23 Juin 1969

Cher Deligne,

D'abord je vais vous expliquer comment se définissent les facteurs locaux du facteur de l'équation fonctionelle des fonctions L d'Artin. Les fonctions L locales $L(s,\sigma)$ associées á une représentation σ du groupe de Weil $S_{K\backslash F}$ d'une extension galoisienne K d'un corps local non archimedien F se définissent par les quatre conditions suivantes.

(i) $L(s,\sigma)$ ne dépend que de la classe de la représentation σ.

(ii) Si σ est de degré 1 et donc associé à un quasi-caractère χ du groupe multiplicatif $F^\times$ de F on a

$$L(s,\sigma)=L(s,\chi).$$

Si χ est ramifié on a $L(s,\chi)=1$ mais si χ est non ramifié et ϖ est une uniformisante de $\mathfrak{P}_F$ alors on a

$$L(s,\chi)=\frac{1}{1-\chi(\varpi)|\varpi|^s}.$$

(iii) $L(s,\sigma_1\oplus\sigma_2)=L(s,\sigma_1)L(s,\sigma_2)$.

(iv) Si $F\subseteq E\subseteq K$ et si σ est la représentation de $W_{K/F}$ induite par la représentation ρ de $W_{K/L}$ on a $L(s,\rho)=L(s,\sigma)$.

Les functions L locales pour un corps archimedien ne vous intéressent pas. La function L globale est, bien sûr, le produit des fonctions locales.

Soit F un corps local non archimedien et soit $\psi=\psi_F$ un caractère additif non trivial de F. Si E est une extension finie et séparable du corps F soit $\psi_{E/F}$ le caractère de E defini par $\psi_{E/F}(x)=\psi_F(\mathrm{tr}_{E/F}(x))$.

Si ψ_E est un caractère non trivial arbitraire de E soit $n=n(\psi_E)$ le plus grand entier tel que la restriction de ψ_E à $\mathfrak{P}_E^{-n}$ soit triviale. Si χ_E est un quasi-caractère de $E^\times$ soit $m=m(\chi)$ l'ordre du conducteur de χ_E. Si U_E est le groupe des unités de O_E, l'anneau des entiers de E, et si $O_E\gamma=\mathfrak{P}_E^{m+n}$ soit

$$\Delta(\chi_E,\psi_E)=\chi_E(\gamma)\frac{\int_{U_E}\psi_E(\frac{\alpha}{\gamma})\chi_E^{-1}(\alpha)\,d\alpha}{\left|\int_{U_E}\psi_E(\frac{\alpha}{\gamma})\chi_E^{-1}(\alpha)\,d\alpha\right|}.$$

$\Delta(\chi_E,\psi_E)$ ne dépend pas du choix de γ.

On a le théorème suivant.

Théorème. *Soit F un corps local archimedien et soit ψ_F un caractère additif non trivial de F. Alors il est possible, d'une manière unique, d'associer à chaque extension finie et séparable E de F un nombre complexe $\lambda(E/F,\psi_F)$ et à chaque représentation σ du groupe de Weil de E un nombre complexe $\epsilon(\sigma,\psi_{E/F})$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $\epsilon(\sigma,\psi_{E/F})$ ne dépend que de la classse de la représentation σ.

(*ii*) *Si σ est de degré* 1 *et correspond au quasi-caractère χ_E on a*

$$\epsilon(\sigma, \psi_{E/F}) = \Delta(\chi_E, \psi_{E/F}).$$

(*iii*) $\epsilon(\sigma_1 \oplus \sigma_2, \psi_{E/F}) = \epsilon(\sigma_1, \psi_{E/F})\epsilon(\sigma_2, \psi_{E/F})$.

(*iv*) *Si $F \subseteq E$ et si σ est la représentation du groupe de Weil de F induite par la représentation ρ du groupe de Weil de E on a*

$$\epsilon(\sigma, \psi_F) = \epsilon(\rho, \psi_{E/F})\lambda(E/F, \psi_F)^{\dim\rho}.$$

Ce théorème est bien sûr valable aussi pour les corps archimediens. Soit α_F^s le quasi-caractère $a \to |a|_F^s$ de $F^\times$ et, si σ est une représentation du groupe de Weil de F, soit

$$\epsilon(s, \sigma, \psi_F) = \epsilon(\alpha_F^{s-1/2} \otimes \sigma, \psi_F).$$

Si F est un corps global soit ψ_F un caractère non trivial de groupe $\mathbf{A}/F$. Pour toute place v de F soit ψ_{F_v} la restriction de ψ_F à F_v. Toute représentation σ du groupe de Weil de F détermine une représentation σ_v du groupe de Weil de F_v. Soit

$$L(s, \sigma) = \prod_v L(s, \sigma_v)$$

et soit

$$\epsilon(s, \sigma) = \prod_v \epsilon(s, \sigma_v, \psi_{F_v}).$$

C'est le product de tous les facteurs locaux. Il ne dépend pas du choice de ψ_F. Si $\widetilde{\sigma}$ est la représentation contragrédiente à σ, l'équation functorielle s'écrit comme

$$L(s, \sigma) = \epsilon(s, \sigma)L(1 - s, \widetilde{\sigma}).$$

Considérons encore les corps locaux. Il est possible de définer le conducteur d'Artin de chaque représentation σ et d'écrire

$$\epsilon(s, \sigma, \psi_F) = \epsilon(\sigma, \psi_F)|\varpi|^{(m(\sigma)+n(\psi_F)\dim\sigma)(s-1/2)},$$

où $m(\sigma)$ est l'ordre du conducteur de σ. Si $\rho = \chi$ est une représentation de degré 1 et si $m(\rho) = 0$, c'est à dire si χ est non ramifié, soit $\chi(\varpi) = |\varpi|^{s_1}$. On a

$$\epsilon(s, \rho \otimes \sigma, \psi_F) = \epsilon(s + s_1, \sigma, \psi_F) = \chi(\varpi)^{(m(\sigma)+n(\psi_F)\dim\sigma)}\epsilon(s, \sigma, \psi_F).$$

Donc, par la troisiéme condition, si ρ est une représentation de degré arbitraire et si $m(\rho) = 0$ on a

$$\epsilon(s, \rho \otimes \sigma, \psi_F) = (\det\rho(\varpi))^{(m(\sigma)+n(\psi_F)\dim\sigma)}\epsilon(s, \sigma, \psi_F)^{\dim\rho}.$$

Si $s = 1/2$ ceci s'écrit

$$(*) \qquad \epsilon(s, \rho \otimes \sigma, \psi_F) = (\det\rho(\varpi))^{(m(\sigma)+n(\psi_F)\dim\sigma)}\epsilon(\sigma, \psi_F)^{\dim\rho}.$$

Si σ est la représentation triviale on obtient

$$\epsilon(\rho, \psi_F) = (\det\rho(\varpi))^{n(\psi_F)}$$

et la formula $(*)$ s'écrit

$$(**) \qquad \epsilon(\rho \otimes \sigma, \psi_F) = \epsilon(\rho, \psi_F)^{\dim\sigma}\epsilon(\sigma, \psi_F)^{\dim\rho}(\det\rho(\varpi))^{m(\sigma)},$$

où $\det\rho$ est une représentation de degré 1 et donc un quasi-caractére.

Soient maintenant ρ et σ deux représentations globales. Nous supposons que leurs conducteurs sont disjoints. Vous avez écrit (peut-être par mégard) que les conducteurs de ρ et de $\rho \otimes \sigma$ étaient disjoints. Soit

$$\epsilon(\sigma) = \prod_v \epsilon(\sigma_v, \psi_{F_v})$$
$$\epsilon(\rho) = \prod_v \epsilon(\rho_v, \psi_{F_v})$$
$$\epsilon(\rho \otimes \sigma) = \prod_v \epsilon(\rho_v \otimes \sigma_v, \psi_{F_v}).$$

Si ϖ_{F_v} est une uniformisante de F_v, et ψ_v est la substitution de Frobenius, et si ρ_v est non ramifié nous pouvons écrire

$$\det \rho_v(\varpi_{F_v}) = \det(\rho_v(\varphi_v)).$$

Il résulte de la formule $(**)$ que

$$\epsilon(\rho \otimes \sigma) = \epsilon(\rho)^{\dim \sigma} \epsilon(\sigma)^{\dim \rho} \left\{ \prod_{m(\rho_v)>0} \det \sigma_v(\psi_v)^{m(\rho_v)} \right\} \left\{ \prod_{m(\sigma_v)>0} \det \rho_v(\psi_v)^{m(\sigma_v)} \right\}.$$

Est-ce que ceci est la formule que vous vouliez. Je ne suis pas sûr.

J'espère que vous m'enverrez des exemplaires de vos écrits sur la conjecture de Ramanujan et sur d'autres questions.

Bien à vous,

R. Langlands

Compilé le 25 avril 2023, 18 h 29 AST