February 2020

Cher Yvan,

Apparemment j'ai eu depuis le début de ma carrière des mauvaises habitudes, non pas un refus de publier mes écrits mais une hésitation. Par exemple, je n'ai jamais publié ma thèse, seulement une sommaire et ce n'était que des décennies après sa rédaction en 1959 qu'elle a été offerte à n'importe qui voulait la consulter dans la collection `https://publications.ias.edu/rpl`. Entretemps elle avait été consultée par d'autres. En particulier elle a été intégrée dans le livre *Elliptic Operators and Lie Groups* de Derek Robinson et cela l'a peut-être sauvée de l'oubli.

Malgré cette paresse on m'a rarement accusé d'erreurs, ce qui me permet de croire que j'en ai fait très peu et même peut-être aucun. Récemment grâce à ton message et à la curiosité de Tony, j'ai appris, comme tu sais, que d'autres mathématiciens ou physiciens croient avoir découvert et corrigé une erreur dans un autre texte,

`on-unitary-representations-of-the-virasoro-algebra-rpl.pdf`

Je ne suis pas indifférent à la vérité de ce texte mais il s'agit des choses qui m'occupaient il y a longtemps et je suis prêt à laisser d'autres, s'il y en a, pour lesquels elles sont plus importantes jugent de leur valeur et de leur rectitude.

Par contre, pour ce qui est lié à mon travail sur les formes automorphes attachées au corps de fonctions sur une courbe elliptique définie sur un corps finis, je trouve qu'il est très important qu'il soit compris et qu'il soit jugé correctement. Pourquoi ? J'essayerai de l'expliquer.

Mais j'avais eu des difficultés même avant, avec la théorie des séries d'Eisenstein. Je voudrais les expliquer parce que la source des difficultés était semblable, une réticence ou plutôt une indifférence à la publication. Des autres ont publié un livre, un plagiat de ce que j'avais déjà rédigé et que j'ai mis en circulation sans le soumettre à un éditeur. On m'avait invité en toute innocence à écrire une critique de ce livre pour un journal de l'American Mathematical Society. J'ai accepté et, heureusement pour moi, j'ai découvert que ces autres n'ont pas simplement copié mon article, qu'ils l'ont en partie modifié en introduisant une erreur importante. Donc par chance je me suis épargné des ennuis, quoique leur livre est, je crois, toujours disponible.

Malgré ça j'ai l'impression que quelques mathématiciens, même des mathématiciens renommés, ont continué à exprimer leurs doutes. Mais pas tous. En particulier Harish-Chandra était convaincu par ce que j'avais écrit et il a même donné des conférences à l'Institute for Advanced Study dans lesquelles il a expliqué mes arguments pour les groupes de rang un arbitraires. Ma dette à lui à cet égard et à d'autres égards aussi est énorme.

Mais ces ennuis sont arrivés il y a longtemps dans les années cinquantes. Bien plus tard une autre difficulté s'est présentée et Harish-Chandra n'est plus là. Dommage !

Il s'agit maintenant de la théorie des formes automorphes, où il y a apparemment deux théories, la théorie géométrique et la théorie arithmétique, dont la deuxième est la plus importante et la première plus abordable. La deuxième est, comme tu sais, indispensable dans la théorie des nombres. La première est bien moins importante mais, en même temps, elle sert comme modèle pour la deuxième. Pour cette raison il est assez important de comprendre la première avant que l'on n'aborde les difficultés majeures de la seconde. Il n'en reste pas que la deuxième est bien plus ancienne que la première.

Je n'ai écrit qu'un seul texte sur la théorie géométrique et je l'ai rédigé en russe. Pourquoi ? Parce que c'était une façon de m'amuser. Lorsque je commençais mes études à Vancouver, on m'a dit que—n'oublie pas nous étions alors dans l'année 1953, une période lorsqu'on a retrouvé, quoique pour un temps court, la culture européenne—pour un mathématicien il était censé bien important de connaître le français, l'allemand, le russe, et même peut-être l'italien. Nous habitons maintenant un autre monde, mais j'ai suivi alors, de ma façon, son conseil et à mon profit. Mais c'était plutôt le français et l'allemand—les travaux de Hecke et de Siegel surtout, aussi bien que Bourbaki—qui m'étaient importants au début de ma carrière. Néanmoins c'était la langue russe qui m'a fasciné. Je l'étudiais pendant deux années à l'université, ma deuxième et ma quatrième. La professeure était les deux fois la même, une russe blanche, guère plus âgée que moi, une enthousiaste de l'opéra russe. J'étais un étudiant assidu, mais marié déjà. Par la suite, n'ayant pas une occasion pour l'utiliser j'ai négligé la langue.

Mais pendant mes années à UBC, je n'ai pas rencontré les écrits ni de Bourbaki ni des mathématiciens français. Ce que j'ai rencontré et cela avant d'aller à l'université c'était un livre *The Story of the World's Great Thinkers* by Ernest Trautner. J'aime raconter l'histoire de moi et ce livre. Je l'ai racontée plusieurs fois. Ce livre était très populaire dans les années trente surtout à la gauche. Je l'ai eu de mon beau-père, ou plutôt de celui qui sera quelques années plus tard mon beau-père. C'étaient peut-être ce livre et la fille qui sera plus tard ma femme qui ont le plus influencé le jeune homme sans aucune ambition sérieuse que j'étais à l'école secondaire.

Bien plus tard en 1967, ayant décidé d'abandon les mathématiques et aller avec ma famille en Turquie j'ai repris le russe et commencé le turc. J'avais cette fois, mais maintenant à Princeton, une enseignante bien plus vieille que moi, mais j'étais toujours très assidu. Elle étais encore une russe blanche, la soeur d'un professeur d'ingénierie russe, Gregorie Chebotarev, en effet un cosaque, qui était au temps de la première guerre mondiale soldat russe. Après ou pendant la révolution il a quitté le pays. Ensuite il a su faire venir sa soeur, qui était alors très jeune, en Amérique. Tour cela est raconté dans son livre, *Russia, My Native Land,* publié d'abord en anglais et ensuite en russe, Правда о Россия. À Princeton au temps que j'assistais à son cours elle avait une assistante dont je n'avais pas alors reconnu la renommée, une autre femme russe, l'écrivaine Nina Berberova.

Je ne me souviens plus du nom marié de mon enseignante, mais elle m'avais apprécié parce que je travaillais très fort. J'étais sérieux et je voulais vraiment maîtriser la langue. Mais, ce qui est arrivé, c'est qu'ayant abandonné les mathématiques j'avais du loisir pour faire des calculs frivoles, ce qui a mené à ma lettre à Weil. Alors j'ai abandonné le turc et le russe pour revenir aux mathématiques. J'ai essayé d'expliquer à elle de quoi il s'agissait, pourquoi je n'avais pas le temps pour venir à ses classes mais elle s'était fâchée avec moi—avec raison—et refusait d'accepter mes excuses.

La décision d'aller en Turquie avec ma famille, ma femme et quatre enfants, était néanmoins toujours là. Nous sommes restés pour une année, une année difficile pour la famille, surtout pour Charlotte, mais une année qui m'a beaucoup donné. Je crois—mais je ne suis pas sûr—que malgré tout Charlotte au moins ne regrette pas la visite. Moi, j'ai appris d'abord que dans le monde contemporain il n'est pas facile pour un anglophone d'apprendre des langues étrangères, qu'il faut qu'il se met dans un endroit où on parle la langue indigène même avec les étrangers. Dans le cas de Québec on dirait plutôt que ce qui est important c'est qu'il se trouve parmi des francophones—ou des étrangers—qui ne sont pas convaincus que la langue française n'est pas seulement une langue minoritaire mais aussi parfois une langue secondaire utile. Mais mon chemin est passé par la Turquie, qui n'était pas un échec mais qui n'était pas non plus une réussite.

Quelques ans plus tard, mieux informé j'ai passé une deuxième année à l'étranger, mais celle-ci en Allemagne, était plus profitable. J'ai appris l'allemand, qui est resté, en ce qui concerne la littérature ma langue préférée, quoique je ne trouve guère, pour le moment, le temps de le lire. Ensuite j'ai commencé à passer plus de temps au Québec, dont tu connais les conséquences. Avec ces deux expériences je suis retourné en Turquie, où j'ai trouvé comme au Québec maints amis, parmi eux des anciens élèves. Entretemps j'ai pu plusieurs fois par la suite passer quelques semaines en Turquie, qui m'a permis de revenir à la langue, que je n'ai jamais vraiment maîtrisée mais j'ai pu quand même rédigé quelques textes en français pour des revues mathématiques populaires.

Mais le conseiller à Vancouver m'a conseillé d'apprendre deux autres langues, l'italien et le russe. Quoique l'italien n'est malheureusement plus de grande importance aux mathématiciens, j'avais commencé il y a très longtemps à la suite des vacances en Italie, une randonnée à pied qui s'est terminée à Florence, à lire des romans italiens pas trop difficiles, par exemple, 'Pane e vino' de l'écrivain Ignazio Silone un romaine plutôt de gauche, dont j'avais lu déjà la traduction anglais à cause de son message politique. Malheureusement attiré sans doute par une question mathématique j'ai terminé la lecture italienne et je n'y suis jamais retourné. Dommage ! Malheureusement je n'ai pas grand espoir d'y revenir.

Le russe était pour moi très important, quoique lui aussi ne s'est jamais apparu sérieusement dans ma lecture mathématique. J'admire néanmoins beaucoup les travaux de Kolmogorov, ou plutôt son style et ses accomplissements mathématiques. Je possède en effet ses travaux complets en trois tomes, acquis grâce à un ami allemand et une amie de lui en Russie, et une de mes activités à Gananoque sera j'espère d'en lire quelques pages de temps en temps. Je ne sais pas exactement quand j'ai entrepris à lire le russe sérieusement. J'ai lu toutefois d'une façon très irrégulière bon nombre de livres des auteurs important du dix-neuvième siècle et aussi de la première moitié du vingtième siècle, des livres de toutes sortes : le fameux voyage en Europe de l'historien Nikolai Karamzin, les écrits de Tolstoi, Gogol, et d'autres, et parmi les plus récents l'histoire Тихий Дон de Mikhail Sholokhov et encore des autres.

Néanmoins il n'est pas une langue avec laquelle je suis à mon aise. Je n'ai visité la Russie qu'une fois et je suis très reconnaissant à Dmitry Lebedev, qui a arrangé mon invitation à Moscou, aussi bien qu'à sa famille, sa femme, leur fils et sa belle-soeur pour un après-midi agréable chez eux dans la campagne moscovite. De toute façon c'est ce séjour bref à Moscou qui a mené à un retour à la langue, bien que j'étais quelque peu déçu par l'auditoire. En effet, j'avais préparé en russe une suite cohérente de conférences. À mon surpris lés auditeurs ont insisté que je parlais l'anglais. Autant que j'ai compris ce n'était pas parce que ils pouvaient tous me comprendre plus facilement en anglais, disons peut-être en américain, mais parce que ils sont tellement adonnés a cette langue. Enfin j'ai accepté un compromis—moitié américain moitié russe, une demi-heure de russe suivie par une demi-heure d'anglais. En principe, cela n'était pas si mal. J'ai toutefois une aversion profonde à ces gens, surtout des européens, qui croient que la langue américaine est la clé de la réussite, de la gloire et du bonheur. Ils me rappellent un restaurateur que j'ai rencontré dans un restaurant parisien en le visitant avec des amis allemands. Nous étions en train de commander notre repas auprès d'une serveuse, lorsque le maître du restaurant s'est aperçu que moi, qui parlais avec elle, j'avais un accent qu'il croyait américain. Il est intervenu en anglais. Je lui a expliqué qu'il était inutile et impoli de parler l'anglais, parce que la dame, notre amie, ne parlait que l'allemand. Il nous a brusquement abandonnés à la serveuse sans s'excuser. Comme tu sais il y a bon nombre d'universitaires de ce genre, donc à son niveau, partout au monde et les russes semblent ne pas être mieux que les autres, même peut-être pires.

De toute façon la visite à Russie m'a rappelé mes anciennes ambitions linguistiques. En même temps, j'avais abordé la théorie russe des formes automorphes sur un corps de fonctions sur un champ fini. L'absence dans elle d'une théorie de Hecke me troublait, surtout la non-existence des valeurs propres et des fonctions propres. Donc, et ici il faut insister, il s'agit à mon avis non pas d'une erreur ni des russes ni du moi mais du fait que, au moins à mon avis, les définitions russes menaient à une théorie foncièrement différente des théories classiques de Hecke, Siegel et leurs successeurs. Moi-même je ne suis même pas convaincu de la valeur de leur théorie sous sa forme actuelle. Je peux toutefois croire que leur théorie puisse être à certains égards utile comme une théorie avec d'autres buts qu'une théorie à la façon de Hecke.

Il est toutefois à mon avis vrai que la théorie géométrique est nécessairement autre que la théorie arithmétique. Il me semble en même temps qu'il est nécessaire que les deux soient semblable, la première plus facile que la deuxième. C'est le cas pour mon essai. Ce qui me concerne ici, ce n'est pas la possibilité d'une théorie autre que celle que j'ai proposé pour le groupe GL(2) et une courbe géométrique. C'est que des remarques d'un mathématicien peut-être ignare et certainement paresseux pourraient empêcher la création d'une théorie géométrique qui est, sinon plus profonde, au moins comparable avec la théorie arithmétique, celle-ci toujours en grande partie conjecturale, commencée au vingtième siècle.

Pour être plus précis, Edward Frenkel a été invité, en partie grâce à une suggestion de moi, qui croyait qu'il avait la compétence nécessaire dans la théorie des formes automorphes, à donner une exposition pendant une conférence à Minneapolis dans laquelle il était censé exposer brièvement le contenu de mon essai russe.

Malheureusement il ne pouvait pas malgré mes exhortations comprendre que pour créer une théorie géométrique dans le style de Hecke, c'est à dire avec des valeurs propres et des fonctions propres, on a besoin d'une théorie qui n'est pas celle des russes. C'est ce que j'avais souligné dans la phrase : 'Возможно что эта самостоятельность $L^2(\mu, D)$ и $L^2(\mu, A)$ то, что отличает L^2-теорию от пучковой теории в [G]' une phrase qui se trouve à la fin de la section VI de mon article.

Pour être plus précis, la théorie que j'ai décrit dans mon article russe pour le groupe GL(2) et des courbes elliptiques, commence avec un article d'Atiyah, un article qui est à mon avis un de ses meilleurs et il reste, je crois, à faire la même chose pour n'importe quelle courbe et n'importe quel groupe réductif. Cela serait un problème agréable et instructif pour des jeunes mathématiciens vigoureux. C'est dommage—même pire, un péché—de les décourager en n'expliquant pas son importance pour la théorie des formes automorphes, au moins la théorie géométrique.

Ceci fait, on pourrait, si on soit convaincu de sa valeur, essayer de créer une théorie semblable à celle de mon article pour toute courbe et tout groupe convenable. Malheureusement, ce n'est pas un travail pour moi. Je n'aurai pas le temps ni la force de le faire. J'avoue en plus que dans le peu de temps qui me reste, je préfère penser à des choses en dehors des mathématiques, même celles que je trouve fascinantes mais pour lesquelles je n'ai pas eu malheureusement du temps lorsque j'étais plus jeune et adonné à peu près entièrement aux mathématiques.

Ce que j'espère des jeunes, au moins quelques-uns, c'est qu'eux ils profitent des possibilités offertes par la théorie géométrique même si elles ne sont pas au niveau de la théorie arithmétique. Comme je viens d'écrire il faudra commencer en poursuivant les idées d'Atiyah, mais en généralisant son article, cité ci-dessus. Mais ceci ne sera pas à mon avis facile. Je ne l'ai pas essayé moi-même, en particulier je ne sais pas comment deviner la structure de Bun_G en général. Je souligne encore que l'article d'Atiyah, qui correspond au groupe $\mathrm{GL}(n)$ sur une courbe elliptique n'est pas facile et autant que je sache il n'a été lu que par un nombre petit de mathématiciens.

La structure de Bun_G connue, il faudra comprendre l'ensemble des fonctions propres lié à une courbe donnée et à un groupe réductif donné. En général cette dernière question sera bien plus difficile que pour des courbes elliptiques, le cas traité par Atiyah. Tu vois qu'il ne s'agit pas d'une question pour des vieux !

Ceci fait, nous pourrons dire que nous avons créé une théorie géométrique générale. Plus précisément nous voulons démontrer que les formes automorphes non-ramifiées rattachée à un groupe G données sont décrites par des homomorphismes d'un groupe, le groupe galoisian, dans un autre groupe, ${}^LG$, nommé *le groupe L*. Avec ramification les structures seront plus compliquées. En plus il y a d'autres problèmes liés à ce que l'on appelle en anglais L-indistinguishability, ce qui est pour le moment simplement une distraction. Tout cela, c'est pour dire que selon moi il y a dans la théorie géométrique un nombre énorme de problèmes sérieux accessibles aux jeunes et que nous n'avons pas besoin de gens qui par frivolité, paresse et ignorance, les détournent de ces problèmes.

En plus, la théorie dite géométrique est bien plus simple que la théorie arithmétique. J'avoue que moi-même, et je ne suis pas seul, je ne sais pas exactement quoi attendre de cette dernière théorie. Nous avons vu avec le dernier théorème de Fermat mais, si l'on veut, même, avec le théorème de la reciprocité quadratique, qu'elle a des constituants arithmétiques importants mais les travaux récents de Sarnak suggèrent qu'il y a une influence importante des nombres transcendants. Nous sommes donc très loin de la fin. Moi-même je n'y arriverai jamais.

On voit donc qu'il y a un tas de problèmes tous plus difficiles que ceux que j'ai abordé dans le texte russe : la théorie arithmétique ; la théorie ramifiée ; la théorie non-ramifiée pour les groupes autre que $\mathrm{GL}(2)$; la théorie non-ramifiée sur des courbes autres que des groupe de genre 1. C'est alors une honte soit de ne pas avoir découverte la théorie pour le cas le plus simple soit, et ceci est même pire, de ne pas avoir reconnue sa découverte par un autre. Avoir cru à une théorie fausse est aussi gênant. J'espère que cela ne s'avéra pas être mon sort.

J'ajoute, parce qu'il est facile de l'oublier, que ce que l'on cherche est une théorie pareille à celle créée par Hecke !

J'avoue aussi que je ne me suis pas suffisamment adonné à la théorie arithmétique non pas pour la créer mais simplement pour comprendre quelle sera sa forme.

Enfin j'admets que je ne trouve pas que cet essai est trop acerbe.

Je l'enverrai à Tony Pulido pour qu'il puisse le mettre sur le site lorsque je serai à l'abri de toute mécompréhension et de toute méchanceté. Je craignais que cela ne serait pas pour demain ! Mais je suis devenu plus optimiste.

À bientôt, Robert

Compiled on February 14, 2025.