MATEMATİK VE MATEMATİKLER: TARİHİ TASVIRLER VEYA MATEMATİKTEN SAYFALAR

ROBERT P. LANGLANDS

İçindekiler

Açıklama. Belki bildiğiniz gibi bir deney olmak üzere buraya gelerek Türkçe konuşup ders vermek istedim. Davetiniz için çok teşekkür ederim. Tecrübeme göre bir kimse bir dil öğrenmek isterse, matematik hakkinda konuşması en etkili bir usuldur. Yani konuşacağını iyi hazırlayarak ders verirken hiç durmadan konuşabilir. Hiç kimse sözünü kesemez.

Dinleyicilere ya sabır çekmek lazım gelebilir. Bu derslerde olacağını bilmem. Her halde, ilk derslerde, soru hemen soracağınız yerde dersin sonunu bekleyerek benimle o zaman konuşmanız daha iyi olur.

Otuz yıl evvel bu ülkede bir yıl geçirdim, ama o zaman dili az öğrendim. Bir iki yıldan beri dille uğraşıyorum ama konuşma fırsatım az oldu. Amerika'nın sesini dinleyebiliyordum. Fakat konuşma tecrübem yok!

Türkçe gerçekten öğreneyim diye ülkenize dönmeye karar verip, Cihan Saçlıoğlu'na yazdığımda, taşrada konuşmamı önerdim, fakat o Istanbul veya Ankara'da olsun dedi. Öyle ise, siz Kars'da başlasaydım, daha iyi olurdu diye düşünürsenız, suçu Cihan'a atabilirsiniz.

Sonra anlatacaklarımın çoğu matematik olacak, ama başta farklı şeyler nakledeceğim. Söylemimin kötü olduğundan veya yazdığım ibarelerde her türlü hata bulunduğundan, söyleyeceğimi belki anlamıyacaksiniz. Önceden her şeyi yazdığımdan, uygun ise, konuşurken size metni gösterebilirim. Ne var ki, başlamamızdan evvel ciddi bir uyarma lazımdır. Söylemek isteyeceğim kadar Türkçe hâkimiyetim yok! Dolayısıyla beni dinlemek zor olacak.

Malzemenin basit olduğunu vurguluyorum. Dolayısıyla tecrübeli olmayan öğrencilere uygun. Kimse anlamazsa, benim kusurum olur.

Yazarken sözlüğü kullandım, hatta matematikte tanımlanmış kavramlar için. Matematik kelime hazinesinin devamlı değiştığini sanıyorum. Yanlış kelime kullanırsam, onu hemen düzeltmeniz daha iyi olur.

Robert Langlands tarafından verilmiş konferans dizisi, birinci kısım. Haziran, 2003, Yıldız Üniversitesi.

Tekrarlayayım, başlıca amaçım Türkçe ögrenmek oldu, ama dersleri hazırlayarak içeriğe, özellikle eski Yunan matematiğine, hayran kaldım. Tabii, hazırlanmaya başlarken bir çok merak ettiğim vardı ama Öklid'in Öğeler'inde bulunduğunu keşfederken, o zamandaki düşünürlerin bilimde ve felsefede meydana getirdiği katkıları yavaş yavaş takdir etmeye başlıyorum. Yeni anlayışımı, az bile olsa, size aktarma umudundayım. Siz evvelce matematik ustaların yazılarını okumaya düşkün olmadınızsa bile, belki beni dinledikten sonra onları okumak isteyeceksiniz.

Ben ise Öklid'in, Dekart'ın veya Gauss'ın yazılarına dalarak matematikçi olmak için fazla olgunlaştım. Yazık ki, daha gençken, bunu çok az yaptım.

Her ders için, iki saat öngörülmüş. Benim o kadar konuşabileceğim belli değil. Sizin beni o kadar dinleyebileceğiniz de belli değil. Bu iki saat ikiye bölünmesini öneririm. Elli beş dakika konuşacağım, ondan sonra duracağım. Bir az dinlenerek, elli beş dakika daha devam edip etmiyeceğimize karar vereceğiz.

Önsöz

Öklid'in yazdığı geometrinin Öğeler'i kitap veya cüz denilen on üç kısımdan ibarettir. Içeriği basit değil. Tabii basit, kolay ispatlanan teoremler var. Öklid gibi biz teorem değil önerme deriz. Ama aynı zamanda Öğeler'de önermeler kadar mantıki yapı önemlidir. önermelerin bilimsel düzeyi de çok yüksek. Özellikle son cüzlerdeki ispatladığı iddialarda eski Yunanlıların matematik ustalığı yansıyor.

Farklı sebeplerden, farklı amaçlarla Öğeler okunabilir. Evvela, bugünlere kadar süren ve çağdaş fizikle matematikte önemli olan kavramların başlangıçının temelleri birinci cüzde atılmıştır. On dokuzuncu yüzyılın başından beri geometrinin merkezinde bulunan eğrilik kavramı bu cüzdeki basit görünen önermeler arasında saklanıyor. Yani cüzün otuz ikinci önermesinde üçgendeki üç dahili açının toplamının π'ye eşit olduğunu iddia edilir. Bugünkü kavram kullanılırsa, bu özellik Öklid'in geometrisinin düz, eğriliğinin sıfır olduğunu ifade eder.

Iki binden fazla yıldan sonra, yirminci yüzyılında **Einstein**'in genel izafiyet teorisinin önerilmesi ve kanıtlanmasıyla, herkes yaşadığız uzayın eğri olduğunu anlayabilirim. Einstein fiziğin özüne nüfuz etmesi yanı sıra bizi azimi ile sebatına da hayran bırakır. "Eşdeğerlik ilkesi"ni keşfedince, durmamış, önceden bilinen matematik kavramlarını arayıp, onları geliştirmiş, temel fiziksel kavramlarına uygulayacağı bir düzeye getirmişti.

Einstein'in başarısına imkan veren ilerlemelerin kökleri Fransız devriminden önceki yıllarda, yani geç Avrupa Aydinlanmasında bulunur, ama 18. yüzyılın sonu ile 19. yüzyılın başlarında Gauß'ın meydana getirdiği iki fikir sayesinde Einstein uygun kavramları el altında bulmuştur. Bu iki fikir belki aynı fikirin iki tarafıdır. Yani bir yandan, aynı dönemde yaşayan fen adamlarıyla filozoflara karşı Gauss bulunduğumuz uzayın düz olmadığıni tasavvur edebilmiş, öte yandan, yerden yere değişen eğrilikten bahsetmek için gerekli yöntemleri ortaya koymuştur.

Gauss ile Einstein arasında çok çarpıcı başka bir Alman matematikçi ve fen adamı, Bernhard **Riemann,** çeşitli matematik alanlarına önemli katkılar yaptı. Özellikle, o Gauss'ın iki fikrini Einstein'in kullanabileceği şekilde gelistirdi. Bu üç bilim adamını, onların kişiliğini, fikirlerini daha iyi tanıma, daha iyi anlama büyük zihnî keyiftir. Aynı zamanda, üçünün yaşadıkları dönem Almanya'nın parlak bilim dönemiyle rastlaşmıştır. Gauss geç Aydınlanma döneminde doğdu ama Napoléon'ü ve Napoléon sonradaki yeni kurulmuş Alman devletlerini gördu. Riemann, Almanya'da, Napoléon savaşları sonradaki "Biedermeier" denilen dönemin zihnî ve ahlaki toprağında yetişmiştir. Bismarck döneminden evvel ölerek, Almanya'nın sanayisini geliştirip zenginleşerek büyük devlet olduğunu görmedi.

Diğer taraftan, Einstein, çok açıdan isyankâr olmasına rağmen, bu dönemin bir çocuğu idi ve niteliklerinden birçoğu ortamı tarafından belirlendi. O Alman Imparatorluğunun Birinci ile Ikinci Dünya Savaşındaki inişi ile yıkımını ve sonraları Alman entellektuel şanının sönmesini gördü. Bu dönemin de, bu şanının da şimdi bitmiş olmasına rağmen, matematiklerinin anısı, katkıları durur. Geçmişi merak edersek, biz, bu üç düşünürlerin bilimsel eserlerini okuyunca, dönemin ustalığına hayran kalarak, çok çabalamaksizin ustalarının yaşadıkları çevrede, yaşadıkları ülkede, kişilikleriyle tanışabiliriz.

Ama Gauss'tan Einstein'e kadar akan büyük nehirin kaynağına karışan iki irmak var. Öklit ve genellikle, Gauss'a kadar her matematikçi ve her filozof için, uzayda, bilhassa düzlemde, her yer aynıdır. Buradaki yer ile oradaki yer aynı özelliklere sahiptir. Gauss mesaha memuru olarak birkaç ay mesaha ederek Braunschweig'ta yolculuk yaptı. Belki bunun dolayısıyla arzdaki yerlerin hep aynı olmadığını takdir etti. Dağlar ovalara veya derelere benzemiyorlar.

O zaman da, bugün de bunu ifade etmek için, koordinatlar lazımdır, yani geometrinin cebirle ifade edilmesi lazım. Cebir çerçevesinde yapılan geometriye "kartezyen" geometri denilir. Tabii kartezyen geometrinin gelişimi **Dekart** tarafından pek çok etkilenmiştir, ama herkesin inandığının tersine Dekart kendisi bizim anlamımızda koordinat kullanmadıḂununla beraber, usta bir matematikçi olarak, Dekart ünlü eseri, *"Discours de la méthode"*'a, bir ilâve olarak, *"La géométrie"* başlıklı metinde, cebir kullanılmazsa çok zor olan hendesî önermelerin cebir ile nasıl çözüleceğini gösterdi. Bu metni, hiç olmazsa baş kısmını, anlatmak oldukça kolay. Anlatınca, Dekart'ın matematik yeteneğini değerlendirebileceğiz.

Ama Dekart matematikçiden daha çok filozof ve fen adamı olarak önemli idi. Onu tanıyıp anlamak istersek, yalnız matematiğe kattığı fikirleri değil, felsefeyle fene ne kattığını da bilmeliyiz. Hepsiden ziyade, 16. yüzyıl ile 17. yüzyılın başı boyunca süren Avrupadaki dinsel savaşlar ile, 17. yüzyılın ikinci yarısından ve 18. yüzyılın sonuna kadar süren Aydınlanma döneminin arasındaki orta yerde alan geçiş simasıdır. Yazdığı pek çok mektuplari okuyunca, öncelleri veya kendi kuşağı ile ilgilerini anlayabiliriz, belki o bilimsel devrenin dokusu ile yapısına girebilir iz. Özellikle, Eflâtun gibi Dekart matematik kabiliyetli ve matematikte etkili olan bir filozof idi. Biz bugün bunun gibi bir etkinin mümkün olabileceğine inanmıyoruz. Bu iki simanın etkisinin nasıl meydana geldiğini anlamaya uğraşabiliriz, Tam anlamaya asla ermiyeceğiz, ama teşebbüs edince, zanaatımızın etrafındaki zihnî veya entellektuel derinliğini daha iyi değerlendirebiliriz.

Resmedeceğimiz üç dönem olacak: eski Yunanlı dönem; burada Yeniçağ denilen döneme denk düşen geç Rönesansle erken Aydınlanma dönemleri arasındaki yıllar; ve Fransız devriminden sonraki, şimdiye kadar süren çağḂu dizi için, ikinci dönemin en önemli siması Dekart olacak. Tabii, üçüncu dönemde üç önemli sima olacak, yani, Gauss, Riemann ve Einstein. Bu üç kişiyi filozof sayarsak, konumuz olan üç dönemden matematik yönünden ikisinin felsefe tarafından çok etkilenmiş olduğunu düşünebiliriz. Ben, Gauss'ın ile Riemann'ın bazı yazılarının düşünce tarihinde en önemli olaylar arasında olduğunu inancındayım. Einstein'in filozof olduğuna herkes elbette inanıyor.

Ikinci döneme ait dizimde konuşulacak en önemli yazı Dekart'ın ünlü metni *La géométrie* olacak. Üçüncü döneme ait en önemli incelenecek makaleleri de hemen verebilirim:

- Carl-Friedrich Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Ama ilaveten mektuplarıyla kendisi için yazdığı notları yani Gauss'ın zamanında belki pusulalar denilen yazılar, incelememiz gerekecek, özellikle hiperbolik geometri üzerine fikirlerini anlatmak istersek.

- Bernhard Riemann, Ueber die Hypothesen, welche die Geometrie zu Grunde liegen,

- ________________, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur questioni ab III$^{\text{ma}}$ propositae.

Einstein'in ilk makalelerinden daha kolay okunan ve fizikçi olmayanlar için Einstein kendisi tarafından yazılan iki risale bana çok faydalı oldu.

- Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.
- Grundzüge der Relativitätstheorie

Matematikte de, üstelik mantıkta da usta olduğu halde, bildiğim kadar Öklid filozof değilmiş. Eflatun'un adını henüz andığımız halde, Öklid'in döneminde matematikte felsefenin etkisinin varolup varolmadığını, Hankel fonksiyonları dolayısıyla babasının adını tanıdığımız 34 yaşında genç ölmüs Hermann Hankel'ın sözlerinden yine öğrenebiliriz.

> *Die Verbindung philosophischer und mathematischer Productivität, wie wir sie ausser in Platon wohl nur noch in Pythagoras, Descartes, Leibniz vorfinden, hat der Mathematik immer die schönsten Früchte gebracht.*

Bir yabancı dil konuşan Türklerden belki yüzde doksanı Almanca konuştukları halde, bu cümleyi çevireyim.

> *Eflatın dışında, yalnız Pisagor, Dekart ve Leibniz'ta bulunan filozof ile matematik verimliliğinin birleştirilmesi matematiğe her zaman en güzel mahsulleri verdi.*

Ne var ki, biz bu görüşü tam kabul etmeyiz, zira bize göre Gauss, ya da Riemann ile Einstein da, filozoflar. Hankel, elbette Einstein'i tanımamış belki Riemannı da tanımamış ama en azından Gauss'ın ismini kuşkusuz tanımıştı. Fakat Gauss hem o zaman hem bugün matematikçi, astronom, veya fizikçi olmak üzere ünlüydu. Tabii felsefede bu başka üç alan kadar, önemli değil, fakat gayri Öklidyen olmayan geometri hakkında düşünceleri sayesinde, filozof olarak da onu tanımamız lazım.

Cümlede başka kabul edemeyip anlamadığımız iddialar bulunuyor. Mesela Pisagor'un kim olduğu şimdi tarihçiler ve filologlar arasında tartışılan bir konudur. Bazılarına göre tamamen dini bir sima olmuştur, başkalarına göre, matematiğe önemli katkılar yapmıştı. Bu iki açı iki kitapta ileri sürülmüşḂirinciden iki baskısı, ilk olarak Almanca yazılmış, ondan sonra Ingilizceye çevrilmiş yayımlamıştır.

Kitabı yazan ünlü Alman tarihçi, Walther Burkert'in iki baskısının arasında görüşlerini değiştirdiğinden, iki kitabın da okunması lazım. Yakında çok okunan bir dergide onun Pisagor'un söylencesini, en azında söylencenin bilimsel kısmını, tamamen imha ettiğini okudum. Yani, bildiğiniz gibi, Pisagor hakkında her türlü hikâye var, Mısır'a gitmiş, irrasyonel veya adını taşayan teoremi keşfedince kurban etmiş. Bu hikâyelerin ardında ne gerçekliğin olduğunu bilinmez. Dergideki makalenin Burkert'in söylenceyi imha ettiğini iddia etmesine rağmen, makaleyi okuduğumdan bir iki ay sonra çalıştığım Enstitü'deki bilim tarihi hakkında bir konferans dinleyince, Pisagor'in geleneğinin tamamen söylence olmadığını öğrendim. Bir Rus tarihçi, Leyonid Şımud, tarafından ünün eski haline getirildiğini öğrendim. Kitabı Rusça olarak yayımlamış ama Almanca tercümesi da var.

- Walter Burkert: (a) Weisheit und Wissenschaft, (b) Lore and Science in Ancient Pythagoreanism.
- л. Жмуд В раннем Пифагореисме

Biz bu kısa dizide bu kitaplarda ne anlatıldığını incelemeyeceğiz, ama gelecek yılda onları okuyup anlamamdan sonra, daha uzun bir dizide onlara gene geleceğiz.

Anlaşılan, mesleğimizin tarihini anlamak istersek, Pisagor'un kim olduğundan, etrafında ne keşfedildiğinden veya eski zamanda matematik ile felsefe arasında ne bağlar olduğundan tam bihaber kalamayız.

Fakat uzman olmayanların uzmanların tartışmanını yakından izlemesi kolay değil. Pek az mevcut belge var. Onları okumak için, eski Yunanca öğrenmek lazım. Istersem belki sabırla gittikçe okuyarak öğrenebilirim. Öğrenmemin mümkün olmasına rağmen, öğrensem bile, belgelerin içerdiği malumatı—yani olguları—değerlendiremem. Uzmanların yazılarını okuyunca, temel bilgiye sahip olmadığımı anladım. Hankel'e göre Pisagor ile Eflatun eski Yunanlı dönemde matematikte çok etkiliymişler. Hatta matematiğe katkıda bulunmuşlar. Bugünkü uzmanlara inanırsak, Pisagor'un ne yaptığı o kadar belli değil. Ama yazılarını okuyunca daha önemlisini hemen anlıyoruz. Kendinin fikirlerini anlatarak, Eflatun öncellerinin felsefesini yorumlayıp anlatmış. Özellikle zaman zaman Eflatun'un yazılarında Pisagor söz konusudur. Eflatun'un peşinden giderek, tilmizleri, yani öğrencileri veya tarafatarı kendinin fikirlerini Pisagor'a atfetmişler. Dolayısıyla sonradan çok belgede rastlanan Pisagor hakkında hikâyelerin tarihi temelleri yok. Edebi nedenle, daha kandırıcı olmak için, kendi düşüncelerini Pisagor'un ağzında koymuşlardur.

Elbette, Pisagor'un kim olduğunu, ne yaptığını anlamak çok zor olacaktı, Eflatun'un kim olduğunu, ne yazdığını anlamak ise daha kolay. Istersek her yazısıyı yazılmış şekilde veya çevrilmiş şekilde okuyabiliriz. Tabii, bildiğiniz gibi, o çok yazdı. Gerçekten, Eflatun'un bütün yazılarının her açıdan çok faydalı olmasına rağmen, matematikçiler hepsini okumak elbette istemez. Ilkönce yüzeysel de olsa matematiğe ait metinleri ile fikirlerini biraz tanımak lazım.

Eflatun yaklaşık milattan 400 yıl önce yaşadığı ve Öklid yaklaşık milattan 300 yıl önce yaşadığı halde, Eflatun'un matematikte ne bilebildiğini bilmek istersek, ilk aşama olarak, Öklid'in Öğeler'i inceleyebiliriz.

Eflatun ve Eflatuncularla ilgimiz yoksa bile, Öğeler, yalnız matematik açısından olsa, inandığımızdan daha zengindir. Maceralı bir sefer olarak, bazı bölümlerini anlatacağım. Anlatacağımdan sonra Eflatun'un yazılarıyla veya Pisagor ile Pisagorcularla nasıl ilişkili olduklarını soracağız.[1]

Ilkönce Öğeler'ın birinci cüzünde bulunan eğrilik kavramına ait olan önermeleri inceleyeceğiz. önermeleri ile ispatlarını kısmen hemen anlayacağız ama bazının manasını yalnız sonradan Öklidyen olmayan geometrinin gelişmesini inceleyip anlayınca takdir edebileceğiz.

Eflatun'un yazıları arasında bulunan Θεαιτήτος ile Τίμαιος adlı kitapların her ikisi önemli ilgilendiğimiz malzeme içerir. Theaetetus, Eflatun'dan bir az genç olan bir matematikçi imiş.

[1]Ben bu dersleri hazırlayıp verirken görüşlerim daha çaplı olurdu. Kaynakları eski Yunan matematikte bulunan ve bugüne kadar matematiğin ana fikirleri kalan en az iki ilke var, bir tarafta, düzlemin ve uzamın niteliklerini belirleyen eğrilik, öbür tarafta geometriyi cebirle ve özellikle irrasyonel sayilarla bağlayan kavramlar veya ilişkiler. Başladığımda bu ilkelerden yalnız birisinin yüzyıllar boyunca gelişmesini nakletmek istedim. Fakat Öğeler'i inceleyip. Eflat'un matematiği nasıl etkilediğini anlamaya uğraşırken, diğer ilkenin eskiden ve zamanımız ne kadar önemli olduğunu gittikçe takdir ederdim. Ben Öğeler'i okuyunca Öklid'in sunduğu anlatmalarının çağdaş matematik metin okulur gibi okulup ispatlarını tetkik edilmesi lazım olduğunun farkına vardım. Bu yeni görüşlerimin metnimde ifade edilmesine henüz tamamen kavuşmadım.

Özellikle irrasyonel üzerine önemli kavramları ile teoremleri keşfetti. Thaetetus Theodorus'un talebesi idi. Eflatun'un Theaetetus adlı tartışmasında Sokrat Theaetetus ve Theodorus'la tartışırken, o Theaetetus'un kare köklerin dizisini nasıl keşfettiğini anlattiğini nakleder. Theodorus kendisi ilk köklerin, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, irrasyonel olduğunu ispatlamıştı. Ama Eflatun'un metnine göre ve herkesin kabul ettiği gibi, genel teorem Theaetetus tarafından keşfedilmiş. Her kare olmayan tam sayının kare kökü irrasyonel olur, mesela $\sqrt{17}$.

Meğer Theaetetus yalnız bu teorem değil, irrasyoneller hakkında onuncu cüzde gelistirilen genel teorinin içerdiği kavramları da keşfetmiş.

Tabii Theaetetus ve Timaeus adlı kitabların konusu yalnız matematik değil. Heracleitus (M. E. 500) ve Parmenides (yaklaşık M. E. 420) gibi eski filozofların peşinden giderek, Eflatun da evrenin hem yapısını hem de oluşmasını anlatmak istemişti. Ya da genel olarak değişimi anlatmak istemişti. Mesela evrenin toprak, hava, ateş ile sudan ibaret olduğunu sanarak, havanın nasıl ateşe değiştiğini veya toprağın nasıl sudan hâsıl olduğunu anlatmaya uğraşıyordu. Muntazam üç buutlu cisimlerın niteliklerini kullanarak, çok güzel bir teori geliştiriyordu. Öklid'in on üçüncü cüzünde bu üç buutlu cisimler inşa edilip nitelikleri incelenir. Bu inşanın irrasyonel sayıların teorisiyle sıkı bir ilgisi var. Inşaya ait teori kısmen Theaetus tarafından geliştirilmişti. Öklid'in on üçüncü cüzünde bütün teori meydana konulmuşĖflatun'un resmettiği evrenin çok güzel olmasına rağmen, Eflatun'un kosmologisinden, üç buutlu cisimlere ait ve Öklid'in Öğeler'ında bulunan kavramlar ile iddialar çağdaş bilime daha yakındır. Yani, Öğeler' eler'da bulunan teoriyi biz bugün bile faydayla inceleyebiliriz.

Her halde biz evvela Öğeler'ın onuncu ile on üçüncü cüzünde bulunan teoremleri sunacağız. Zaman kalırsa, ondan sonra Eflatun'un resmettiği evreni ziyaret edeceğiz.

Kendi hayatımla başlayacağımı beklemezdiniz, ama Einstein'i Öklid'le bağlayan ve zevkle hatırladığım anılarım var. Müsaadenizle, bu matematikte başlangıçlarıma ait anılarla başlayayım. Ilkönce, üniversiteye kaydolduğuğum zamandaki durumumu resmedeyim. Türkçem bu işe yetmediği için, sizin hiç bir şey anlamamaniz muhtemel. Uzun bir hikâye nakletmemden sonra, Einstein ile Öklid'e geleceğiz.

İkinci Dünya Savaşından hemen sonra, Kuzey Amerika'da, bilhassa Kanada'da, büyük merkezlerin dışındaki ortam kuşkusuz hepinizce bilinmez. Ailemin savaştan sonra taşındığı yer köy değildi. Belki kasaba denilebilecek bir yerdi, ama yine de kasaba kadar büyük değildi. En önemli özelliği olarak, kira bedeli ucuz olan çok ev vardı. Avrupalılar, başlıca İngiltere, İskoçya, veya İrlanda'dan göçenler, 19.yüzyılın sonunda ile 20. yüzyılın başında o bölgeye gelip, yerleştiklerinde, yüzyıllarca orada yaşamış olan yerliler çiçek hastalığı salgınlarında öldüklerinden, çok ucuz satın alınabilecek arsalar varmış. Kıyıda olduğundan, merkezden uzak olmadığından, çok hünersizce çerden çöpten yapılmış, ucuz kiralanacak tatil evleri kasabada bulunurdu. Bu sebepten, az paralı, ya da fakir aileler, yaşlı insanlar, boşanmış veya başka nedenden kocasız ama çocuklu olan kadınlar orada yaşıyorlardı. Tabii oldukça olağan görünen aileler de vardı. Onların neden orada bulunduklarını, ya da, özellikle, saf çocuksu gözlerimde tamamen olağan görünen kendi ailemin ne sebepten oraya geldiğini yalnız çok sonradan, bir yetişkin olarak, sordum.

Oradaki orta okulda ile lise gibi okulda yedi yıl geçirdim. Başka öğrenciler beklenen nitelikteydi, bazen oldukça iyi, bazen oldukça ahmak. Ben, onların çoğundan daha gençtim, onlardan çok etkilenerek, buluğa erdim, okulda hiç zihinsel coşkuya kapılmadım, hiç bir şey öğrenmedim. Öğretmenlerin de her türlüsü vardı. Bazi adamakıllı yetersiz, başkaları dürüst ve yeterli eğetmenlerdi. Ama ben budalaca bir isyankarlıkla, hiç kimseden bir şey öğrenmek istemezdim. Şükür ki, okuldaki son iki yılımda, genç her öğrenci tarafından sevilen ve İngilizce edebiyata hayran olan bir öğretmen geldi. O, bana o zamana kadar hiç bir şey öğrenmemis olduğumu açıkça anlattı, ama üniversiteye kaydolmazsam yazık olur diye, beni sıkıştırdı. Belki ergenliğimin en zor yılları zaten bitmişti. Hemen heyecana kapıldım, sınavlar için çalıştım, çok başarılı olup burs kazandım. Böylece, daha on yedi yaşında değilken, yüksek tasarılarla dolu olarak, üniversiteye vardım.

Annem, hakkımdaki sıkıntıları ile endişeleri hafifleyerek, kuşkusuz mutlu olmuştu. Ama o benim nelere ve ne kadar kapılmiş olduğumu bilemezdi. Benim ise telafi edeceğim yedi yıl vardı. Sabırsızdım, çaplı bir sahnede rol alacağımın hayaline kapılmama rağmen, hiç tecrübem olmadığından bir öngörülen mesleğim, gerçek tasarılarım hiç yoktu. Matematikte yeteneğim vardı ve, belki Einstein sayesinde, bazı matematikçiler ile fizikçilerin sadece ün değil, ama entellektüel, hatta ahlaki şan kazandığını biliyordum. Her halde, üniversiteye vardığımdan kisa zaman sonra, yaşadığimiz yerin yakınında bulunan nüfusu belki yirmi bin olan gerçek bir kasabada, kitapçının, aslında kırtasiyecinin, vitrininin önünden geçerken, parlak portakal rengi kabı olan kalın, "Albert Einstein: Philosopher-Scientist" adlı bir kitaba gözüm takıldı. Oldukça pahalı idi, ama on yedinci doğum günüm yaklaşıyordu ve adetimiz üzere hediye bekleyebiliyordum. Kitabı diledim. Annem ciddi, hic olmazsa zararsız, şeylere ilgi gösterdiğimden o kadar memnun idi ki kitabı satın alıp, bana verdi.

Tabii, hiç bir şey anlamadım, ama kitapta Einstein'in yazdığı ve zihni oluşmasını nakleden makale bulunuyordu, hem Einstein'in Almanca metni hem de Ingilizce çevirisi. Einstein'in ne yazdığına bakalım. Amerika onu benimsemesine, Einstein'in kendisi Almanya'yı reddetmesine rağmen, o Wilhelm'in Imparatorluğunun bir ürünü idi. Bence, hayatının sonuna kadar bu devirle memleketin davranışlarını kaybetmemiş, hem yaşam tarzını, hem de düşünme tarzını onlardan miras almıştı. Meramını Almanca anlatmayı yeğlemişti. Bu nedenden, kendi sözlerini vereyim.

> *"Im Alter von 12 Jahren erlebte ich ein zweites Wunder ganz verschiedener Art: An einem Buchlein über Euklidische Geometrie der Ebene, das ich am Anfang eines Schuljahres in die Hand bekam. Da waren Aussagen wie z. B. das Sich-Schneiden der drei Höhen eines Dreieckes in einem Punkt, die—obwohl an sich keineswegs evident—doch mit solcher Sicherheit bewiesen werden konnten, dass ein Zweifel ausgeschlossen zu sein schien. Diese Klarheit und Sicherheit machte einen unbeschreiblichen Eindruck auf mich. Dass die Axiome unbewiesen hinzunehmen waren beunruhigte mich nicht. Ueberhaupt genügte es mir vollkommen, wenn ich Beweise auf solche Sätze stützen konnte, deren Gültigkeit mir nicht zweifelhaft erschien. Ich erinnere mich beispielsweise, dass mir der pythagoräische Satz von einem Onkel mitgeteilt wurde, bevor ich das heilige Geometrie-Buchlein in die Hand bekam. Nach harter Mühe gelang es mir, diesen Satz auf Grund der Aehnlichkeit von Dreiecken zu"beweisen"; dabei erschien es mir "evident", dass die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks durch einen der spitzen Winkel völlig bestimmt sein müsse. Nur was nicht in ähnlicher Weise "evident" erschien, schien mir überhaupt eines Beweises zu bedürfen. Auch schienen mir die Gegenstände, von denen die Geometrie handelt, nicht von anderer Art zu*

> *sein als die Gegenstände der sinnlichen Wahrnehmung, "die man sehen und greifen könnte." Diese primitive Auffassung, welche wohl auch der bekannten Kant'schen Fragestellung betreffend die Möglichkeit "synthetischer" Urteile* a priori *zugrundeliegt, beruht natürlich darauf, dass diese Beziehung jener geometrischen Begriffe zu Gegenständen der Erfahrung (fester Stab, Strecke, etc) unbewusst gegenwärtig war."*

Yeniden, çevirisini verebilirim.

> *On iki yaşında ikinci ve tamamen farklı bir harika gördum; bir okul yılının başında elime geçen düzlem geometri üzerine küçük kitaptan. Bazı orada bulunan iddialar, mesela üçgenin üc yüksekliğinin bir noktada kesişmesi, hiç aşıkar olmasına rağmen, o kadar kesinlikle ispatlanabilmiş ki kuşku kalmamıştı. Bu kesinlik, bu açıklık bende ifade edilemez bir intiba bıraktı. Aksiyomlarin ispatsız alınması huzurumu kaçırmadı. Bana şüphesiz görünen iddialara dayanan ispatlar bulabilmekten tamamen memnun oldum. Mesela kutsel kıtabın elime geçmesınden evvel, Pisagor'un teoremini bana bir amcamın anlattığını hatırlıyorum. Birbirine benzer üçgenler kullanarak bu teoremi çok çabalayarak ispatlayabildim. Teoremi öyle ispatlarken bana dik açılı üçgenin yanlarının oranının bir dar açi tarafından belirlendiği aşıkar görünmüştü. Bence ispat, yalnız böyle belli olmayan şeyler için lazımdı. Bence geometriye konu olan şeylerle görüp dokunduğunuz nesneler tamamen benzerdi. Bu ilkel anlayış önsel sentetik hüküm üzerine Kant'ın ünlü sorunun temellerinden biridir. Tabii anlayışımın kaynağı her geometrik kavramın—ölçü değneği, aralık filan—deneyli bir nesneye ait olduğunun bilinçsiz farkında olmuştum.*

Einstein'in otobiyografisinin hepsinin okunmasi çok faydalı olacağı halde, biz bu tek bir bentten çok öğrenebiliriz. Öklid'le başlayarak, biz Einstein'e kadar varmak istiyoruz. Yani eğrilik kavramının Öklid'de nasıl meydana çıkıp, ve iki bin üç yıl sonra, Einstein'in genel izafiyet teorisinde nasıl kullanıldığını anlamak istiyorum. Otobiyografisinda Einstein eğrilikten söz etmez. Gerçekten, Einstein'in andığı teorem Öklid'de bulunmaz. Sağlamasını biz sonra hatırlayacağız, ama önce Abraham Pais'in güzel ve çok yararlı "*Subtle is the Lord*" başlıklı Einstein'in biyografisinde bulunan bazı ayrıntıları hatırlayayım.

Einstein, çok genç yaştan beri, Jakob Einstein adlı amcasının teşviğinden faydalandı. Özellikle, amcası on yaşındaki çocuğuya çözeceği matematik önermeler verdi. Bu yüzden hatırladığı geometri kitabını hediye olarak aldığı zamanda, yalnız on iki yaşında olmasına rağmen Einstein oldukça tecrübeli küçük bir matematikçiydi. Fakat abartmamalıyız.

Pais'in kitabına göre, aldığı kitap, 1867 yılında yayınlamış, iki Almanyalı Heis ile Eschweiler tarafından yazılan "Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an höheren Lehranstalten" idi. Bu kitap hâlâ bazı kütüphanelerde bulunur. Gördüm. çok güzel. Öklid'in geometrisi hakkında olmasına rağmen, bazı kitapta bulunan teoremler Öklid'de bulunmaz. Ya Öklid'dan sonra keşfedildiğinden, ya bazen sadece Öklid tarafından atlandığından. Einstein'in dikkatını çeken teorem şüphesiz eski Yunanlılarca bilinmişti, ama bizim belki sonra anlatacağımız sebepten Öklid tarafından toplanılmamış.

Bazı temel teoremler amcadan daha öğrenmiş olan Einstein kitapın içerdiği malzemeyi anlayıp değerlendirebiliyordu. Belli olmayan, beklemedik, zorla ispatlayacak teoremlere büyülendi. Einstein otobiyografısında kendisini çarpan bir teorem anlatır. Üçgene ait olduğundan, onu anlatacağımızdan evvel biz bazı üçgene ait tanımlamalar ve kavramlar hatırlamalıyacağız.

Aynı zamanda, Öklid'in Öğeler'ının yapısını ve Öklid'e önemli görünen kavramları incelebiliriz. Öğeler'ı yazdığı zaman Öklid'in on iki yaşında olduğunu sanamıyoruz. Teoremin güzelliği veya çarpıcılığı Öklid için en önemli niteliği muhtemel olmamış. Bilakis, geometrinin temel ilkelerini korup sağlamak istedi. Hic olmazsa, bana şöyle görünür.

Birinci cüzde, kara cahil çocuğun bile gözüne çarpan geometrik çizimler var. Mesela tam başta, beğendiğim her öğrenciye tanınmış çizimler bulunur. Dokuzuncu önermede bir açının iki eşit açıya nasıl bölünmesini anlatılmış (Şekil I). Onuncu önermede, bir doğru çizginin ikiye bölünür (Şekil II). On ikinci önermede, bir noktadan bu noktayı içermeyen bir doğru çizgiye bu çizgile dik açı yapan başka çizgi çizilmiş (Şekil III). Acaba, bu teoremler, her ne kadar güzel olmalarına rağmen, Einstein'in ölçütüne uyar mıẎani çabalayıp düşünmeden çizimlerin önermeleri çözdüğü hemen bellidir.

Ünlü Pisagor'un teoremi kırk yedinci önermesi olarak birinci cüzde bulunur. Cüzün tam son önermesinde, yani kırk sekizincide, Pisagor'un niteliğine sahip olan üçgenin dik açılı olmasını ispatlanır. Okulda öğrendiğimiz gibi, Pisagor'un adlı teorem dik açılı üçgenin hipotenüsündeki karenin başka kenarlardaki karelerin toplamına eşit olmasını iddia eder. Hatırlarına göre, Einstein, amcasının bu teoremi kendisine anlattığından sonra, çok çabalamadan sonra ispatını arayıp buldu. Böylece, bu iddia ölçütüne uyduğunu sanabiliyoruz. Otobiyografisinde Einstein'in anlattığı gibi, keşfettiği ispatta birbirine benzer olan üçgenlerin nitelikleri uygulandı.

Birinci cüzdeki otuz ikinci önermeyi ispatlamak için Öklid ünlü beşinci önermeyi uyguylamış. Sonrada biz bu önermeyi Öklid'in anlattığı şekilde izah edeceğiz. Birinci cüzde önerme en azından iki defa uygulanır. Mesela her üçgenin üç iç açinın toplamının π-ye eşit olmasını ispatlamak için, ama Pisagor'un teoremi de onunla ispatlanır. Dolayısıyla, Pisagor'un teoremi birbirine benzer olan üçgenlerin teorisiyle ispatlanabilirse, bu teori beşinci önermeye dayanmalı.

Fakat genç Einstein'e göre, belki herkese göre, şekilde aynı olan—veya benzer—üçgenlerin teorisi sade ve belli. Öklid'ce, bilakis, o kadar belli değil. çocuklar için, genel olarak sokaktaki adam için, matematik asıl ilkelerin ölçek değişmez olması bellidir. Ibaremin muhtemel yanlış olduğundan, ne demek istediğimi siz belki anlamıyorsunuz. Başka sözlerle tekrarlayım. Şekillerini değiştirmeden ama boyları ile arasındaki uzaklıklarını aynı oranda büyüterek, bir takım nesnelerin yerine başka bir takım geçtirirsek, arasındaki matematik veya fiziksel ilgiler değişmez. Ilk Yunanlı matematikçiler ile filozofler için bu niteliğin aşikâr olduğundan halde, meğer Öklid için aşikâr olmamış. Büyütmeye veya ölçeğe ait kavramlari ve teoremleri o hemen uygulamamıştı. Özellikle Pisagor'un teoremini ispatlarken başka yöntemi uyguladı. Aynı şekilde olan geometrik şekilleri ortaya koymasından önce Öklid Öğeler'ın beşinci cüzünde Evdoksus'un (Ingilizce Eudoxus) oran teorisini anlatıyor. Ardından altıncı cüzde benzer üçgenlere ve başka benzer geometrik şekillere ait teoriyi geliştirdi.

Hatırladığınız gibi ölçek değişmezliği ilkeleri düzlemin veya uzayın düz olduğuna bağlıdır. Dolayısıyla düzlemin düz olması herkesin çocukluğundan beri inandığı hatta bildiğini zannettiği olguların bir sonucudur. Böylece Öklid'i inceleyince, ben Kant'ın sorununu yavaş yavaş anlamaya başlıyorum. Belki bu yolda devam ederek, 18. yüzyıldaki filozoflar arasında yaşadığımız uzay hakkındaki tartışmaları daha iyi anlayabilirim. Gauss bu tartışmanın gerçekten farkında idi. Sonuçta tartışmayı o halletmiştir bile.

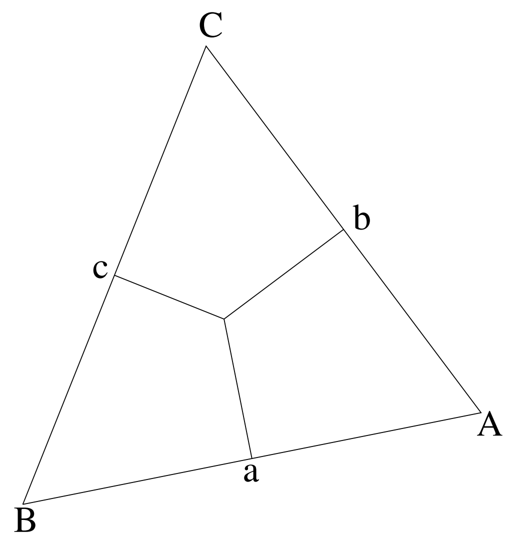
Gauss'ın fikirlerine geldiğimizde, bir üçgenin iç açılarının toplamının π'ye eşit olmamasının sonuçunun veya hatta bunun mümkün olmasının 18. yüzyılındaki filozoflar ile matematikçileri şaşırttığını göreceğiz. Bizi de belki şaşırtacaktı, çünkü genel olarak toplamı π-ye eşit değilse, ölçek değişmezliği geçerli değil, yanlış olur, ve üçgenlerin nitelikleri garip görünür. Bu beş konferansda, Gauss'a, Öklidyen olmayan geometriye de gelmeyeceğiz. Bu dizide üçgenlerin nitelikleri ile paralel önermesi arasındaki bağlantıları anlatacağız. Bildiğim kadar bu bağlantılar Eflatun'un veya başka filozofların yazılarında bulunmuyor. Neden, bilmiyor. Belki, Eflatun'dan sonra keşfedildiklerinden, belki hem Eflatun hem de halefleri önermenin önlemini anlamamışlardı da ondan. Bu sorunun neden 18. yüzyılda o kadar ilgiyle karşılandığı bana hâlâ belli değil.

Yazdıgım gibi, amcasının Einstein'a verdiği kitap Öklid'in Öğeler'ı değilmiş, başka, eğitimsel yönden daha kolay kitapmiş. Fakat genç olduğum zaman ben bunu bilmıyordum. On alti yaşında ortaokulda hatta okulun son yıllarında âdeta hiç bir şey oğrenmemiş ama matematikçi veya fizikçi olacağım diye, karar vermiş delikanlı olarak, Einstein'in otobiyografisini okuduğumda, baştan başlayım diye, Öğeler'ı okumak istiyordum.

O zaman çok ucuz ve bazı çok faydalı olan bir kitap dizisi Kanada'daki her kitabevinde bulunuyordu, yani, Everyman's Library adlı dizi. Öklid'in Öğeler'ı da bu dizideydi. Everyman's baskısı için Öklid'in Öğeler'ının ünlü yorumcusu Thomas Heath bir önsöz yazdı, ama ucuz olan baskı ne yazık ki bu tefsirini içermıyordu. Önsözünde Heath yazar ki

> *"The only general criticism of it which is deserving of consideration is that it is unsuitable as a textbook for very young boys and girls who are just beginning to learn the first things about geometry"*
>
> *Kitap hakkında genel yönden yapabilecek ve önemli olan tek bir eleştiri var. Geometriyi ilk defa olarak öğrenen çok gençöğrencilere uygun değil.*

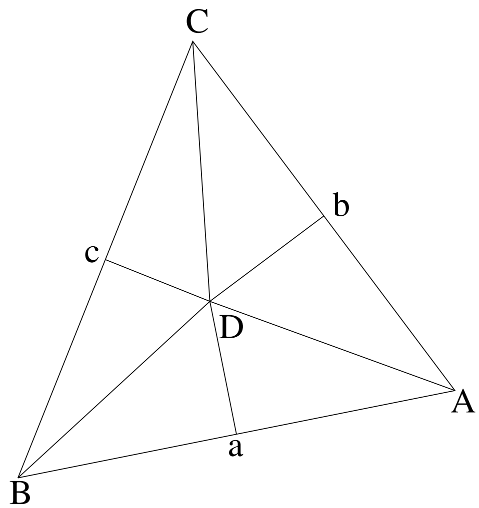
Maalesef, satın aldığım ucuz baskıyı okuyamadım. O zaman, matematik ögrenmeye başladığımda, Öğeler'ı tek başıma okumak benim için fazla zor idi. Hemen okumaktan vazgeçtim. Olağan universite derslerini izleyip, Öklid geometrisini değil, daha kolay olan düzlemdeki ya da uzaydaki koordinat geometriyi öğrendim. Yıllardan sonra tecrübeli matematikçi olarak, Öğeler'a döndüm, ama sade baskısına değil, Heath kendisinin tefsir ettiği tabıya. Ancak yorumlarını okuduğumde, genç olduğum zamanda onu anlamadiğımın nedenini anladım. Matematik ile felsefenin yönünden, Öğeler çok derindir. çok genç olarak, Einstein bazı önermeleri, sadece çözecek muammalar olarak, çok güzel, çok çekici buldu. Ama Öklid'in amacı sık sık teoremlerin sunulması değil, aksine temel matematik ve mantiki yapıyı anlatmak istedi.



I. Şekil

Özellikle, birinci cüzde, Einstein'in genel izafiyet teorisine ait olan paralel önermesi ile önermenin sonuçladığı teoremler bulunur. Sade ama çok önemli ve eğrilik kavramına ait olan otuz ikinci önerme Öklid'i Einstein'le bağlıyor. Üçgenin üç iç açının toplamının iki dik açıya eşit olması iddia edilir. Biz Öklid'in bu teoremi nasıl ispatladığını anlatacağız.

Sade bir önerme olarak, biz şimdi genç yaşında aldığı kitapta Einstein'i çarpan teoremi ispatlayalım. Herhangi bir üçgende, bir kenarına ve karşıdaki zirvesine bakalım. Bu zirveden kenarına dik açı yapan doğru çizgi yüksekliği adlanır. Belli ki üç yüksekliği var. Einstein'i çarpan teorem bu üç çizgi bir noktada kesişmesini iddia eder. Amcasının verdiği kitapta gibi, biz Öklid'de bulunan önermeler kullanarak onu ispatlayacağız.



II. Şekil

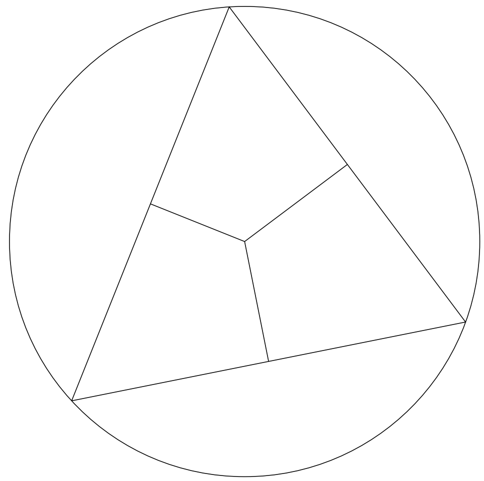
İlk önce başka bir teoreme bakalım. Şekilde gibi (I. Şekil veya II. Şekil) ABC bir üçgen olsun. AB kenarının orta noktası c noktası olsun, BC kenarının orta noktası a, ve CA kenarında b. Üç çizgi çizeceğiz. Mesela AB kenarını c noktasında kesen ve bu kenara dik olarak çizgiyi çizelim. Üç kenardan her birisi bir çizgiyi belirtiyor. Bu üç doğru çizgi bir noktada kesişir. Yani şekilde a noktasından ve c noktasından geçen çizgiler D noktasında kesişsinler. c noktasındaki iki açı birbirine eşit olduğundan, AD ile BD aralığının boyleri birbirine eşittir. Aynı sebepten BD ile CD aralığının boyleri birbirine eşittir. Böylece AD boyu CD boyuna eşittir. Dolayısıyla üçüncü, b noktasından geçen çizgi D noktasından da geçer. Dolayısıyla üç çizilmiş çizginin hepsi D'den geçer.

Henüz ispatladıgımız iddia Einstein'i çarpan teoreme benzer ama ondan daha kolaydır. Merkezi D noktası olan ve her üç noktadan geçen bir çember çizilebildiğine dikkatinizi çekiyorum (III. Şekil). Dördüncü cüzünde beşinci önerme olarak bu iddiaya benzer olan bir teorem Öğeler'de bulunur.

IV. Cüzdeki 5. Önerme. Verilmiş bir üçgenin etrafına çemberin çizilmesi.

Daha zor olan teorem IV. Şekilde görülüyor. Onu ispatlamak için yeni bir üçgen çizmalıyız. Bu adım kuşkusuz Einstein'e göre beklenmedik idi, dolayısıyla ispata çok hayran oldu.

Yeni üçgen V. Şekilde gösteriliyor. Mesela A noktasından geçen ve Aa yüksekliğine dik olan çizgi IH çiziliyor. Üç çizgiyi böyle çizerek, biz GHI üçgenini elde eder. Ilk teoremi uygulamak için AI ile AH aralıklarının birbirine eşit olmasını gösteririz. Aynı yöntemle, BI ile BG'nın birbirine eşit ve CG ile CH'nin birbirine eşit olmasını gösterebileceğiz. O zaman ispatladığımız teoremi GHI üçgenine uygularsak, üç çizdiğimiz, A, B ve C noktasından geçen çizginin bir noktada kesiştiği görürüz.



III. Şekil

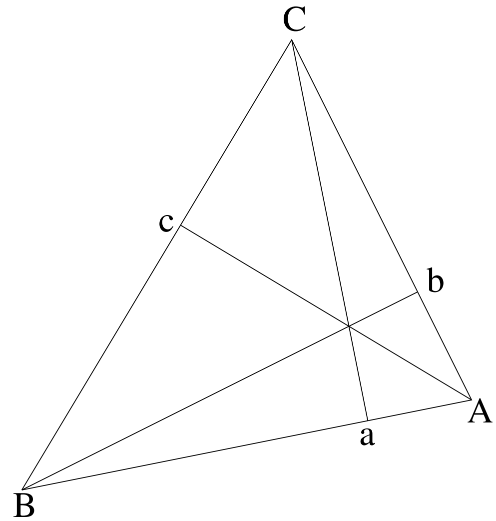
AI ile AH aralığının birbirine eşit olduğunu ispatlayalım. BC ile AH eşittir, çünkü BA ile GH ve BC ile AH paraleldirler. Yani, $CBAH$ şekli paralelkenardır. Benzer sebepten IA'nın boyu BC'nin boyuna eşittir. Böyle, iki boyu IA ile AH birbirine eşit olur. Ayni sebepten GC ile CH veya GB ile BI birbirine eşit olur.

Bu ispatta gerçekten beklemedik ve çok zevkli özellikler var!

Öklid'in Öğeler'i

Şimdiye kadar hepsinin ziyade uzun dizimde konuların ne olacağını anlattım. Bundan fazla, çocuk olarak Einstein'in Öklidyen geometride neye hayran olduğunu ögrendimk. Şimdi birinci konuya gelerek, Öğeler'e döneceğiz.

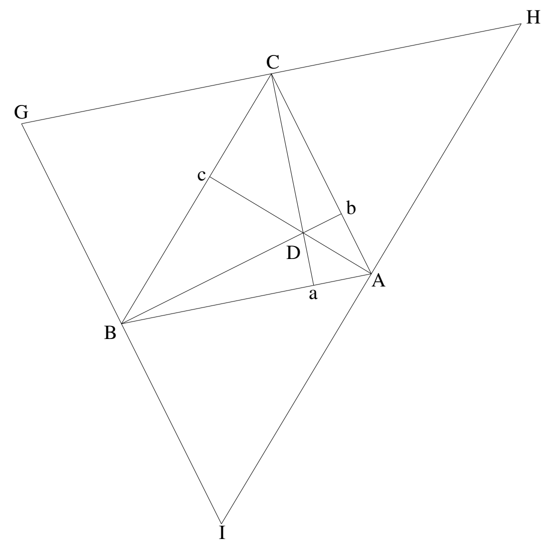
Başlamamızdan evvel vurgulacağım bir şey var. Yani İstanbul'a vardığım gün buradaki iyi tanımadığım meslektaşa rastladım. "Bize matematikte yeni geliştirmeleri nakledeceksiniz" diye, bana nezaket gösterdi. Dinlediğiniz gibi, anlatacağım şeyler hiç yeni olmayacak. Amacım tam başkadır. Öklid'in, Dekart'ın, Gauss'ın veya Riemann'ın yazılarının içerdiği fikirler ile kavramlar yeni değil, ama hepimize, gençlere veya deneyimli matematekçilere, faydalıdır. Bu önemli dört düşünürlerin yarattığı alanlara, farklı düzeyde olsa bile, hepimiz yaklaşabiliriz. Bazen yaklaşarak, beklediğimizden çok daha fazla öğreniriz. Bu konuların güzelliğiyle ya da nihayetsizliğiyle karşı karşıya bulunduğumuzda, biz hepimiz aynı durumdayız. Bu durumda bugün yaygın olan, "Yeni mi?", "çoktanberi bilinmiş mi?" soruları artık önemli değil. Kısa bir zaman için olsa, biz hepimiz bu ortak bilgilere sahip olduğumuzu takdir ederken, birbirimize eşit olduğumuzu da kabul ediyoruz.



IV. Şekil

Öğeler'de bulunan üç konular ele alacağız. Birincisi ilk cüzinde bulunan paralel belite ait geometrik kuramlar. Bu kuramların kökleri eski Yunanlı matematikte bulunur, bilhassa M. Ö. altıncı veya beşinci yüzyılda üğenin niteliklerinin keşfedilmesine aittir. Tembel olarak, ǫk düşünmeden matematikįler ile tarihįler sık sık bu zamanki matematiği Pisagor'a atfediyor. Haberdar iseler Pisagor'ı değil, etkilediği düsünürleri kasteder. Habersiz isek, biz kolayca aldatılırız. Gerękten, o zamanda oluşan matematiğin tarihi anlatmak zordur. Gerceğı efsanelerden ayırmak ǫk zor hatta olanaksız. Kendimizi saf görüşlerden kurtarmak istersek, ilk önce o yıllardaki matematiğin erişdiği düzeyi bilmemiz gerektir. Öncelerini, mesela Pisagor'u, Eflatun ile Aristo'nun yazılarından tanıtıldığımız iįn, bildikleri matematik özellikle önemlidir. Bu iki filozof matematikle ǫk ilgilenmiştir ve matematikįler ile yakın ilişkileri varmış. Öklid'in onlardan sonra Misirli Iskenderiye'de yaşamasına ve Öğeler'inin o zamandaki matematiği tamamen ięrmemesine rağmen, biz Öğeler'inden pek çok Eflatun'u etkileyen matematik öğrenebiliriz.

Pisagor hakkında görüşlerimiz Eflatun ile tilmizleriden ya da yeni Eflatunculardan aldığımız halde, Eflatun'un kendi yazılarda bulunan en güzel benler eğriliğe veya paralel çizgilere ait değil, irrasyonel sayılara ve muntazam cisimlere aittir. Dolayısıyla Öğeler'inin son cüzde bütün yer alan muntazam cisimler teorisi üçüncü konumuz olacak. Bugün gibi, Öklid için irrasyonel sayılar ile muntazam cisimlerin ilişki hayli önemlidir. Bu ilişki Öklid'in kavramlarına uygun çerçevede oluşturmak için biz ilk önce eski Yunanlı matematikçiler oluşturduğu ve hayli derin olan geometrik cebiri anlatmalıyacağız.



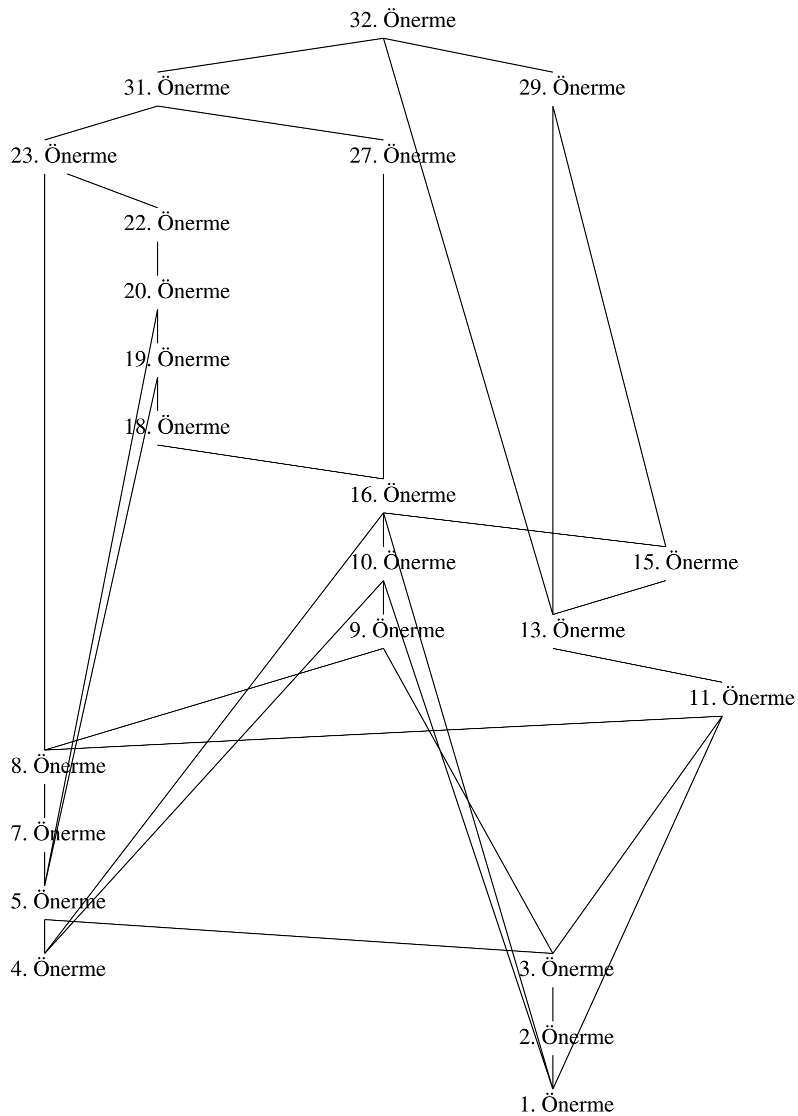
V. Şekil

Üçgenler ile eğrilik

Iki tam farklı sebepten dolayı, bu dersleri için otuz ikinci önerme önemlidir. önerme bir üçgenin üç iç açısının toplamı iki dik açına, yani π'ye eşitliğini iddia eder. Hepsinden ziyade, önerme Öğeler'ın eğriliğe ait içerdiği bilginin özütür. Bundan fazla önermenin köklerinin ilk Yunanlı matematikte bulunduğundan, onu inceleyerek biz hem eski matematiğinin ne olduğunu, hem eski matematikçilerin kim olduğunu daha iyi anlayabiliriz.

I. Cüzdeki 32. Önerme. *Her hangi bir üçgende, bir kenarı uzatılırsa, bir dış açısı, kendisine komşu olmayan iki iç açısının toplamıya eşit olur, ve üç iç açısının toplamı iki dik açıya eşittir.*

Heath'in tabısında ya da Everyman tabısında her önermenin ispatında uygulanan ve önceden anlatılan önermeler işaret edilir. Dolayısıyla ispatın düzeni, ya da bazı yönden kitabın yapışı, kolay anlaşılır. Bir şekil (VI. Şekil) ile otuz ikinci önermenin ispatının öncedeki önermelere nasıl dayandığını anlatabiliriz.



VI. Şekil

Şekildeki ikinci dizide 32. önermenin tam altında bulunun 29. önerme, paralel önermesini doğrudan kullanan tek bir önermedir. Biz önermeyi henüz vermememize rağmen, önermenin Öklidyen geometride birbirine paralel olan doğru çizgilerin varolduğunu iddia ettiğini hemen söylebiliriz.

Öklid'den Einstein'a götüren yolu izlemek istersek, on sekizinci yüzyıldaki keşfedilen ve paralel önermesi ile eğriliği bağlıyan teoremleri incelemeliyeceğiz. Önceden Öklid'in Öğeler'inde paralel önermesi ile eğrilik arasındaki ilgi üzerinde ne bulunduğu diye sorarız.

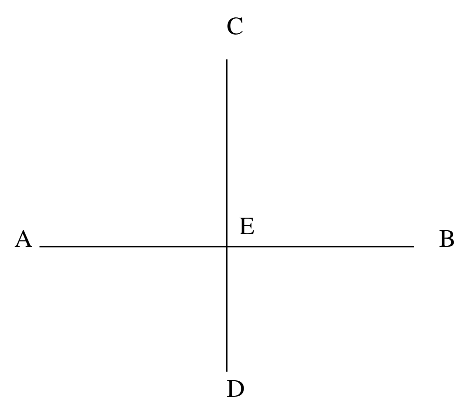
Öklid'in yazdığına bakmamızdan evvel, bazı Heath'in verdiği diğer ispatlara bakalım. Ilk vereceğimiz ispatlar son yüzyıllarda tarihçilerin önerdiği fakat eski belgelerde belki varolmayan ispatlardır. Göreceğiz gibi, bu ispatlarda Öklid'in yaptığı kadar ihtimam edilmemiş.

çocuk olarak, Einstein'in bulduğu ispatlar gibi, bizi çevreleyen uzaydan saf ve bilinçsiz anlayışımıza destekleniyorlar.

Ama önemli bir özellik var. Matematiğin başlangıçlarının izleri farklı ülkede bulunuyor fakat bizim tanıyıp en çok değer verdiğimiz bilimin bu bölgede, daha çok kesinlikle Iyonya'da, milâttan önce altıncı yüzyılda başladığı anlaşılan. Matematiğin veya felsefenin eski dini ortamdan nasıl ortaya çıktığını bilemeyez. O çağda yaşayan insanların nasıl yaşadığını, nasıl düşündüğünü elbette kavramaya uğraşabiliriz ama asla bilemeyiz.

Bu son cümleyi buraya gelip ilk dersleri vermemden evvel yazdım. Açıkçası şimdi cümlenin cahilce bir görüşü ifade ettiğinden şüpheleniyorum. Belki bu dönemin mevcut olan izlerini iyi tanıyanlar o zamandaki insanlar nasıl yaşadığınıiyi biliyorlar. Her halde derslerin içeriği üzerine düşününce, benim cehaletimin belki herkesin cehaleti olmadığını fark ettim.

Matematiğin başlangıçına bağlı olan iki iyi tanınmış ad var, yani muhtemelen milattan önce altıncı yüzyılın başinda yaşayan Tales ve milattan önce 570'den 500'e kadar yaşayan Pisagor. Bu tarihler sahih olamaz, ama bu iki simanın o yüzyılda yaşadıklarından ve Tales'in Pisagordan önce doğduğundan kuşku yok. Biz Pisagor'un ne olduğunun sorununa sonra döneceğiz. Matematikçi olsaydı bile dini sima olarak daha önemli idi.



VII. Şekil

Pisagor hakkında çok az bilinir, ama Pisagorcular denilen tilmizleri varmışṖitagorcuların bilimsel faaliyetlerinin pek çok izleri var. Oysa Tales Pisagordan gözümüzden daha saklamış bir şahsiyet. Benim tanıdığım bir tarihçiye göre, "Tales onlara zaruri olduğu için çağdaş alimlerın uydurduğu eski filozofdur".

Eski dinin etkisinde bulunan kişinin sade matematik şeyleri, mesela üçgenleri, dörtgenleri, küçük sayıları nasıl gördüğünü, onların onun için hangi esrarlı niteliklere sahip olduğunu belki bilemeyiz. Elbette tarihçilerin önerdikleri ispatlar ilkel geometrik şekiller üzerine düşünceye dalmış olan bir kişi tarafından keşfedilebilirdi. Halbuki, niye o zamanda bir kimse bir şeklin önünde şekil üzerine düşünceye dalıyordu, bilemeyiz.

Gerçekten hepimiz bildiğimiz gibi, bazen hatta geçen on yılda keşfedilmiş ispat için, onu keşfeden matematikçinin onu nasıl bulduğunu anlamak mümkün değil.

Öklid için 180 mertebeye eşit olan açı bir açı değil, yani doğru çizgi tanımladığı açı bir açı değil. Birinci cüzdeki onuncu tanımlamada dik açılık tanımlanıyor. VII. Şekilde gibi, bir CD çizgisi başka bir AB çizgisini E noktasında kessin. CEA açısı CEB açısına eşit ise, iki açı dik açı denirler. Dolayısıyla bazen açıların toplamı iki dik açıye eşit ise, biz toplamın 180 mertebeye eşit olduğunu diyoruz.

Heath'in verdiği ispatları yanı sıra şu yorumlar bulunuyor:

1) Anlaşılan Eutocius (M. S. 650) Geminus'un (M. E. 70) yazdıgı bir metne aktarıp yazmış ki

> *"Eskiler her türlü üçgenin iki dik açı içerdiğini incelemiş, ilk önce eşkenar üçgende, ondan sonra ikizkenar üçgende, ve nihayet kenarları birbirine eşit olmayan üçgende. Ardından genel teorem ispatlanmış."*

Heath'in yazdığı gibi, Proclus'a göre (M. S. 450) Eudemus (M. E. 320) genel teoremi Pisagorculara hamletmiştır. Heath'e göre, Geminus'un atfattığı eskiler belki Tales devresinde (M. E. 600 civarında, ama Heath'e göre M. E. 624 - M. E. 547! Bazı tarihçiler bilemediğimiz tarihleri o kadar muhakkak nasıl ve neden verdiklerini bilmiyorum.) yaşayan hendesiciler veya hatta Mısırlılar olabilir. Öyle ise muhtemelen ardından genel teoremi ispatlayan Pisagorcular olmuş, yani Pisagor'ın (M. E. 570'ten 500'e kadar) muasırları veya ardından gelen (yaklaşık 450'e kadar) Pisagor okuluna veya mezhebine mensup olanlar. Bilemeyiz.

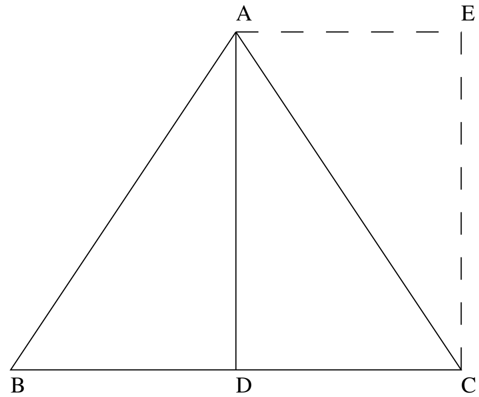
Hendesenin veya geometrinin gelişmesi hakkında yazan eski matematikler ve tarihçiler arasında bazı önemli kişi varmişİsimlerini ve yaşadıklarını dönemi ezberden öğrenirsek, Heath'-in yorumlamalarını izleyip daha iyi anlayacağız. Ilk olarak, Aristo'nun bir talebesi olan tarihçi Eudemus varmış. O Öklid'den bir az evvel yaşamıştı. Aslında Öğeler'ın ortaya çıktığına kadar geliştirilen geometri hakkında yazmış. Hem matematik hem de astronomi hakkında yazmıştı, ama bizi ilgilendiren yazı önemli Hendesenin Tarihi olacaktı. Maalesef bu yazı artık mevcut değil. Heath'e göre bu yazıda ne bulunduğunu, çok sonradan Proclus'un Öğeler üzerine yazdığı Tefsir'den ögreniyoruz. Heath'e göre Proclus M.S. 410'dan 485'e kadar yaşadı. Ilk tahsilini Mısırdaki Iskenderun'da görmüş. Ondan sonra Atinaya giderek, orada Yeni Eflatuncularla ögrenip kendisi Yeni Eflatuncu olurmuş. Istersek mevcut olan tefsirini çevrilmiş şekilde bulabiliriz. Tercümesi yakında yayılandı. Muhtemelen çok kütüphanede bulunuyor. Ben henüz okumadım.

Dediğim gibi, Geminus'un yaklaşık M. E. 70'in civarında yazdığı anlaşılır. Muhtemelen Rodos adında doğmuş Geminus astronomi üzerinde hâlâ mevcut olan bir eser ve matematik üzerinde ama bugün mevcut olmayan başka bir eser yazmış. Anlaşılan bu matematik yazıları çok tarihi bilgi içeriyormuş. Maalesef ne içerdiği yalnız çok sonraki yazıların (Pappus, hem de Proclus ile Eutocius ve sonradan bazı Arap tefsirci) metinlerinden bilinir.

Tales veya Pisagor hakkında rivayetler kuşkusuz tam doğru değil. Ne var ki bu dönemin gelişmelerini anlamak için, ilk önce onların tam yanlış olmadığını zannedip mana vermeye uğraşabiliriz. Her halde, aşağı yukarı hangi zamanda yaşadıklarını da ne yapabildiklerini de bilmeliyiz. Yoksa çok yanılır, bu çağda matematiğin veya bilimin nasıl oluştuğunu hakkında biz hiçbir neticeye erişemeyiz.

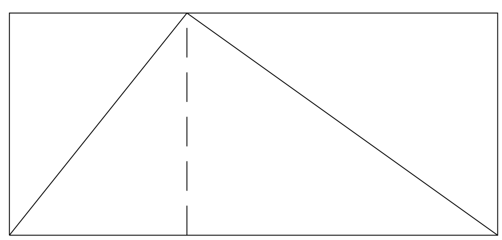
Heath'in anlattığı gibi, mozaikle tecrübeleri sayesinde Mısırlılar bir nokta çevresini doldurmak için, altı eşkenar üçgenın, dört karenin, veya üç altıgenin kullanılmasının mümkün olduğunu anlamışlardı. Kenarları ve açıları birbirine eşit olan başka çokgenin bu amaçla kullanılmasının mümkün olmadığını da anlamışlardı. Sonucu olarak altı eşkenar üçgenin iç açısı dört karenin iç açısına eşittir. Bu yüzden eşkenar üç genin üç açısının toplamı iki dik açıya eşittir. Biz eskilerin bu şekilde düşündüğüne inanabiliriz.

Bunu anlattığından sonra, Heath mümkün olan ve başka tarihçilerin eski ispat olarak önerdiği ispatı verir, ama kendisi önerinin o kadar inandırıcı olduğunu düşünmez. Her halde, ikizkenar üçgene bakalım. VIII. Şekilde görülüyor.



VIII. Şekil

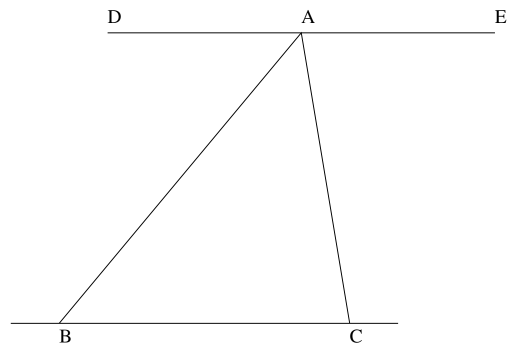
ABC ikizkenar olsun. ABD üçgenine ait toplam (yani $\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB$) ile ACD üçgenine ait toplamın (yani $\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD$) toplamından ABC üçgenin açılarının toplamının iki dik açı eksiği var. Ama ABD üçgenin iç açılarının toplamı ACE açılarının toplamına eşittir. Elbette ADC ile AEC açılarının toplamı dört dik açıya eşittir. Bu sebepten ABC açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Genel iddiayi ispatlamak için IX. Şekilde bulunan şekli kullanabiliriz.



IX. Şekil

Her halde, istersek, böyle bir ispat kullanarak, iddianın doğru olduğuna kendimizi ikna edebiliriz. Ama önemli bir soru kalıyor. Ispatını aramamamızdan önce iddiayı keşfetmemiz lazım. Bu nasıl yapılabilir. Kendi tecrübemize bakarsak, her hangi ciddi bir matematik iddianın bulunması kolay değil. Eskiler niye genel iddialar arıyorlardı? Niye araştırmaya girişmişlerdi? Önce iddianın keşfedilmesi lazım ki sonra genel ispatı aranabilir. Bunun için onların üçgenlerle veya dörtgenlerle eğlenip oynamaları lazımdı. Bu anlattığımız yöntem iddiayı ispatlamadıysa, teoremi keşfetmeye yeterdi. Her halde ben kendi kendime matematik üzerinde düşünmeye başlamadım. Size de belki uygun cesaret veren ortam lazımdı, ama tek bir kere olsaydı bile bir kimse tek başına matematik hakkında düşünmeye başlardıFikrimi iyi anlatmıyorum, ama matematiğin başlangıçlarında esrarengiz bir şey vardı. Düşündüğümün ifade edilmesi kolay değil, ama bu noktada önemli ama meydana çıkarılamaz bir şey olduğunu hissediyorum.

Pisagorcuların belki keşfettiği ispat Heath'in yorumlarında bulunur. Bu ispat genel ve henüz anlatmadığımız Öklid'in ispatına benzerdir, ama onun mantığı Öklid'in mantığından daha az açıktır. Heath'e göre bu ispat Eudemus'un yazında bulunmuş. Proclus tarafından bize aktarılmış. Eski matematik hakkındaki bilgimizi araçlı ögrendiğimizi görüyoruz.



X. Şekil

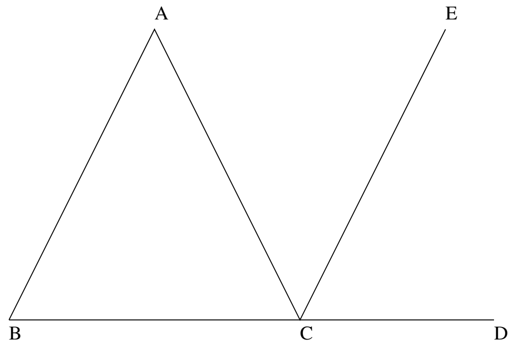
Öklid'in genel teoremi nasıl ispatladığını anlatmamızdan evvel, ona benzer muhtemelen Pisagorcuların olan ispatı anlatalım. X. Şekildeki resmi kullanıyoruz. ABC verilmiş üçgen olsun. DE doğru çizgisi A noktasından geçen ve BC doğru çizgisine paralel olan bir çizgi olsun. Öyle bir çizginin çizilebildiğini kabul ediyoruz. O zaman DAB, BAC, EAC açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Ama aynı zamanda, CBA açısı DAB açısına eşit, BCA açısı da EAC açısına eşittir.

Bu sezgili kavramamıza aşikâr olan iddiaları kullanan ispat Öklid'in ispatından çok farklı değil, ama Öklid iddialarının paralel önermesinin sonucu olmasının nedenini anlatıyor. Onun ispatı XI. Şekil'de gösteriliyor.

ABC verilmiş bir üçgen olsun. Biz yeniden bir verilmiş çizgiye paralel olan ve bir verilmiş noktadan geçen bir çizgi çizmeliyiz. Yani AB çizgisine paralel olarak CE çizgisini çizelim. Yirmi dokuzuncu önermeye göre AC çizgisinin ikisi birbirine paralel olan AB ile CE çizgilerini kesiştiğinden içters durumlu BAC ile ACE açıları eşittir. Benzer sebepten, yani yirmi dokuzuncu önermeye göre, BC çizgisinin aynı iki AB ile EC çizgisini kestiğinden iki açı yöndeş durumlu olduklarından ECD dış açısı ile ABC iç açısına eşittir.

ACE ile ECD açılarının toplamı ACD açısına eşit olduğundan, BAC ile CBA açılarının toplamı ACD açısına eşittir. $\angle BCA + \angle ACD$ toplamı iki dik açıya eşit olduğundan dolayı, BCA, BAC ve CBA üç açısının toplamı iki dik açıya eşittir.

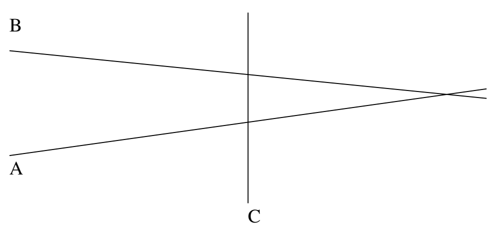
Gördüğümüz gibi, ispat bilhassa yirmi dokuzuncu önermeye dayanıyor. Şimdiye kadar bu önermenin iddiasini kesinlikle vermedik. Bu iki paralel çizgiyi kesen bir çizgiyle ilgilidir.



XI. Şekil

I. Cüzdeki 29. Önerme *Bir çizgi iki paralel çizgiyi keserse, iki içters durumlu açı eşittir, iki yöndeş durumlu açı eşittir, ve iki yanal durumlu açının toplamı iki dik açıya eşittir.*

Bu iddianın ispatı ünlü beşinci önermeye dayanır. Bu önermenin gerçekten bir varsayım, veya isterseniz aksiyom, olduğu derin bir gözlemdi. Ne var ki, bildiğiniz gibi, on dokuzuncu yüzyıla kadar, bu önermenin neden lazım olduğu anlaşılmamış. Ancak sonrada, özellikle Gauss söz konusu olurken, biz geçen üç yüzyılda, meydana gelen ilerlemeleri anlatacağız.



XII. Şekil

Ilk önce, önermeyi anlatayayım. Bu önermenin çok önemli olduğu halde, hepiniz belki okulda öğrenmediniz. Böyle anlatılıyor.

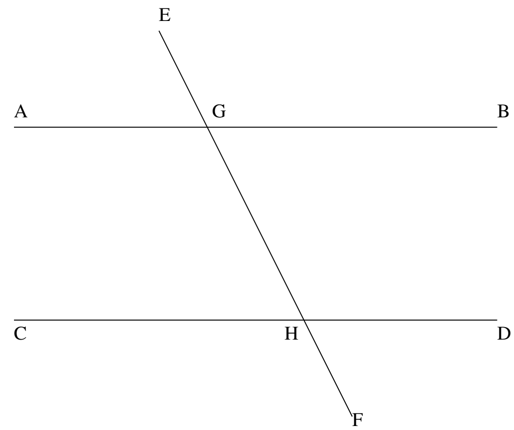
> Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθε ια ἐμπίπτουσα τὰς ̓ντοὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
> γωνίας δύο ἐλάσσονας ποι η ἐκβαλλομένας τὰς δύο ἐθείας ἐπ ἐπ̓ ἄπειρον σψμπίπτειν,
> έφ̓ ἃ μέπη εἰσὶν αἱ τ ων δύο ὀρθ ων ἐλάσσονες.

5. Postulat. *Iki çizgi, bir çizgi ile kesiştirildiğinde, aynı tarafta olan iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçük ise, bu iki çizginin aynı taraftaki uzuntıları kesişir.*

Üç çizgi ile ikisinin uzatımları XII. Şekilde gösterilir. Bazen beşinci önermeye bir bedel olarak Playfair'in belidi, veya aksiyomu, kullanılıyor. Bugün bu aksiyom da, başka beşinci önermeye bedel olan aksiyomlar da belki Öklid'in beşinci önermesinden daha iyi tanınır. Ancak başta deyip, şimdi gösterdiğim gibi Öklid'in önermesi eğrilik kavramıya doğrudan doğruya aittir, belki başka yönden de daha derindir.

Playfair'ın aksiyomu. *Verilmiş bir noktadan geçen ve verilmiş bir doğru çizgiye paralel olan yalnız bir çizgi çizilebilir.*

Aksiyom ile önermeyi incelemekten evvel, yirmi dokuzuncu önermenin beşinci önerme kullanılarak nasıl ispatlandığını anlatalım. (Maalesef, bu defa ne aksiyomun ne de önermenin incelenmesinin zamanı yok.) XIII. Şekli kullanacağız. Bu ispatın orta okulda kismen anlatılmasına rağmen, onda matematiğin bazı ana kavramlarının geliştirilmesini vurguluyorum.



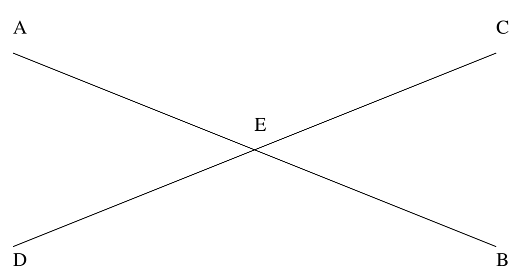
XIII. Şekil

Ispat on üçüncü önermeye dayanıyor, ama bu önerme oldukça kolaydır. Mesela AGH ile BGH açılarının toplumunun iki dik açıya eşit olmasınıiddia eder. Her halde, şekilde EF doğru çizgisi AB ile CD doğru çizgisini kesir. Ilk olarak, AGH ile GHD içters açısı birbirine eşit olduğunu ispatlayalım. Birbirine eşit olmazlarsa, birisi başkasından daha büyük olur. AGH açısı daha büyük olsun. Her ikisine BGH açısı eklensin. AGH ile BGH açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Bu iddia on üçüncü önermenin sonuçudur, ama dediğim gibi, bu iddia oldukça belli dir. Böylece BGH ile GHD açılarının toplamı iki dik açıdan daha az dır. Dolayısıyla, beşinci önermeye göre iki çizginin uzatımları kesişirler. Bu iki çizginin paralel olduğundan, kesişmeleri mümkün değil. Binaenaleyh AGH ile GHD açısı birbirine eşittir.

AGH ile EGB açıları birbirine eşittir. Neden? Bu iddianın bize aşikâr olmasına rağmen, on beşinci önerme olarak, Öklid onu ispatlıyor. Yani,

I. Cüzdeki 15. Önerme. Iki doğru çizgi kesişirlerse, ters açılar birbirine eşittir.

Bu iddianın ne dediği XIV. şekilden bellidir. AEC ile DEB açısı birbirine eşittir. Bu ispatlamak için, Öklid on üçüncü önermenin sonucu olarak AEC ile AED açısının da, AED ile DEB açısının da toplamının iki dik açıya eşit olması sonucunu çıkarır. Dolayısıyla AEC ile DEB açısı birbirine eşittir.



XIV. Şekil

Bu ispatta biz Öklid'in başka bir önermesini uyguladık. Yani Öklid'e göre dik açı nedir. Başka bir doğru çizgiye koymuş bir doğru çizgi iki birbirine eşit olan açı teşkil ederse, bu açılar dik adlanır. Dördüncú önermesine göre, her iki dik açı birbirine eşittir. Öğeler'da her kavramın tam belli olmamasına rağmen, bazı mefhumun ifadesi kesin ediliyor. Bilhassa bazı herkesin hemen kabul ettiği kavramlar verilmiş. Bu meydanda olan kavramlar arasında, birincisi ile üçüncüsü şöyle ifade ediliyor.

1. Meydandaki kavram. *Aynı nesneye eşit olan başka iki nesneler birbirine eşittir.*

3. Meydandaki kavram. *Birbirine eşit olan nesneler birbirine eşit olan nesnelerden çıkarılsa sonuçları birbirine eşit olur.*

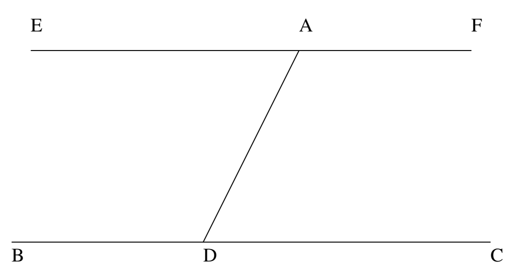
Biz otuz ikinci önermenin ispatının yirmi dokuzuncu önermeye nasıl dayandığını şimdi anlıyoruz. Yirmi dokuzuncu önermenin on üçüncü ile on beşinci önermelere nasıl dayandığını da anlattık. VI.şekile göre bütün dayanmasının yapılışını anlamak için hem otuz birinci önerme ile ispatının hem de kolay olan on üçüncü önermenin ispatının anlaşılması lazım. Fazla olarak yirmi üçüncü önermenin ispatının anlaşılması da lazım.

On üçüncü önermenin çok öncedeki önermelere dayanmasına rağmen, otuz birinci önermesinden daha kolaydır, ya da göreceğiz gibi bazı açıdan tam bellidir. Buna rağmen, sonra anlatacağız. Otuz birinci önermenin ispatıyla başlıyoruz.

I. Cüzdeki 31. Önerme. *Verilmiş bir noktadan geçen ve verilmiş bir çizgiye paralel olan bir çizginin çizilmesi.*

Bu önermenin Playfair'ın aksiyomuyla ilişkili olması bellidir.

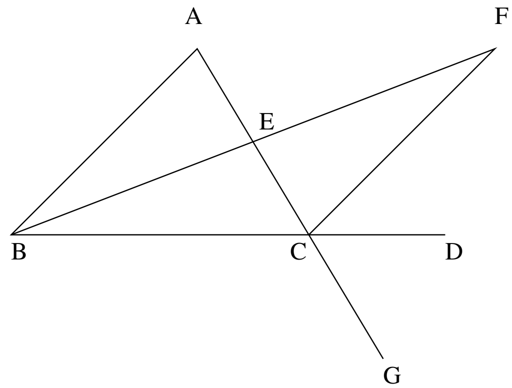
XV. Şekilda gibi verilmiş nokta A ve verilmiş çizgi BC olsunlar. D noktası BC doğru çizgisinde herhangi bir nokta olsun. Yirmi üçüncü önermede gösterilmiş gibi, zirvesi A, bir kenarı AD, ve ADC açısına eşit olan bir açı DAE çizilsin. EF doğru çizgisi EA doğru çizgisinin uzatımı olsun. Yirmi yedinci önermeye göre, EAD ile ADC açıları birbirine eşit olduğundan, BC ile EF iki doğru çizgileri birbirine eşittir.



XV. Şekil

Yirmi yedinci önerme kısmen olarak yirmi dokuzuncu önerme karşıtıdır.

I. Cüzdeki 27. Önerme. *Herhangi iki çizgi, bir çizgiyle kesilidiğinde meydana gelen içters durumlu açılar eşit ise, iki çizgi paraleldir.*



XVI. Şekil

Yirmi üçüncü önermeyi aynı zamanda verelim.

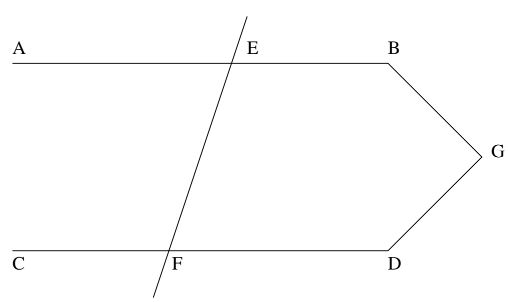
IV. Cüzdeki 23. Önerme. Verilen bir çizginin üzerindeki herhangi bir noktadan, verilen bir açıya eşit açı çizmesi.

Isterseniz kendiniz bu önermenin Öğeler'de bulunan ispatını okuyabilirsiniz. O kadar zaman olmadığımızdan, biz yalnız yirmi yedinci önermenin ispatı inceleriz. Bu ispatta genel üçgenin önemli hususiyeti uygulanmış. Sonrada anlatacağımız gibi, bazı iddialar Öklid'in geometrisinin küresel olmadığının sonucudur, bazı da hiperbolik olmadığının sonucudur. Öklidyen geometrinin küresel olmadığından yirmi yedinci önerme doğrudur. Oysa beşinci önerme dolayısıyla Öklid'in geometrisi hiperbolik değil.

Yirmi yedinci önerme Öklid'in geometrisinin küresel olmadığını ifade eden on altıncı önermeye dayanmış.

IV. Cüzdeki 16. Önerme. Her hangi bir üçgende, bir kenarının uzatıldığında, oluşan dış açı, komşu olmayan iç açılardan daha büyüktür.

Bu önerme XVI. Şekilde anlaşilan. ACD açısı ABC açısı veya BAC açısıdan daha büyüktür. Ilk önce yirmi yedinci önermeyi ispatlayalım.



XVII. Şekil

XVII. Şekli Öklid'den aldım. EF doğru çizgisi AB ile CD doğru çizgilerinin kesmesinden oluşturan AEF ile EFD içters durumlu açıları birbirine eşit olsun. Öyle ise AB ile CD doğru çizgileri birbirine paralel olur. Paralel olmazsalar, uzatımları ya B ile D yönünde ya da A ile C yönünde kesişir. Uzatımları B ile D yönündeki G noktasında kesişsin. Öyle ise GEF üçgeninin AEF dış açısı EFG içters açıya eşittir. Fakat EFG açısı GEF üçgenin AEF

dış açısı komsu olmayan iç açısıdır. On altıncı önermeye göre, AEF açısı GEF açısından daha büyüktür. Dolayısıyla ayni zamanda AEF açısı GEF açısıdan daha býük ve bu ayni açıya eşittir. Bu mümkün değil. Binaenaleyh iki çizgi paraleldir.

Şimdi on altıncı önermeye döneriz. XVI. şekilde gibi, ABC bir üçgen olsun. BC kenarısı D noktasına kadar uzatılsın. Şu halde, ACD dış açısı kendisine komşu olmayan CBA ile BAC açılarından daha büyük olur, diye Öklid iddia eder. Neden?

Onuncu önermeye göre, AC kenarını ikiye bölebiliriz. Orta noktası E olsun. Üçüncü önermeyi kullanarak, B ile E noktalarını birleştiren doğru çizginin uzantısında BE eşit FE olacak şekilde F noktasini alalım. C ile F noktaları birleştirelim. AC doğru çizgisinin üzerinde herhangi bir G noktasını alalım. Öğeler'de, iki noktanın birleşmesi ve bir doğru çizginin uzatılması birinci ile ikinci önermelerde açık olarak ileri sürüldü. Sonuç olarak, biz Şekil.P'yi elde ediriz.

AEB ile CEF üçgenlerine bakalım. AE ile CE kenarları birbirine eşittir. BE ile FE kenarları de birbirine eşittir. On beşinci önermeye göre AEB ile CEF iki ters açısı birbirine eşittir. Hâlâ ispatlanmamış olan dördüncü önermeye göre, AEB üçgeninin ile CEF üçgeninin karşılıklı açıları birbirine eşittir. Özellikle, BAE açısı ECF açısına eşittir.

Öklid özel bir yöntemle ispatı bittirdi. Bazı şekillerin ileri sürdüğü ama verilmiş aksiyomlarının sonucu olmayan nitelikler kullanıyor. ECF açısının ECD açısından daha küçük olduğundan dolayı BAE açısı da ECD açısından daha küçüktür. Böyle ispat etmek istersek, bir doğru çizginin düzlemde iki tarafı varolduğunu ve iki doğru çizginin yalnız bir noktada birbirini kesiştiğini bilmeliyiz. Öklid bu önermeleri açıklıkla ileri sürmemiştir, fakat saklayarak kabul etmiştir. Şimdi bildiğimiz gibi, küresel geometride, birinci önerme doğru değildir.

On altıncı önermenin ispatında yalnız on beşinci önerme değil, üçüncü, dördüncü ile onuncu önermeri uyguladık.

I. Cüzdeki 3. Önerme. Iki birbirine eşit olmayan doğru çizgi verilmiş ise, daha büyükten daha küçüğe eşit olan doğru çizginin çıkarılması˙

I. Cüzdeki 4. Önerme. Iki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları eşit ise, karşılıklı tabanları da, iki üçgen de, karşılıklı ikişer açıları da eşit olur.

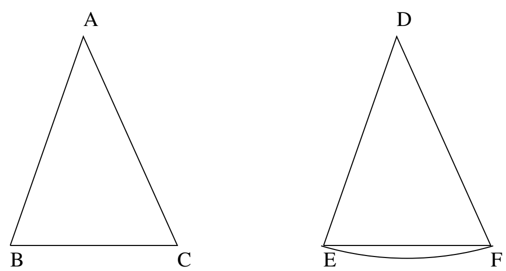
Üçüncü önermenin ispatlaması kolay ve o kadar ilginç değil. Aksine dördüncü önermenin ispatlaması Öğeler'deki müşkülatları meydana koyar. Ispatlamasını anlatmamızdan evvel, onuncu önermeyi vereyim. Bu önermenin ispatlaması da oldukça kolay.

I. Cüzdeki 10. Önerme. Bir doğru parçasının iki eşit parçaya bölünmesi.

Belki de sonra Öklid'in ifade ettiği kurallarda bulunan sorunu daha açıklıkla anlatabilmek için kullandığım kelimelerin olağan olan anlamlardan farklı olan tanımı neden uygulayacağımı hemen söylebilirim. Yani Öklid'in peşinden giderek AB doğrusunu diye ben A ile B bağlayan doğru parçasını kastediyorum. Öte yandan C ile D noktası AB doğrusunda bulunan iki nokta ise, CD doğru parçası AB doğrusunun içerdiği, C ile D birleştiren aralığı kastediyorum. Yılmaz Beyin komşu olarak, emekli lise öğretmen Ismet Bey doğru ile doğru parçası arasındaki farka dikkatımi çekti. Yani Öklid'e karşıt bugünkü öğrenciler ve ögretmenler için doğru sınırsızdır. Genel olarak bizim için sınırlı dır. Gene de, doğru anlasaydım, "doğru çizgi" sözü bugün kullanılmaz. Onu kullanıyorum.

Dördüncü önermeyı ispatlarken, XVIII. Şekli kullanarız. Iki üçgen ABC ve DEF üçgenleri olsun. AB kenarı DE kenarına eşit olsun, ve AC kenarı DF kenarına. BAC açısı EDF açısına eşit olsun. önermenin ispatlamasında üst üste gelecek şekilde koyma yöntemi kullanılıyor. Yani A noktası D noktasına konsun. Aynı zamanda AB kenarı DE kenarına konsun. Böylece B noktası E noktasına gelir. BAC ile EDF açıları birbirine eşit olduğundan, AC, DF'ye gelir. AC ile DF doğru çizgileri birbirine eşit olduklarından, C noktası F noktasına çakışır. Dolayısıyla BC tabanı EF tabanına çakışır.

Bu son iddia o kadar belli değil. Gerçekten ispatlamayı dikkatli—hatta dikkatsız—inceleyince bunun tam ispat olmadığını görürüz. Aslında Öklid bazı doğru ile açık görünen kavramını tamamen anlatmamıştır. Mesela hem Öklid doğru çizgi kavramını, hem iki noktayı bağlayan tek bir doğru çizginin olduğunu da anlatmamış. Bundan fazla doğru çizginin parçasının gene de doğru çizgi olduğunu anlatmamış. Aynı zamanda üst üste gelecek şekilde koyma yönteminden çekindiğinden, doğru çizginin üst üste gelecek şekilde konulmasının yine de bir doğru çizgi verdiği anlatmamış. Bu eksiklikleri tamamlamak istersek, yeni Öğeler'i yazmalıyız. Zaten Hilbert tarafından yapılmıştır.



XVIII. Şekil

Biz otuz ikinci önermeye kadar her önerme iddia edip ispatlamamamıza rağmen, biz bu önermeye kadar Öğeler'in ne içerdiğini, özellikle Gauss, Riemann ve Einstein uyguladığı eğrilik kavramına ait olduğunu içerdiğini daha iyi anlıyoruz. Bazı sezgisel, ya açık olarak, Öklid geometrisini küresel ile hiperbolik geometriden ayıran hususiyetlerinin önemleri takdir edebildik. Ayrıca Öklid geometrisinde lazım olan ama Öklid kendisinin meydana açıkça koymadığı kavramlar ile önermeleri tanıdık. Birinci cüzde tam olarak kırk sekiz önermeler var. Son ikisi ünlü Pisagor teorem ile karşıtını ifadeleridir. Biz şu anda bu teoremlerle ilgilenmiyorum. Öte yandan otuz üçüncüsünden kırk altına kadar numaralı on dört önermeler ilerdeki konferanslarda çok önemli olacak.

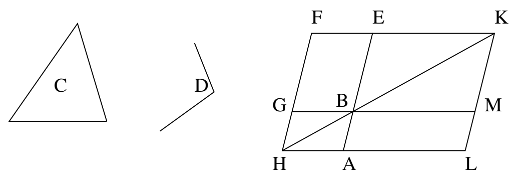
Geometrik cebir

Cebirde, özellikle cebirin başlangıcında çarpma önemli bir işlemdir ve toplama kadar önemlidir. Öklid'in Öğeler'ında çarpma işlemi geometrik yöntemlerle tanımlanmıştır. çarpım sade sayı değil, bir yüzölçümüdür. Ama çarpma yapılması yetmez. çarpma geometrik yapılırsa mesela dik dörtgenle iki çarpımin toplamı nasıl yapılır? Daha genel olarak, şekilleri farklı olan iki alanın yüzölçümünün toplamı nasıl hesaplanır. Iki çarpımdan veya şekilleri farklı olan iki alanın yüzölçümünden hangisi daha büyük olduğu nasıl belirlenir?

Öğeler'de yüzölçümüler şeklin üçgenlere bölünmesiyle ölçülür. Inceleyeceğimiz önermeler arasında bazısı üçgenlerin, bazısı paralelkenarların yüzölçümününe aittir. çok önemli sorun olarak, yüzölçümü verilmiş her hangi şekillerin yüzölçümünün toplamına eşit olan bir paralelkenarın nasıl çizildiğını anlatmaktır. Ilk önce verilmiş şekil bir üçgen olsun.

I. Cüzdeki 44. Önerme. *Verilmiş bir üçgene alanca eşdeğer, bir kenarı ve bir açısı verilen paralelkenarın çilizmesidir.*

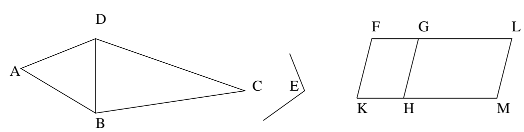
"Bir şekil bir başka şekile eşdeğer" diye, Öklid bir şeklin yüzölçümünün bir başka şeklin yüzölçümüne eşit olduğunu kastediyor. Bu önermeden sonra önermede verilmiş şekil herhangi bir çokgen olabilir. Öklid "kenarları doğru olan şekil" diyor, ama biz sadece "çokgen" deriz.



XIX. Şekil

I. Cüzdeki 45. Önerme. *Verilmiş bir çokgene eşdeğer, bir açısı verilen paralelkenarın çizilmesi.*

Bu önermeleri iki şeklin yardımıyla sadece anlatabiliriz. XIX. Şekilde verilmiş üçgen C'dir ve verilmiş açı D'dir. Verilmiş kenar AB kenarıdır. BL paralelkenarın bir kenarı AB'dir ve ABM açısı D'ye açısına eşittir. Aynı zamanda paralelkenarın yüzölçümü C'ye eşittir.



XX. Şekil

XX. Şekilde bir çokgen $ABCD$ verilmiştir. Bu çokgeni üçgenlere ayırdık. Verilmiş açı E'dir. önermenin iddiasında aşikâr anlatilmamasına rağmen, kenar FK de verilmiş. FH paralelkenarı ABD üçgenine eşdeğerdir ve GM paralelkenarı BDC üçgene eşdeğerdir. Dolayısıyla FM yüzölçümü $ABCD$ çokgene eşdeğerdir. Hemen gördüğümüz gibi, kırk dördüncü önermeyi kullanılarak, kırk beşinci önerme kolay ispatlanır. Binaenaleyh kırk dördüncü önermenin ispatlaması yeter.

Kırk dördüncü önermeyi ispatlamamızdan evvel, sonuçlarını anlatmak isterim. Ilk önce Heath'in görüşleri sunarım. Heath yazıyor ki,

> *"We can now take stock of how far the propositions I. 43–45 bring us in the matter of transformation of areas, which constitute so important a part of what has fitly been called the* geometrical algebra *of the Greeks. We have now learnt how to represent any rectilineal area, which can of course be resolved into triangles, by a single parallelogram having one side equal to any given straight line and one angle equal to any given rectilineal angle. Most important of all such parallelograms is the rectangle, which is one of the simplest forms in which an area can be shown. Since a rectangle corresponds to the product of two magnitudes in algebra, we see that the* application *to a given*

straight line of a rectangle equal to a given area is the geometrical equivalent of algebraical division *of the product of two quantities by a third. Further than this it enables us to* add *or* subtract *any rectilineal areas and to represent the sum or difference by* one *rectangle with one side of any given length, the process being the equivalent of finding a common factor. But one step still remains, the finding of a square equal to a given rectangle, i. e. to a given rectilineal figure; and this step is not taken until II.14."*

Heath'in deyişi çok önemli, ama cümleri uzun ve karmaşık, Türkçeye çevirmek kolay değil. Türkçeye çevirmesini sunmamdan evvel, onun ne dediğini kendimim kısa basit cümlelerimle anlatmaya çabalayayım.

Üç önermerler, yanı kırk üçüncü, kırk dördüncü ve kırk beşinci önermelerin yararlığını inceler. Öklid'in inşa ettiği teori cebirsel geometri adlanır, ama bu bizim bugünkü cebirsel geometri değil, bu cebirsel işlemlerin geometrik yöntemlerle yapıltiği teoridir. Heath'e göre Öklid'in teorisi bu cebirsel geometri adıya layıktir. Bu üç önerme Cebirsel geometrinin bizi çok önemli bir kısmı olan yüzölçümünün şeklini değiştirmenin sorununa götürüyor.

Öklid incelediği alanlar çokgendir. Her çokgen üçgenlere bölünebilir. Kırk dördüncü önermeye göre, her çokgen bir kenarı ve bir açısı verilen bir paralelkenara eşdeğerdir. En önemli paralelkenarlar dik dörtgendir. Bir alan gösterebilen şekiller arasında bu şekiller en basittir. Bir dik dörtgen iki niceliğin çarpımının geometrik karşılığıdır. Şu halde, $c = ef$ iki niceliğin çarpımı ise, ve a başka bir nicelik ise, $b = c/a$ bölümünün geometrik karşılık verilmiş dik dörtgenin verilmiş kenarın üstüne konulmasıdır.

Bundan fazla, üste koyma yöntemle biz her hangi kenarları doğru olan alanları toplayabilir veya çıkarabiliriz. Mesela, $c_1, c_2, c_3, \ldots$ filan hepsi yüzölçümü ve a verilmişbir aralık, biz $b_1, b_2, b_3, \ldots$ şöyle bulabiliriz ki, $c_1 = ab_1$, $c_2 = ab_2, \ldots$ Dolayısıyla, c_1 ile c_2 alanının toplamını kenarlarının boyu a ve $b_1 + b_2$ olan dik dörtgen temsil eder. Öklid iki aralığın boyunu toplayabilir, ama iki yüzölçümü dolaysız toplayamaz. Halbuki, bu üste koyma yöntem ile yüzölçümler de toplananabilir.

Önemli bir sorun üstü koyma yöntemle çözülmez, verilmiş bir alana eşdeğer bir karenin çizilmesi! Öklid onu sonra çözüyor. Ben şimdi beceriksiz olsa, Heath'in deyişi Türkçe çevireyim.

Adısına layık olan Yunanlı geometrik cebirin o kadar önemli kısmı olan yüzölçümünün şeklini değiştirmenin sorununda bu üç önermelerin bizi nereye kadar götürdügünü biz şimdi sorabiliriz. Elbette üçgene bölünebilen, kenarları doğru olan her hangi bir şeklin yüzölçümünün verilmiş bir aralıkta çizilmiş olan ve verilmiş bir açıyla paralelkenarı kullanarak nasıl temsil yapılığını öğrendik. Bu paralelkenarlar arasında en önemli olan ve yüzölçümü en basit şekilde gösterebilen şekil dik dörtgendir. Görebildiğimiz gibi, bir dik dörtgen cebirde bir çarpımın karşılığı oldu, verilmiş yüzölçümüne eşit olan bir dik dörtgenin verilmiş bir aralığın üstüne konulması cebirdeki iki sayının çarpımının üçüncü sayıya bölünmesinin geometrik muadiliydir. Bundan fazla, bu işlemin yardımıyla kenarları doğru olan şekillerin yüzölçümlerini toplayarak veya çıkararak, toplamı veya farkı bir kenarı verilmiş olan bir dik dörtgenle ifade edebiliriz. Bu işlem ortak bölen bir sayının bulunmasına eşdeğer değer erdir. Ama bir adım henüz atılmadı, verilmiş bir dik dörtgene, yani genel bir kenarları doğru olan şekile, eşit olan karenin bulunması. Bu adım ikinci cüzdeki on dördüncü önermeden önce atılmaz.

Heath'in adlandırdığı son adımı attığımızdan sonra, biz karekökleri cebirsel hesaplama durumda bulacağız. Belli ki toplamlar, farklar, çarpımlar ve bölümler bulmemizden fazla karekökleri hesaplarsak, biz her hangi ikinci mertebeden olan bir denklemi çözebiliriz. Öklid'in bunu nasıl yaptığını anlatacağız. Ikinci mertebeden olan denklemi çözülerek, sık sık irrasyonel sayıları meydana çıkar. Öğeler'ın onuncu cüzünde Öklid'in dönemine kadar geliştirilmemiş irrasyonel sayıların teoresini inceleriz. Ilk önce bazı Heath'in naklettiği ve bizim şimdi takdir edebildiğimiz görüşleri sunarım.

Heath kendisinin dediğine göre,

> *"This proposition will always remain one of the most impressive in all geometry when account is taken* (1) *of the great importance of the result obtained, the transformation of a parallelogram of any shape into another with the same angle and of equal area but with one side of any given length, e. g. a* **unit** *length, and* (2) *of the simplicity of the means employed, namely the mere application of the property that the complements of the 'parallelograms about the diameter' are equal. The marvelous ingenuity of the solution. . . "*

Biz kırk dördüncü önermenin ispatı hâlâ görmedik. Dolayısıyla basitliğini takdir edemeyiz. Bundan fazla Öğeler'ın onuncu cüzde geliştirilen irrasyonel sayılar teoresini hâlâ incelemedik. Buna rağmen bu yöntemin irrasyonel sayılar hakkında kavramları meydana getirmesini şimdi anlayabiliriz. Heath'in tefsirini çevireyim.

> *"Bu önerme uzun zaman için geometrinin en etkileyici önermelerinden birisi kalacak, özellikle* (1) *şekli her hangi bir şekil olan bir paralelkenarın aynı açıyla ve aynı yüzölçümüyle fakat aynı zamanda bir kenarı her hangi bir verilmişuzunluk mesela ölçünlüyle, bir başka paralelkenara değiştirilmesi sonucunun temel önemi de,* (2) *bundan fazla kullanılan vasıtalar, yani paralelkenarın 'köşegenine göre karşılıklı paralelkenarların' tamamlayıcılarının birbirine eşit olmasından fazla hiç kullanmaması da hesaba katılırsa. çözümünün yaratacılığı ile hüneri. . . "*

Biz bu iddiayı hâlâ tam anlayamayız, ama önermeyi ispatlamamızdan sonra belli olacak.

Bildiğiniz gibi Plutark yaklaşık M. S. 100 yaşayan biyografıları ve başka yazıları yazan bir yazar idi. Heath ona aşağıdaki gözlemi atfeder.

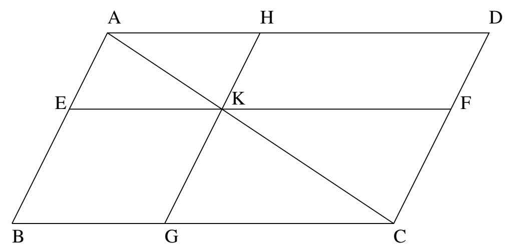
> *"En geometrik olan teoremlerden, daha doğrusu em geometrik olan önermelerden birisi olarak, iki verilmiş şekilden, birisine eşit, başkasına aynı şekilde olan şeklin verilmiş bir aralığa konulmasıdır. Bu önerme kuşkusuz üçgenin hipotenüsündeki karenin diğer iki kenardaki karenin toplamına eşdeğer olması teoreminden daha mahir, daha bilimseldir."*

Herkes Öğeler'ı düşünürken, Pisagor'un teoriminin aklına hemen gelmesine rağmen, Plutark belki haklı oldu.

Kırk dördüncü önermeyi ispatlarken, kırk üçüncü uygularız.

I. Cüzdeki 43. Önerme. Her hangi bir paralelkenarda, köşegene göre karşılıklı paralelkenarların tamamlayıcılarının birbirine eşit olur.

Bu önerme XXI. Şekilde anlatılır. Ispatını sonra anlatarım. Ama cebiri kullanarak, doğru olmasının sebebini kolay anlatabilirim. Verilmiş açıyla paralelkenarın yüzölçümü iki paralel olmayan kenarın çarpımına orantılıdır. Dolayısıyla EG paralelkenarının yüzölçümü $c\times\overline{EK}\times\overline{EB}$'ye eşittir ve HF paralelkenarının yüzölçümü $c\times\overline{HK}\times\overline{HD}$'ye eşittir. Zikrettiğim orantı sabite c'dir. Iki paralelkenar $\overline{EG}$ ile $\overline{HF}$ köşegenine göre karşılıklı olduğundan, iki oran $\overline{HK}/\overline{KG} = \overline{HK}/\overline{EB}$ ile $\overline{EK}/\overline{KF} = \overline{EK}/\overline{HD}$ birbirine eşittir. Dolayısıyla iki paralelkenarın yüzölçümleri birbirine eşittir. Aşağıda Öklid'in geometri ispatını anlatarım.



XXI. Şekil

Kırk dördüncü önermeyi şimdi ispatlayalım. Şekil.S'yi kullanarız. Verilmiş aralık AB olsun ve verilmiş üçgen C. Henuz anlatılmamış kırk ikinci önermeye göre, C üçgenine eşit olan ve D açısıyla $BEFG$ paralelkenarını çizebiliriz. EB aralığı AB aralığının uzatımı olsun. FG aralık H noktasına kadar uzatılsın ve AH doğrusu A noktasından geçen BG kenarına paralel olan doğru çizgi olsun.

H ile B noktaları BH doğru çizgiyle bağlansınlar. HF Doğru çizgisi iki birbirine paralel olan doğru çizgiyi keser. Dolayısıyla yirmi dokuzuncu önermeye göre, AHF ile HFE açıların toplamı iki dik açıya eşittir. Böylece, BHG ile GFE açıların toplamı iki dik açıdan daha az olur. Öyle ise, beşinci önermeye göre, uzatılarak, HB ile EF doğru çizgi kesişirler. K noktasında kesişsinler. KL doğru çizgisi K noktasından geçen ve EA ile FH çizgilerine paralel olan bir çizgi olsun.

HA çizgisi L noktasına kadar uzatılsın ve GB çizgisi M noktasına kadar. Şu halde XIX. Şekli elde ederiz. $HLKF$ paralelkenarının köşegeni HK doğru çizgisidır. AG ile ME paralelkenarlardır, LB ile BF birbirinin HK köşegeniyle ilgili olan tamamlayıcısıdır. Dolayısıyla LB ile BF paralelkenarları birbirine eşittir, yani yüzölçümleri birbirine eşittir. BF paralelkenarı C üçgenine eşit olduğundan, LB paralelkenarı C'ye de eşittir. GBE ile ABM açıları birbirine eşittir ve açı ABM D açısına eşittir. Dolayısıyla C yüzölçümü AB aralığının üstüne koyulmuştur.

Kırk üçüncü önermeye hâlâ ispatlamadık. Ispatlamamızdan önce ispatını anlatmadığımız otuz dördüncü önermeyi veririm.

I. Cüzdeki 34. Önerme. *Her hangi bir paralelkenarda karşılıkli kenarlar veya açılar birbirine eşittir. Köşegeni paralelkenarın yüzölçümünü ikiye böler.*

XXI. Şekile bakalım. Şekilde $ABCD$ köşegeni AC olan bir paralelkenardır. Birbirinin tamamlayıcısı olan BK ile KD iki paralelkenarlarının yüzölçümleri eşittir. Neden? Ilkönce otuz dördüncü önermeye göre ABC ile ADC üçgenlerinin yüzölçümleri birbirine eşittir. Aynı sebepten hem AEK ile AHK üçgenleri hem de KGC ile KFC üçgenleri birbirine eşittir. Dolayısıyla BK tamamlayıcısı KD tamamlayıcısına eşittir.

Kırk ikinci önermenin ispatı oldukça kolay. Iddiasını sunuyorum ama ispatlamıyorum.

I. Cüzdeki 42. Önerme. *Verilmişbir üçgene eşit olan, verilmiş bir açıyla paralelkenarın çizilmesi.*

İrrasyonel sayılar

Istersek, biz ikinci cüzde bulunan önermeleri tek tek incelemeye devam edebiliriz, ama onuncu cüze gelmek istiyoruz. Mamafih biz bilhassa irrasyonele gelmek istiyoruz. Birinci cüzü ile onuncu cüzu arasında çok hem önemli hem de güzel kavramlarla önermeler var, ama bizim maksatlar için onlar konu dışıdır. Mesela üçüncü cüzde çembere ait önermeler bulunur. Geometrik yönden, bu önermelerden çoğu pek güzel. Einstein'in ölçüdüne uyar. Yedinci, sekizinci ile dokuzuncu cüzler tam sayılar hakkındadır. Bu dört cüzler, yani üçüncü, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu bu konferanslarda söz konusu olmayacak. On birinci ile on ikinci cözlerde üç buutlu geometri hakkındadır, özellikle cisimlerin oylumunun hesaplanmasını incelenir. Onlara da bu konferanslarda dokunmayacağız.

Başka yedi cüzler, irrasyonel sayılara veya muntazam üç buutlu cisimlerın inşa edilmesine kısmen aittir. Mesela dördüncü cüzde çemberin içine dahilen temas etmek üzere muntazam çokgenler cetvel tahtası ile pergelle çizilir. Tabii her muntazam çokgen şöyle çizilemez. Üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen, ya da ongen veya onbeşgen için, nasıl yaptığını Öklid anlatmış. Muntazam çokgenlerin yapışı Öğeler'inde gelistirdiği cebirsel irrasyonel sayıların teorisine bağlıdır. Öğeler'inde teori aslında iki mertebeden veya dört mertebeden olan irrasyonel sayılar hakkındadır, ama bugün bildiğimiz gibi, muntazam çokgenlerin inşa edilmesi siklotomik sayılarına aittir. Gauss'ın onyedigen inşa ederken gösterdiği gibi, muntazam çokgen inşa etmesiyle uğraşdığımızda Galois teorisinin ortasındaki sorunuyla rastlıyoruz. Öklid'in inceleyip çözdüğü hallarda, muntazam çokgenlere ilgili irrasyonel sayılar, uygun karekökleri kullanarak, ifade edilebilirler.

Ana amacımızın Öklid ile Einstein arasında eğriliğin kavramına katkılarının belirtilmesine rağmen, bazı bu kavramı oluşturan matematikciler matematikte ana bir fikir ve derin bir ilke olarak geometri ile cebirin çok yönden ayni konu olduğunu da meydana çıkardı. Dolayısıyla iki anlamda onlar Pisagor ile Öklid'in haleflermiş. Biz geometrik cebiri ile Öğeler'deki irrasyonel sayılar teoresini anlatarak, eski Yunanlıların matematiğe bıraktığı eğriliğinden fazla olan ikinci mirası da vurguluyoruz. Her diğer matematikçiden önce, Gauss eğriliğin de irrasyonel sayıların da teorisene katkida bulunmuş oluyor.

Genç olurken her matematikçi Gauss'ın on dokuz yaşında olarak onyedigenin nasıl inşa edildiğini keşfediğini öğrenir. Elbette bu harikulade bir keşif idi, ama ben matematik öğrenmeye başladığım zaman Gauss'ın başarısından okuduğumda onun çok zeki olmasına rağmen sadece ilk geometride bir keşif olduğunu sanıyordum. Doğrusu Gauss onyedigeni nasıl inşa ettiğini hemen öğrenmedim ve tefekkür etmeden yönteminin basit ilk geometrikten alınmış ilkelerden daha ileri kavramlar kullanmadığını düşünüyordum. Yalnız ben değil pek çok matematikçiler şöyle düşünür. Hakikat başkadır.

1819 yılında, kırk iki yaşında olarak, talebesi Christian Ludwig Gehrling'e yazdığı mektupte Gauss kendisi çözümünü nasıl keşfettiğini naklediyor. Mektubundan anlayabildiğimiz gibi Gauss eski Yunanlilerın açtığı yolundamış ve geometri ile irrasyonel sayılar bağlayan ilkeleri uygulamış. Mektupta Gauss şöyle yazdı,

> *Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentlich erwähnt, ich kann es abe sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März, 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. Schon früher war alles, was auf die Zerteilung der Wurzeln der Gleichung* $(x^p-1)/(x-1)=0$ *in zwei Gruppen sich bezieht, von mir gefunden, wovon der schöne Lehrsatz D. A. p. 637 unten abhängt, und zwar im Winter 1796 (meinem ersten Semester*

in Göttingen) ohne daß ich den Tag aufgezeichnet hätte. Durch angestrengtes Nachdenken b̈er den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages(ehe ich aus dem Bett gestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen könnte. Freilich sind später viele andere Untersuchungen des 7. Abschnittes der D. A. hinzugekommen.

Siz bu satırları okumaktan sonra Gauss'un genç yazdığı ünlü D(isquisitiones) A(rithmeticae) kitabını kütp̈hanede bulup okuyacaksınız umuttayım. Metninde söz konusu olan $(x^p-1)/(x-1)$ denkleminin kökleri siklotomik sayılardır. Ama S. 637'de, yani kitabın 357'inci bölümde bulunan önerme bu köklerden ibaret olan bir toplamın ikinci mertebeden olan bir irrasyonel sayı olduğunu iddia eder. Gauss kendisinin vurguladığı gibi bu Öğeler'de bulunan geometrik ifade edilen önermelere yakın olan iddia hem geometride hem sayılar teoresinde önemlidir.

Gauss'un cümlerini çevirelim.

O keşifin tarihinden henüz hiç bir yerde söz etmedim, ama çok kolay anlatabilirim. 1796 yılın 29 martının günü idi, hiç bir tesadüf olmadı. Daha önce $(x^p-1)/(x-1)$ *denkleminin köklerinin iki kısi ma böländüğüne ait 637 sayfasında bulunan güzel önermenin tabi olduğunu her şey zaten Göttingen'deki ikinci sömestrim olan 1796 kısda keşfetmiş oldum, ama günün tarihini not etmedim. Braunschweig'da tatil günlerimi geçerken, köklerinin aritmetik anlamda karşılıklıilişkileriyle düşünüp uğraşarak, andığım günde yatağımdan çıkmaktan evvel bu ilişkiyi tam kesinlikle anlamayı başardım. Ben keşfettiğim ilkeleri hemen onyedigene uygulayabildim ve sayıca sağlayabildim. Tabii ondan sonra D. A.'nin yedinci kısmına pek çok ötedeki araştırmamıekledim.*

Ortak ölçülmez sayıların keşifi Yunanlı geometride ana olaylardan birisiydi, ama keşifin geometriyi nasıl etkilediği kesinlikle anlamam. Daha doğru Yunanlilar her iki aralığın ortak ölçüsünün olmadığını keşfettiler. Her uzulluk belirtilmiş uzunluğun bir kesirli kat olmadığından, doğace verilmis sayılar, yani 1/2, 2/3, 8/5, 12/29, gibi bayağı kesirler geometride yetermez. Anlaşılan her iki araliğın belki bayağı kesir olmayan ortak ölçümü tanımlamak için, Eudoxus'un genel oran teorisi lazımdır. Bu teori Öklid'in altıncı cüzünde gelirtilmiştir. Teorisiyle herhangi iki aynı çeşit olan matematik niteliklerin, mesela iki aralığın ortak ölçümü tanımlanabilir. Dolayısıyla, Eudoxus'un teorisiye dayanıp geometrik nitelikler kullanarak, eski Yunanlılar rasyonel veya irrasyonel sayıların teorisini geliştirmiştir. Eudoxus'un bir buçuk yızyıldan evvel, tam sayılar incelerek, Pisagorcular ve başka eski matematikçiler, uçgen sayıların veya kare sayıların geometrice etkilenmiş olan kavramlarını ortaya koymuşlar.

Rönesans ve sonradaki dönemlerden sonra oluşturulan cebirsel kavramlar kullanılmazsa irrasyonel sayılar teorisine Eudoxus'un teorisinin ihtiyacının olmasına rağmen, ben beşinci cüzün içeriğini incelemem. Yani hepimiz on dokuzuncu yüzyılda meydana konmuş çağdaş sayı kavramını iyi bildiğimizden, hiç anlatmadan beşinci cüzde bulunan kavramları kullanabiliriz.

Ikinci cüzde Heath'in adlandırdığı geometrik cebire yer verilir. Cebir kullanmazsak, gerek açıkça gerek zımnen, biz cebirsel tanım gerektiren irrasyonel sayıları ortaya koyamaz. Dolayısıyla geometrik cebirin temelleri bize oldukça önemlidir. Heath'in anlattığı gibi, *ikinci* *cüzdeki beşinci ile altıncı önermeleri* kullanarak

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} ax \pm x^2 &= b^2, \\ x^2 - ax &= b^2, \end{aligned}$$

iki denkleminin nasıl çözüldüğünü anlatabiliyoruz. Sonradan, oranın teorisinin geliştirildiğinden sonra, altıncı cüzdeki yirmi sekizince ile yirmi dokuzuncu önermelerde daha genel olarak iki

$$\text{(B)} \qquad ax \pm \frac{b}{c}x^2 = \frac{C}{m},$$

denklemi geometrik çözülmüştür. Bence, ikinci cüzde Öklid (A) denklemlerini çözmek istememiş. Tabii Heath ikinci cüzde bulunan yorumlarıyla Öklid'in bu denklemleri çözebileceğini iddia edip çözümün nasıl görüneceğini anlatar, ama fazla öne sürmüyor.

Karekökler. Cebirde veya geometrik cebirde bir sayının karekökünün çıkması çok önemlidir. Öklid be meseleyi Pisagor'un teoremi sayesinde çözüyor.

Cebir ya da cebirsel sayılar teorisinin geliştirmeyi anlatmak istersek, Heath'in geometrik cebir konusunda tefsirini okumamız çok önemli olur. Bazı cümlelerini burada aktarırım. Evvela beni çarpan bir iddia vereyim, çünkü bu konferanslarda aldırmadığım Pisagor teoreminin geometrik cebirdeki önemini gösterir. Heath yazar ki,

> *"Lastly, the extraction of the square root is, in the geometrical algebra, the finding of a square equal to a given rectangle, which is done in II.14 with the help of I.47."*

Geometrik cebirde her niceliğin bir boyutu var. Oran olabilir, veya uzunluk, veya yüzölçümü. Bir niceliğin karekökünü bulmak istersek, nicelik uzunluk olamaz, ama yüzölçümünün karekökü uzunluktur. Olağan olarak, Öğeler'de karekökü aranan nicelikler yüzölçümüdür. Heath'in cümlesinde söz konusu olan ikinci cüzdeki on dördüncü önerme yalnız dik dörtgen değil her kenarları doğru olan çizgi hakkındadır.

II. Cüzdeki 14. Önerme. Kenarları doğru olan verilmiş bir şekile eşit olan karenin çizilmesi.

Fakat fazla genellik aldatıcıdır. Yani birinci adım olarak, anlattığımız birinci cüzdeki kırk beşinci önerme kullanarak, verilmiş şekile eşit olan bir dik dörtgen çizilir. Heath'in dikkatımıza çektiği gibi, bu önermenin iddiası altıncı cüzdeki on üçüncü önermeye eşdeğer değer erdir.

VI. Cüzdeki 13. Önerme. Iki verilmiş aralığın orta orantılısının bulunması.

Iki aralık AB ve CD ve aranan orta orantılı EF iseler, şart budur,

$$\frac{AB}{EF} = \frac{EF}{CD},$$

yani

$$EF^2 = AB \times CD.$$

Dolayısıyla bu iki önerme eşdeğer değer erdir.

Altıncı cüze vardığında Öklid'in beşinci cüzde oluşturduğu oranlar teorisi elde bulunuyor. Bu teori on üçüncü önermeye uygulanabilir. Ama ikinci cüzde teori elde değil. Aslında, oranlar teorisini kullanmadan, aynı şekilde olan üçgenlerin teorisinin geliştirilmesi mümkün değil. Dolayısıyla, Öklid aynı şekilde olan üçgenlerin teorisini uygulayan yöntemi kullanmadan, başka kanıtı bularak, Pisagor teoremisini birinci cüzde ispatladı. Bu teoreme dayanarak, oranlar teorisini kullanmadan, iki cüzdeki geometrik cebiri tamamlayabilmiş.

Evvelce anlattığımız gibi, ikinci cüzdeki beşinci ile altıncı önermeler iki mertebeden olan cebirsel denklemler çözürler. On dördüncü önermeyi ispatlamak için, Öklid'in beşinci önerme kullanması bizi hayrette bırakamaz.

On dördüncü önermenin ispatını daha kolay anlamak için, ilkönce beşinci önerme ve ispatını anlatayım.

II. Cüzdeki 5. Önerme. *Bir doğru aralık birbirine eşit olan ve birbirine eşit olmayan aralıklara kesilse, iki birbirine eşit olmayan aralıkların içerdiği dik dörtgen yüzölçümü, iki kesme noktasının arasındaki aralığın üstüne çizilen karenin yüzölçümuyla beraber yarısının üstune çizilen kareye eşittir.*

Bu iddianın şüphesüz tamamen şaşırtmaca olduğundan, onu bir Öğeler'den alınan bir şekille anlatarım. XXII. Şeklinde AB doğru çizgisi C noktasında iki birbirine eşit olan araliğe bölünür. Öte yandan D noktasında çizgi iki birbirine eşit olmayan aralığe bölününür. Iki biribrine eşit olmayan aralıkların içerdiği dik dörtgenin yüzölçümü $AD \times BD$'ye eşittir. Önermi cebirsel ifade edersek,

$$AD \times DB + CD^2 = CB^2,$$

denklemi elimize geçer. AB uuzunluğu 1'e eşve $DB = x$ iseler, bu denim açık olan

$$(1-x)x + (1/2 - x)^2 = (1/2)^2$$

denklemine eşdeğer değer erdir. AB uzunluğu a'a eşit ise, denklem şöyle görünür,

$$(a-x)x + (a/2 - x)^2 = (a/2)^2.$$

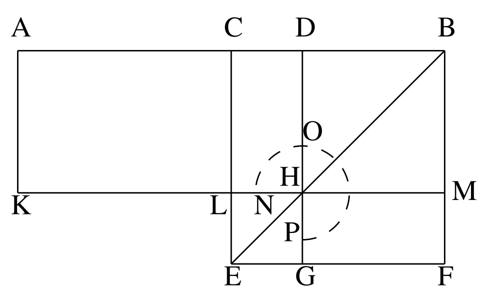
(A) denklemini çözmek istersek,

$$(a/2)^2 - (a/2 - x)^2 = b^2$$

denklemini veya ona eşdeğer değer er olan

$$y^2 = (a/2)^2 - b^2, \qquad a/2 - x = y$$

denklemini çözmemiz lazım. Gerçekten, b ile a verilmiş iseler ve b sayı $a/2$'dan daha az ise, şu halde Pisagor teoremisi kullanarak, y'yi bulup denklemi çözebiliriz. Aşağıda on dördüncü ispatta benzer ispat kullanılır. Buna rağmen, Öklid kendisi (A) veya (B) denklemini çözmez.



XXII. Şekil

Anlaşılan ikinci cüzdeki on dördüncü önermeden fazla tek iki mertebeden olan denklem çözen önerme on birinci önermedir. Be önermenin çözdüğü denklem böyledir,

$$a(a-x) = x^2.$$

Mesela, a 1'e eşit ise, şu halde $x = -1/2 \pm \sqrt{5}/2$, ancak x olumlu ise, $x = -1/2 + \sqrt{5}/2$. Böylece hemen tanıdığımız x sayısı ünlü bir sayıdır. Denklem şöyle verilebilir,

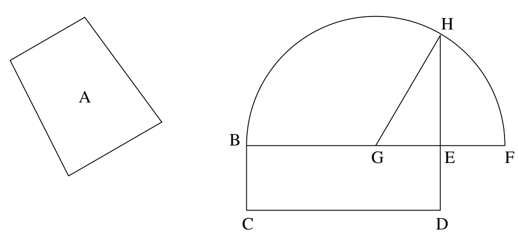
$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

Dolayısıyla, x sayısı bir aralığın aşırı ile orta orana bölünmesinin çözümdür. Aralığın uzunluğu 1-e eşit ise, bölümlerinin uzunlukleri x ile $1-x$ olur. Iki eşit olan $x : 1 = 1 - x : x$ orana *altın oran* denilir.

Gene de, başka yöntemle ikinci kes olarak Öklid bu önermeyi altıncı cüzde çözer. Muntazam beşgen çizilmesi için bu sayı ve geometrik yapışı oldukça önemli. Hemen anladığımız gibi hatta eski zamanda geometrik yapışlar yanı sıra irrasyonel sayılar meydana çıkmışlar.

XXIII. Şeklini kullanarak on dördüncü önermeyi ispatalım. Verilmiş yüzölçümü dik dörtgen BD olsun. BE ve ED birbirine eşit ise, verilmiş dik dörtgen bir kare olunca, önerme zaten çözülmüştür. Kare olmazsa, iki doğru çizgiden, birisi daha uzundur. BE çizgisi olsun. Harfları şöyle seçebiliriz.

EF aralığı ED aralığına eşit olsun. BF çizgisi G noktasında ikiye bölünsün. Merkezi G ve yarıçabı GB veya GF olan yarım çember BHF çizilsin. DE doğru çizgisi nokta H kadar uzatılsın. Şimdi beşinci önerme uygulayalım. BD dik dörtgeni ile EG karesinin toplamı GF karesine eşittir.



XXIII. Şekil

GF aralığı GH aralığına eşittir. Dolayısıyla, BD dik dörtgeni ile EG karesinin toplamı GH aralığının ustündeki kareye eşittir. Pisagor teoremi sayesinde, GH kare HE ile GE karenin toplumuna eşittir. Dolayısıyla dik dörtgeni HE karesine eşittir. Böylece önerme ispatlanmıştır.

Çözümü anlattığımızdan sonra fikrinin ne olduğunu oldukça açıktır. Beşinci önermeye göre, bir dik dörtgen iki karenin farkına eşittir. Ama Pisagor teoremini uygulayarak, biz iki karenin farkının yerine bir kare geçirebiliriz.

İspatın fikri cebirsel anlatabiliriz. Yani xy sayısının karekökünü nasıl bulabiliriz. $x = y$ ise bu önerme kolay çözülebilir. Aksi takdirde x sayısı y sayısından daha büyük olsun. $x = u+v$ ve $y = u - v$ olarak x ile y yerine, u ile v bulabiliriz. Şu halde $xy = u^2 - v^2$ ve Pisagor teoremini kullanarak, aradiğimiz çözümü, $w^2 = u^2 - v^2$ elde ederiz.

Ikinci cüzü artık bırakacağız, fakat, Heath'in peşinden giderek, bırakmamızdan evvel cebirsel içeriğini yine de vurgulamak için, on ilk önerme cebirsel ifade edelim. Bütün cüzde yalnız on dört önerme var, ve biz kalan dörtlerinden daha ikisini anlattık. On ilk önermenin cebirsel ifadeleri söyle,

$$a(b+c+d+\cdots) = ab+ac+ad+\cdots \tag{1}$$

$$(a+b)a+(a+b)b = (a+b)^2 \tag{2}$$

$$(a+b)a = ab+a^2 \tag{3}$$

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \tag{4}$$

$$ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{5}$$

$$(2a+b)b+a^2 = (a+b)^2 \tag{6}$$

$$(a+b)^2+a^2 = 2(a+b)a+b^2 \tag{7}$$

$$4(a+b)a+b^2 = \{(a+b)+a\}^2 \tag{8}$$

$$a^2+b^2 = 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right\} \tag{9}$$

$$(2a+b)^2+b^2 = 2\{a^2+(a+b)^2\} \tag{10}$$

Tabii, bu iddiaların hepsinin geometrik ispatlanacağı zamanınız yok! Fakat beşinci ve altıncısına sonra geri döneceğiz.

Dediğim gibi, dördüncü cüzde çemberin içine dahilen temas etmek üzere muntazam çokgenler cetvel tahtası ile pergelle çizilir. Gauss'un katkılardan sonra, biz çizilmesinin tekliğin köklerine bağlı olduğunu biliyoruz. Bu köklerin teorisine siklotomi denir. Aslında eski Yunanlılar cebirsel irrasyonel sayıları ile muntazam çokgenler arasında bağlantıların farkındadır, fakat bilgileri bizimki kadar geliştirilmemiş. Iki mertebeden olan irrasyonel sayılara dair bilgilerinin dördüncü cüzde anlatılmasına rağmen, bazı özellikler ilk olarak on üçüncü cüzde anlatılıyor.

Bu konuda iki ana sorun var. Birisi, muntazam çokgenlerin cetvel tahtası ile pergelle nasıl çizilmesi? Ikinci, muntazam çokgen çemberin içine dahilen temas etmek üzere çizilmiş ise, kenarı ile çemberin yarıçabının oranı ne olur? Başka benzer sorun var. Verilmiş muntazam çokgenin içine dahil kenarlara dokunan çemberin çizilmesi, veya çemberin içine dahil kenarları çember dokunan çokgen çizilmesi.

Bu sorulardan bazılarına hemen cevap verebilirsiniz. Üçgen veya muntazam dörtgen çemberde nasıl çizildiğini biliyorsunuz. Dairenin yarıçabı 1'e eşit ise, kenarının uzunluğunu hesaplayabiliriz. Iki irrasyonel sayılar meydana getiriliyorlar, yani 2 ile 3 tam sayılarının kökleri. Beşgen veya ongen ise, bu sorulara çoğunuz kuşkusuz hemen cevap veremezsiniz. Mesela, dördüncü cüzdeki on birinci önermeye bakalım.

IV. Cüzdeki 11. Önerme. Verilmiş bir çemberin içine dahilen temas etmek üzere, kenarları birbirine eşit olan ve açıları birbirine eşit olan beşgenin çizilmesi.

Bu soruna Gauss'dan öğrenilmiş olan çağdaş yönden bakarsak, o kadar zor değil, ama bir anlamda Gauss'un geliştirdiği kavramların kaynağı şimdi anlattığımız Öklid'in sunduğu teoride bulunur. Öklid on birinci önermenin çözümü başka önemli önermeye dayanarak ispatlıyor.

IV. Cüzdeki 10. Önerme. Tabandaki açıları başkasının iki misli olan ikizkenar üçgen çizilmesi.

Tabandaki her iki açısının beşkatı iki dik açıya eşit olduğu bellidir. Dolayısıyla açılar kendisi $2\pi/5$ derecesine eşittir.

Yıldız şekli verilmişolan muntazam beşgen Pisagorcuların önemli işaretiymiş. Dolayısıyla, bu iki önerme Pisagorculara erken bilinmiş olduğu zannedilir. Bildiğiniz gibi, Öklid M.E. yaklaşık üç yüz yıl yaşamış. Pisagor M.E. altıncıyüzyılda yaşamış. Pisagorcular işaretleri olmak üzere muntazam beşgen ne zaman benimsediklerini bilmiyorum, ama tahmin ederek, Pisagor'in zamanında söylerim. Şöyle ise, Pisagorcular bu iki önermenin iddialarini beşinci yüzyılın başına kadar anladı. Göreceğimiz gibi, önermelerinin tanıtlamasında bir aralığın aşırı ile orta orana nasıl bölünmesinden fazla üçüncü cüzde bulunan çember hakkında teoremler uygulanır. Aslında, bu teoremler yalnız çember hakkında değil, çember ile doğru çizginin kesişme noktaları hakkındadır. Teoremler cebirsel ifade edilirseler, iki mertebeden olup iki bilinmeyen nicelik içeren denklem ile doğrusal denklemin birlikte çözümleri hakkındadır.

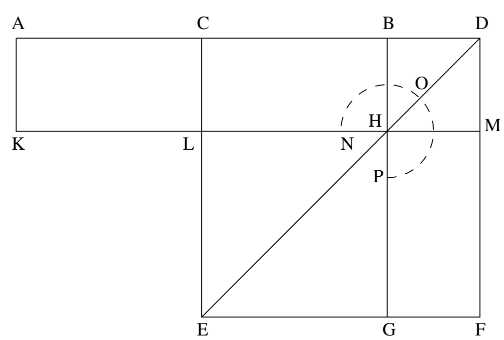
Anlattığım gibi, Pisagor'in kim olması sorunu inceleyince, Pisagor'u Pisagorculardan ayırmalıyız. Bu iki önerme ile üçüncü cüzün içerdiği bazı önermeleri incelerek, Pisagorcuların çok erken ne kadar anladığı daha iyi anlarız.

Altın oran. Muntazam beşgenin yapımı için o kadar önemli olan altın oran da Pisagor'un teoremi sayesinde geometrik belirtilebilir.

Bu iki önermenin çözümleri bizim iddia ettiğimiz ama ispatlamadığımız ikinci cüzdeki on birinci önermeye dayanır. Buna hayret etmiyoruz çünkü on birinci önermenin meydana getirdiği sayı $\sqrt{5}$ yardımıyla ifade edilir. Bu irrasyonel sayı tekliğin beşinci köküne bağlıdır.

II. Cüzdeki 11. Önerme. *Verilmiş bir doğru çizgisinin bütünü ile bir bölümünün içerdiği dik dörtgen başka bölümünün üstündeki kareye eşit olmak üzere dik dörtgenin çizilmesi.*

Bu önermenin iddiasinin cebirsel nasıl ifade edildiğini evvelce anlattık.



XXIV. Şekil

Ikinci cüzdeki on dördüncü önermeyi ispatlamak için, ikinci cüzdeki beşinci önermeyle birinci cüzdeki kırk yedinci önermeyi, yani Pisagor teoremini, uyguladık. On birinci önermeyi ispatta altıncı önermeyle Pisagor teoremi kullanılır. Altıncı önerme beşincisine benzer, fakat iddiasi daha karmaşık.

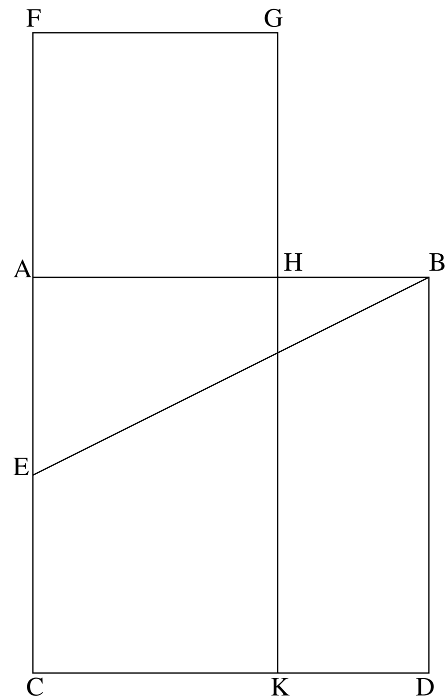
II. Cüzdeki 6. Önerme. *Bir doğru çizgi ikiye bölünsün ve aynı doğru uzatılsın. Şu halde, uzatılmış doğru çizgi ile onu uzatan bölümünün içerdiği dik dörtgenin ve verilmiş doğru* *çizginin yarısının üstündeki karenin toplamının yarısı, uzatan bölümünle beraber yaptığı doğru çizginin üstündeki kareye eşittir.*

Bu önceden eski Yunancadan Ingilizceye çevrilmiş olan, ondan sonra Türkçe iyi bilmeyen kimse Ingilizceden Türkçeye çevrilmiş olan iddia o kadar belli değil. Belki XXIV. Şekline bakınca, daha belli olur. Yani verilmiş doğru çizgi AB'dir. Uzatılmış çizgi AD'dir. BD ile DM doğru çizgilerin birbirine eşit olduklarından, önermede söz konusu olan dik dörtgen AM dik dörtgeni dir. Verilmiş doğru çizginin yarısı CB çizgisidir. Onun üstüne konmuş kare LG karesine eşittir. Başka önermede söz konusu olan kare CF karesidir. AL ile HF dik dörtgenlerinin birbirine eşit olduğunun belli olduğundan, önermenin dik dörtgeni ile daha küçük karenin daha büyük kareye eşit olduğu açıktır.

Beşinci ile altıncı önermelerin cebirsel ifadeleri Heath'in denklem dizisinde verilmiştir. XXII. Şeklina bakınca beşinci önerme altıncı kadar belli olduğuna kabul edersiniz.

Şimdi ikinci cüzdeki on birinci önermeyi ispatlayalım. XXV. Şekil kullanılır. Verilmiş çizgi AB olsun. Bu çizginin üstüne $ABCD$ karesi çizilsin. E noktasında AC çizgisi ikiye bölünsün. B ile E noktalarını birleştiren doğru çizgi çizilsin. EF çizgisi BE çizgisine eşit olarak, CA çizgisi F noktaya kadar uzatılsın. FA çizgisinin üstüne kare FH çizilsin. O zaman GH K noktasına kadar uzatılsın. Şu halde, AB ile BH doğru çizgilerinin içerdiği dik dörtgen AH çizgisinin üstündeki kareye eşittir. Ilk önce altıncı önermeye göre CF ile FA içerdiği dik dörtgen, AE üstündeki kareyle beraber EF üstündeki kareye eşittir. Fakat EF doğru çizgisi EB'ye eşittir. Dolayısıyla CF ile FA içerdiği dik dörtgenin ve AE üstündeki karenin toplamı EB üstündeki kareye eşittir.

A açısının dik olduğundan, Pisagor teoremini uygulayabiliriz. Dolayısıyla AE ve BA üstündeki iki karenin toplamı EB'ye eşittir. Şu halde, CF ile FA içerdiği dik dörtgen BA üstündeki kareye eşittir.



XXV. Şekil

Pisagor'un teoreminin uygulamasi. Biz Pisagor teoremle beraber, ikinci cüzdeki beşinci veya altıncı önermeyi kullanarak, ayrıca iki önermenin meselerini çözdük, ikinci cüzün on birincisi ile on dördüncüsü. Beşinci ile altıncı önermenin cebirsel özdeşlikler olduklarını, halbuki daha derin olarak on birincisi ile on dördüncüsünün cebirsel denklemlerin köklerini verdiklerini vurgulayalım.

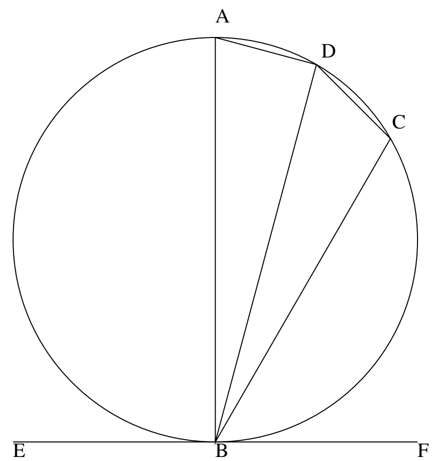
Her iki önermede iki mertebeden olan denklemin çözmesi lazım. Her iki önermede benzer yöntem uyguladık, yani ikinci cüzdeki beşinci veya altıncı önermeyi kullanarak iki karenin farkı elimizde ettik. Pisagor teoremini uygulayarak, iki karenin farkısın yerine tek bir kareye geçtirdik. Kullandığımız üçüncü çüzün otuz yedinci önermesi otuz altıncısına dayanılıyor. Otuz altıncısın ispatında hem de Pisagor teoremi hem de üçüncü cüzde geliştirilen çemberin nitelikleri uygulanıyor.

Üçüncü cüzün başka kullanacağız ama ispatlamayacağız önermesi otuz ikincisidir. Bu önerme düzlemin eğriliğinin sıfır olmasının bir sonuçudur, yani her üçgenin dahil açılarının toplumunun iki dik açıya eşit olması ispatında kullanılıyor. Biz muntazam beşgenin çizilmesi için, bu önermeyi uygulayacağız. Bundan dolayı Öklid'in peşinden giderek bizim anlatacağımız beşgenin çizilmesi küresel veya hiperbolik müstevide geçerli değil. Bu geometrilerde basit muntazam çokgenlerin nasıl çizildiği bilmiyorum. Bu meselenin çözümü hakkında henüz düşünmedim.

Çemberler nitelikleri. Dördüncü cüzün on birinci önermesinin meselesi tekliğin beşinci kökünün çizilmesidir. Bu meselenin çözülmesi için üçüncü cüzde bulunan yöntemler uygulanıyor, iki çemberin veya bir çemberin ile bir doğru çizginin arakesitin belirlestiği noktalar kulllanıyor.

Biz üç kullandığımız önermeleri ispatlamadığımız halde, hepsinin iddiasini verelim. Her önermen yakında konan şekille anlatılıyor.

III. Cüzdeki 32. Önerme. Bir doğru çizgi bir çemberle temasta bulunursa, ve dokunma noktadan çember içindeki çemberi kesişen bir doğru çizgi çizilirse, çizigi ile keşişme noktalardan geçn teğetler beraber yaptiği açılar çemberin karşılıklı kesmesinde oluşan açılara eşit olur.



XXVI. Şekil

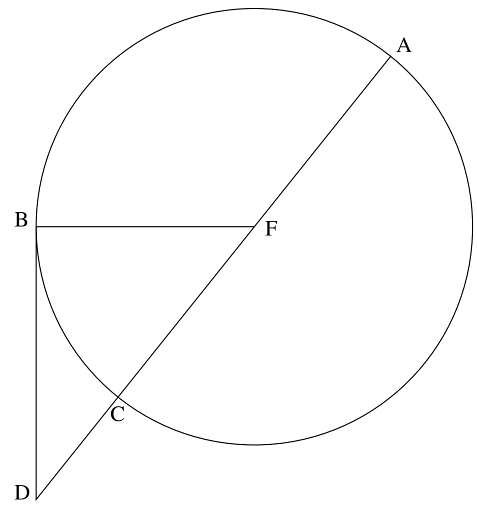
XXVI. Şekilde bir çember ile EBF teğedi çizilirler. Çemberin içinde bir doğru çizgi BD de çizilir. Bir çemberin kesmesinde bulunan DCB açısı C noktasından bağlı değil ve EBD açısına eşittir. Tabii o zaman diğer kesmesinde oluşan DAB açısı FBD açısına eşittir.

III. Cüzdeki 36. Önerme. Çemberin dışında bir nokta seçilsin. Noktadan iki doğru çizgi geçsin. Çizgilerden birisi çemberi kessin, başkasi çemberle temasla bulunsun. Şu halde çemberi kesişen doğru parça ile onun seçilmiş nokta ile çemberin arasındaki parçasının içerdiği dikdörtgen çemberle temasta bulunan doğru parçanın üstüne çizilmiş kareye eşdeğerdir.

XXVII. Şekilde çemberle kesişen doğru parça DA çizgisidir. Nokta ile çember arasındaki parçası DC parçasıdır. Önermenin iddia ettiği eşitlik

$$\overline{DC} \times \overline{DA} = \overline{DB}^2 \tag{C}$$

denklemidir.



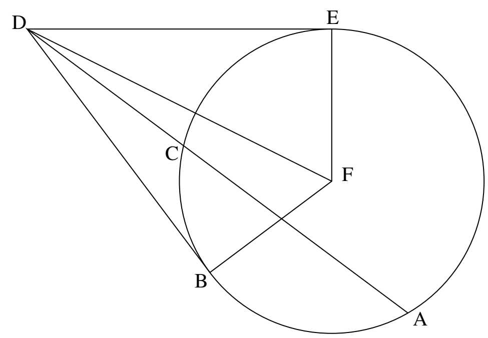
XXVII. Şekil

III. Cüzdeki 37. Önerme. Çemberin dışında bir nokta seçilsin. Noktadan geçen iki doğru çizgiden birisi çemberi kesişsin, başkası çemberden geçsin. Çemberi kesişen bütün doğru parça ve seçilmiş nokta ile çemberin arasındaki parçasının içerdiği dikdörtgen diğer çemberden geçen doğru parça üstüne çizilmiş kareye eşit ise, çemberden geçen doğru çemberle temasta bulur.

Bu önerme otuz altıncı önermenin tersidir. Karenin üstüne çizildiği doğru parça D noktası ile çemberde bulunan B noktasını birleştiren doğru parçadır. Dikdörtgen belirten iki doğru çizgi DC ile DA çizgilerdir.

Şimdi dördüncü cüze geri dönerek, ikinci cüzün on birinci önermesini kullanarak, dördüncü cüzün onuncu önermesinin meselesini çözürüz. Aradığımız ikizkenari çizelim. Herhangi bir doğru çizgi mesela XXIX. Şekilde gibi AB çizgisiyle başlayarak AB çizgisini C noktasında şöyle keseriz ki AB ile BC içerdikleri dik dörtgen CA çizgisinin üstündeki kareye eşit olur. Merkezi A ve yarıçabı AB olan BDE çemberi çizilsin. Ispatlamadığımız ama zor olmayan dördüncü çüzdeki birinci önermeye göre, bu çemberin çabından daha küçük olan AC çizgiye eşit olan BD doğru çizgiyi çizebiliriz. AD ve DC doğru çizgilerini de çiziriz. Biz Einstein'i düzen geometrideki çarpan teorimden bahsederken, iddia edilen cüzün beşinci önermesine göre, ACD üçgenin etrafına başka bir çember çizebiliriz.

AC ile BD doğru çizgisi birbirine eşit olduklarından, AB ile BC içerdiği dikdörtgen BD üstündeki kareye eşittir. Bu kadar, çember hakkında olan üçüncü cüzden kaçındık, ama şimdi Öklid'in üçüncü cüzünün son önermesi, otuz yedinci önermeyi uygulanır. Yani B noktası ACD çemberi dışında bulunur. BA doğru çizgisi A noktasında çemberi çaprazlayıp keserek, BD doğru çizgisi çemberi B noktasında keser. AB ile BC içerdiği dik dörtgen BD üstündeki kareye eşit olduğundan, çizgi BD çemberi D noktasında dokunur.



XXVIII. Şekil

Bitmemişiz. Üçüncü cüzde bulunan başka önermeyi uygularız, yani otuz ikinci önermesi. XXVI. Şekille iddiasini anlattık. Otuz yedinci önermenin varsayımının cebirsel iddiası otuz altıncı önermenin sonucu olan (C) denklemidir. Önermenin geometrik ispatını vermeyiz, fakat koordinatlar kullanarak, onu kolay sağlayabiliriz. $D = (0, 0)$ ve $F = (b, 0)$ olsunlar. Çember

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2$$

denklemiyle tanımlansın. Şu halde A ile C noktaları elimize geçirmek için, $x = \lambda\alpha$, $y = \lambda\beta$ olsunlar. α ile β sayıları A ile C noktaları bulunduğu doğru çizgi tarafından belirtilmiştir. Bu çizgi verilmiş ise, iki nokta

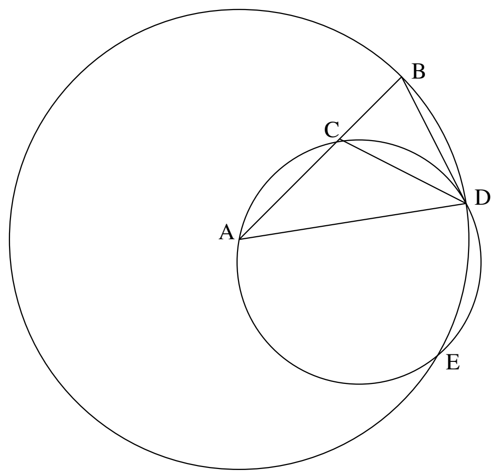
$$(\lambda\alpha - b)^2 + (\lambda\beta)^2 = a^2$$

denklemi tarafından belirtilir. Bu denklemin iki kökleri λ' ile λ'' sayılarına eşit iseler, $\overline{DC} \times \overline{DA}$ çarpımı $\lambda'\lambda''\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dir. $\lambda'\lambda''$ çarpımının $(b^2 - a^2)/(\alpha^2 + \beta^2)$ eşit olmasının belli olduğundan dolayı, $\overline{DC} \times \overline{DA}$ çarpımının verilmiş doğru çizgiye bağlı olmaması bellidir. Özellikle

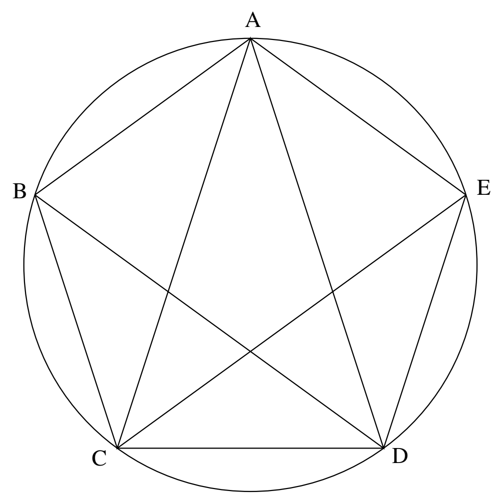
$$\alpha^2 b^2 - (b^2 - a^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

ise, çembere teğet olan doğru çizgi ile nokta B elimize geçir. Dolayısıyla (C) denklemi DB çizgisinin çemberle temasta bulunması eşdeğerdir.

Onuncu önermenin ispatına gene döneriz. XXIX. Şeklinde iki çember var. Üçüncü cüzün otuz ikinci önermesini küçük çembere uyguluyoruz. Önermeye göre, BDC açısı karşılıklı DAC açısına eşittir. Dolayısıyla BDA açısı iki açının CDA ile DAC toplumuna eşittir. Fakat dış açının BCD da bu topluma eşit olduğundan, BDA ile BCD açıları birbirine eşittir. ABD üçgeninin ikizkenar olduğundan, BDA açısı ABD açısı, veya aynı olarak CBD açısına eşittir. Dolayısıyla DBA açısı da BCD açısına eşittir. Şöyle BDA, DBA ile BCD açılarının hepsi birbirine eşittir. Bundan fazla, DBC ile BCD açılarının birbirine eşit olduğundan, BD ile DC kenarları birbirine eşittir. Fakat BD kenarı CA kenarına eşittir. Bu sebepten, CA kenarı CD kenarına eşittir. Dolayısıyla CDA ile DAC açıları birbirine eşittir. Şu halde CDA ile DAC açılarının toplamı DAC açısının iki mislidir. O zaman BCD açısının CDA açısına veya DAC açısına eşit olduğundan, BCD açısı da CAD açısının iki mislidir. Dolayısıyla üç birbirine eşit olan BCD, BDA, ile DBA açılarından her birisi DAB açısının iki mislidir. Ispat şöyle bitmiş.



XXIX. Şekil



XXX. Şekil

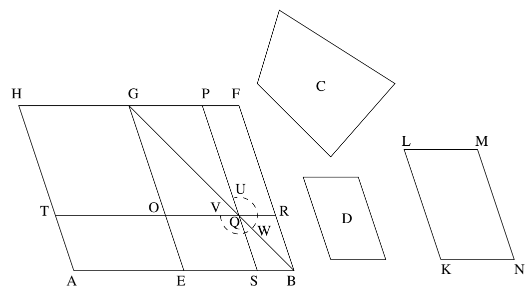
Onuncu önerme bitmiş olarak, on birinci önermeyi XXX. Şeklini kullanarak kolay sağlayabiliriz. ACD ile ADC açılarını ikiye bölerek, B ile E noktalarını elimize geçiririz.

Beşinci cüzü atlayarak, altıncı cüze geliyoruz. Hepsiden ziyade, iki mertebeden olan (B) denklemlerinin çözülmesine imkân verip onuncu cüzde geliştirmelere temel atan bu cüzün yirmi sekizinci ile yirmi dokuzuncu önermesini inceleyeceğiz. Ondan sonra, nihayet onuncu cüze geleceğiz.

Başlayarak yirmi sekinci önermenin iddiasını verelim. Anlatıldığından sonra (B) denklemini nasıl çözdüğünü anlatacağız. Iddianın anlaşılması o kadar kolay değil.

VI. Cüzdeki 28. Önerme. Verilmiş kenarları doğru olan şekile eşit olan ve verilmiş paralelkenarla aynı şekilde (yani bu paralelkenara benzer) olan paralelkenarın eksiğiyle olan bir paralelkenarın verilmiş doğru çizginin üstüne konulması. Şöyle, verilmiş kenarları doğru olan şeklin yüzölçümü verilmiş doğru çizginin yarısının üstüne konmuş ve eksine benzer olan paralelkenardan daha büyük olamaz.

XXXI. Şekline bakarak, bu karışık önermeyi anlatalım. Verilmiş kenarları doğru olan şekil C şeklidir. Verilmiş paralelkenar D şeklidir. Verilmiş doğru çizgi AB çizgisi olsun. Önermenin çözümü TS paralelkenarıdır. Fakat bu paralelkenar AB çizgisi üstüne konamaz. Eksiği var, yani QB paralelkenarının eksiğidır. Eksiği D paralelkenarına benzerdir.



XXXI. Şekil

Bu önermenin
$$ax - \frac{b}{c}x^2 = S$$
denklemini nasıl çözdüğünü Heath anlatır. Verilmiş D paralelkenarı dikdörtgen olsun. QS ile SB oranı bu dikdörtgenin kenarlarının oranıdır. Oranı $c : b$ olsun. QS kenarının uzunluğu x olsun ve verilmiş doğru çizginin uzukluğu a olsun. O zaman eksik bx^2/c sayısına eşittir. Dolayısıyla, C şeklinin yüzölçüsü S ise,
$$ax - \frac{b}{c}x^2 = S.$$

Biz iddiasi anlatmış olan önermeyi ispatlayalım. Bazı bu cüzde bulunup daha önce tanıtlanmış olan başka önermeleri kullanarız. Mesela AB çizgisi E noktasında ikiye bölünsün. Altıncı cüzün on sekizinci önermesine göre, ED üstüne D paralelkenarına benzer bir paralelkenar $EBFG$ çizebiliriz. AG paralelkenarı C şekline eşit ise, daha yapılacak şey yok, çünkü AG paralelkenarı C şekline eşittir ve eksiği D paralelkenarına benzer olan GB paralelkenarına eşittir.

AG paralelkenarı C şekline eşit değilse, HE paralelkenarı C şeklinden daha büyük olsun. O zaman, GB de C şeklinden daha büyük olur.

Sonra gelen adım belki ispatın en önemli adımıdır zira bu adımda bir karekök çıkarılır. Yani cüzün yirmi beşinci önermesine göre, C şeklinin GB paralelkenarından eksiğine eşit ve D paralelkenarına benzer olan paralelkenarı $KNML$ çizebiliriz. KM paralelkenarı GB paralelkenarına da benzer olur. GB paralelkenarı KM paralelkenarına benzer olduğundan ve GE ile LK birbirine tekabül ettiklerinden, GE aralığı LK aralığından daha büyüktür. Heath'in anlattığı gibi, Öklid onu ispatlamadan, bu iddiayı kullanır. Heath Öğeler'e uygun ispat verir. Biz Öklid'in peşinden giderek onu ispatlamadan devam ediyoruz.

GE kenarı KL kenarından daha büyük olduğundan GO aralığı KL aralığa eşit olmak üzere O noktasını bulabiliriz. Aynı sebepten, GP aralığı LM aralığına eşit olmak üzere P

noktasını bulabiliriz. Ondan sonra, $OGPQ$ paralelkenarı tamamlayabiliriz. Bu paralelkenar KM paralelkenarına benzer ve eşittir, yani ikisinin yüzölçümleri birbirine eşittir. Dolayısıyla GB paralelkenarına benzerdir. Bu belli olduğunu sandığımız iddia yirmi birinci önerme olarak Öklid tarafından ispatlanmıştır. Cüzün bize tam belli görünen yirmi altıncı önermesine göre, GQ paralkenarları GB paralelkenarıla beraber ortak köşegeni var.

Anlatalım. GQ ve GB birbirine benzerdir. Üstelik GQ paralelkenar GB paralelkenarının bir açısına konmuş. Şu halde, GQ paralelkenarının köşegeni GB paralelkenarının köşegeninin bir bölümü olur. Şu iddianin ispatına altıncı cüzde benzer şekiller hakkında geliştirilen teorinin gerekli olması bizi hayrette bırakmaz. Orta okuldaki geometri bu konudan adeta tamamen ibarettir.

XXXI. Şeklinde UWV işaretle gösterilen GB ile GQ farkı γνώμων (gnomon) adlanıyor. Şekil şöyle çizildi ki, BG yüzölçümü C şeklinin ile KM paralelkenarının toplumuna eşittir. Şu halde, GQ ve KM paralelkenarlarının birbirine eşit olduğundan, UWV gnomonu C şeklinin yüzölçümüne eşittir. Biz ilk defa olarak gnomon kavramına rastlıyoruz, ama Öklid'in Öğeler'inde oldukça önemli bir kavramdır. (Anlaşılan γνώμων sözü sadece "bildiren işaret" diyor.) Her halde evvelden anlatığımız birince cüzün kırk üçüncü önermesini göre, gnomonda bulunan PR paralelkenarının yüzölçümü OS paralelkenarına eşittir. Bu iki paralelkenara QB paralelkenarı eklense, yüzölçümleri birbirine eşit olan OB ile PB paralelkenarı elde edilir. Fakat OB paralelkenarı TE paralelkenarına eşittir. Dolayısıyla gnomonun yüzölçümü TS paralelkenarına eşittir. Böylece TS paralelkenarı C paralelkenarına eşittir.

Nihayet verilmiş doğru çizgi AB üstüne, verilmiş C şekline eşit ve eksiği D paralelkenarına benzer QB paralelkenarı olan TS paralelkenarı konmuştur.

Iki yöntem. *Öğeler'inde karekökler çıkarılmak için iki farklı yöntem geliştirilmiş. Birisinde Pisagor teoremi kullanılıyor, başkasında birbirine benzer şekiller teorisi kullanılıyor.*

Bu iddiayı anlatmak için kullandığımız altıncı cüzün yirmi beşinci önermesine geri dönelim.

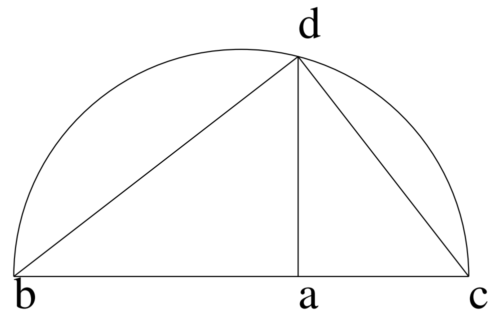
VI. Cüzdeki 25. Önerme. Verilmiş kenarları doğru olan şekile benzer ve başka verilmiş kenarları doğru olan şekile eşit olan bir şeklin çizilmesi.
Özellikle, birinci verilmiş şekil bir kare ise ve ikinci verilmiş şekil dikdörtgen ise, bu önerme

ikinci cüzün on dördüncü önermesinin başka bir çözümü ileri sürür. Dolayısıyla önermenin ispatında karekök çıkarması saklanır. Nerede? İspatta çüzün on üçüncü önermesi kullanılır.

Biz bu önermenin iki verilmiş aralığın orta orantılısının bulunması hakkında olduğunu evvelden anladık. Iki verilmiş aralık AB ile CD olsunlar.

$$\overline{EF}^2 = \overline{AB} \times \overline{CD}$$

denklemini çözen aralık EF aranıyor. Yani karekök aranıyor. Bildiğimiz gibi uygun dik açi ücgenin yardımla bulunabilir. XXXII. Şeklinde üç üçgen bda, cda ve abc birbirine benzer olduğundan $ad^2 = bd \times dc$. bd ile dc uzunlukları verilmiş ise, biz uygun üçgün çizebiliriz, yani üçüncü cüzde geliştirilmiş çember hakkında olan teoriye göre, çabı bc olan yarım çember çizebiliriz ve ac doğrusuna dik olan çizgiyi çizerek, d noktasını elde ediyoruz.



XXXII. Şekil

Compiled on March 8, 2023 10:53am -05:00