратических наложений кривой $M$ и каждое возможно.

Случай (50.a) представляет меньший интерес. Он связан с непрерывным спектром. Мне кажется, что сейчас нужно остановиться и подумать о том, что мы хотим доказать. Прежде всего, мы рассматриваем только группу $G = \mathrm{GL}(2)$ или группы тесно связаные с ней, SL(2) и PGL(2). Мой первое, приблизительное, предположение было соответствие между собственными значениями или собственными сопряженными сечениями операторов Гекке и связностями Янга-Миллса. Однако, соответствие не так! Первой очевидной причиной является то, что связности определяются на связных множествах, но собственные сопряженные сечения определены на несвязанных множествах. Вторая причина та, что их параметры разные. Правильное утверждение состоит в том, что первые получены из второго за два шага, интегрирование, в котором мы держим только некоторые исходы, и простые мультипликативные отождествления различных множеств. Мы объясним это в следующих двух разделах.

Прежде чем мы начнем необходимые объяснения в следующем пределе, лучше всего составить чёткое, хотя тоже приблизительное представление о виде параметров для двух множеств, $\mathrm{Bun}_G$ и множества собственных функций операторов Гекке. Составные части множества $\mathrm{Bun}_G$, множества $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(1) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Если $G = \mathrm{GL}(1)$, $\mathrm{Bun}\, G$ топологически $\mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}$. Если $G = \mathrm{GL}(2)$, $\mathrm{Bun}_G$ приблизительно—первый компонент состоит из пар, в которых порядок не имеет значения, но я не замечу переход к частному:

[52]На самом деле есть три. Я был очень смущен в течение очень долгого времени собственными сечениями вида $\mathfrak{D}$ и их отношениями.

это не относится к этому грубому описанию—объединение двух множеств—

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}$$

и

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}.$$

Двойствено, для GL(2) множество собственных функций Гекке,которое мы расмотрели в §VII тоже объединение двух множеств, но их грубое описание—

$$\mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

и

$$\mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Эти приблизительные замечания будут озадачивать читателя, но это не набор связностей, как мы изучали их в предыдущем разделе, а набор интегралов, полученных из них, которые мы введем в следующем пределе и которые соответствуют функциям Гекке. Существует дополнительный параметр, двойственный по степени связок, не прямо связанный с связностями. Он является источником фактора $\mathbf{Z}$ в (1.d).

Следующее предложение - это всё, что осталось от ряда неподходящих страниц. Это отпечаток отчаяния, которое иногда меня одолевало при написании этой статьи. Я признался что для меня дифференциальная геометрия трудна потому, что существуют так много эквивалентностей при изменении координат или метрик.

Учитывая эти грубые отождествленя, мы начинаем понимать связь со вторым сомножителем в (1.d). Однако, начиная следующий раздел, я заметил, что, поглощенный особым случаем эллиптической кривой, я не заметил особенностей, появляющихся для проективной прямой. Они достойные краткого объяснения. Если род равен нулю, определение на [AB, стр. 559] возможно только если пустое произведение равно единице. Следовательно

$$\prod_1^g [A_i, B_i] = 1,$$

но этот 1 в мултипликативной группе и для когомологических причин он приклеен к $0 \in \mathbf{R}$. Итак $\Gamma_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$. Согласно уравнениям [AB, (6.12)], для каждого $n \in \mathbf{Z}$ существует единственная связность Янга-Миллса с степенью равной $n$ и размерностью равной одному. Прежде чем мы перейдем к следующей главе, возможно, стоит описать их, только чтобы лучше ознакомиться с понятием связности. Проективная правая, то есть $\mathbf{C}$ вместе с $\infty$ или $\{\, (z,1) \mid z \in \mathbf{C} \,\} \cup \{1,0\}$, фактор-пространство группы $\mathbf{U}(2)$. Лучше, она $\mathbf{C} \times \mathbf{C} - (0,0)$ по модуло $(z_1, z_2) \to (z_1 z, z_2 z)$, $z \in \mathbf{C}^\times$ или $\{\, (z,1) \mid z \in \mathbf{C} \,\} \cup \{1,0\}$, итак $\mathbf{C}$ вместе с $\infty$. Инвариантная метрика, то есть инвариантная по отношению к $\mathbf{U}(2)$, даётся выражением

$$\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \tag{51}$$

$z = x + iy$, или его квадратным корнём. Обозначение неясно! Выражение $(dx, dy)$ касательной вектор. Мы используем эту метрику для определения понятием метрики Янга-Миллса. Этот выбор метрики даёт также звезду Ходжа. Привычный объем дан в частности

$$\frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

и с этим выбором

$$\star dx = -\frac{dy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \star dy = \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^2}. \tag{51.a}$$

Мы используем эту метрику, чтобы определить расслоение $Q$ на сфере Римана. Следующие вычисления показывают, что она инвариантна относительно действия унитарной группы

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как в этом случае фундаментальная группа тривиальна и $\widetilde{M} = M$, этот случай малоинтересен.

Пусть

$$z_1 = \frac{az+b}{cz+d}, \quad dz_1 = \left\{\frac{a}{cz+d} - \frac{(az+b)c}{(cz+d)^2}\right\} dz = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\,dz, \tag{51.b}$$

где

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

унитарно. Проверим, что преобразование (51.b) сохраняет метрику и объем, то есть

$$\frac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{dx_1^2+dy_1^2}{(1+x_1^2+y_1^2)^2} \tag{51.c}$$

и

$$\frac{dz\,d\overline{z}}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{dz_1\,d\overline{z}_1}{(1+x_1^2+y_1^2)^2}.$$

но эти две уравнения ни одно и те же. Сверх того

$$\begin{gathered} dz_1\,d\overline{z}_1 = \frac{|ad-bc|^2}{|cz+d|^4}\,dz\,d\overline{z} = \frac{dz\,d\overline{z}}{|cz+d|^4}, \\ 1+x_1^2+y_1^2 = 1+\frac{|az+b|^2}{|cz+d|^2} = \frac{|cz+d|^2+|az+b|^2}{|cz+d|^2} = \frac{1+|z|^2}{|cz+d|^2} \end{gathered} \tag{51.d}$$

потому что матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является унитарной. Следовательно уравнение (51.c) верно.

После этого тщательного и, возможно, лишнего расчета, я хотел бы побаловать некоторыми краткимы общимы размышлениями, потому что есть простые черты теории расслоенией, которые меня озадачивают. Авторы статьи не вводят расслоения $Q$, когда род равен нулю, поэтому что для проективной прямой есть только тривиальная звязность Янга-Миллса. Тем не менее, есть расслоение с полюсом в точке $\infty$. Мы рассматриваем их, но по отношению к координатам $r$, $\theta$, полагая, что на бесконечности они имеют простой полюс, то есть с плоскимы координатами они даны около бесконечности выражением $f(1/z)z^{-1}$, $f(0) \neq 0$. Основные особенности его поведения задаются мнимой частью логарифма $\log 1/z$, то есть $-\theta$, которое неопрелено там где $r = 0$.

Другими словами, мое более раннее описание с точки зрения вихря было неудовлетворительным. Ничего особенного, как водоворот, не вводится. Мы ввели совершенно новый предмет в теорию, поведение которого вблизи, но не в заданной точке, задается целым числом m, которое измеряет изменение $2\pi m$ по $\theta$, когда мы обходим центральную точку.

Его можно рассматривать только как новую и различную особенность, не буквально, а образно или понятийно. Это влияет на окрестности точки, потому что это приводит к изменению уровня как в круговой лестнице. Мы не возвращаемся туда, откуда мы пришли.

В данном случае мы можем попытаться использовать координаты $r$, $\theta$ во всей плоскости и предусмотреть связность, движущуюся в окружностях неподвижного радиуса относительно точки $r = 0$. Мы встречаемся с трудностью, и в этом суть дела, то есть причина, по которой нет интересных связностей на проективной прямой. Когда мы приходим к $r = 0$, мы не можем закрыть связность. Мы сталкиваемся при $r = 0$ с невозможным выбором углового вращения, по причинам непрерывности . Это топологическое ограничение. Полное угловое движение вокруг замкнутой кривой не может измениться без резкого изменения природы связностей. Например, её кривизна не может оставаться равной нулю. Скорее, для того, чтобы возместить неявное введение кривизны особенностью, необходимо ввести что-то ещё, и это может быть выполнено переходя к покрытию, где замкнутые кривые перестают быть замкнутыми и ограничения наложенные кривизной удаляются. Мне потребовалось некоторое время, не только чтобы писать эту статью, но тоже чтобы оценить это. Это решение, однако, невозможно для проективной прямой.

Таким образом, для него на бесконечности связность будут иметь вид $a\theta + br$, где $a$ отличная от нуля константа, скажем 1. Как новичок, я думал, что очень важно присоединиться к связностям, определенным голоморфными связностями, то есть, что понятие связностей сильно зависит от теории голоморфных или мероморфных функций. Это было незадумывающе. Голоморфные связности важны, главным образом мнимая или угловая часть логарифма, имеет большой независимый геометрический интерес и, переходя к логарифму и мнимой части, становится просто реальной связностью. Кривизна определяется им. Исходные ссылки на [GH] в какой-то мере являются отражением моей прежней веры в первичность голоморфной теории. В чём разница между сферой комплекса и эллиптической кривой? Почему мы можем вводить нетривиальные связности во втором, а не в первом. В настоящее время вопрос, пожалуй, не вызывает большой озабоченности, но стоит кратко остановиться на нем. Для эллиптической кривой мы могли бы взять простой полюс в одной точке и распространить его на мероморфную функцию на всей кривой без каких-либо дополнительных полюсов или нуля. Функция $\sigma^{-1}$ такова. Тогда мнимая часть логарифма нам дала связность с одним полюсом, связность, которую мы могли бы затем изменить таким образом, чтобы кривизна была постоянной, но этот последний шаг был только ради изящества. Были также предыдущие шаги, которые имели значение.

Мы заплатили цену за это расширение, цену уже неявную в функции $\sigma$, а именно нам пришлось перейти на наложение, на комплексную плоскость, чтобы быть в состоянии где мы могли бы интегрировать и получить однозначную функцию. Это возможно, потому что эллиптическая кривая не односвязна, как сфера. Лёгко представить полученную функцию. Эллиптическая кривая покрыта плоскостью, таким образом, чтобы плоскость была как объединение параллелограммов и интеграл связности равномерен, равномерно поднимаясь и спускаясь от параллелограмма к параллелограмму, но в то же время оставаясь непрерывным. Для сферы Римана, которая односвязна нет покрытия на которое можно пройти. Близость любой точки, скажем, бесконечной точки, немедленно закрывается. Нет выхода. Структура сразу видна на плоскости, покрывающей эллиптическую кривую. Для кривых более высокого рода моя интуиция терпит неудачу.

**Но почему бы не позволить себе два полюса?** Вопрос очень хорош. Всё, что я могу ответить, это то, что на меня сильно повлияло [AB] и его введение $Q$. Читатели должны будут ответить на этот вопрос для себя. Это может иметь значение для разветвленной теории Гекке.

В настоящей работе мы, даже предположительно, не рассматриваем разветвленные собственные функции операторов Гекке. Они должны проявляться как неразветвленные собственные функции по разветвленному покрытию. Это принцип функториальности. Таким образом, если бы существовала общая неразветвленная теория и если функториальность верна в контексте геометрических автоморфных форм, разветвленная теория может быть исследована через разветвленные накрытия исходного базового многообразия. В отличие от арифметического случая, покрытия кривых относительно доступны – или я бы подумал так! ■

Каждая связность Янга-Милса может выбрать собственное расслоение и собственную метрику.[53] То есть, можно дать связность только если расслоение налично но последующий выбор метрики на расслоении может быть приспособлен к различным целям, например, чтобы по отношению к ней. данная связность была связностью Янга-Миллса. Мы уже познакомились с этим раньше. Я также замечаю, что для нас связности Янга-Миллса только промежуточные понятие. Конечное соответствие между собственными сопряженными сечениямы и представлениями группы $\Gamma_{\mathrm{aut}}$.

Я добавляю еще несколько слов о сфере Римана. Сейчас для каждого $k \in \mathbf{Z}$ мы ыберем её как тривиальное расслоение с полюсом произвольной степени $k$ в бесконечности. Если $k < 0$ это не полюс, оно нуль. Для настоящего примера $G = \mathrm{GL}(1)$. Если $n = 0$ уместная связность Янга-Миллса тривиальна. Следовательно, она плоска по любой метрике. Как и раньше, я выберу вращательно-симметричную метрику, $d\theta^2 + m(r)\,dr^2$. Однако мы сейчас рассматриваем плоскость, подразумеваемо добавляя $\infty$, а не $\mathbf{C}/L$. Связность дана как (41) и дополнительного члена нет. Итак исчисление ведущое от (41) к (47) может повторяться, хотя происходит изменение направления и, следовательно, трудно учесть изменение знака и ориентации. Исход $2\pi k$ если $m(z) = |z|^{2k}$ в окрестности точки $\infty$ и $m(e^{i\theta}z) = m(z) > 0$, $z \in \mathbf{C}$. Если мы хотим получить связность Янга-Миллса, последний шаг - изменить метрику на проективной прямой. Как в прежнее примере она остаётся свободной.

Так много произвола пугает. Однако, и это я хочу подчеркнуть, в конце концов, связности являются только промежуточными. Сравнение будет между собственными сопряженными сечениями и гомоморфизмами $\Gamma_{\mathrm{aut}} \to {}^L G$. Позвольте мне попытаться разобраться в сути дела. Прежде всего, определение связности Янга-Миллса предполагает, что метрики, и на $M$ и на расслоении, даны. Тогда можно приписать каждому гомоморфизму $\rho$ группы $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ в ${}^L G$ гомоморфизм $\varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ в ${}^L G$, и следовательно тоже гомоморфизм $\Gamma$ в ${}^L G$. Этот последний гомоморфизм даёт согласно [AB, Th. 6.7] связность Янга-Миллса. Выбирая подходящие исходные значения, мы можем интегрировать эти связности. Исход функция которых значения лежат в ${}^L G$. Несомненно, что эта функция

[53]Подразумеваемым в этом утверждении является изучение классов эквивалентности связностей вместе с метрикой, которое я не предпринял!

зависит от выбора метрик, той на $M$ и той на расслоении. Однако сама функция не имеет значения. Важен только её сопряженный класс, который переменяется от точки к точке. Я не проверил, что классы в данной точке заданные способом этой статьи на это, не зависят от двух метрик которые использованы в определении. Мне не хватало ни силы ни времени!

Прежде чем я возвращусь к применению теории в [AB], я хочу кратко обсудить случай, когда $M$ задано проективной прямой, который не рассмотрмвался нами, потому что оно слишком просто, благодаря теореме Гротендика. Лучше, однако, срперва рассмотреть кратко употребления [AB, Th. 6.7], из которых исключается кривая нулевого рода, только для убедимся, что мы их понимаем. В доказательстве появляются как $\mathbf{U}(1)$, так и $M(1)$, и оба они влияют на связности, которые даёт теоремой. Для наших целей влияние первого не имеет значения. Другими словами, мы предполагаем, что представление группы $\mathbf{U}(1)$ тривиально. Это означает, что мы имеем дело с одномернами представлениями, произвольными на $A$ и $B$ и очень простыми на прообразе группы $\mathbf{U}(1)$.

На предыдущих страницах былф только небольшая попытка познакомиться с теоремой [AB, Th. 6.7] и ее последствиями. Есть однако ещё один вопрос, который лёгко просматривается. Возможно что ограничение $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ к $\mathbf{R}$ такое что $\rho(J) \neq 1$. Оно часто корень из единицы.

## X. Автоморфная группа Галуа и интегрируемые связности

Это не сами связности Янга-Миллса, а их определенные интегралы, которые соответствуют гомоморфизмам автоморфной группе Галуа в ${}^LG$. Начални значения интегралов находятся в унитарном виде группы ${}^LG$, которая для нас обычно GL(2) и только попутно GL(1) или изменение группы GL(2) как SL(2) и PGL(2). И связности и интегралы относятся к связным множествам. Эти могут быть расслоения степень которых нуль.[54] Следовательно нужно начинать с них, но удобно сперва объяснить последный шаг. Расслоение $\Lambda_0$ было введено а §IV и тензорное произведение $N \to \Lambda_0 \otimes N$ даёт изоморфизмы $\mathfrak{D}(m,n) \to \mathfrak{D}(m+1,n+1)$, $\mathfrak{A}(m,m) \to \mathfrak{A}(m+1,m+1)$, $\mathfrak{A}(m+1,m) \to \mathfrak{A}(m+2,m+1)$. Группа $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ дана в (1.d) как произведение. Следовательно произвольное неприводимое унитарное представление этой группы дано как произведение из представления группы $\mathbf{Z}$: $1 \in \mathbf{Z} \to \epsilon \in \mathbf{C}$, $|\epsilon| = 1$ и группы $\varinjlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$. Нет смысла рассматривать сами собстенные функции с носителем в $\mathfrak{D}$. Они соответствуют (неупорядочено) прямым суммам двух одномерных представлениеи. Для одномерного представления можно заменить $\varinjlim_n \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ группой $\varinjlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \varinjlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Это даёт то, что необходимо. Помимо параметра $\epsilon$ и функций $n \in \mathbf{Z} \to \epsilon^n$, это даёт показательные функция $\exp(ak + bl)$, $k$, $l \in \mathbf{Z}$, на $M$ с параметрами $a$, $b$ данными в (36.e), которые дают полную ортонормальную систему на $\mathrm{Bun}_G$ если $G = \mathrm{GL}(1)$. Напомним, что $\mathrm{Bun}_G \simeq \mathbf{Z} \times M$, хотя это отождествление несколько произвольно. Я замечею, что общее отождествление такого рода для всех

[54] Мы еще не раскрыли нашей главной цели, описание классов собственных сопряженных сечениeй. Эти функции на $M$, значения которых сопряженные классы. Они задаются функциями точек в $M$, из которых в принципе ничто не отличается. Эти функции даны определыми интегралами с началными значениями. Так как функция, по крайней мере, класс сопряженности, определяемый интегрированием и начальными условиями должны быть однозначны, набор допустимых начальных условий может быть весьма малым. Для расслоений размерность которых больше чем один, понятие начального значения искуснее. Непрерывный параметр появляется как параметр, двойственный к $z \in \mathbf{Z}$, который есть параметр связанных компонент. Одна точка $\Lambda_0^0$, тривиальное расслоение, независимо от $\Lambda_0$.

групп влечёт за собой структуру на полным наборе собственных значений, рассматриваемых для всех групп одновременно, что не является присущей. Я замечаю тоже, что назначение группы $G$ ($^LG$!) в [AB, Th. 6.7] немного отличается от того, которое уместно здесь. Показательная функции $\exp(ak+bl)$, определенный интеграл связностей $(a,b) \to ak+bl$. Легко забыть, но не следует забывать, что в §III и §IV есть произвольный, но неизбежный выбор неподвижной точки $A_0 \in M$ и метрики на $M$ и на тривиальном линейном расслоении.

Показателные функции с линейным показателем естественно появились в нашем обсуждении собственных значений Гекке, определение которых подразумевает метрику ни на $M$ ни на слоях любого расслоения. С другой стороны, оба они появляются в определении связностей Янга-Миллса, и метрика на $M$ особенно важна. Она появляется в определении $Q$ в [AB, стр. 560] и в построении, в предыдущем разделе, связности $\omega$ на $Q$ с особенно простым видом, тот что с постоянной кривизной. Теперь читателю предлагается изучить [AB, стр. 560] принимая, как и мы, благодаря вычислениям предыдущего параграфа, метрику на $M$ которая выведена из метрики на $\mathbf{C}$, инвариантной относительно переносов, таким образом что $\star$, $F = F(A)$ и $\omega$ все постоянны.[55] Следовательно вышеупомянутая связность тоже постоянна и, как выше, показатель её интеграла есть показательная функция с линейным показателем. Именно это позволяет сравнивать выводы двух разделов, VII и IX.

**Загадка.** Эта предложение "...we can restrict ourselves ...to the case $G_X = G$." на [AB, стр. 561]. Эта загадка, которую лёгко решить.

Трудность для кривой $M$, случай, с которым мы имеем дело, та, что присутствие A и B в группе Пуанкаре забыто. Этот случай должен быть типичным. Мы можем перейти к конечному наложению где описание в [AB] правильно. Я добавлю, что этот случай для нас самый интересный. Лучше рассмотреть GL(1) до GL(2). Тогда (50.a) заменено

$$\rho(A) = \big(\chi(A)\big), \quad \rho(B) = \big(\chi(B)\big), \quad \rho(J) = \big(1\big), \tag{52}$$

и (50.b) не появляется. Дополнительные параметры $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\chi(x) \in \mathbf{U}(1)$ заменены $X \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, потому что первое есть показательный интеграл функции $iX$, то есть $\exp(ixX)$. Есть ещё много функций второго порядка. Только те параметры второго рода, интеграл которых даёт однозначную функцию на $M$, относятся к делу.

Для группы GL(1) собственные функции (то есть переменные сопряженные классы) даны характерамы $\chi$ группы Пикара, которые даются, прежде всего, их значением $\chi(A_0)$ в отмечённой точке $A_0$, следовательно характером группы $\mathbf{Z}$ в (1.d). Кроме того, необходим характер подгруппы, заданной дивизорами степени нуль, то есть точка самой группы $M = \mathbf{C}/L$. Такие характеры даны логарифмическими интегралами линейных функций.

[55] Я подчеркиваю, что в предыдущем разделе было непросто создать на расслоении $Q$ связность с постоянной кривизной. Мы пользуемся этим. Ни в частном случае эллиптической кривой, ни в общем я не пытался понять, как кривизна изменяется с связностью. В целом, мне всё ещё непросто дается понятие связности, хотя я убедил себя в её важности для геометрической теории. Я добавляю здесь, потому что это нужно добавить где-то, что с метрикой, которую мы выбрали, связности Янга-Миллса на расслоении степени 0 постояны. Надлежащее изложение требует гораздо большего опыта, чем у меня, и многих добавочных страниц.

Для собственных классов рода $\mathfrak{D}$, отношение между собственными сопряженными сечениеями и собственными функциями объяснено формулами (30) и (30.a) вместе с промежуточным обсуждением.

**Признание и беспокойство.** Мы начинаем применять выводы из [AB, Th. 6.7]. Я узнал об уравнении Янга-Миллса, когда писал эту статью, потому что это важно для понимания её идеи, но мой опыт работы с ним и с дифференциальной геометрией ограничен. Теперь мы пытаемся понять его простейшие свойства. Для $G = \mathrm{GL}(1)$ гомоморфизмы из группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, [AB, 6.6], в $\mathbf{U}(1)$ разложятся как произведение $\mathbf{U}(1) \to \mathbf{U}(1)$ и $\pi_1(M) \to \mathbf{U}(1)$. В качестве простого, но важного примера, мы рассмотрим аргумент на странице 560 в [AB, стр] с группой $G = \mathrm{Lie}\,\mathbf{U}(1)$, $\mathrm{Lie}\,G = \mathfrak{g} = \mathbf{R}$. Тогда $X \in \mathbf{R}$ постояно. Тем не менее, есть важный вопрос, что, будучи очевидным для них, авторы не объясняют чётко, но мне объяснить это несколько затрудительно. Я привык заниматься редуктивными алгебраическими группами и их компактными формами, на пример $\mathbf{U}(1)$, но нет такого ограничения на группу $G$ в формуле $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ на [AB, стр. 560]. Можно допустить что $G = \mathbf{R}$. У двух групп одна и та же алгебра Ли. Это только то, что второй выбор предлагает больше возможностей. Точнее, вместе с теоремой [AB, Th. 6.7], это обеспечит, что подынтегральные выражения в показателях уравнения (53) представляют связность Янга-Миллса, но не без дальнейшего обсуждения. Возможность принятия $G = \mathbf{R}$ уже упоминалась в сноске ‘незначительный недосмотр’.

Следующее уравнение (53) является первым шагом в нашем сравнении связностей Янга-Миллса, с одной стороны, и собственных значений Гекке, с другой стороны, но это тонкое сравнение. Собственные значения задаются как функции параметра в $\mathrm{Bun}_G$, значения которых лежат в ${}^LG$, которое для нас равно $\mathrm{GL}(1)$ или $\mathrm{GL}(2)$, но этот параметр только класс сопряженных полупростых элементов в этой группе. Таким образом, в выбранных представителях существует большая двусмысленность. С другой стороны, понятие связности Янга-Миллса требует метрики как на $M$, так на слоях. К счастью, для эллиптической кривой существует очень маленький класс естественных метрик на $M \subset \mathrm{Pic}(M)$, и они инвариантны относительно переносов. Вложение здесь несколько произвольное! Более того, это понятие требует выбора линейного расслоения $Q$ и на нём связности. К тому же, чтобы установить биекцию между связностями Янга-Миллса и гомоморфизмами $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ [AB, стр. 560], необходимо выбрать метрику на данном линейном расслоении $Q$, а также $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$. Тогда, соответствие зависит от всех этих параметров, возможно слабо, возможно сильно но необходимо, что в конце концов, мы придём к чётко определенной биекции между собственными сопряженными сечениями для данной группы и гомоморфизмами автоморфной группы Галуа в ${}^LG$. Я наблюдаю, в частности, что мы должны понять зависимость от $Q$. Сделанный выбор, ведущий к постоянной кривизне, был сделан, прежде чем я узнал его важность, по крайней мере, в этой статье. Лёгко забыть большую часть произвола в построении соответствия этой статьи. ■

Вместо того, чтобы непосредственно начать с случаем $\mathrm{GL}(2)$, которым мы занимаемся, мы изучаем группу $\mathrm{GL}(1)$, для которой выводы просты, и щепетильность менее необходима. Во-первых, собственные значение, то есть сопряженный класс, поточечно единственное число. Кроме того сечение недвусмыслено, то есть оно функция и эти функции лёгко вычисляются. Они характеры группы Пикара. Эта группа произведение группы $\{ \Lambda_0^n \mid n \in \mathbf{Z} \} \simeq \mathbf{Z}$, которая есть первый сомножитель в (1.d), с группой дивизоров $A - A_0$, $A \in M$, то есть с самой группой $M = \mathbf{C}/L$. Группа непрерывных характеров этой группы дана парой целых чисел $k$, $l \in \mathbf{Z}$, как в (53) ниже. Для наших целей необходимо преобразовать эти характеры в пару комплексных чисел с абсолютной величиной, равной единице, чтобы мы могли прикрепить[56] каждому гомоморфизму $\mathbf{C}/L$ к $\mathbf{U}$ характер группы $\varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$. Если $k = l = 0$, этот гомоморфизм равен тривиальному гомоморфизму $A \to 1$, $B \to 1$. Вектор $(k, l)$, конечно, подвержен унимодулярному преобразованию, потому что базис решётки $L$ не определяется однозначно. Таким образом, если параметр не равен 0, можно предположить, что после унимодулярного преобразования он имеет вид $(k', 0)$, $k' \neq 0$. Хотя мы здесь имеем дело с чем-то очень простым,[57] лучше всего то что оно нам представляется полностью явным. В противном случае возникает путаница, по крайней мере, в моём мозгу. Линейная функция $k'a'$, определяемая новыми координатами $(a', b')$, то есть теми, которые определены новым базисом как $(a, b)$ в (36.e) начальным базисом $(2\omega_1, 2\omega_2)$, чётко определена и не зависит от выбора изменёных координатов. Нам остаётся объяснить возможные выборы.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z},$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $a' = k'$, $b' = 0$. Матрица определена за исключения фаптора

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{Z}.$$

Перемена базиса влечёт за собой перемену пораждающых элементов,

$$A \to A' = A^\alpha B^\beta, \quad B \to B' = A^\gamma B^\delta.$$

Поскольку мы пытаемся определить одномерное представление второго множителя группы $\Gamma_{\text{aut}}$, мы в сущности имеем дело с порождающими элементами $A'$ и $B'$ абелевой группы и представление $A' \to \exp(2\pi i/k)$, $B' \to 1$. Честно говоря, эти действия меня беспокоят.

Однако мы можем вернуть и выразить её как линейную функцию начальных координат. Она определает также одномерное представление группы $\varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ в (1.d), $A' \to \exp(2\pi i/k')$, $B' \to 1$. Поскольку мы имеем дело с одномерным представлением, мы можем также определить это представление через $A \to \exp(2\pi i a/k')$ и $B \to \exp(2\pi i b/k')$ просто путём выражения $A'$ и $B'$ по модулю группы, порожденной коммутаторами. Этот способ имеет странную особенность, что часть числителя становится знаменателем, который озадачивает меня и может озадачить читателя.

Надеюсь, теперь очевидно, что то, что остаётся объяснить для группы GL(1) является параметризацией ограничения собственного сопряженого сечения на множество $\{\, A - A_0 \mid A \in M \,\}$, связная компонента которого есть $\text{Bun}_{\text{GL}(1)}$. Для меня, как и для читателя, я замечаю, что для линейных расслоений большинство вопросов, возможно, и все, можно свести к вопросам для расслоений степень которых равна 0, взяв тензорное произведение с $\Lambda_0$. Это не так для расслоений размер которых больше.

[56]Это превращение имеет странный вид, часть числителя становится знаменателем, который озадачивает меня и может озадачить читателя. Итак, хотя это простой вопрос, я предпочитаю описать его подробно, чтобы убедить себя, если не читателя. Есть два несовестимых обозначения, то что в [A] и то что в [AB]. Значение знака $A$ изменяется. Здесь мы внезапно меняем обозначение с первого на второе.

[57]но очень важным!

В следующем уравнении (53) показатель есть интеграл связности по кривой от $z_0$ до $z$,

$$\{z_0, z\} \mapsto \exp\left\{4\pi i \int_0^1 (ka + lb)\, d\theta\right\} = \exp\{4\pi i(ka + lb)\}, \tag{53}$$

где $a$, $b$ координаты как в (36.e) точки $z - z_0 \sim A - A_0 = AA_0^{-1}$, $k, l \in \mathbf{Z}$ и $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Лёгко или, по крайней мере, мне было лёгко просмотреть назначение $\pi_1(M)$ в определении $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или различие между $G = \mathbf{U}$ и $G = \mathbf{R}^\times$ в соотношении $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ на [AB, стр. 560]. Если $G = \mathbf{R}$, то целые числа $k$ и $l$ определяются ограничением $\rho$ на $\pi_M$, то есть на его обратный образ. Не следует забывать, что для полного определения собственного значения Гекке нам нужно полностью указать собственную функцию и, таким образом, дать её значение при $A_0$. Это задаётся изображением $1 \in \mathbf{Z}$, элемента первого множителя в (1.d).

Целые числа $k$, $l$ выбраны свободно. Цель этого условия, то есть что $k, l \in \mathbf{Z}$, состоит в том, чтобы подынтегральное выражение в (53) было однозначной функцией переменной $z \in \mathbf{C}/L$. Простой вид интегруемой функции есть следствие обстоятельства, что связность которая появляется в подынтегральном выражении есть связность Янга-Миллса. Эти связности самы по себе следствие тщательно подобранных метрик на базе и на слоях расслоения $Q$. Я объясняю! Выбор метрики на $M$ был несложен но выбор метрики на слоях был вдохновен без ясной целей. Следующий выбор связности был разумной догадкой. Я уже был убежден или понял, что связности Янга-Миллса часто постоянны.[58]

Напомним, что интеграл (53) является определенным. Для нас важно то, что (53) определяет характер, то есть представление, второй группы в произведении (1.d), в данную минуту можно заменить второй множитель в $\mathbf{Z} \times \varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ группой $\varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ потому что $\mathrm{GL}(1)$ абелева. По этой причине $k$ и $l$ должны быть целыми.[59]

При обсуждении на страницах [AB, стр. 559/560] некоторые основые знания о дифференциальной геометрии подразумевются. Мы можем считать это само собой разумеющимся, но тем не менее я хотел бы чтобы читатель осознал это. Оно просто повторение связи между нулевой кривизной и чётко определенными интегралами связностей но в многосвязных областях. Первое следствие их есть уравнение (6.10) и в частности, утверждение [AB, стр. 561, ll. 7–9] - ‘Now line-bundles with harmonic connection ... can be uniquely expressed as $Q^k \otimes L_0$ ... where $L_0$ is flat.’ Слово «гармоническое» имеет много значений, и лучший способ понять, что имеют в виде авторы [AB] - это изучить утверждение их теоремы 6.7 и её применения. Сначала, насколько я понимаю, для них нет никакой разницы между словами ‘гармоническая’ и ‘Янга-Миллса.’

Предыдущее заявление из [AB] вызвало у меня некоторое смущение, потому что мое знание эллиптических кривых является поверхностным. Без подготовки я не могу доказать, что умножение линейных расслоений степени нуль эквивалентно сложению делителя степени нуль, а если точка фиксирована, как для нашего Q, так что кривая[60]

[58]Точнее, важность нашего выбора - эстетическая. Окончательное сравнение гомоморфизмов $\Gamma_{\mathrm{aut}} \to {}^L G$ с собственными сопряженными сечениями просто выражается.

[59]Мы взяли фактор 2 из [WW], но он иногда является препятствием. Есть еще одно обстоятельство, которое появляется при изучении расслоений, линейные расслоения степени 1, которые мы рассматривали с такой осторожностью в предыдущем разделе, не появляются в теории Гекке для группы GL(1).

[60]предположительно кривая с родом нуль.

становится группой, а умножение просто сложением точек. Это отвечает на вопрос после (36.m), который остался ранее открытым.

Мы можем, в частности, воспользоваться этим утверждением из [AB], чтобы уточнить наше обсуждение уравнения (36.1). Эти замечания, конечно, не совсем удовлетворительны, потому что они предполагают полное понимание утверждения и его доказательства, но очевидно что это увело бы нас слишком далеко. Кроме того, ясно, что мы имеем дело с вопросами, которые знакомы знатокам. В любом случае в заявлении выше подразумевается, что отодеждествление, которое оно описывает, влечет за собой отношение к тензорным произведениям линейных расслоений.

**Переход от $\Gamma_{\text{aut}}$ к $\Gamma_{\mathbf{R}}$.** Мы применяем [AB, Th. 6.7] к GL(1) расслоениям и связностям, изучая гомоморфизмы $\Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathrm{GL}(1)$. Явно, что $ABA^{-1}B^{-1} \mapsto 1 \in \mathrm{GL}(1)$. Итак, $z \in \mathbf{Z} \mapsto \exp(2\pi i n z)$, $n \in \mathbf{Z}$. Образы $A$, $B$ равны $\exp(2\pi i\alpha)$, $\exp(2\pi i\beta)$, где $\alpha$, $\beta$ на данный момент не определены. Теперь мы прерваем себя чтобы размышлять. Мы ищем представления $\Gamma_{\text{aut}}$ связано с собстенным сопряженным сечением, сейчас в GL(1). Одномерное представление $\Gamma_{\text{aut}}$ дано представлением $\mathbf{Z}$ в GL(1), $z \in \mathbf{Z} \to \exp(2\pi i n z)$, и двумя числами $\alpha$, $\beta$ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Эти два числа появились как $\alpha/n$ и $\beta/n$ в обсуждении, предшествующем формуле (53). К сожалению, я не смог поддерживать последовательное значение. Итак два множества параметров одинаковы. Остается описать связности, определенные, согласно [AB, Th. 6.7], этими параметрами, то есть этими представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в GL(1). Они являются произведениями представления $\mathbf{U}(1)$ с представлением группы $\pi_1(M)$. Представление группы $\mathbf{U}(1)$ дано целым числом. Это является степенью основного линейного расслоения $Q$, как фактор расслоения, которое связано с данным представлением. Второй фактор - плоское линейное расслоение, определяемая представлением $\pi_1(M)$, таким образом, непосредственно фундаментальной группой без расслоения $Q$ двумя параметрами $\alpha$, $\beta$. Однако нам не нужны все пары, тодько те, которые дают периодическую функцию. Для других групп это будет вопрос периодических сопряженных классов. ■

Читатель заметит, что группа $\mathbf{U}(1)$ в [AB, 6.6] ещё не была важной частью нашего обсуждения. Это потому, что те одномерные представления группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которые уместны в данном контексте, тривиальны по его прообразу в этой группе. Я подчеркиваю, что теория Янга-Миллса является важным фактором в нашем обсуждении, но что нам нужна только небольшая часть этой теории. Прежде всего, мы имеем дело с теорией для кривых. Во-вторых, ограничение гомоморфизма $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \mapsto G$ к $\mathbf{U}(1)$ или его обратному образу в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ особенного вида. Оно так, что $\mathbf{Z} \to 1$. Другие возможности возникают для GL(2), которая для нас главный случай.

Однако теория для этой группы будет выведена из теории для GL(1), используя, прежде всего, эту теорию вместе с индуцированными представлениями в рамках групп $\Gamma_{\text{aut}}$ с одной стороны, и групп $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с другой стороны.

Для $G = \mathrm{GL}(1)$, мы выбрали особенный класс представленных $\rho$, и потом подмножество связностей Янга-Миллса связанных с этими представлениями. Для $G = \mathrm{GL}(2)$ довод подобен. Если представление приводимое, мы рассматриваем две компоненты отдельно, придя к паре связностей и к паре функций как в (53) со сходными условиями. Они будут соответствовать собственным функциям рода $\mathfrak{D}$. Итак пусть $\rho$ неприводимо. Это подразумевает, что $\rho : ABA^{-1}B^{-1} \to -1 \in \mathrm{GL}(2)$ и что, с подходящими координатами,

$$A \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B \to \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{U}(1), \tag{54}$$

итак что

$$J = 1 \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{54.a}$$

Чтобы понять связность, которая определена этим представлением, лучше перейти к неразветвленному двойному наложению $M'$ кривой $M$. Существуют три из них. Какой из них мы выбираем, это только вопрос условности или обозначения. Они дают сходные результаты, но невысказаная кратность, как мы увидим, подлина.[61] Предположим, на пример, что она определяется подгруппой, порожденной $\{A, B^2\}$.

**Ещё одно отступление.** Хотя нам нужнен толъко особенной случай следующого вычисления, лучше понимать то, что верно обще и важно обще обще для других групп. Мы тоже начали изучать формальные свойства отношения между $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ с одной стороне, и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с другой, а также между $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ и классами сопряженности с одной стороной и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и его отношения с связностями Янга-Миллс с другой. В частности, при $m = 1$ мы полностью понимаем соотношение. Хотя здесь нет нашего намерения рассматривать любую группу, кроме GL(1), GL(2), лучше всего включить некоторые общие наблюдения о собственных значениях $\rho(A)$ и $\rho(B)$ при неприводимых представлениях размерности $n$ группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Каждое такое представление дано представлением группы $\Gamma$ ([AB, стр. 559]) и совместимым представлением группы $\mathbf{Z}$ ([AB, (6.5)]). Хотя здесь нет нашего намерения рассматривать другую группу, кроме GL(1) и GL(2), лучше включить некоторые общие наблюдения о собственных значениях $\rho(A)$ и $\rho(B)$ для неприводимых представлений размерности $n$. Основное препятствие к теории для $\mathrm{GL}(n)$ лежит не в теории связей Янга-Миллса, а в теории операторов Гекке, которая еще недоступна для $\mathrm{GL}(n)$. Пусть $m > 0$, н.о.д. $(m, n) = 1$.

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i m/n) & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \exp\bigl(2\pi i m(n-2)/n\bigr) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 & \exp\bigl(2\pi i (n-1)m/n\bigr) \end{pmatrix},$$

(55)

$$B = \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \quad \vdots \quad 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \quad \vdots \quad 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так что $ABA^{-1}B^{-1} = J$ равно $\exp(2\pi i m/n)$ умножению на единицу. Это выражение, конечно, не является однозначно определеным, так как только классы сопряжения имеют значение и образуя класс сопряженности по степеням матрицы $A$ и $B$, мы умножим $A$ и

[61] Я не знаю, как эта проявится для других групп. Для нашей группы это оказалось, но толико в конце концов, ложным утверждением. Я оставил его, чтобы вспомнить неопределенность, в которой я оставался очень долго.

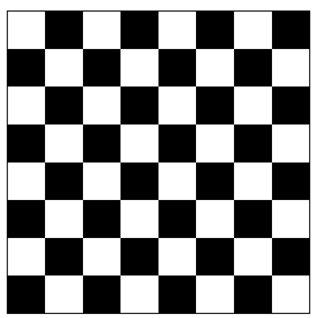
$B$ независимо на любые $n$-е корни из единицы. Эти общие наблюдения важны и полезно их запомнить, но они не неупосредственно уместны. ■

Мы выбрали $M'$. Я сейчас введу, сначала неуклюжым образом, потому что я был неопытен, тогда обычным образом, двумерную связность. Ограничение $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathrm{GL}(2)$ на соответствующую подгруппу $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является тогда прямой суммой и ассоциированным расслоением, существование которого обеспечивается предыдущими соображениями тоже прямая сумма. Затем рассмотрим линейное расслоение над наложением $M'$, связанное с одной или другой его компонентой.

Вернёмся теперь к описанию двумерных расслоений, которое было прервано этими случайными замечаниями. Довольно ясно, что происходит с переносом или проекцией линейного расслоения на $M'$ на двумерное расслоение на $M$. То, что сейчас нужно, словесное описание и проверка, что исход не зависит[62] от трех возможных выборов наложения $M'$. Я извиняюсь перед читателем за такое подробное объяснение, но для моего собственного назидания или поучения, это очень полезно.

Фундаментальную область $\Delta$ для $M$ следует представить как параллелограмм, размещенный более или менее вертикально, от точки зрения читателя, в комплексной плоскости. Для $M'$ эта была бы параллелограмм вместе с его переводом вверх. В самом деле, я хочу тщательно осмотреть построение, объяснив, что, например, как исход зависит от выбора пораждующих элементов $A$ и $B$ и от выбора подгруппы, данной $\{A, B^2\}$ скорее чем данной $\{A^2, B\}$, чтобы определить $M'$. Чтобы включить простую диаграмму, я предполагаю, что $A$ горизонтально и $B$ вертикально, а что фундаментальная область дана квадратом.[63]

(56)



Одномерное расслоение на $M'$ так как связность на нём тоже одномерное расслоение или связность на $\mathbf{C}$. Тогда возьмём прямую сумму этого расслоения и его переноса на $2\omega_2$. Это даёт двумерное расслоение или связность на $M$.

Но лучше думать как тополог. Если бы я был топологом, я бы просто сказал: «Возьмите прямой образ этого линейного расслоения относительно двойного покрытия $M' \to M$, чтобы получить двумерное векторное расслоение на $M$.» Это даёт желаемый исход. В самом деле, хотя для того, чтобы убедить себя в этом, мне нужно приложить несколько усилий, это всего лишь переформулировка определения в [AB, стр. 560]. Мы продолжаем обсуждение, прося читателя не забывать о трех возможных двойных покрытия.

[62]Как уже отмечалось, наоборот, это зависит от выбора.

[63]Для $M'$ существует три выбора. Для одного, фундаментальная область задаётся объединением квадратов в $(0,0)$ и $(1,0)$, для другого - объединением квадратов в $(0,0)$ и $(0,1)$, а третье объединение квадратов в $(0,0)$ и $(1,1)$. Они соответствуют трем ненулевым элементам $L/2L$, а именно $(1,0)$, $(0,1)$ и $(1,1)$. На диаграмме, представленной Энтони Пулидо, это последний выбор, который представлен. Лучше всего представить его с другим выбором фундаментальной области, квадратом повернутым на 45 градусов.

Прежде чем мы продолжим, мы должны рассмотреть влияние перехода на $M'$ на точную последовательность [AB, 6.1]. Дело в том, как мы уже знаем, что $J$ изменяется и становится

$$J' = AB^2A^{-1}B^{-2} = (ABA^{-1})^2B^{-2} = (JB)^2B^{-2} = J^2. \tag{57}$$

Над этим наложением связность есть прямая сумма, компоненты которой неравны. Следовательно её строение ясно. Вопрос сводится к предыдущему случаю, но с заменой $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}' = 2\mathbf{Z}$ и $\mathbf{U}(1)$ заменяется его двукратным покрытием $\mathbf{U}'(1)$. В то же время группа $\pi_1(M)$ заменяется подгруппой с индексом два. Таким образом, сама $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является подгруппой группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с индексом два. Группа $\mathbf{U}$ также изменяется. Раньше это было $\mathbf{Z}\backslash\mathbf{R}$, но теперь это $\mathbf{Z}'\backslash\mathbf{R}$ и мы допускаем представления, которые на $\mathbf{Z}'\backslash\mathbf{Z}$ уникальным нетривиальным характером этой группы. Они определяют, согласно предыдущему объяснению, прежде всего, связность Янга-Миллса размерности один на $M'$ и, во-вторых, по описанной выше конструкции, связность Янга-Миллса на $M$ размерности два. Первое связано с представлением группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ размерности единицы. Второе связано с индуцированным представлением группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, и это имеет размерность два. Оно неприводимо потому что $ABA^{-1}B^{-1} \to J$ и $J \to -1$.

Я не знаю, как это проявится для других групп, но для настоящего примера полезно рассмотреть явление с точки зрения пары групп $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ но тоже с точки зрения пары $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ и $\Gamma'_{\mathrm{aut}}$, одной геометрической и другой арифметической. Для первой пары, для которой соответствующие определения появляются в [AB, стр. 560], очевидно что ограничение представления $\rho$ к группе $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является прямой суммой двух разных представлений, потому что образ $\rho(A) \in \mathrm{GL}(2)$ имеет два разных собственных значения $\pm 1$.[64]

**Вопрос совести.** Есть важные замечания о GL(1)-расслоениях, которые я забыл объяснить, хотя были сделаны необходимые приготовления. Прежде всего, для $G = \mathrm{GL}(1)$ гомоморфизмы на $\rho$ [AB, стр. 560] равны 1 на $z = J = 1 \in \mathbf{Z}$. Это просто всё, что нам нужно. Для группы $G = \mathrm{GL}(2)$ это будет другое дело. На самом деле, для наших целей, для теории автоморфных форм они равны 1 на $\mathbf{U}(1)$ если $G = \mathrm{GL}(1)$. Это значит, что они даны двумя числами в $\mathbf{U}(1)$. Существование связанных расслоений должно быть либо выведено из фразы в [AB, стр. 561], цитированной ранее, либо из нашего обсуждения (36.k). Однако, на первый взгляд, мы имеем дело с различными понятиями плоскости. Во-первых, существует многозначная функция, в которой изменения определяются гомоморфизмом группы Галуа в $\mathbf{U}(1)$ а во-вторых линейная плоская функция, в которой склоны даны двумя действительными числами, изменениями по сторонам фундаментального параллелограма. Таким образом, они действительно одно и то же. Это второй вид, который был предпочителен в (53).

Также необходимо не упускать из виду условие [AB, 6.6] и определение $\rho$. Если ограничение $\rho$ на прообраз $\mathbf{U}(1)$ тривиально, то для определения связности связанной с ним мы можем просто заменить $Q$ тривиальным одномерным расслоением потому что, построение, подразумеваемое в словах ‘Given any homomorphism $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ we then get an induced $G$-connection,’ подразумевает деление на ядро отображения $\rho$, то есть $Q \times_M \widetilde{M}$ заменяется на $1 \times_M \widetilde{M} = \widetilde{M}$ или скорее $\mathbf{U}(1) \times_M \widetilde{M}$. Такая связность обязательно постояна.

[64] Как было замечено, отношение $G_X = G_Y$, появляющееся в верхней части следующей страницы статьи [AB] не обязательно обосновано.

В нашем особном случае постоянство кривизны и метрики означает, что степени $\mathbf{U}(1)$ дают плоскую связность.[65]

То, что становится прозрачным, когда мы начинаем размышлять о собственных значениях Гекке вида $\mathfrak{A}$, это сходство группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с автоморфной группой Галуа, которая так важна в теории автоморфных форм и в теории представлений.[66] Это приводит, подобно этой теории, к некоторой функториальности в теории Янга-Миллса, но также вводит возможность прямых образов, и этого я не видел в обычной автоморфной теории или в теории локального представления. По крайней мере, если бы я это увидел, я его не узнал. Возможно что это замена базы? Тем не менее, в частности в теории для группы $\mathrm{GL}(1)$ и $\mathrm{GL}(2)$ что мы собираемся описать, есть намёк на что-то знакомое. То, что появляется в геометрической теории, а не в арифметической теории, это индуцированные представления и прямые образы. Основное понятие является $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которую я назову группа Атьи-Ботта. Она связана с группой $\Gamma_{\mathrm{aut}}$, с которой мы уже знакомы. Теория над $M'$ является частью теории над $M$. Как известно из арифметической теории – скорее, как ожидается от арифметической теории и от геометрической теории – ряд важных выводов в этой теории может быть в настоящее время выражен с точки зрени автоморфной группы Галуа, хотя мы далёки от общего понимания этой группыю. Присоединенная автоморфная группа Галуа не является просто произведением группы над $M'$ с группой $\mathrm{Gal}(M'/M)$.

Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ является аналог автоморфной группы Галуа, в том смысле, что его гомоморфизмы к группе $G$ определяют связности Янга-Миллса со значениями в $G$. Однако автоморфная группа Галуа имеет также локальную форму. Возможно что некоторые читатели незнакомы ни с её глобальным видом ни с её локальным видом.[67] Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ не имеет локального вида. Скорее мы рассматриваем только её частное, которое определено неразветвленными представлениями, то есть представлениями алгебры Гекке. Следовательно, возможно что этот частный локальный вид, просто локальное ${}^LG$, но мне кажется лучше осмотреть $\mathrm{GL}(n)$ прежде чем прийти к заключению. Возможно что это более сложно.[68]

Таким образом, перенос автоморфных форм от $M$ на $M'$, насколько мы понимаем это, связан с отображением $\Gamma'_{\mathrm{aut}}$ в $\Gamma_{\mathrm{aut}}$. В теории изменения базиса[69] мы переходим от одного поля к большему полю. Поле кривой $M'$ больше, чем поле $M$, так что мы будем изучать здесь нечто подобное. Вкус тем не менее отличается. В самом деле, движение в противоположном смысле, и это путает. $M'$ является накрытием $M$ и мы имеем

[65] Назначение $\mathbf{U}(1)$ и его представлений неясно в этой статье, в которой рассматриваются только $\mathrm{GL}(1)$ и $\mathrm{GL}(2)$. Было бы яснее если мы рассматривали группы более высокого ранга. Скорее они покажутся только в конце этой статьи, но существенным образом.

[66] Лучше обращаться с этим заявлением осторожно. Геометрическая теория и арифметическая теория разны.

[67] Один локальный вид появляется в статье [L2] *On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups,* Math. Surveys and Monographs vol. 31, 1988 как группа Вейля. Локальный вид группы, поскольку речь идёт только о неразветвленных представлениях, но для всех базовых полей, то есть поля алгебраических чисел или поля функций, являются просто $\mathbf{Z}$, так что мы имеем дело с образом 1 в $\mathbf{Z}$ в ${}^LG$ и его сопряженным классом.

[68] Несколько мнемонических словов. Если $M' \to M$ гладкое конечномерное наложение, тогда обратный образ расслоения на $M$ есть расслоение на $M'$ с такой же размерностей. С другой стороны размерность прямого образа расслоения $A$ на $M'$ равна $[M' : M] \dim A$. Первое построение есть изменение базиса, но это влорое которое нам важно.

[69] [L1] *Base change for* $\mathrm{GL}(2)$*,* Annals of Mathematics Studies, vol. 96 (1980).

дело с прямыми образами.[70] В данном случае это соответствует индукции линейного расслоения на $M$ к двумерному векторному расслоению на $M'$. Мы уже подробно описали это в простых выражениях. Теперь цель состоит в том, чтобы объяснить это как индукции из одномерного представления $\Gamma'_{\mathrm{aut}}$ в двумерное представление группы $\Gamma_{\mathrm{aut}}$. Это, в свою очередь, может быть выражено как переход к двумерной связности на $M$, который при интегрировании, как и для GL(1), чтобы определять возможные собственные сопряженные сечения. Затем это будет сравниваться в следующем разделе с классами Гекке, описанными в §VII. ■

Мы будем переходить от форм на $M'$ к формам на $M$. С другой стороны, в теории Янга-Миллса, таким образом, в теории в которой связности являются главными предметами, существует прямой образ, а именно прямой образ слой слоем. Каково его отношение к гомоморфизмам Атьи-Ботта и гомоморфизмам автоморфных групп Галуа? В этой статье мы изучаем простой, но поучительный, случай этого вопроса. Есть много надоедливых второстепенных вопросов, которые нужно объяснить, но их представление неизбежно беспорядачное. Читателю придётся простить меня.

Первое дело, которое мне не ясно, является соотношение между $A_0$ или $\Lambda_0$ и множителем $\mathbf{U}(1)$ в (6.6). Мы также не чётко решили разницу между теорией Янга-Миллса и теорией собственных функций Гекке. Первая, на первый взгляд, для связных пространств, таким образом, для связных компонент множества $\mathrm{Bun}_G$. Вторая для всего $\mathrm{Bun}_G$. У нас, как у Атии, есть фиксированные $A_0$ и $\Lambda_0$. Тензорное произведение с степенями $\Lambda_0$ относит нас от одного компонента к другому. Если $\epsilon$ любое комплексное число абсолютного значения 1, то мы можем расширить функцию из одной связной компоненты $\mathrm{Bun}_G$ в другую с уравнением $f(\Lambda_0 \otimes \Lambda) = \epsilon f(x)$. Это означает, что при построении собственных функций Гекке или собственных значений мы можем сосредоточиться на нескольких связанных компонентах низкой степени. Для GL(1) эта степень нуль и для GL(2) степени 0 и 1. Возможно, я забыл это сказать, потому что я не знал о его значении, но расслоение $Q$ Атьи-Ботта также является расслоением $A$ Атьи. То есть понимается, что они равны (или, может быть, одно из них обратное к другому, в котором случае наше обсуждение должно быть слегка изменено.[71]

Кажется, нет никакого способа избежать введения $A_0$. К сожалению, это, по-видимому, предполагает выбор, насколько это возможно, $A'_0$ для каждого неразветвленного покрытия $M$ и в совместимом виде. Мы можем думать о $A_0$ просто как о точке в $M$ и $A'_0$ как точка в $M'$. Таким образом, можем предположить, что если $M'' \to M' \to M$, тогда $A''_0 \to A'_0 \to A_0$. то есть мы предположим, что мы имеем последовательный набор базовых точок для всех неразветвленных покрытий $M$. Таким образом, у нас есть последовательный способ преобразования линейных расслоений на любой $M'$ на расслоения степени 0. Для двумерного расслоения тензорное произведение степени $\Lambda_0$ преобразует его в расслоение которого степень 0 или 1. Таким образом, достаточно рассмотреть эти две возможности. Конечно, выбор $A'_0$ тогда определяет $\Lambda'_0$.

**Тонкий вопрос.** Чтобы взять прямое изображение, решётка $L'$ должна быть подмножеством решётки $L$. В данном случае, $2L \subset L' \subset L$ С другой стороны, кажется что параметры линейных функций, которые связаны с $L'$, получаются только как долю тех,

[70]В обычной теории группа над большим полем рассматривается как группа над меньшим полем. Отношение к прямым образу не сразу видно. Мы вернёмся к нему. Читатель заметит нескопько повторений. Это потому, что я только медленно понимаю то, что я объясняю.

[71]Мне трудно запомнить точное определение класса Чженя.

которые связаны с $L$, $L' \subsetneq L$. Однако это не так, потому, что [AB, Th. 6.7] позволяет нужную свободу. Неприводимые представления, которые есть существенные представления, даны как склеивание совместных представлений $\Gamma$ и $\mathbf{R}$. $\blacksquare$.

Мы еще не описали пример связи между представлениями группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и линейными расслоениями. Пришло время сделать это. Сейчас ясно, что нам нужно рассматривать только расслоения степени 0. Согласно [AB] оно будет задано одномерным представлением $\pi_M$ и что представление будет, прежде всего, тривиально на $J$, поскольку $J$ является коммутатором, а во-вторых, что он будет тривиальным на $\mathbf{U}(1)$, поскольку степень равна 0. Поскольку мы рассматриваем только эллиптические кривые, то означает, что оно задаётся образами $\exp(4ka\pi i)$, $\exp(4lb\pi i)$ как в (53). Эти два числа лежат в $\mathbf{U}(1)$, но в остальном произвольны. С другой стороны, для тех представлений $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которые имеют отношение к теории Гекке, два числа $k$, $l$ должны быть целыми числами. Согласно обсуждению на стр. 560 из [AB], в частности, уравнение (6.10), представление линейно на R, $x \to \epsilon x$, $x \in \mathbf{R}$, и $\epsilon J = 1$, поскольку $ABA^{-1}B^{-1} = J \in \mathbf{R}$. Это определение числа $\epsilon$! Числа $a$ и $b$ лежат в $\mathbf{R}$. Условие в (53), что они лежат в $\mathbf{Z}$, не накладывается свойством Янга-Миллса, а отношением к собственным значениям Гекке. Более интересным вопросом является функция прямых изображений. Нам нужно только заботиться о том, что $M'$ является двойным наложением $M$, поэтому мы рассматриваем квадратичное расширение полей.

**Некоторые общие замечания.** Хотя наша главная тема сейчас является группой GL(2), возможно что наши заключения будет более убедительные, если мы прервёмся некоторыми замечаниями о GL($n$)-расслоениях для общих $n > 0$. Ограничимся неприводимыми расслоениями. Хотя наша тема в этой статье главным образом GL(2), я бы предположил, что с помощью [A] случай общего $n$, если не простой, для этого что влечёт за собой нахождение всех классов собственных сопряженных сечений для GL($n$), по крайней мере, стоит размышления.

Мы уже начали изучать формальные свойства отношения между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с одной стороны, а $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ с другой, а также отношение между группой $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ и сопряженными классами с одной стороны и отношение между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и связностами с другой. В частности, при $m = 1$ мы полностью понимаем все соотношения.

Эти наблюдения связаны с другими второстепенными вопросами, которые, хотя они и связаны с затруднениями знакомыми из общей теорией автоморфных форм, были неожиданными в тепернешной статье. Поле функций кривой $M'$ является квадратичным расширением его для кривой $M$. Таким образом, $L$-группа группы GL(1) для $M'$ является расширением $L$-группы для $M$, а именно $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ заменяется на $\mathbf{Z}_2 \times \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$, потому что уместная группа Галуа $\mathbf{Z}_2$. Это изменение должно быть включено в соответствующие диаграммы [AB, 6.5] и [AB, 6.6]. Точнее, если мы рассматриваем геометрическую теорию над двойным наложением $M' \to M$, то группа Галуа $\mathrm{Gal}(M'/M)$ должна быть включена в группу Галуа диаграммы (6.6), которая изменяется для $M'$ с тем, что $\pi_1(M)$ заменяется на $\pi_1(M')$, а $J \to 2 \in \mathbf{Z}$ но $J' \to 1 \in Z$, так что $(J')^2 = J$. Таким образом, представление $\pi'$ группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является даным $z \to z$, $z \in \mathbf{U}(1)$ и данном представлением группы $\pi_1(M')$. То есть, соответствующие представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ есть расслоенное произведеное представления $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M')$. Другими словами, соответствующие представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ так что их ограничение к $\mathbf{Z}$ переводит $J'$ в $-1$, но $J$ в 1. Таким образом, включение $G$ в теорию несколько тонкое, потому что при переходе от расслоений на $M'$ и связанной с ним связности Янга-Миллса, который выполняется прямым изобразом, есть расширение одномерного представления группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ к индуцированному двумерному представлению $\Gamma_{\mathbf{R}}$. ■

В качестве второго шага мы разъясняем дальше цель расслоения $A_0$ в данных обстоятельствах, собственных сопряженных сечений для GL(2) по эллиптической кривой. Они изучались в §VI и делились на два класса: вид $\mathfrak{A}$ и вид $\mathfrak{D}$. Те, вид которых $\mathfrak{D}$ уже были рассмотрены, и их отношение к представлениям $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ было выяснено, хотя и не к представлениям группы Атьи-Ботта. Мы занимаемся сейчас собственными функциями вида $\mathfrak{A}$. Они имеют любопытное, но уместное свойство. Они исчезают на множестве $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, как утверждалось в предложении после уравнения (32). Они также равны 0 на множестве $\mathfrak{D}$. Таким образом, они могут быть однозначно выражены как тензорное произведение степени линейного расслоения $\Lambda_0$ и расслоения степени 0 или 1. Таким образом, эти собственные функции, помимо характера группы $\mathbf{Z}$, определяемые их значениями на расслоениях в $\mathfrak{A}$ степени 0 или 1. Именно, каждое расслоение $\Theta$ размерности два есть произведение линейного расслоения $\Lambda$ и расслоения $\Theta'$ степеней 0 или 1. Каждое собственное сопряженное сечение $f$ так, что $f(\Lambda\cdot\Theta) = \chi(\Lambda)f(\Theta)$, где $\chi$ характер группы Пикара. В данном случае, двойственность навязала себя, но она требует некоторого объяснения.

Мы обратимся к теории Янга-Миллса, позволяя себе некоторую избыточность. Эта теория, которая показывается на уровне связностей, таким образом, связанных многообразий, в противоположность теории Гекке, которая определяется одновременно в каждой степени. Эти связанные многообразия связаны друг с другом умножением с степенью расслоения $A_0$, поэтому каждому присваивается целое число. То есть, отдельные множества отодеждествлены друг с другом, несколько произвольным образом, так что функция или связность на расслоениях нулевой степени определяет функцию, соответственно связность, на всём $\mathrm{Bun}_G$. Таким образом, функция на одном из многообразий может быть преобразована ко всем остальным, используя это целое число и данный характер $\mathbf{Z}$, первый умножитель в (1.d). Таким образом, мы поняли цель расслоения $A_0$. Однако мы не понимаем этого в рамках связностей Янга-Миллса. Но есть трудность! Тензорное произведение с $A_0$ не меняет детерминант расслоения, оно меняет степень. Эта степень - размерность расслоения. Так, например, для расслоения размерность которых равна двум этот умножитель равен $A_0^2$ , и это для нас важная задача, связности чётной и нечётной степени должны рассматриваться отдельно.

Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ связана не только со вторым множителем (1.d), но и с произведением. Первый фактор $\mathbf{Z}$ связан с множителем $\mathbf{U}(1)$ в [AB, (6.6)]. Из [AB, (6.6)] и последующего объяснения видно, что мы можем изменить представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ степенью представления $\mathbf{U}(1)$ само по себе, производя его с $\Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathbf{U}(1)$ и что это изменит степень на произведение этой степени со размерностей исходного представления. Вывод состоит в том, что в нынешних условиях нам нужно рассматривать только двумерные расслоения степеней 0 и 1.

Сравнение связностей Янга-Миллса, с собственными классами Гекке, с представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и с представлениями $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ является разборчивым. Поэтому мы перестаем объяснять, что необходимо, и записывать то, что мы сделали. Соответствующее сравнение, сравнение множества $\{\, \rho\otimes\sigma^n \mid n\in\mathbf{Z}\,\}$, где $\sigma$ представление $\mathbf{U}(1)$ как самого себя и $\rho$ представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$, потому что $\mathrm{Bun}_G$ несвязно и определение группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в [AB] приспособлено к связанным кривым. Напомним, что в (1.d) имеется подразумеваемый выбор $A_0$. Вычисления, приводящие к (56), дают понять, что для сравнения с представлениями

$\Gamma_{\text{aut}}$ только $\Gamma_{\mathbf{R}}$-представлений, для которых $J$, который мы можем считать единицей 1 в R, имеет образ конечного порядка.[72]

Одномерные представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которые соответствуют одномерным расслоениям обязательно тривиальны на $\mathbf{R}$ из [AB, 6.5] и уже рассмотрены. Для них $J \to 1$. Напомним, что мы имеем дело с рядом представлений, бесконечным в обоих направлениях. Для центрального элемента этого ряда связностей и нашего выбора метрики и связности $Q$, связность постоянна. Остальные равномерно калебаются и все периодические с периодом, разделяющим один. Нет конечномерных представлений $\Gamma_{\mathbf{R}}$, для которых образ $J$ иррационален.

Теперь остаётся открытие отношения собственных функций вида $\mathfrak{A}$, которые не также вида $\mathfrak{D}$, с одной стороны, к не приводимым двумерным неприводимым представлениям группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma_{\text{aut}}$, с другой стороны. Ещё раз есть условие рациональности, которое накладывается на первое. Три множества $\mathfrak{S}_i$ различны, а именно поведение каждого определено по ег отношению к трём характерам $\chi_i$. Они соответствуют трём возможным неразветвленным квадратичным расширениям или трём покрытиям $M'$ кривой $M$. Рассмотрим одно из них, скажем то, фундаментальная группа которого порождена $A^2$ и $B$.

Мы рассматриваем квадратичное покрытие $M'$ кривой $M$. Какого влияние такого изменения на произведение группы Атьи-Ботта $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ с $\text{Gal}(M'/M)$. Это достаточно ясно. Группа $\pi_1(M')$ в [AB, 6.5] содержается в $\pi_1(M)$. Отсюда следует, что $J'$ для $M'$, то есть $J' \in \Gamma'_{\mathbf{R}}$ отображается как $2J$, то есть $J^2$, в $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Это определяет отображение из $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$, $x \in \mathbf{R}$ переходит в $2x$. Очевидно что индекс образа $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ равен двум. Это означает, благодаря теореме Атьи-Ботта, что одномерное расслоение Янга-Миллса для $M'$ даёт двумерное расслоение Янга-Миллса для $M$. Геометрически, второе просто прямой образ первого, но стоит, лучше усвоить все эти понятия и построения, которые могут быть для читателя столько незнакомами как для меня, и продолжить изучение определений. В частности, полезно раздумывать о природе прямого изображения в связи с настоящими размышлениями.

Напомним, что автор этой статьи имеет понятие о теории автоморфных форм над полем алгебраических чисел и над полем функций на алгебраической кривой, над $\mathbf{C}$, но и над конечными полями хотя мы не рассматриваем их в этой статье. Руководящим принципом является то, что собственные функции Гекке параметризуются, возможно с второстепенными изменениями, гомоморфизмами гипотетической автоморфной группы Галуа в $L$-группую. Строение функториально, поэтому гомоморфизм от группы ${}^LG_1$ до ${}^LG_2$ приводит к отображению из собственных сопряженных сечений Гекке группы $G_1$ к тем группы $G_2$. С этим связаны много вопросов, в основном нерешенных. В этой статье мы имеем дело главным образом с GL(1) и GL(2).

**Извинение.** Есть много причин для объяснения. Возможно что некоторые из них являются повторением других. Это так. Для меня это просто подтверждение функториальных связей, в котором теория автоморфных форм, и поэтому другие теории,

[72]Мы можем ожидать, что проблемы установления функториальности в геометрическом контексте похожие на те, которыйе здесь рассматриваются, появляются также в арифметической теории. В этой теории они, несомненно, будут более сложными, включая одновременное использование формулы следа и расчётов, которые походят на расчёты в книге Хассе, Klassenkörpertheorie, хотя гораздо более трудны. Есть мало математиков с мужеством, чтобы рассмотреть эти проблемы, и я не среди них.

подобные теории Янга-Миллса, связанные с ней, вложены. Я прошу прощения у читателя за любую избыточность, которую он считает чрезмерной. Я не могу одновременно воспринимать все последствия. ■

Мы представили возможный выбор этой автоморфной группы Галуа $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ по аналогии с теорией полей классов. Если бы мы имели дело с автоморфными формами над полем чисел, предположение состояло бы в том, что эта группа имела бы как фактор группу Галуа рассматриваемого поля, ещё точнее, обратную предельную группу групп Галуа его конечных расширений. Здесь она точно обратная предельная группа группы Галуа неразветвленных конечных покрытий Галуа кривой $M$.

Для поля алгебраических чисел, она предположительна, ещё больше, так что она учитывала $L$-функции всех (возможно, всех гладких) алгебраических многообразий. То есть, эта группа была бы важной составной частью в создании теории $L$-функций для алгебраических многообразий над числовыми полями. Мы предложили выше группу $\Gamma_{\mathrm{aut}}$, которая будет играть сходную роль для полей функций над кривой $M$, хотя мы исключали пока возможность разветвления.

Как мы уже отметили, связности Янга-Миллса являются признаком связных многообразий, поэтому любое сравнение происходит между бесконечной последовательностью, от $-\infty$ до $\infty$ связанных связностей и представлением $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Сверх того, если представления конечномерны, то образ $J$ должен быть конечного порядка. Наконец, мы имеем дело с представлениями, в которых образы $A$ и $B$ имеют конечный порядок. Если это признано, существование биективного соответствия между такими семействами представления и представлениями $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ ясно.

Если не быть осторожным, то обстоятельство, что расслоения вида $\mathfrak{A}$ двумерны, хотя они связаны с параметрами, которые являются одномерными, могут привести к путанице.

Что нужно объяснить сейчас, поскольку в этой статье мы рассматриваем только особенные кривые, это отношение индукции одномерного представления группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ к двумерному представлению $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и к собственным сечениям рода $\mathfrak{A}$. Кривая $M'$ является одной из трёх возможных эллиптических кривых, покрывающих $M$ как двойное наложение. Чтобы быть конкретным, мы считали, что это тот, чья фундаментальная группа порождена $A^2$ и $B$. Эти три кривые соответствуют трём характерам $\chi_i$ группы $\mathrm{Pic}_2(M)$

Важно отметить, ещё раз, что $J$ заменяется на $J' = J^2$, то есть $J' = 2J = 2$ в $\mathbf{R}$. Основное отношение $ABA^{-1}B^{-1} = J$ или эквивалентно $BAB^{-1}A^{-1} = J^{-1}$. Следовательно $ABA^{-1} = JB$ и $A^nBA^{-n} = J^nB$. Фундаментальная группа $\pi_1(M')$, связанная с покрытием $M'$, имеет индекс два в $\pi_1(M)$. Следовательно $[\Gamma_{\mathbf{R}} : \Gamma'_{\mathbf{R}}] = 2$.

Чтобы не путать себя и читателя, я рассматриваю собственные сечения Гекке только на связной компоненте $\mathrm{Bun}_G$, хотя они не могут быть определены исключительно для этой компоненты, а связности Янга-Миллса без какой-либо явной ссылки на возможность тензорого произведения с представлениями группы $\mathbf{U}(1)$. Необходимое дополнительное обсуждение достаточно ясно. Чтобы быть точным, если представление $\mathbf{R}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ тривиальное представление, тогда, благодаря подготовке в §VII мы имеем дело с тривиальной связностью с постоянными интегралами, но если представление $\mathbf{R} \in \Gamma_{\mathbf{R}}$ не тривиально, то мы имеем дело с степенью связности $Q$ [AB, стр. 560] построенной чётким путём в §VII.

Существует три класса собственных сечений, каждый из которых соответствует подгруппе порядка два из $\mathbf{C}/L$ или решёткой $L'/L$. Кривая $M'$ определяется как покрытие

$M' = \mathbf{C}/L'$, $L \supsetneq L' \supsetneq 2L$, кривой $M = \mathbf{C}/L$, таким образом, что оно покрытие второго порядка. Прямой образ линейного расслоения на $M'$ будет тогда расслоение размерности два на кривой $M$. С другой стороны, линейные связности Янга-Миллса на $M'$ с однозначими интегралами параметризуются, как мы знаем, характерами $M'$, но теперь мы знаем, как с этим обрашаться. Однако, только те, которые не являются характерами $M$, для которых условия периодичности более требовательны, уместны сейчас. В самом деле, точнее, они параметризуются одномерными представлениями группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или, еще точнее, одномерными представлениями, которые отображают $\pi_1(M)$ в конечное множество. Нам нужно показать, что функции на $\mathfrak{A}$, занимавшие нас, параметризуются даже заданными нами одномерными связностями Янга-Миллса на $M'$ но также их прямыми изображениями на $M$, где $M'$ двойное наложение кривой $M$.[73] Более чётко, что $M'$ определяется $L'$ в $L$, где $L/L' = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ но мы обрабатываем функции на $\mathbf{C}/\widetilde{L}$, которое является фактором $\mathbf{C}/L$ и которое изоморфное $\mathbf{C}/L'$.

В §VI мы видели, что собственные сечения вида $\mathfrak{A}$, которые не принадлежат к виду $\mathfrak{D}$, даны характерами группы $\mathbf{C}/L'$ которые не являются функциями на $\mathbf{C}/\widetilde{L}$, $\widetilde{L} = L/2$.

В конечном итоге необходимо будет учесть возможность того, что два разных линейных расслоения имеют один и тот же прямой образ, но на данный момент мы это не замечаем.

Обстоятельства таковы. Существуют параметры для $M'$. Они определяют в первую очередь линейные расслоения на $M'$ с связностями а также одномерные представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Связанным с каждым из линейных расслоений с связностью является его прямое изображение, двумерное векторное расслоение на $M$ с связностью. И начальная связность и её прямой образ являются соединениями Янга-Миллса. Каждый из них связан с представлением, одним группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, другим группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Нам нужно показать, что первое индуцировано из второго, так что необходимая совместимость ясна. Есть совместимости, которые мы должны чётко понимать. Формализм позволил нам провести проверку на линейные расслоения степени 0 и на определённый класс представлений $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Одно есть важное обстоятельство, которое позволяет сделать сходную редукцию для двумерных расслоений. Это то, что соответствующие собственные функции равны 0 на $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, так что на этом множестве собственные сечения Гекке не определены. Это означает, что осматривая сопряженные сечения мы можем, взяв тензорные произведения со степенями $\Lambda_0$, уменьшить наше исследование до расслоения степени 0, как мы это и сделаем. Наша озабоченность по поводу собственных сечений Гекке связана главным образом с их ограничением на расслоения степени 0, а их значения на остальных являются тензорным произведением с мощностью $\Lambda_0$. Это так же хорошо, потому что тензорное произведение степеней расслоения $Q$, которое, хотя мы и построили его в явном виде для эллиптических кривых, является несколько неясным предметом, а не легко воспринимаемым. Это мы сделали в §V. Важным и интересным является прямой образ этих расслоений и их отношения к двумерным представлениям группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma_{\mathrm{aut}}$. Для первого это объясняется в [AB]. Для второго это является следствием соотношение между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma_{\mathrm{aut}}$, а именно между $\Gamma$ и $\Gamma_{\mathrm{aut}}$, где $\Gamma$ подгруппа $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которая покажется в [AB] и в (1.a). Мы объяснили выше назначение $\Gamma_{\mathbf{R}}$ как расширение $\Gamma$ в [AB]. Мы действительно отложили его, хотя и не полностью, путем перехода к расслоениям степени нуль.

[73]Окончательно будет необходимо учесть возможность того, что два разных линейных расcдоения имеют один и тот же прямой образ, но на данный момент мы это не замечаем. Это понятно, если не по какой-либо другой причине тогда из [AB, Th. 6.7]

Прежде чем начать, позвольте мне объяснить, как развиваются отражения. Мы ввели раньше соответствие между одномерными представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и одномерными собственными сечениями Гекке. Это доступно для всех эллиптических кривых, в частности $M'$. Группа $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ вложена в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ как подгруппа индекса 2, таким образом, что $J'$ отображает на $2J$. Индекс 2 задаётся через $\big[\pi_1(M):\pi_1(M')\big]=2$.

Параметры собственных сечениeй Гекке вида $\mathfrak{D}$, которые не равны сечениям типа $\mathfrak{A}$, связаны с одним из трех возможных покрытий $M'$. Для данного $M'$ параметры, которые даны в §VI, являются теми характерами группы $M'$ которые не являются характерами $M$. Собственные сечения являются показатели интегралов от связностей Янга-Миллса.

Кроме того параметр, который характер $M'$, можно сочетать с любым характером группы $\mathbf{R}$, который является $-1$ на $J$ и 1 на $J'$, чтобы определить одномерное представление $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Это определяет по индукции двумерное представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которое обязательно неприводимо, иначе образ $J$ обязательно будет единичная матрица. С другой стороны, характер $M'$ также определяет в описанной выше теории для $\mathrm{GL}(1)$ линейное расслоение на $M'$ с связностью, прямой образ которого является двумерным расслоением на $M$ со связностью. Интеграл этой связностей затем даёт класс сопряженности Гекке.

Остается вопрос о том, какое представление или какой характер $\mathbf{R}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ мы должны принять. Диаграмма [AB, 6.6] заменяется на

$$1\to\mathbf{Z}'\to\Gamma'_{\mathbf{R}}\to\mathbf{U}'(1)\times\pi_1(M')\to 1,\quad \mathbf{Z}'=2\mathbf{Z},\quad \pi_1(M)/\pi_1(M')=\mathbf{Z}_2,$$

и последовательность

$$1\longrightarrow\mathbf{Z}_2\longrightarrow\mathbf{U}'(1)\longrightarrow\mathbf{U}(1)\longrightarrow 1$$

точна. Две группы вращения окружности, конечно, изоморфны.

Как я считаю, мы уже наблюдали, одномерное представление, от которых мы индуцируем, не являются тривиальными на $J$, так что следующее двумерное представление обязательно неприводимо. Каждый из этих характеров определяет связность на $M'$ вида Янга-Миллса. Он имеет степень 0, и его прямой образ на $M$ также будет иметь степень 0 и вид Янга-Миллса.[74] Мы хотим убедиться, что связанные двумерные соединения имеют вид Янга-Миллса и что интегрированные экспоненты соединений определяют связанные собственные части. Это в некотором смысле очевидно, но стоит попытаться разобраться в путанице определений.

**Дополнительние общие замечания.** Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ почти прямое произведение группы $\mathbf{R}$ с группой $\Gamma$ [AB, стр. 559]. Она равна этому произведению разделенному на $\big\{\,n\times J^{-n}\;\big|\;n\in\mathbf{Z}\,\big\}$. Имея это в виду. а также соотношения (55), я хотел бы рассмотреть неприводимые конечномерные представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Это, конечно, просто тензорное произведение неприводимого представления $\rho(\cdot)$ группы $\Gamma$, которые мы уже обсуждили, с совместимым характером $\chi$ группы $\mathbf{R}$, то есть $\rho(J)^{-1}\chi(1)$ равно единице. Так как мы можем продолжить каждый характер группы $\mathbf{Z}$ до характера группы $\mathbf{R}$, из точной

[74] Сейчас нам нужно общее замечание. Пусть $\widehat{M}$ конечное накрытие Галуа кривой $M$. Мы можем сперва выбрать $\widehat{Q}$ и тогда для каждое $M'$, $M\subset M'\subset\widehat{M}$, выбрать

$$Q'=\bigotimes_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\widehat{M}/M')}\sigma\widehat{Q}.$$

Это разумеется в следующем обсуждении, в котором $\widehat{M}=\mathbf{C}/2L$. Вопрос возникает если это совместно с нашими выборами. См.[WW].

последовательности [AB, 6.6] следует, что каждое неприводимое представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ является произведением представления $\rho$ группы $\mathbf{R}$ и представления группы $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M)$. Мы уже управились с этим вторым сомножителем выше, скорее, с его первым сомножителем. Это означает, что мы должны рассматривать только неприводимые представления $\pi_1(M)$, но это мы сделали в (55). Сомножители $\alpha$ и $\beta$ имеют мало строительное значение.

Если мы предположим, что, как бы то ни было, представление группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{U}(1)$ просто $x \to \exp(2\pi i x a)$ и если мы предположим, опять же, как мы можем, что $a$ является рациональным, тогда мы можем записать его как $a = b + c/d$, где $b$, $c$, $d$ целые числа и $0 \leqslant c/d < 1$ и $c \geqslant 0$ и $d > 0$ взаимно простые. То, что я хочу сделать, это установить, что собственные сечения типа $\mathfrak{A}$ появляющиеся в §VII могут быть осуществлены как прямые образы интегралов связности Янга-Миллса на квадратичных покрытиях $M$. Как только кто-то осознает эту возможность, возникает соблазн изучить её в более общих рамках, в частности, с покрытиями более высокой степени. Однако это сразу открывает слишком много возможностей. Я вполне доволен тем, что я оставлю эти исследования другим.

Мы должны, однако, сначала понять, почему Атья-Ботт ввели поле $\mathbf{R}$ и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в [AB, 6.4]. Ясно, что в наших условиах[75], это просто разрешить сложение к связности произвольного мнимого члена $i\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$. Для наших целей удобно ограничиваться рациональными множителями, потому что мы хотим ввести периодические связности. Тогда $\mathbf{R} \to \Gamma_{\mathbf{R}}$ в [AB, 6.5] заменяется с $\mathbf{Q} \to \Gamma_{\mathbf{Q}}$, то есть образ $J$ в $\mathbf{Q}$.

Точнее, если рассматриваются только неприводимые конечномерные представления $\pi_1(M)$, то согласно (55) существуют три параметра: $a$, $b$ и образ $J$, который обязательно является корнем из единицы. Более того, для наших целей $a$ и $b$ являются корнями единства. Именно это отличает $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ от $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Образ $J$ также обязательно является корнем из единицы, если представление конечномерно. Это означает, что представление построено в двух частях. Сначала характер группы $\mathbf{R}$ вида $x \to \exp(iax)\exp(ibx)$ с $a \in \mathbf{Q}$, и $0 \leqslant a < 1$, а с $b \in \mathbf{Z}$ целое число. Сначала и $a+b$ является произвольным действительным числом но для наших целей лучше что $a + b \in \mathbf{Q}$. Таким образом, $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ является обратной предельной группы. Второй из этих характеров группы $\mathbf{R}$, $x \to \exp(ibx)$, можно получить композицией $\Gamma_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{U}(1)$ (или $\Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathbf{U}(1)$) с степенью единственного представления $\mathbf{U}(1)$. Это представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или, скорее, $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, обратный предел конечных подгрупп в $\mathbf{U}(1)$, а скорее представления обратного предела $\mathbf{U}(1)$ в $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, который представляет собой группу. Они должны быть дополнены совместимым представлением $\pi_1(M)$, таким образом, совместимым с изображением $J$, как в (55) и следовательно конечного порядка.

Следующий шаг будет казаться сначала неуместным. Если мы имеем подрешётку $L'$ заданной решётки $L$ в плоскости и второго ранга, то мы можем выбрать базис $L$ такой, что относительно этого базиса $L' = \{abc, bd\}$ $c$, $d \in \mathbf{Z}$ произвольны, $a$, $b \in \mathbf{Z}$, $a$, $b > 0$. Для настоящих целей, а именно для группы $\mathrm{GL}(2)$, $a$ будет равно 2 и $b$ равно 1. Для других групп будет больше координат и больше возможностей. Для наших целей мы можем предположить, что $b = 1$. В настоящее время рассматриваются две эллиптические кривые, кривая $M$, с которой мы начали, и её решётку $L$ и подрешётку $L'$, таким образом, покрытие $M'$, которое, в свою очередь, покрывается кривой определенной $2L$, которая сама $M$. Есть три таких покрытия $M'$, подразумевые в §VI.

[75]То есть, представление $\Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ определено данным представлением $\Gamma_{\mathbf{R}} \to \pi_1(M)$ и $\pi_1(M) \to G$

Объяснив это, мы вернёмся к анализу предыдущего параграфа.[76] Прежде всего, ограничение неприводимого представления на $\mathbf{Z}$, подгруппа, порожденная элементом $J$, задаётся корнем из единицы $\exp(2\pi ia/k)$, где либо $a = 0$ и $k$ не имеет значения или $k > 0$ и $0 < a < k$, о.н.д.$(a, k) = 1$. Тогда представление на $\mathbf{R}$ задается формулой $x \to \exp\bigl(2\pi i(a/k + l)\bigr)x$, где $l$ целое число и $0 \leqslant a < k$ . Затем $l$ определяет характер группы $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, таким образом, что оно целое число, и это целое число определяет сначало представление $\mathbf{U}(1) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ которое, как видно из [AB, 6.6], в свою очередь определяет представление $\mathbf{R}$. Разница между этим представлением группы $\mathbf{R}$ и исходным представлением представляет собой представление $\mathbf{R}$, заданное дробью $a/k$, которое само задано его значением в $J = 1 \in \mathbf{R}$, которое корень из единицы. Заметьте что $k$ длина полного периода и $a$ число волны в периоде.

Мы уже заметили что тензорное произведение с представлением группы $\mathbf{U}(1)$ изменяет порядок на целое число. Таким образом, мы можем предполагать, что $l = 0$. Итак рассматриваются четыре числа, $a$, $k$ и два числа $\alpha$ и $\beta$ в (56), которые будут корнями из единицы, если мы исследуем $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Более того, предметом нашего рассмотрения в этой работе теперь являются только неприводимые расслоения для GL(2), так что согласно замечанию, следующему (56) $a = 1$, $k = 2$. Этот случай, без сомнения, типичен. Нам дана кривая $M$ и двукратное покрытие $M'$. Это покрытие подразумеваемо обсуждается выше. Более того, мы также обнаружили ранее, следуя определениям [AB], что данные, имеющиеся под рукой, определяют одномерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Эти данные одномерное представление $\mathbf{U}(1)$, таким образом, целое число, вместе с характером конечного порядка группы $\varinjlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. и, наконец, образы, также конечных порядок, образующих $A'$, $B'$ в $\pi_1(M')$, выбранный для совместимости с представлением $M'$ как частное $\mathbf{C}$ на решётке $L'$. Этот характер дан[77]

$$x \to \exp(2\pi iax), \quad x \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z},$$

и совместимым образом на всех более высоких уровнях обратного предела.

Прежде чем продолжить, я наблюдаю то, что, хотя очевидно, возможно, было упущено. Ограничение неприводимого двумерного представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ к подгруппе порожденной $\pi_1(M)$ вида (55). Кроме того, $J = -I$. Итак, единственный свободный параметр $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\chi(J) = 1$.

Я представляю это построение несколько иначе, так что оно ясно. Первым шагом в построении одномерного представления для $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$, но также и для $\Gamma_{\mathbf{R}}$, является построение представления $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(\mathbf{U})$, а затем совместимого представления группы[78] $\varinjlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Сейчас нужно оъяснить отношение между $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или то что между $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Возможно читателю что это уже ясно. Достаточно объяснить это для второй пары. Единственная разность, кроме неравенства $\pi_1(M') \subsetneq \pi_1(M)$, отношение $J' = 2J$. Кроме того $[\Gamma_{\mathbf{R}} : \Gamma'_{\mathbf{R}}] = 2$, но это потому что $M'$ двукратное покрытие $M$, то есть $\bigl[\pi_1(M) : \pi_1(M')\bigr] = 2$. Мы знаем как проходить из одномерной связности Янга-Миллса

[76] Возможно что эти по-видимому мелкие сложности, самая суть неабелевой теории полей классов для поля функций алгебраической кривой определенной над $\mathbf{C}$. Итак лучше не гнушаться ими. К сожалению, построение, как моё объяснение, неуклюжо и тоже повторяющееся. Моё понимание полно, но ещё несколько неопределёно. Я ещё не могу объяснить его линейно! Наличие точных элементарных вычислений, по своему сходству с классической теорией от Гаусса до Хассе, обнадёживает.

[77] Мы, к сожалению, перестали быть последовательными в наших обозначениях. Координаты $(x, y)$ здесь появляются в (36.c) и в других местах как $(a, b)$. Полная последовательность не в моих силах.

[78] Если читатель немного смущен различными пределами, так же как и я.

на $M'$ другой на $M$. Это прямой образ от одномерного расслоения к двумерному расслоению. Какова связь между соответствующими группами Янга-Миллса и связанными представлениями? Естественное предположение состоит в том, что одно индуцируется из другого.

Рассмотрим сначала вложение первого во второе. Для простоты - вложение $\Gamma'_{\mathbf{R}} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$. Это чётко определяется вложениями $aJ' \mapsto 2aJ$, $a \in \mathbf{R}$ и $\pi_1(M') \subset \pi_1(M)$. Таким образом, каждое одномерное представление группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ определяет двумерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, обязательно неприводимым, поскольку образ $J'$ равен 1, и образ $J$ равен $-1$. Это условие на ограничении первого прелставления на $\mathbf{R}$. Оно даёт в данных обстоятельствах $x \to \exp(\pi m x)$, $m$ нечётно. Значение этого условия станет очевидным позже. Я подчёркиваю, что мы обсуждаем здесь ключ этой статьи!

Последний вопрос, предварительный для нас, заключается в том, является ли это индуцированное представление, представлением связанным с прямым образом. Мы можем также предположить в настоящем обсуждении, так как это условие, имеющее для нас значение, что условие в последнем предложении предыдущего абзаца выполнено. То есть $m$ нечётно. С одной стороны, это видно из начальных определений а [AB, стр. 560], с другой стороны, это определение довольно короткое. Тем не менее, я тоже буду краток. Это не место для широкого обсуждения их построения. В частности, фактор $\mathbf{U}(1)$ не играет роли в нынешних условиях,[79] так что речь идет о сравнении двух расслоений, одно над $M$, другое над $M'$, каждое определено тем же расслоением над универсальным накрытием $M$. Следовательно наше утверждение -тавтология.

Всё, что остается сейчас - сравнить эти выводы с заключениями §VII. Это тема следующего раздела.

Прежде всего мы должны чётко понимать соотношение между диаграммой [AB, 6.5] и соответствующей диаграммой для $M'$. Вторая вложена в первую с $\mathbf{Z}' = 2\mathbf{Z}$, так что $\mathbf{U}'(1)$ двойное покрытие группы $\mathbf{U}(1)$. Группа $\pi_1(M')$ вложена инъективно в $\pi_1(M)$.

С уже выбранном расслоением $\Lambda'_0$ группа $M'$ отождествляется с компонентой связности его группы Пикара $\mathrm{Pic}_0$, а характеры этой группы параметризуют, как мы видели, собственные сечения Гекке группы $\mathrm{GL}(1)$ с точностью до дополнительного множителя, связанного с дополнительным множителём в (1.d). Последнее можно смело пропустить. Эти характеры также, как мы видели, даны связностями Янга-Миллса, из которых мы можем взять прямой образ на $M$. Эти прямые образы являются двумерными связностями. Они в значительной степени соответствуют определениям в [AB] к представлению группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, индуцированному по отношению к $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Это, на мой взгляд, поразительный вывод.

Возможность общей теории представляется, но мы не преследуем её здесь. Есть что-то ещё, равным образом поразительное, по крайней мере для тех, кто знаком с работой Хариш-Чандры. Кривая $M$ имеет три неразветвленных накрытия $M'$. Мы обнаружили четыре класса $\mathrm{GL}(2)$-расслоений на $M$, один класс связанный с разложимыми расслоениями, и каждый из трёх других связанный с одним из неразветвленных квадратичных расширений поля функций на $M$. Сходство со спектральной теорией полупростых групп над полем действительных чисел, даже при более общих условиях, очевидно, но многое предстоит сделать.

**Замечание в сторону.** За счёт избыточности, но для ясности я снова возвращаюсь к [AB, 6.1]. Выражение $\star F(A)$ является просто вещественнозначной функцией, а не

[79]Уместное $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ на стр. 560 тривиально на $\mathbf{U}(1)$.

сечением некоторого более сложного расслоения, а $d_A$ просто обычным дифференциалом этой функции. Более того, для расслоения $Q$ мы выбрали $F(A)$ и $\star F(A)$ постоянными, если $A$ является $Q$ или степенью $Q$. Как следствие, связности, введенные построением предшествующим определению $\rho$ в [AB, стр. 560], являются плоскими, в сильном смысле, так что они задаются обычными производными на M, в этом случае $(x, y)$-плоскость. Это проявляется в (53). Замечу здесь, потому что необходимо пояснить, что, хотя эти связности очень просты, они содержат два свободных действительных параметра, скорости в двух независимых направлениях. С ограничением $k$, $l$ в $\mathbf{Z}$, а не $k$, $l$ в $\mathbf{R}$, мы покидаем область связностей и переходим к собственным значениям операторов Гекке, которые для GL(1) задаются функциями со значениями в $\mathbf{U}(1)$, а не функциями, значения которых являются классами сопряженности. Мы вернёмся к этому. ■

**Неожиданное следствие** которое будет исправлено ниже. Кажется что введение функции $s(\cdot)$ является центральным открытием этой статьи, по крайней мере, для меня, потому что с ним отвлечённое понятие сделалось доступным. В первую очередь это привело к определениям (36.h) а затем к (36.i), которое, в свою очередь, привело к постоянной кривизне уравнения (47). Есть ещё одно приятное следствие. Это связано с природой кривизны в формуле (47) и её соотношением с выбор $A_0$ и $\Lambda_0$. Я утверждаю, что замена $A_0$ на $A_0'$ приводит к постоянной (по отношению к плоским координатам) изменению в связности и, следовательно, нет изменения кривизны. Она остаётся постоянной. Более того, изменение самой связности очень просто. Добавляется постоянный член. ■

Еще многое предстоит сделать, но лучше остановиться и рассмотреть наше положение. В сущности, когда мы, наконец, обратились к доказательству [AB, Th. 6.7], большая часть приготовлений оказалась излишней. Однако, по крайней мере для меня, это было очень полезно. Пока мы имеем полное представление о строении линейных расслоений Янга-Миллса, и мы находимся сейчас на грани понимания строения расслоений Янга-Миллса размерности два. Конечно это справедливо только для эллиптических кривых. Они являются прямыми образами линейных расслоений на одном из трех возможных двойных покрытий $M$. Переход от $M$ и представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ к покрытию $M'$ и представлению $\rho'$ его фундаментальной группы $\Gamma'_{\mathbf{R}} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$.

Со своей стороны, даже если не со стороны читателя, имеется некая небрежность понимания, которая должна быть исправлена. При обсуждении следствий (36.i) мы ввели связность на расслоении $\Lambda_0\Lambda_1^{-1}$, и кривизна этой связности равна нуле. Поскольку метрика на $M$ или на $\mathbf{C}$ является инвариантной относительно переносов эта связность (скорее эти связности) - связность Янга-Миллс.

Они не являются связностями, входящими в (53). Эти просто постоянные связи на тривиальном расслоении. Они приведены в [AB, (6.12)] с $H$ и $\beta$ тривиальными, если заменить $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M)$ на $\mathbf{R}^\times$. Если $G = \mathrm{GL}(1)$, $\overline{S} = \{1\}$. Это правильное утверждение. Казалось бы, есть другая небольшая и неосторожная ошибка. Слово «flat» не означает чётко определенного, оно означает чётко определенное на универсальном покрытии. Читатель с ограниченным знакомством с дифференциальной геометрией, должен знать, что плоская связность, является тем, что её интеграл определяет функцию, локально однозначную, но глобально, возможно, многозначную. Она топологически отличается смещением между петель. Таким образом, для эллиптической кривой его можно считать линейным. Есть что-то ещё, чтобы иметь в виду, две группы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{Z}$ очень близки. Прошу прощения за столько сносок и отступлений, но мы работаем в сложном контексте.

**Полезные но лишние объяснения.** В этой попытке обнаружить или начать создание теории функториальности в рамке простейшего случая, но почти не понимая соответствующих идей, я обошел те же самые понятия, прокладывая себе путь через понятия, которые, хотя в значительной степени не относились к делу, были в конечном счёте источником решения. Я приложил все усилия, чтобы отбросить ложные или ненужные идеи и сохранить только соответствующие, но это оказалось невозможным потому, что они были неразрывно связаны в моём уме с решением. Однако следующие строки явно не нужны. Я сохранил их чтобы подчеркнуть, что вся статья нуждается в пересмотре, но лучше всего подождать, пока не будет создана общая теория. То, что окончательно поражает в решении, это совершенная точность сравнения между собственнами сечениями и связностями Янга-Миллса. Однако, диаграмма (56) для забавы.

На диаграмме (56) каждый квадрат, будь то чёрный или белый, представляет собой простое покрытие M. Объединение черного квадрата с белым квадратом над ним является простым покрытием $M'$. Одномерная связность Янга-Миллса на $M'$ задается константой, которая сама определяется ограничением представления $\rho'$ на $\mathbf{Z}$, то есть $z \to cz$, $c \in \mathbf{R}$. Одномерное (локальное) сечение $z \to (z)$ расслоения на $M'$, это просто функция $f(\cdot)$ со значениями в $\mathbf{R}$. Это определяет (опять локальное) сечение двумерного расслоения на $M$. Оно даётся $z \to \big(f(z), f(z+B)\big)$. Таким образом, значения $f$ в чёрном квадрате объединены со значениями в белом квадрате, лежащем над ним. Короткое размышление необходимо для понимания двумерного склеивания, которое влечет это за собой. Значения в данном черном квадрате должны плавно меняться, когда мы двигаемся в обоих направлениях вверх или вниз, и влево или вправо, таким образом диагонально, не на соседний белый квадрат, а на черный квадрат. То же самое верно для движения от белого квадрата до белого квадрата. Однако есть еще больше. Движение включает в себя обмен двух координат, и тоже обмен касательнога вектора таким образом заданным сечением. Если мы имеем дело со связностью, она регулярное движение в диагональных направлениях. Для этого черные и белые квадраты можно рассматривать отдельно. Однако необходимо обеспечить, чтобы результат был тогда гладким, когда мы переходим от квадратов одного рода к квадратам другого. Это, несомненно, будет так для постоянных связностей и их интегралов. Что касается разделов, но не связей, поведение в центре черных квадратов не зависит от поведения на белом квадрате. Исправление происходит на границе квадраты. Я также отмечаю, что $A$ и $B$ играют одинаковые роли.[80]■

Есть еще одна подробность, которая не должна быть забыта. При переходе из $M$ на $M'$ мы заменяем $J$ элементом $J'$ и, таким образом, мы заменяем группу $\mathbf{U}(1)$ сдругой группой, хотя она все ещё является $\mathbf{U}(1)$. Как и в случае $\mathrm{GL}(1)$ разрешенные связност задаются постоянными функциями, но теперь двумя постоянными функциями, порядок которых не имеет значения.

[80]Это объяснение неудовлетворительно, и по причинам, связанным с сноской 'незначительный недосмотр', а именно, мы были неточными относительно склеивания. Мы имеем дело с плоскими связностями, и их можно интегрировать в однозначное сечение над $\widetilde{M}$. Более того, прямая, соединяющая точку в одном из квадратов диаграммы с другим, определяет элемент фундаментальной группы и, следовательно, движение от слоя на одном конце к слою на другом. Это склеивание, подразумеваемое здесь.

Наконец, мы нашли двумерный вид выражения (53), но вопросы остаются. Каковы условия периодичности? Дело в том, что мы хотим представить собственный сопряженный класс как интегральную показательную функцию. Для GL(1) сопряженный класс имеет единственный представитель, но для GL(2) это не так. Вкратце вернёмся к уравнению (53), для которого есть два условия для обсуждения: периодичность и начальные условия. Мы уже говорили о периодичности. Это интегральность чисел $k$ и $l$. Начальные условия вводятся путем умножения (53) на произвольный элемент из $\mathbf{U}(1)$.

**Начальные условия.** Именно этот элемент определяет характер на подгруппе $\mathbf{Z}$ группы $\Gamma_{\text{aut}}$ в (1.d), то есть на $1 \in \mathbf{Z}$. Это $\mathbf{Z}$ состоит из степеней произвольно выбранного $\Lambda_0 = \Lambda_{A_0}$, которое сам определяет нижний предел интегрирования в (53).

Здесь входит что-то, что легко упускается из виду, произвол нашего выбора $\Lambda_0$ или $A_0$. Это необходимо, а также вездесуще. В (53) движущаяся точка $a\theta + b\theta$, а связность даёт подынтегральное выражение. Само собой это выражение не даёт сопряженный класс в точке $A_0$. Его нужно умножить на значение класса сопряженности в точке $A_0$. Это может быть произвольно выбранным и является причиной дополнительного фактора $\mathbf{Z}$ в (1.d). Есть что-то, что легко забыть, когда мы достигаем желаемых пар - интеграла от связности Янга-Миллса, с одной стороны, и класса сопряженности для GL(1) или собственного сопраженного сечения для GL(2), с другой стороны. То есть, мы не пытаемся найти собственную функцию, для которой существует неопределенная константа, но семейство собственных значений, и это недвусмыслено.

Для GL(2) построение более сложное. Как уже объяснялось, в геометрической теории собственное значение, изменяющееся от точки к точке, заменяется классом сопряженности, который меняется от точки к точке на $M$. Для GL(2) это вопрос предоставления двух чисел, собственных значений класса и единственной двусмысленностей - это порядок, в котором они даются. Более ясно выражено, что мы имеем дело с классом сопряженности два-на-два эрмитовых матриц, и это определяется его собственными значениями, оба из которых являются реальными. Однако они не указаны в определенном порядке. Таким образом, существует множество способов представления спектрального разложения. Группа $\pi_1(M)$ имеет три нормальные подгруппы индекса два, каждая из которых содержит только один из $A$, $B$, $AB$, и мы можем перейти к наложению, определенному любым из них. Когда мы это делаем, двумерное представление соответствующей подгруппы группы $G$ имеет две различные неприводимые компоненты с размерностей один. Таким образом, у нас есть, по сути, шесть возможностей следовать за колебательным признакам, таким образом, шесть возможностей описания связанных связностей Янга-Миллса. Это вызвало у меня большую неопределенность и путаницу. Мое описание выводов может вызвать в читателя те же чувства. Однако, оно стало мне знакомым.

Для $G = \mathrm{GL}(1)$ соответствие состоит из связности Янга-Миллса и связанного с ним представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$, с одной стороны, и соответствующего собственного сопряженного сечения и связанного с ним представления $\Gamma_{\text{aut}}$ с другой. Мы понимаем, как это действует также для $G = \mathrm{GL}(2)$ поскольку представления или связности являются прямыми суммами соответствующих одномерных объектов. В общем случае для GL(2) мы рассматриваем только связности Янга-Миллса, и они, согласно [AB], задаются представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Кроме того, как мы уже обнаружили для GL(1), для наших целей не все связности имеют значение. Это повлекло за собой ограничение на специальный набор таких представлений, которые тривиальные на прообразе $\mathbf{U}(1)$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Для GL(2) это не так.

Аналогом (53) будет показательная функция, показатель которой матричный интеграл. Матрицу можно считать диагональной, поскольку координаты $a$ и $b$ определены по сторонам фундаментальной области. Условие состоит в том, что интегралы двух диагональных элементов являются периодическими, кроме общего знака.

Мы выбрали метрику на $M$ инвариантную относительно переносов и точка $A_0$ дана. Первоначально она была $0 \in L$. Мы могли бы заменить её любой другой точкой, то есть переносом точки $A_0$, который даёт перенос функции $s(\cdot)$ а также формы (36.i). Первый - произвольный и определяет два других. Изменения влекут за собой изменение связности Янга-Миллса. но, как мы увидим, нет изменения в его кривизне, которая является постоянной. Сама функция $s(\cdot)$ является функцией на плоскости, а не на $M$. Как мы опишем, замена $A_0'$ для $A_0$ влечет за собой изменение связанной связности, хотя это изменение не в её кривизне. Изменение, то есть разница между связностями, связаны с $A_0$ и $A_0'$, является плоской, то есть с кривизной которая равна нулю. Поскольку $A_0$ дано, только что упомянутое замечание позволяет нам определить связность Янга-Миллса для гпуппы GL(1) с целыми числами $k$, $l$ и линейным расслоением со степенью нуль, оно само связано с различием $A_0' - A_0$. Для группы GL(1) гомоморфизм $\rho$ в [AB, Th. 6.7] обязательно такой, что $\mathbf{Z} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$. Ограничение $\rho|\mathbf{U}(1)$ дано целым числом и $\rho|\pi_1(M)$ дано двумя числами.

Всё это, пожалуй, лучше объяснить в связи со строками[81] 'Now line bundles with harmonic connections... $\Gamma_{\mathbf{R}}$ now factoring through $\pi_1(M)$.' Пусть $k = 0$, $L_0 = A \cdot A_0^{-1}$. Связность, присоединенная к $A_0 = 0 \in L$, уже введена, но она зависит от $A$ (или $A_0'$) как точки в $\mathbf{C}$, а не от точки в $\mathbf{C}/L$. Расчёты, связанные с $A_0$ также применимы для $A$. Это всего лишь вопрос подставления новых значений координат. В частности, кривизна остаётся той же и она постояна. Новое расслоение - эта просто перевод, связанный с $A$. Что касается измененных связностей, то это просто перевод исходных данных, итак просто добавление постоянных к двум координатам $a$ и $b$ в (36.i). Эти две связности определают связность на новом расслоении $L_0$, кривизну которой мы можем вычислить. Она разность двух кривизен, кривизны для $A$ и $A_0$. Другими словами, это изменение постояная связность в плоскости и все такие связности появляются. Другими словами, постоянная в [AB, (6.10)] произвольна, хотя есть решение, которое я считаю неуместно и что вызывает недоумение, это брать его по модулю $2\pi$. Читатель может решить сам, должен ли он, как и я, просто исправить эти признаки поспешного сочинения или же он должен принимать их всерьёз. Как вследствие разности [AB, (6.10)], эти все связности Янга-Миллса для группы GL(1).

В приведенном предложении есть определенная двусмысленность. Две разных связности могут приводить к изоморфным сечениям. Например алгебры Ли двух группы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}(1)$ равны так, что они имеют те же связности но с разными интегралами. Я обычно принимал первоначальное предложение.

**Разъяснение.** Когда две связности Янга-Миллса эквивалентны? Это лишь один из многих вопросов, возникающих при рассмотрении доводов в [AB, §6]. Например, поскольку

[81] Читатель с ограниченным знакомством с дифференциальной геометрией, должен знать, что плоская связность, является таковой что её интеграл определяет функцию, которая локально однозначна, но глобально, возможно, многозначна. Она топологически отличается смещением между петель. Таким образом, для эллиптической кривой её можно считать линейной.

соответствующие связности должны быть унитарными, они так как мы видели, зависят от метрики на слое, а она не инвариантна. Это означает, в частности, для обсуждаемых нами связностей, что они линейно изменяются с параметрами $a$ и $b$ и, следовательно, не являются $L$-инвариантными (36.i). Мне трудно это понять . Целочисленное изменение параметров $a$ и $b$ изменяет метрику на слоях, но не связность, и поэтому следует рассматривать её как изменение данных. То есть, семейство перестает быть тором и становится комплексной прямой. Это важно для нашего заявления и для [AB, Th. 6.7], которое без этого не имеет смысла. Условие [AB, 6.1] линейно. ■

Это утверждение почти не совместимо с [AB, (6.10)], ни с утверждением, что плоские связности на тривиальном расслоении типа Янга-Миллса.

**Упущение исправлено или дьявол в деталях.** [82] Этот очерк - отклонение. Это потому, что мне невозможно было понять материал в [AB] при первом, втором или даже третьем чтении. Я должен часто возвращаться к источнику, чтобы вполне понять значение заявлений авторов. Если $M$ эллиптическая кривая тогда $\widetilde{M} = \mathbf{C}$ и это легко представить. Тоже лёгко представить группу $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и её представдения в GL(1). Важно также отметить, что $\Gamma_{\mathbf{R}}$ имеет несколько автоморфизмов, так что некоторые из этих, по-видимому, разных представлений могут быть эквивалентными. Это было бы источником возможных равенств, описанных при обсуждении уравнения (36.k). Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ порождается A, B и группой $\mathbf{R}$ действительных чисел с одним соотношением $ABA^{-1}B^{-1} = \exp(2\pi \cdot i)$. Мы записываем элементы $x$ из $\mathbf{R}$ формально как $2\pi \cdot xi$. Некоторые, возможно все, автоморфизмы группы даются уравнениями $A \to \exp(i\lambda)A$, $B \to \exp(i\mu)B$, $\lambda$, $\mu \in \mathbf{R}$, и если $x \in \mathbf{R}$, $x \to x$.

Все одномерные представления группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ такие, что $\exp(2\pi \cdot 1) \to 1 \in \mathbf{C}$. То есть, есть $m \in \mathbf{Z}$, такое, что $\lambda \in \mathbf{R} \to \exp(2m\pi i\lambda)$, которое равно 1 если $\lambda \in \mathbf{Z}$, но $A \to \alpha$, $B \to \beta$, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Эти два числа произвольны. На данный момент мы имеем дело только с линейными расслоениями и только с линейными расслоениями степени нуль. Это возможно, потому что мы вводим дополнительное линейное расслоение степени один, что позволило нам написать каждое линейное расслоение как произведение этого линейного расслоения с самим собой несколько раз и расслоение которого степень нуль. Можно ли это сделать иначе? Это вопрос, который на данный момент лучше оставить в стороне. Сейчас наша задача состоит в том, чтобы находить линейные расслоения, связанные с только что описанными гомоморфизмами. ■

**Неуместные нерешительности.** Множитель $s(\cdot)$ или его обратный элемент не определяют, уравнением (36.b) метрику на M, они определяют метрику на её универсальном покрытии. Это означает, что большое количество наших утверждений справедливо только для универсального накрытия. Это в порядке, но необходимо помнить об этом. Двусмысленность устранена только когда мы приходим к связностям, связанным с разностью $A_0' - A_0$. Кроме того, достигается огромное преимущество. Связности Янга-Миллса которые определяются метрикой инвариантой по отношению к переносу задаются двумя

[82] Поскольку в [AB] было много того, что я не совсем понял, а также один или два момента, которые были, в лучшем случае, недостаточно объяснены авторами, различные части этой статьи были написаны на разных этапах моей борьбы с материалом , Я решил, частично из-за лени, а отчасти потому, что может быть лучше для тех, кто, как и я, изучают основы дифференциальной геометрии вместе с её применением к теории автоморфных форм, оставить часть материала в неупорядоченной форме в котором я понял это сначала.

реальными параметрами, определяющими движение с постоянной скоростью в плоскости. Так мы пришли с ментшими объяснениями к (53). Что происходит? Сомножитель $A$ в $A \cdot A_0^{-1}$ изменяется но возможно, что она возвращается к своей отправной точке в $M$ но не в $\widetilde{M} = \mathbf{C}$. Это возможно потому, что $s(\cdot)$ функция на $\widetilde{M}$ но не на $M$. ■

**Непостижимое становится понятным.** §VIII начинается с пяти предложений, полное значение которых только мне был открыто, а затем не полностью. В частности я не понял предложение, которое следовало за ними, 'Given any homomorphism $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ we then get an induced $G$-connection $A_\rho$ also satisfying the Yang-Mills equations...'. До этого момента мне удалось немного разобраться в построении расслоения $Q$ и его последстви, без полного понимания его точного значения. Нечто, особенно, ускользнуло от меня полностью . Это построение плоских связгостей с размерностью равной единице. Скорее, я это понял, но не его последствия, по крайней мере, не с их полным значением. Кроме того, исходя из классической теории, то есть теории Вейерштрасса и других, я не знал, как далеко это ещё осталось от перехода к унитарным связям. Я не оценил расстояние, отделяющее от него унитарную теорию. Это вопрос не столько из $\mathbf{U}(1)$-расслоений, сколько из соединённых $\mathbf{R}$-расслоений. Я испытываю трудности с представлением последствий введения нуля или полюса, как и при построении $Q$. Я не тополог! Более того, я ввел чрезвычайно важную связность $Q$ очень небрежно, с определением $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{\beta}_2$, $\widetilde{\gamma}$ внизу формулы (36.i). Теперь мы должны рассмотреть её более тщательно, если мы хотим оценить определения, предшествующие [AB, Th. 6.7], поскольку это главная особенность их работы. Скорее, я думаю, что мы, наконец, в состоянии использовать эту теорему для сравнения собственных сопряженных сечением со связностями Янга-Миллса. ■

После всех наших усилий, в частности, после всех моих усилий возникает неожиданный вопрос в связи с применением [AB, Th. 6.7]. Возьмём мы ли произвольный гомоморфизм $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ для наших целей или ограниченный класс? Чтобы продолжить, я предполагаю, что [AB, стр. 559/560] открыто перед читателем. Дело в том, что мы применяем теорему с ограниченным выбором $\rho$. Я удивлен, но меня часто удивляло, сочиняя эту статью. Выберём $G = \mathrm{GL}(1)$ как аддитивную группу $i\mathbf{R}$, с одномерным представлением $\rho$, значения которого произвольны на представителях $A$ и $B$. На $\mathbf{R}$ их значения равны 0. В частности, сомножитель $\mathbf{U}(1)$ здесь не имеет значения. Гомоморфизм $\rho$ на нем тривиален. С другой стороны, существует больше чем я оценил свободы в образе $G$ гомоморфизма $\rho$. $\mathbf{U}$ заменяется на $\mathbf{R}^\times$.

Итак показатели, которые появляются в формуле (53) связности Янга-Миллса, ограничены условием, что показательные функции определены их интегралами, однозначными на $M$. При этом должно быть ясно, что основной вывод этого статьи установлен для простого случая $G = \mathrm{GL}(1)$. Однако, в качестве конечной цели мы надеемся доказать, что (1.d) по данной алгебраической кривой является автоморфной группой Галуа. Тем не менее, в этой статье мы занимаемся только группой $\mathrm{GL}(2)$. Есть два рода собственных функций: те носитель которых $\mathfrak{D}$ и те носитель которых $\mathfrak{A}$. Первые соответствуют неупорядоченной паре собственных функций для $\mathrm{GL}(1)$, параметр которых дан (50.a). Для тех, параметр которых дан (50.b), отношенин параметра к собственной функции является более сложным. Вмешиваются связности Янга-Миллса. Переход такой: гомоморизм $\Gamma_{\mathrm{aut}} \to {}^L G$; связность Янга-Миллса; выбранный набор интегралов, которые дают собственные сопряженные значения. Заключения затем сравниваются с выводами раздела VII.

Сначала нужно вернуться ко второму сомнительному утверждению в [AB, p. 561]. Нет никакой причины, что $G_X = G$. Кстати, во избежание путаницы я вспоминаю, что $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma_{\text{aut}}$ две разные, хотя тесно связанные группы.

Для GL(2) существуют собственные функции двух видов в соответствии с подмножеством B, на котором они определены: $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{A}$. Для первых, собственное сопряжение сечения есть прямая неупорядоченная сумма, параметр которой тоже сумма двух одномерных представлений группы $\Gamma_{\text{aut}}$. Некоторые из них, второго вида, также относятся к первому виду. Мы можем спросить, почему они появляются, но нам не нужно находить для них новые параметры. Это другие функции, с которыми мы имеем дело, и каждая из них связана с одномерными представлениями трех подгрупп группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, определяемых прообразами трех подгрупп индекса два в $\pi_M$. Заметим, что представление $\tau$, индуцированное из тривиального представления каждой из этих подгрупп, одинаковы и их ограничение к данной подгруппе, является прямой суммой тривиального представления и единственного нетривиального представления, которое тривиально на $M^2$. Как особенный выбор, мы выбрали подгруппу, порожденную $A' = A$ и $B' = B^2$.

Переход к накрывающой кривой затрагивает не только $\pi_1(M)$, которое заменяется подгруппой $\pi_1(M')$ индекс которой два, но и группу $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и элемент $J$, который заменяется на $J' = J^2$. Группа $\mathbf{R}$, однако, не изменяется. Следовательно $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является подгруппой второго порядка в $\Gamma_{\mathbf{R}}$. С другой стороны, мы начали с одномерной связности на $M'$ и связали с ней двумерную связность на M. В то же время одномерная связность связана с одномерным представлением $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и двумерная связность также связана с двумерным представлением $\Gamma_{\mathbf{R}}$. То что мы хотим сделать, это проверить, что двумерная связность - эта та, которая задана теоремой Атья-Ботта для двумерного представления. Ещё раз, двумерные представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ не все уместны.

Теперь рассмотрим обсуждение на [AB, стр. 560], применяя его к обеим группам $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Элементы $X$ в $\mathfrak{g}$ будут одинаковы для $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Итак, мы переходим к $G_X$ для них обоих, однако, не утверждая, что $G_X$ связано. $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M)$-расслоение на $M$ является просто прямым образом расслоения $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M')$ на $M$, хотя наше геометрическое описание, возможно, не показало этого ясно. Поскольку композиция двух прямых изображений снова является прямым образом, наш довод завершен.

Сейчас ещё осталось только небольшое дело. Это просто вопрос остатков. В 'Переходе от $\Gamma_{\text{aut}}$ к $\Gamma_{\mathbf{R}}$' мы обсудили этот переход для одномерных представлений. Обсуждение одинаково хорошо относится к индуцированным представлениям двух групп для поля и поля расширения.

**Другое признание.** Для меня трудно полностью понять теорию Янга-Миллса. Я никогда не осмотрел общей теории. Следовательно нужно постоянно напоминать её следствие. Извеняюсь! ■

Как я часто признавался я медленно понял, и ещё только частично понимаю, отношение между собственными сопряженными сечениями и связностями Янга-Миллса. В частности, я был неосторожен когда написал (53), скорее я не объяснил как выбирать начальные значения. Они даны в степенях $\Lambda_0$, в частности в $\Lambda_0^0$, то есть в тривиальном линейном расслоении, где значение 1. Значения в других степенях даны как мы объяснили в разделе 'Начальные условия.' Определения сложны но последовательны. Требуется более одного началного значения, потому что $\mathrm{Bun}_G$ не связно. Собственные сечения для GL(2) описываются не так просто. Кроме того, даже для GL(1), только те условия, которые дают однозначный исход допускаются. Нужно также подчёркнуть, что для данной группы $G$ уместные связности ${}^LG$-связности, лучше ${}^L\mathfrak{g}$-связности или ${}^L\mathbf{U}_G$-связности, где ${}^L\mathbf{U}_G$ унитарный вид группы ${}^LG$. Только последнее является полностью точным. Обозначение нестрого. В противоположность группе ${}^LG$, которая несколько неточна, потому что можно ввести компонент Галуа. Кроме того, ${}^L\mathfrak{g}$ двусмыслено только поскольку оно может быть алгебра Ли группы $G$ или её компактной формы.

Чтобы продолжить, я буду предполагать, что $G = \mathrm{GL}(1)$, $\mathrm{GL}(2)$ или, возможно, $\mathrm{SL}(2)$. Постоянная точка $A_0$ и постояное линеное расслоение $\Lambda_0$ были выбраны в §4, как в [A]. Согласно [A, Th. 5,Th. 6], после этого выбора, для $G = \mathrm{GL}(2)$, связные компоненты $\mathrm{Bun}_G$, представляют для нас основной интерес. Они даны либо неупроядоченной парой $\{(m, \Lambda_1), (n, \Lambda_2)\}$, либо $(m, \Lambda)$, $m_1$, $m_2$, $m$ лежат в $\mathbf{Z}$. Мы уже знаем, что собственные функции определяются либо множеством точек первого рода либо множеством точек второго рода. Один сомножитель $\alpha^m\beta^n$, $\alpha$, $\beta \in \mathbf{C}^\times$, $|\alpha| = |\beta| = 1$ или $\alpha^m$.

Намерение этого раздела убедить себя что у $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ есть несколько убедительных свойств, по крайней мере для групп GL(2) и SL(2) и эллиптической кривой. Присутствие $\mathbf{Z}$ в определение групп $\widetilde{\Gamma}$ и $\Gamma_{\mathrm{aut}}$ воизникает из-за наличия степени и его назначение ясно. Мы рассматриваем главным образом $\Gamma$ и $\lim \mathbf{\Gamma}/n(k)\mathbf{Z}$.

## XI. Интегрируемые связности и собственные функции операторов Гекке

Случай $G = \mathrm{GL}(1)$ уже обработан в абзаце ‘Некоторые общие замечания.’. Функции[83] (53) можно рассматривать как функции на самом $M$, являющиеся связной компонентой $\mathrm{Bun}_G$. Затем они могут быть распространены на всё $\mathrm{Bun}_G$, добавив фактор $\alpha^n$ для $\Lambda_0^n\Lambda$, если $\Lambda_0^n$ член этой компоненты и $\alpha \in \mathbf{U}(1)$ дано. В этом абзаце объясняется также параметризация представлениями $\Gamma_{\mathrm{aut}}$.

С другой стороны, для GL(1) множество $\mathrm{Bun}_G$ является абелевой группой со связной компонентой. Его можно рассматривать как прямое произведение $\mathbf{Z}$ с $M$. Таким образом, две функции, та что равна собственной функцией Гекке и та, которая определяется её собственными значениями, являются одной и той же функцией на $M$. Собственная функция, конечно, определяется только с точностью до мультипликативной постоянной

Но для $G = \mathrm{GL}(2)$ в каждой точке нет чётко определенного элемента в ${}^LG$. Существует только сопряженный класс, и эта двусмысленность даёт о себе знать. Два по-видимому разных сечения могут находиться в одном классе. То есть в каждой точке их значения только сопряженые классы в ${}^LG$. Напомним, что эти значения обычно, возможно всегда, являются унитарными элементами в ${}^LG$.[84] Заметим, наконец, что естественное представление сопряженного класса может быть гладкой функцией на плоскости, значения которой в двух точках, отличающихся элементом L, могут быть сопряженными, но не равными. Это мы уже видели в §VII хотя недосказали потому, что знак в (32.a) неопределён. Однако функция $f(\cdot)$ однозначно определена на единвенственном покрытии $M'$.

[83]Эсть важный вопрос который озадачил меня, когда я написал эту статью и на что ответ, достигнутый только к концу, удивителен. Собственные сопряженные сечения задаются интегралами связности Янга-Миллса, но как вычислить начальные условия? Для GL(1) это ясно. Мы наложим их с степенями $\Lambda_0$. Для GL(2) не только расслоение, но даже начальные условия заданы прямым образом сечений GL(1)-расслоения. Возможно, что-то подобное верно в целом.

[84]Эта противоположность между явлениями, знакомыми над полем чисел, и тем, что мы наблюдали в этой статье о геометрической теории для GL(2), удивила меня.

Это $M'$, которое отличает три вида. Мы договоримся об одном. Что происходит, это то, что коэффициент $\alpha_x$ в (32) может меняться о знаке при движении по периоду, но класс сопряженности матрицы не меняется. Более того, это может появиться в трёх разных направлениях, заданных $L/2L$. Так же, как мы добавили дополнительный множитель[85]

$$\varprojlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

в (1.d), мы можем добавлять его к $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Это позволяет нам перейти ко всем $\mathfrak{A}$, как только мы поймём $\mathfrak{A}(0,0)$. Поэтому достаточно изучить следующее построение над $\mathfrak{A}(0,0)$. Логарифм функции $f(\cdot)$ или её производная определит одномерную связность на $M'$ и её прямой образ есть двумерная связность на $M$. И та и другая связности Янга-Миллса. Ясно, что интеграл этой связности, собственное сопряженное сечение связывано с функцией $f(\cdot)$.

Остаётся обсудить связь между этими расслоениями и представлениями $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ (или $\Gamma_{\mathbf{R}}$) и $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$ (или $\Gamma'_{\mathbf{R}}$). Напомним, что $[\Gamma_{\mathbf{R}} : \Gamma'_{\mathbf{R}}] = 2$ и что $J' = 2J$. Более того, и это ключ и разгадка этой статьи, характер $\mathbf{R} \subset G'_{\mathbf{R}}$, связанный с характером $\chi$ определяющим $f(\cdot)$ в (32), равен $-1$ в точке $J$. Мы колебалемся между $\mathrm{Bun}_G$, еак несвязным множеством и его связным подмножеством, то есть множеством расслоения степени нуль. Несколько подробностей оставлены читателям.

Повторяю то, что мы уже заметили. Характер группы $\mathbf{R}$ может быть записан как

$$\exp(2\pi i\alpha x)\exp(2\pi i\beta x), \quad \alpha \in \mathbf{Z},\ 0 \leqslant \beta < 1,$$

где первый множитель имеет период 1, поэтому его длина волны равна $1/\alpha$, а второй множитель имеет длину волны, равную целому числу, равному знаменателю частого $\beta$. В данном случае это 2, отображение группы $\mathrm{GL}(2)$. Поэтому мы знаем, что ожидать если $G = \mathrm{GL}(n)$. Я не знаю, чего ожидать для других групп.

Положение таково. Собственное сечение вида $\mathfrak{A}$ присоединено к одномерному расслоению $M'$ значение которого в точке $J = -1$. В самом деле, длина его волны относительно $J$ равна 2. Она определает одномерное представление группы[86] $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$. Мы уже понимаем, что индуцированное представление группы $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ неприводимо.

Мы обнаружили, что соответствующие представители имеют два вида, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$. Параметры последних просто два неупорядоченных параметра для $\mathrm{GL}(1)$. Итак двусмысленность тоже проста. Для первых, двусмысленность тоже возможна, но она выглядит по-другому, и я очень долго путался. Конечно, представления вида $\mathfrak{A}$ изучались в §VII, и нам нужно только обратиться к нему. Мы обнаружили, что собственные сечения были заданы функциями со значениями в ${}^LG$, которые были периодическими либо с периодом $L$, либо с периодами в решётке между $L$ и $L/2$, так что они могли быть связаны с одним из трех двойных покрытий $M'$ кривой $M$. Они были обнаружены, прежде чем я понял соответствующие части из [AB, §6] достаточно хорошо и были большой загадкой для меня.

**Важное напоминание.** Есть нечто так простое что о ней, похоже, не стоит и упоминать снова, но для нас очень важно удерживать его в памяти. Группа $\mathbf{R} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$ так, что $J = 1 \in \mathbf{R}$. Однако не нужно, чтобы для данного представления $J \to 1$. Однако, мы

[85]Хотя я очень осторожно относился к выбору $A_0$, $A'_0$ и начальным условиям в (53), я часто забывал напомнить себе и читателю об этом. Тем не менее они присутствовали на протяжении всего нашего обсуждения и остаются таковыми, хотя и неявными.

[86]Читатель завершит определение дополнительного множителя.

рассматриваем только те характеры $\chi$ группы $\mathbf{R}$ так, что $\chi(J)$ корень из единицы. Тогда $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, так, что $\chi(x) = \exp\bigl(2\pi i(k+\alpha)x\bigr)$, $k \in \mathbf{Z}$ и, если мы рассматриваем $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, $0 \leqslant \alpha < 1$. У двух характеров $x \to \exp(2\pi ikx)$, $x \to \exp(2\pi i\alpha x)$ есть совершенно разные назначения. Значения первых характеров 1 в $\mathbf{Z}J$. Следовательно они данны на $\mathbf{R}$ как прообраз характера группы $\mathbf{U}(1)$, то есть $u \to u^k$. Мы уже обсудили их. Второй множитель - значение $J$, и мы уже обсудили это в (55). Я подчёркиваю, $J = 1 \in \mathbf{R} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$ но возможно что $\rho(J)$ не единичный элемент. Эти рассмотрения для нас важны если мы расматриваем двойное наложение $M'$ кривой $M$, так что $J' = 2J$. ■

На первый взгляд вывод в §VI состоит в том, что существует четыре вида собственных сопряженных сечений, которые относятся к виду $\mathfrak{A}$, каждое сечение дано характером $\chi$ на $\mathrm{Pic}(M)$ и его вид отличается его ограничением к $\mathrm{Pic}_2(M) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, которое то ли тривиально то ли одно из характеров $\chi_i$ группы $\mathrm{Pic}_2(M)$. Те $\chi$, которые связаны с тривиальным характером этой группы, эквивалентны классам вида $\mathfrak{D}$. Это было установлено в §VI.

Те которые связаны с тремя другими характерами, определны функцией $x \to \alpha_x^2$, как в (32), потому что только сопряженный класс матрицы (32) относится к делу. Но если два характера равны на $\mathrm{Pic}_{\mathrm{even}}(M)$, то они равны на $\mathrm{Pic}(M)$ до характера группы $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Хотя мы его не наблюдали, явно в §VI, то что это имеет значение только для ограничения характера на $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$. Это ограничение на $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$, то которое определяет собственную функцию и собственный класс. Следовательно, три разных класса собственных сопраженных сечений не пересекаются.[87] Я этого не ожидал. Прошло некоторое время, прежде чем я заметил это важное обстоятелство, и это вызвало у меня серьёзную путаницу. Мне несколько трудно объяснить очевидное следствие обсуждения, которое вызвано (32) и (32.a). Если квадраты двух непрерывных, неисчезающих функций равны, тогда они сами равны до постояного знака. Таким образом, если функции равны в некоторой точке связного множества, то они равны всюду. Отсюда следует, что три исключительных вида, обнаруженные в §VI, не пересекаются.[88] Две такие функции не могут быть равны всюду, если коэффициенты $m$, $n$ не равны. Как следствие, собственные классы, связанные с $\mathfrak{A}$, все разные, даже те, которые также связаны с $\mathfrak{D}$. В частности, существует три вида тех, которые связаны только с $\mathfrak{A}$, каждый из которых определяется другим нетривиальным характером $\mathrm{Pic}_2$ и, следовательно, другим квадратичным расширением. Разделение производится по остаткам $m$ и $n$ по модулю два. Целые числа определают показательную функцию в (32).[89]

Сейчас мы имеем в классе представлений, связанных с $\mathfrak{A}$, четыре класса, один из которых связан также с классом $\mathfrak{D}$ и тремя, связанными с тремя нетривиальными характерами группы $\mathrm{Pic}_2(M)$. Каждый из этих нетривиальных характеров определяет с его ядром квадратичное покрытие $M'$ над $M$. Пара $M'$ с характером определяет двумерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Всё, что нам нужно сделать, это показать, что эти представления различны, но это ясно из обсуждения выше, и что они включают в себя все двумерные представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ подходящего вида. Но что это? Ясно, что

[87]Если два класса такого рода совпадают, то мы будем иметь два характера $\chi_1$ и $\chi_2$ с периодами в $L = 2L/2$, такие, что $\chi_1/\chi_2$ было равно $\pm 1$ всюду и следовательно было бы равно 1 всюду. Это невозможно, если оба характеры не равны.

[88]Хотя я оставляю этот довод в его нынешнем виде, было бы лучше заметить, что рассматриваемые собственные сопряженные сечения определяются их определителем и что это показательные функции с линейным показателем $2ma + 2nb$, $m$, $n \in \mathbf{Z}$.

[89]Этот последный абзац ненужен и смущает, но он правилен!

представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ неприводимо только если его ограничение к $\Gamma$ неприводимо. Эти мы понимаем из диаграммы (55). Они индуцированы и $J \to -I$.

Теперь это совершенно ясно. У нас есть три вида $M'$, как и в §VII, каждый из которых однозначно определяется соотношением $M'$ и $M$. Каждый из них затем определяет, снова недвусмысленно, характер $M'$ с порядком два. Это именно то, что нам нужно было в предыдущем разделе, чтобы определить представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$, а затем $\Gamma_{\mathbf{Q}}$

С другой стороны, прямой образ одномерной связности Янга-Миллса представляет собой двумерная связность Янга-Миллса. Это является очевидным следствием определения в [AB, стр. 560]. Построение Атьи-Ботта явно связывает двумерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ (или $\Gamma_{\mathbf{Q}}$), индуцированное из одномерного представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ (или $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$) к прямому образу линейного расслоения которое связано с ним. Нужно только тщательно прочитать первые несколько строк стр. 560. Мы могли бы принять это заключение как нашу теорему. Это, безусловно, вывод этой статьи, но в обсуждении есть гораздо более важное заявление, а именно точная общая теория, которую можно было бы рассматривать как основу геометрической теории автоморфных форм - теории, параллельной арифметической теории, которую саму по себе ещё предстоит построить.

Я ещё раз напомню читателю, но в последний раз, что $J \to -1$ является соотношением для одномерного представления группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$!

## XII. О возможности общей теории

Задача ясна. Нам нужно сперва общий вид теории Атьи и тогда с этим необходимо будет понять операторы Гекке. Это кажется мне доступным и многообещающим, но трудным. У меня нет определённых предложений но мне кажется что формула Гаусса — Бонне для особых многообразий будет нужна, то есть изучение пфаффовой формы на $\mathrm{Bun}_G$. Мне кажется, что это само по себе привекло бы значительный интерес в связи с операторами Гекке.[90] Я не знаю, какие дифференциальные геометрические трудности при этом проявятся. Не ясно что разветвленная теория может быть рассмотрена путем перехода к разветвленному покрытию начальной кривой.

**Признание.** Моя попытка написать математическую статьу пр-русски не имеет оснований, кроме желания наконец понять язык, с которым я приобрел немного знакомства, хотя не очень, в годы моей юности в начале моей математической жизни, для которой это считалось нужной. Это уже не так. Толчок к попытке был приглашением Дмитрего Лебедева посетить Москву, приглашение, которое я принял, и за что я был и остаюсь благодарен.

Я обнаружил, что мои знания были неглубокими. Мой родной язык англиский язык и по моему опыту овладение или попытка овладеть русским или турецким языком совершенно иное, чем овладение французским или немецким языком. Настоящее сочинение очень лучше, чем если бы я оставался один. Русские глаголы, русские существительные, русские прилагательные образуют собственный мир. Это мир, чью природу я еще не

[90] Есть предпечатное издание Gauss-Bonnet for singular varieties, которого авторы Paolo Aluffi и Mark Goresky но я не знаю другой отсылку.

понимал. Настоящая статья лучше благодаря разговору с Валентиной Сергеевой о характере определённых русских слов, на пример ‘скрыть,’ Прежде всего, она лучше потому, что Октай Пашаев прочитал статью подробно от начала до конца и сделал бесчисленные предложения по улучшению.

Он читал мой первоначальный текст от начала до конца, исправляя словарный запас, выбор глаголов, выбор местоимений и многие, многие ошибки неопытности. Если и когда статья будет опубликована, она, несомненно, будет подвергнута дальнейшим исправлениям, но я, по крайней мере, теперь понимаем, что, как и при турецком языке, при русском языке мы имеем дело с другим уровнем структурной сложности, чем при работе с языками ближе к моему родному языку.

В русском языке глаголы попадают парами, и существует огромное количество предлогов, каждый из которых связан с его собственным падежем или двумя случаеми, а для существительных - шесть случаев на выбор. Я знал это, но перейти от теории на практик трудно. Признаюсь наконец, что вездесущгость слова ‘есть’ в исправленной статье меня беспокоит. Я изучил русский язык более шестидесяти лет назад. Мне кажется что это слово было тогда просто подразумено но возможно что, математическое использование другое.

Эта статья является следствие двух толчков, прежде всего, попытки понять природу геометрической теории, составить себе чёткое представление и о разнице между ним и арифметической теорией и о их сходстве. Здесь я думаю, что я был успешным, хотя я мало доказываю. Во-вторых, я хотел существенно улучшить моё знание русским. Здесь у меня был только ограниченный успех. Для меня, русский язык на совершенно другом уровне, чем два иностранные языка с которыми я знаком, французский и немецкий. Как я заметил выше, русский язык гораздо сложнее, чем я оценил, даже больше, чем турецкий, другой язык, на котором у меня ограниченное, но с трудом заработавшая умение. Поэтому мои усилия и усилия друзей и знакомых, которые меня поощряли как я писал эту статью, имели ограниченный успех. Мне всё же приятно, что, несмотря на мой возраст, я не жалею ни времени, ни усилий, которые я дал ей.

## Список литературы


[A] Atiyah, M. F., *Vector bundles over an elliptic curve,* Proc. London Math. Soc. vol. 7, 1957

[AB] Atiyah, M. F. and Bott, Raoul, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces,* Phil. Trans. Royal Soc. Lond., vol. 308, 1983

[BH] Borel, Armand; Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups,* Bull. Amer. Math., 1961, v. 67, 579–583 и Borel, Armand; Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups,* Ann. of Math., 1962, v. 75, 485–535.

[DW] Dedekind, R. and Weber, H., *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen,* 1880.

[F] Frenkel, Edward, *Lectures on the Langlands program and conformal field theory, Frontiers in number theory, physics, and geometry,* `https://arxiv.org/abs/hep-th/0512172`

[G] Gaitsgory, Dennis, *Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique,* Sém. Bourbaki, Janvier, 2016.

[GH] Griffiths, P. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry,* Wiley Classics Library

[K] Knapp, A., *Lie groups Beyond an Introduction,* Second Edition, Birkhauser, Boston, 2002

[L] Lafforgue, V., *Chtoucas et programme de Langlands pour les corps de fonctions,* (`https://arxiv.org/abs/1404.3998`)

[L1] Langlands, R. P., *Base change for* GL(2)*,* Annals of Mathematics Studies, vol. 96 (1980)

[L2] ______________, *On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups,* Math. Surveys and Monographs vol. 31, 1988

[T] Taubes, Clifford, *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature,* Oxford Graduate Texts in Mathematics, Vol. 23

[W] Weil, André, *De la métaphysique aux mathématiques, Oeuvres scientifiques,* vol. II 408–412.

[WW] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., *A Course of Modern Analysis,* Camb. Univ. Press, 1958

Compiled on July 3, 2024.