Princeton, le 25 septembre 1987

Dear Marcus,

Inspired by a conversation with Witten, I can now compactify – with a divisor with normal crossings at infinity, the moduli stack of super Riemann surfaces. As I have to think, I continue in French

1. Super-courbes génériquement lisses, de Cohen-Macaulay

Dans cette section, je propose un analogue en supergéométrie algébrique de la notion de courbe géométriquement réduite.

La notion reçue de super courbe lisse X/S est : superschéma X sur le superschéma S, lisse de dimension relative $(1,1)$, muni de $\mathcal{D} \subset T_{g_{X/S}}$ localement facteur direct de ~~type~~ dimension $(0,1)$, et "aussi non intégrable que possible". Pour un tel système $(X, \mathcal{D})$, on identifie $T_{g_{X/S}}/\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}^{\otimes 2}$ par $D_1 \otimes D_2 \longmapsto \frac{1}{2}[D_1, D_2]$. On peut dualiser $\mathcal{D} \subset T_{g_{X/S}}$ en

(1.1) $$\Omega^1_{X/S} \to \mathcal{D}^\vee ,$$

et l'isomorphisme $T_{g_{X/S}}/\mathcal{D} \sim \mathcal{D}^{\otimes 2}$ se dualise en

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^{\vee\otimes 2} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \mathcal{D}^\vee \longrightarrow 0$$

d'où un isomorphisme $\mathrm{Ber}(\Omega^1_{X/S}) \simeq \mathcal{D}^\vee$. De là :

(1.2) $$\delta : \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \omega_{X/S} := \mathrm{Ber}(\Omega^1_{X/S}) \quad , \text{i.e.}$$

$$\delta : \text{dérivation } \mathcal{O}_X \longrightarrow \omega_{X/S} .$$

Mon choix de signes est peut être ambigu. Pour X de coordonnées locales (z, θ), $\mathcal{D} = (\partial_\theta + \theta \partial_z)$, je veux

$$\delta : f \longmapsto (\partial_\theta + \theta \partial_z) f \,.\, [dz/d\theta]$$

où $[dz/d\theta]$ est la base de $\mathrm{Ber}(\Omega^1_{X/S})$ définie par la base $(dz, d\theta)$ de $\Omega^1_{X/S}$.

Réciproquement, δ détermine $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(\delta)$, ou les multiples de δ/b pour b base de $\mathrm{Ber}(\Omega^1_{X/S})$. Noter que pour $\delta : \Omega^1_{X/S} \to \omega_X$, épimorphique, il ne suffit pas que $\mathrm{Ker}(\delta)^\perp$ soit aussi non intégrable que possible pour δ provenir d'une structure de super~~variété~~courbe : la normalisation doit être correcte : $\delta f = Df\, \underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{b}} = [D^2/D]^{-1}$

En coordonnées locales (z, θ), pour $D := \partial_\theta + \theta \partial_z$ (une dérivation impaire), on a

Lemme 1.1 Pour que $\delta = (aD + bD^2)[dz/d\theta]$ définisse une structure de supercourbe, il faut et il suffit que a soit inversible et que $[(aD + bD^2)^2/(aD + bD^2)] = [D^2/D]$, i.e.

(1.1.1) $$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix} a^2 + bD^2b + aDb & b \\ -(aDa + bD^2a) & a \end{pmatrix} = 1, \quad \text{où } \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} = (ad - \beta\gamma)d^{-2}$$

Preuve : $(aD + bD^2)^2 = (aDa + bD^2a)D + (a^2 + bD^2b + aDa)D^2$

Le cas qui nous servira le plus est celui où $\delta = D.b$ est une structure de supercourbe, où $S_0 \hookrightarrow S$ est défini par un idéal de carré nul, et où $D_1 = D + a_1 D + b_1 D^2$ coïncide avec D au-dessus de S_0. Le berezinien se ramène alors à une supertrace :

Corollaire 1.2 Sous les hypothèses ci-dessus, les conditions de 1.1 équivalent à :

(1.2.1) $\qquad a_1 + Db_1 = 0$

Preuve : écrire $(2a_1 + Db_1) - a_1 = 0$

Bien sûr, ci-dessus, a et a_1 sont pairs, b et b_1 impairs.

Remarque 1.3 (i) Pour X/S lisse de dimension relative $(1,1)$, soient $\underline{\underline{b}}$ une base de ω_X et $\delta = D.\underline{\underline{b}} : \mathcal{O} \to \omega$ une dérivation. La condition que D engendre un facteur direct local de dimension $(1,0)$ de $T_{g\,X/S}$ équivaut à la surjectivité de $\delta : \Omega^1_{X/S} \to \omega_{X/S}$. Pour S un schéma ordinaire (pair), elle équivaut encore à celle du morphisme induit par $\delta : \mathcal{O}_X^- \longrightarrow \omega_X^-$

(ii) Pour $\delta = D.\underline{\underline{b}} : \Omega^1_{X/S} \to \omega_{X/S}$ surjectif, si, sur un ouvert schématiquement dense δ est une structure de supercourbe, alors δ en est une partout : en terme d'une structure de supercourbe de référence, le Bérezinien (1.1.1) a un dénominateur inversible et si $\mathrm{Ber} = 1$ sur un ouvert schématiquement dense, cette identité vaut partout.

1.4 Définition Une supercourbe sur S est un superschéma X/S, plat, relativement de Cohen-Macaulay, qui sur un ouvert dense fibre à fibre est lisse de dimension relative $(1,1)$, muni ~~de δ~~ d'une dérivation $\delta : \mathcal{O}_X \to \omega_{X/S}$ (où $\omega_{X/S}$ est le faisceau dualisant) telle que

(i) sur chaque fibre géométrique, δ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{X_s}^- \xrightarrow{\sim} \omega_{X_s/s}^-$

(ii) sur l'ouvert de lissité, δ est une structure de supercourbe lisse sur S.

D'après 1.3 (ii), la condition 1.4 (ii) peut être remplacée par :

(1.4 (ii)') Sur un ouvert lisse sur S et schématiquement dense, δ définit une structure de supercourbe lisse sur S.

1.5 Pour S un schéma ordinaire, explicitons cette définition en terme du schéma $C := (X, \mathcal{O}_X^+)$ sur S. Les conditions plats, Cohen-Macaulay, génériquement lisse fibre à fibre, donnent

(1.5.1) C/S est une courbe plate à fibres géométriques réduites.

Le faisceau cohérent $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X^-$ est plat sur S, relativement de Cohen-Macaulay, localement libre de rang 1 sur un ouvert dense fibre à fibres, et $\mathcal{O}_X^- \cdot \mathcal{O}_X^- = 0$.

Pour un tel superschéma $X = (C, \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$, ~~$\omega_X$~~ le faisceau dualisant ω_X se calcule comme suit. On dispose de

$$\mathrm{pr} : X \longrightarrow C$$

et $\omega_{X/S} = \mathrm{pr}^! \omega_{C/S} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_X, \omega_C)$

L'hypothèse "Cohen-Macaulay relatif" assure la nullité des Ext supérieurs, et que $\omega_{X/S}$ est plat sur S, de formation compatible à tout changement de base. On a

$$\begin{cases} \omega_{X/S}^+ = \omega_C \\ \omega_{X/S}^- = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}, \omega_C) \end{cases}$$

On a $\mathcal{O}_X^- \omega_{X/S}^+ = 0$ et $\mathcal{O}_X^- \otimes \omega_{X/S}^- \to \omega_{X/S}^+$ est l'évaluation $\mathcal{L} \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \omega_C) \to \omega_C$.

Dans le cas lisse, en coordonnées locales (z, θ), ω_X admet la base $[dz/d\theta]$ et ω_X^- s'identifie à ω_C par

$$\theta[dz/d\theta] \to dz.$$

Une dérivation $\delta : \mathcal{O}_X \to \omega_X$ est définie par

$$\delta^+ : \mathcal{O}_C \to \omega_C \qquad \text{(une dérivation)}$$

$$\delta^- : \mathcal{L} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \omega_C) \quad . \quad (\mathcal{O}_C\text{-linéaire})$$

Les conditions ( ) donnent $\delta xy = \cdots$ pour x ou y pair. Pour x et y impairs, il faudrait exprimer la symétrie de la forme bilinéaire $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to \omega_C$ définie par δ^-. Comme $\mathcal{L}$ est génériquement de rang 1, c'est automatique.

L'axiome 1.4 (i) donne : δ^- est un isomorphisme.

L'axiome 1.4 (ii) signifie que, sur l'ouvert de lissité, $\delta^+ : \mathcal{O}_C \to \omega_C$ est $d : \mathcal{O}_C \to \Omega^1_C = \omega_C$. En effet

(a) cette condition est vérifiée pour une supercourbe lisse en coordonnées locales standard : on a $\delta z = \theta[dz/d\theta] \sim dz$.

(b) deux δ vérifiant la condition sont localement isomorphes pour la topologie étale

L'argument (b) foire en car. 2. Voici un plus direct, qui marche. Soient en coordonnées locales

$$\delta f = (u(z)\partial_\theta + \theta v(z)\partial_z) f \,.\, [dz/d\theta] \;.$$

On a $(u(z)\partial_\theta + \theta v(z)\partial_z)^2 = u(z)v(z)\partial_z$, et la condition

$$[u(z)v(z)\partial_z / u(z)\partial_\theta + \theta v(z)\partial_z] = [\partial_z / \partial_\theta]$$

donne $v = 1$, comme voulu

Puisque, sur un ouvert schématiquement dense, on a $\delta^+ = d$, c'est partout vrai. La donnée sur un <u>schéma</u> (pas super-!) d'une supercourbe équivaut donc à celle de C, $\mathcal{L}$ comme en (1.5.1), plus la donnée de

(1.5.2) une forme bilinéaire (automatiquement symétrique) $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to \omega_C$ induisant un isomorphisme

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \omega_C) \quad .$$

Comme expliqué, on a

(1.5.3) $X = (C, \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$, $\omega_X = \omega_C \oplus \mathcal{L}$, avec la structure de module définie par 1.5.2 et $\delta = (d, \mathrm{Id})$.

En caractéristique 2, une famille de super-courbes lisses n'est pas nécessairement localement (en haut) triviale. Pour cette raison, je suppose dorénavant 2 inversible.

Pour que jusqu'à présent tout puisse marcher sur $\mathbb{Z}$, j'ai pris la définition de "super-anneau commutatif" où $a^2 = 0$ pour a impair, et j'ai fait gaffe à utiliser D^2 plutôt que $[D, D]$ pour les dérivations impaires.

1.6 La description suivante de $\omega_{X/S}$ nous sera utile. Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense fibre à fibre et lisse. Pour toute section s de $j_* \omega_{U/S}$ et pour F une composante connexe de $X - U$, finie sur S, un résidu $\mathrm{Res}_F(s) \in \mathcal{O}_S$ est défini. Le faisceau $\omega_{X/S}$ est le sous-faisceau de $j_* \omega_{U/S}$

formé des sections s tel que, localement pour la topologie étale sur S et pour tout F comme ci-dessus, tout f dans $\mathcal{O}_X$, on ait $\mathrm{Res}_F(fs) = 0$.

Sur S nilpotent, Res_F est une somme de résidus sur les branches passant par F et, pour chaque branche $B \hookrightarrow X$ (fermé dans X), est invariant par des morphismes birationnels $B_1 \to B$. Ceci permet de calculer ω_X à la Serre

<u>Proposition 1.7</u> Soit X_0 une supercourbe sur un corps k. Une déformation infinitésimale X de X_0 qui est triviale en tant que déformation de superschéma est triviale

<u>Preuve</u> Il suffit de traiter le cas de déformations au premier ordre (argument à la Schlessinger), et ce cas se ramène aux cas d'une déformation sur $\mathrm{Sp}(k[t]/(t^2))$ ou sur $\mathrm{Sp}(k[\varepsilon])$

a. <u>Déformation paire</u> (sur $k[t]/(t^2)$). On passe au point de vue 1.5. Soit X_0 défini par C, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{L}, \omega_C)$. ~~Il~~ Une déformation à superschéma constant peut être vue comme une déformation de φ_0: $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \omega_C)$. Une telle déformation est du type $\varphi_0 \circ a$, a automorphisme infinitésimal de $\mathcal{L}$. Un tel automorphisme infinitésimal $a = 1 + a_1$ admet la racine carrée $1 + \frac{1}{2} a_1$, et φ est conjugué de φ_0 par $(1+a_1)^{-1/2}$: il suffit de le vérifier sur le lieu lisse, où a est la multiplication par un element de $\mathcal{O}_{C \otimes k[t]/(t^2)}$ ~~ssb~~ égal à 1 modulo t. Conjuguer φ ne change pas la classe d'isomorphie de déformation de supercourbe, et la déformation est donc triviale.

b <u>Déformations impaires</u> (sur $k[\tau]$)

Une déformation de (X_0, δ_0), triviale comme déformation de superschéma, est du type (X, δ) avec X déduit de X_0 par extension des scalaires et de dérivation structurale

$$\delta = \delta_0 + \tau D \qquad (\delta_0 : \mathcal{O}_X \to \omega_X \text{ déduit du } \delta_0 \text{ initial par extension des scalaires}),$$

où D est une dérivation impaire $\mathcal{O}_{X_0} \to \omega_{X_0}$. Il faut prouver que si δ vérifie 1.4 (ii), alors δ est conjugué de δ_0 par un automorphisme de X trivial sur X_0. Un tel automorphisme est de la forme $f \longmapsto f + \tau E f$, pour E une dérivation impaire de $\mathcal{O}_{X_0}$ dans $\mathcal{O}_{X_0}$.

Du point de vue 1.5, une dérivation impaire $D : \mathcal{O}_{X_0} \to \omega_{X_0}$ est donnée par ses composantes

$$\begin{cases} D_0 : \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{L} & : \text{une dérivation} \\ D_1 : \mathcal{L} \longrightarrow \omega_C & : D_1(a\ell) = \underbrace{-D_0(a)\cdot\ell}_{\cdot : \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\omega} + a\, D_1(\ell) \end{cases}$$

Pour $\delta_0 + \tau D$ vérifiant 1.4 (ii), D_1 est déterminé par D_0 : il suffit de le vérifier sur le lieu lisse, et là on a en coord. locales

$$D f = (u(z)\partial_z + v(z)\theta\partial_\theta) f \quad [dz/d\theta] \quad ,$$

et D_0 est $f \mapsto u(z)\partial_z f \,.\, [dz/d\theta] \ : \mathcal{O}^+_{X_0} \to \omega^-_{X_0}$. Écrivant que

$$D = \theta v(\partial_\theta + \theta\partial_z) + u\,\partial_z$$

et appliquant 1.2, on voit que 1.4 (ii) signifie : $v = \partial_z u$: D_0 détermine D

Une dérivation impaire E de $\mathcal{O}_X$ se décrit du point de vue 1.5 par ses composantes

$$\begin{cases} E_0 : \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{L} & : \text{ une dérivation} \\ E_1 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_C & : \text{ linéaire} \end{cases}$$

On va prendre pour E la dérivation de composantes $(D_0, 0)$.
Pour vérifier que l'automorphisme infinitésimal $\mathrm{Id} + \varepsilon E$ défini par E conjugue δ_0 en δ_ϕ, il suffit de le vérifier sur le lieu lisse, et il suffit de vérifier que la composante "0" de $\mathcal{L}_E(\delta_0)$ est D_0. En coordonnées locales, on a

$$E : u(z)\,\theta\,\partial_z$$

$$\delta_0 : (\partial_\theta + \theta\partial_z) \,.\, [dz/d\theta]$$

$$\mathcal{L}_E(\delta_0) = [E, \partial_\theta + \theta\partial_0] \,.\, [dz/d\theta] + (\partial_\theta + \theta\partial_z)\, \mathcal{L}_E([dz/d\theta])$$

$$[E, \partial_\theta + \theta\partial_z] = [\partial_\theta + \theta\partial_z, u(z)\theta\partial_z] = u(z)\partial_z$$

et le second terme contribue à la composante "1" de $\mathcal{L}_E(\delta_0)$.
On a retrouvé le D_0 voulu.

~~1.8 Remarque. J'ai enfin compris ce que signifie la condition (ii) de la définition 1.4 : que δ est son propre transposé (à un signe à ajuster près)~~

2. Courbes stables

Définition 2.1 Une super courbe stable X/S est une super courbe propre sur S (1.4) dont les fibres géométriques X_s ont des réduites $(X_s, \mathcal{O}^+_{X_s})$ qui sont des courbes stables

Pour S spectre d'un corps algébriquement clos k, il est facile à l'aide de 1.5 de déterminer (localement pour la topologie étale) les singularités possibles des super courbes stables.

Sur la singularité $xy=0$, il y a en effet exactement deux types d'isomorphie de faisceau cohérent de Cohen-Macaulay génériquement de rang 1. Pour C la courbe, et B_1, B_2 ses deux branches, ce sont $\mathcal{O}_C$ et $\mathcal{O}_{B_1} \oplus \mathcal{O}_{B_2}$. Ces deux faisceaux sont isomorphes à leur dual (à valeurs dans $\mathcal{O}_C$, ou ω_C, cela revient au même). De plus, tout automorphisme d'un de ces faisceaux admet (localement étale) une racine carrée, et 1.5 donne deux types possibles de singularités de super-courbes. Voici une description par coordonnées et équations des deux possibilités. On donne : coordonnées / équations / description de ω_X comme sous-faisceau de l'image directe de sa restriction au lieu lisse / description de δ.

2.2. I. coordonnées z_1, z_2, θ

équation $z_1 z_2 = 0$

complement du point singulier : deux branches, avec les coordonnées

$$\begin{cases} B_1 : z_1, \theta & (z_2 = 0) \\ B_2 : z_2, \theta & (z_1 = 0) \end{cases}$$

ω_X : libre de base $\underline{\underline{b}}$, donnée sur chaque branche par

$$\underline{\underline{b}} = \begin{cases} \left[\frac{dz_1}{z_1} / d\theta\right] \\ \left[-\frac{dz_2}{z_2} / d\theta\right] \end{cases}$$

δ : sur chaque branche : $f \longrightarrow \begin{Bmatrix} (\partial_\theta + \theta z_1 \partial_{z_1}) f \\ (\partial_\theta + \theta z_2 \partial_{z_2}) f \end{Bmatrix} . \underline{\underline{b}}$

On notera D la dérivation donnée sur chaque branche

par : $\begin{cases} \partial_\theta + \theta z_1 \partial_{z_1} & (B_1) \\ \partial_\theta + \theta z_2 \partial z_2 & (B_2) \end{cases}$ $\qquad D : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, impair

II. coordonnées $z_1\ z_2\ \theta_1\ \theta_2$

équations $z_1 z_2 = z_1 \theta_2 = \theta_1 z_2 = \theta_1 \theta_2 = 0$

complément du point singulier : deux branches, coordonnées

$z_1, \theta_1 \quad (z_2 = \theta_2 = 0) \quad$ et $\quad z_2, \theta_2 \quad (z_1 = \theta_1 = 0)$

ω_X : engendré par les formes données comme suit sur chaque branche :

$$[dz_1/d\theta_1] := \begin{cases} [dz_1/d\theta_1] \\ 0 \end{cases} \qquad [dz_2/d\theta_2] := \begin{cases} 0 \\ [dz_2/d\theta_2] \end{cases}$$

et $\frac{\theta_1}{z_1}[dz_1/d\theta_1] - \frac{\theta_2}{z_2}[dz_2/d\theta_2] := \begin{cases} \theta_1/z_1\, [dz_1/d\theta_1] \\ -\theta_2/z_2\, [dz_2/d\theta_2] \end{cases}$

δ : sur chaque branche : $(\partial_{\theta_i} + \theta_i \partial_{z_i}) f \circ [dz_i/d\theta_i]$

On pose $\underline{\underline{b}} := [dz_1/d\theta_1] + [dz_2/d\theta_2]$ et on note D la dérivation impaire donnée en dehors du point singulier par

$D := \partial_{\theta_i} + \theta_i \partial_{z_i}$ sur chaque branche. C'est une dérivation rationnelle : elle n'envoie pas $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$: on a

$$\theta_1 \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{sur } B_1 \\ 0 & \text{sur } B_2 \end{cases}$$

mais $\delta = D.\underline{\underline{b}}$ envoie $\mathcal{O}$ dans ω_X

Dans $\underline{I}$ et $\underline{II}$, le calcul de $\mathcal{O}_X\, \omega_{X/S}$ peut se faire comme ~~en~~ 1.6. Soient ~~pour que~~ ~~des~~ α_i des sections de $\omega_{X/S}$ sur (B_i - point singulier) $(i=1,2)$; pour que les α_i proviennent d'une section de ω_X, il faut et il suffit que pour tout f dans $\mathcal{O}_X$, induisant f_i sur la branche B_i, on ait $\mathrm{Res}_0(f_1 \alpha_1) + \mathrm{Res}_0(f_2 \alpha_2) = 0$. Je rappelle que

$$\mathrm{Res}\,(\theta/z\,[dz/d\theta]) = 1 .$$

Dans le cas $\underline{I}$, chaque branche (fermée) B_i peut être vue comme une courbe munie d'une structure de spin ramifiée en 0 : une racine carrée de $\omega_{C_i}(0)$ $[C_i = B_{i\,\mathrm{red}}$; pôle simple permis en $0]$. On recolle B_1 et B_2 selon la feuille intégrale $z_i = 0$ des distributions $\partial_\theta \pm \theta(z_i \partial_{z_i})$.

Dans le cas $\underline{II}$, chaque branche (fermée) B_i peut être vue comme une supercourbe lisse ; elles sont recollées par un point.

2.3 Nous aurons à considérer les déformations suivantes des super courbes I et II. Les déformations sont sur $k[t]$.

I. coordonnées z_1, z_2, θ

équation $\quad z_1 z_2 = t$ $\qquad$ [dans le plan (z_1, z_2), la dérivation $z_1\partial_1 - z_2\partial_2$ annulle t]

le complement du point singulier $(0,0)$ $(t=0)$ est recouvert par les deux cartes

① z_1 inversible, coordonnées (z_1, θ), $\qquad z_2 = t/z_1$

② z_2 inversible, coordonnées (z_2, θ), $\qquad z_1 = t/z_2$

$\omega_{X/S}$ est libre de base $\underline{\underline{b}}$ donnée par

$$\underline{\underline{b}} = [dz_1 \wedge dz_2 / d\theta] / [d(z_1 z_2)]$$
$$= \begin{cases} ① & [dz_1/z_1 \ / d\theta] \\ ② & [-dz_2/z_2 \ / d\theta] \end{cases}$$

δ est donné dans chaque carte par

① $(\partial_\theta + \theta z_1 \partial_{z_1})\ \underline{\underline{b}}$

② $(\partial_\theta - \theta z_2 \partial_{z_2})\ \underline{\underline{b}}$

Puisque δ envoie $\mathcal{O}_X$ dans $\omega_{X/S}$ en dehors de $(0,0)$, par profondeur, c'est egalement vrai en $(0,0)$. La platitude est claire : intersection complète relative.

II. coordonnées $z_1\ z_2\ \theta_1\ \theta_2$

equations $\quad z_1 z_2 = -t^2,\ z_1\theta_2 = t\theta_1,\ z_2\theta_1 = -t\theta_2,\ \theta_1\theta_2 = 0$

cartes (réunion: $X - (0,0)$) : ① z_1 inversible, coord z_1, θ_1, $\begin{cases} z_2 = -t^2/z_1 \\ \theta_2 = t\theta_1/z_1 \end{cases}$

② z_2 inversible, coord z_2, θ_2, $\begin{cases} z_1 = -t^2/z_1 \\ \theta_1 = -t\theta_2/z_2 \end{cases}$

Si A est l'anneau de coordonnées de l'espace total, on a $A^+ = k[z_1, z_2, \sqrt{z_1 z_2}]$; on peut voir A^+ comme le sous-anneau de $k[\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}]$ ~~des polynomes de degré total~~ des sommes de monomes de degré total entier. Par $\theta_1 \mapsto \sqrt{z_1}$, $\theta_2 \mapsto \sqrt{z_2}$, on peut alors identifier A^- au A^+-module des sommes de monômes de degré total $\frac{1}{2}$-entier non entier. Ceci rend clair que $t = \sqrt{z_1 z_2}$ n'est pas diviseur de 0, i.e. la platitude de X sur $k[t]$.

Voici des sections de $\omega_{X/S}$ en dehors de 0, écrites dans les cartes ① et ②

$$\begin{cases} [dz_1/d\theta_1] \\ -\frac{t}{z_2}[dz_2/d\theta_2] \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{t}{z_1}[dz_1/d\theta_1] \\ [dz_2/d\theta_2] \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1/z_1\,[dz_1/d\theta_1] \\ -\theta_2/z_2\,[dz_2/d\theta_2] \end{cases}$$

Un argument de profondeur montre que ces sections se prolongent (uniquement) en des sections sur X. Elles relèvent des générateurs de ω de la fibre $t=0$. Puisque $\omega_{X/S}$ est plat ~~def~~ sur S de formation compatible au changement de base, elles engendrent $\omega_{X/S}$.

Enfin, δ est donné dans chaque carte par

(i) $\quad \delta f = (\partial_{\theta_i} + \theta_i \partial_{z_i}) f \;\; [dz_i/d\theta_i]$.

On vérifie la compatibilité dans l'intersection des cartes.

2.4 Remarque. Le morphisme $\delta : \Omega^1_{X/S} \to \omega_{X/S}$ est donné par

$$dz_1 \longrightarrow \theta_1[dz_1/d\theta_1] \qquad d\theta_1 \longrightarrow [dz_1/d\theta_1]$$

$$dz_2 \longrightarrow \theta_2[dz_2/d\theta_2] \qquad d\theta_2 \longrightarrow [dz_2/d\theta_2] \quad ;$$

son image est engendrée par $[dz_1/d\theta_1]$ et $[dz_2/d\theta_2]$. Son conoyau est de longueur 1, concentré en $(0,0)$. En effet, si on (multiplie) $\theta_1/z_1[dz_1/d\theta_1] = -\theta_2/z_2[dz_2/d\theta_2]$ par θ_1, θ_2, z_1 ou z_2 on trouve respectivement $0, 0, \theta_1[dz_1/d\theta_1]$ et $\theta_2[dz_2/d\theta_2]$.

Théorème 2.5 La déformation 2.3 est la déformation verselle de la (singularité de) supercourbe 2.2.

{Il s'agit plutôt de compléter 2.2 et 2.3 à l'origine et de déformation verselle formelle}. Bien sûr, il s'agit de déformation comme supercourbe, pas seulement comme superschéma.

Théorème 2.6 (i) Une supercourbe stable n'a pas d'automorphisme infinitésimal non trivial.
(ii) Le champ des supercourbes stables de genre $g \geq 2$ est un champ algébrique propre et lisse
(iii) Il compactifie le champ des supercourbes lisses de genre g avec à l'infini un diviseur à croisements normaux

A vrai dire, je n'ai vérifié 2.6 que modulo ~~la~~ ~~thes~~ le superanalogue du théorème de représentabilité d'Artin, et le superanalogue du théorème de prorepresentabilité formelle de Schlessinger.

Des arguments standard ramènent 2.6.(ii)(iii) à 2.6(i) et 2.5 + vérification du critère valuatif de propreté. Pour ce dernier, on peut ne considérer que des schémas de base et passer au langage 1.5. Enfin, pour prouver 2.5, il suffit de le faire au premier ordre : si 2.3 sur $k[t]/(t^2)$ est la seule déformation au premier ordre, l'espace tangent à l'espace de la déformation verselle est de dimension $(1,0)$ et toute déformation sur $k[t]$ qui prolonge celle sur $k[t]/(t^2)$ est verselle.

C'est en examinant le critère valuatif de propreté que je suis tombé sur les déformations 2.3. De ce point de vue, elles ne sont pas surprenantes. La nécessité du type II vient (par exemple) de ce que si une courbe de genre g X dégénère en X_0 : deux courbes de genre g_1 et g_2 attachées en un point, alors ω_{X_0} n'a pas de racine carrée, car de degré impair sur chaque composante.

Les diviseurs à l'infini sont caractérisés par le fait que, sur eux, un des points singuliers admet (localement pour la topologie étale) une équation 2.2. La remarque 2.4 fournit au-dessus de chacun d'eux une section "le point singulier" d'image (localement) le support de $\mathrm{coker}(\delta : \Omega^1_{X/S} \to \omega_{X/S})$. Ces diviseurs à l'infini sont des sous-variétés de codimension $(1,0)$.

J'avoue n'avoir de 2.5 qu'une preuve dégueulasse : la liasse de calculs qui suit. C'est un peu un brouillon mais, mettant au net, je ne ferais guère mieux.

3. Déformations au premier ordre

3.1 Pour un moment, on va oublier δ et calculer la déformation verselle, au 1^er^ ordre, de la singularité $\S 2.2$ I ou II. Le calcul est pénible, mais standard. Pour un superschéma à singularité isolée quelconque, il faut

(a) écrire $X = Sp(A)$, $A = k[\underline{X}, \underline{\theta}] /$ équations f_i

(b) trouver un système de syzygies S_k :

$$\sum a_i(\underline{x}, \underline{\theta}) f_i = 0$$

les engendrant toutes modulo les syzygies triviales

$f_i f_j - f_j f_i = 0$ (cas pair ou pair/impair)

$f_i f_j + f_j f_i = 0$ (f_i et f_j impairs)

(c) calculer la cohomologie du complexe de A-modules libres

$$\bigoplus \left(A \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } A \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x}} \bigoplus A \frac{\partial}{\partial f_i} \xrightarrow{\text{coeff de } S} \bigoplus A \frac{\partial}{\partial S_k}$$

le H^1 paramétrise les déformations.

<u>Cas I</u> (z_1, z_2, θ), $z_1 z_2 = 0$, pas de syzygie

Déformation universelle au 1^er^ ordre :

$$z_1 z_2 = t + \tau \theta \qquad (\text{sur } k[t, \tau]/(t^2, t\tau))$$

Le cas II est une autre paire de manches.

Cas II. $\quad z_1 \quad z_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2$ $\qquad$ (*)

$$z_1 z_2 = z_1 \theta_2 = \theta_1 z_2 = \theta_1 \theta_2 = 0 \qquad (**)$$

syzygies :
$$\begin{cases} \theta_1 \, (z_1 z_2) = z_1 \, (\theta_1 z_2) \\ \theta_2 \, (z_1 z_2) = z_2 \, (z_1 \theta_2) \\ z_1 \, (\theta_1 \theta_2) = \theta_1 \, (z_1 \theta_2) \\ z_2 \, (\theta_1 \theta_2) = -\theta_2 \, (\theta_1 z_2) \end{cases} \qquad (***)$$

Il s'agit de ~~résoudre un système de~~ considérer un système de 4 equations (une par syzygie) à 4 inconnues (une par equations (**)) dans l'anneau A, exprimant que ces inconnues vérifient les syzygies. Il s'agit de calculer l'espace des solutions modulo solutions triviales (obtenues par dérivation des equations (**))

Je note (++) (+-) (-+) et (--) les ~~équations~~ inconnues.

Les equations, correspondant aux syzygies, ont pour coefficients

(++)	(+-)	(-+)	(--)
θ_1		$-z_1$	
θ_2	$-z_2$		
	$-\theta_1$		z_1
		θ_2	z_2

(chaque ligne, une syzygie)

solutions triviales :

	(∂_{z_1})	(∂_{z_2})	(∂_{θ_1})	(∂_{θ_2})
(++)	z_2	z_1		
(+-)	θ_2			z_1
(-+)		θ_1	z_2	
(--)			θ_2	$-\theta_1$

(chaque colonne, une solution triviale)

Soit (a, b, c, d) une solution. La modifiant par les deux dernières solutions triviales, on peut supposer d pair. Les equations $z_1 d = +\theta_1 b$, $z_2 d = -\theta_2 c$, donnent alors $d = 0$. Les combinaisons linéaires avec $d=0$ de solutions triviales sont les combinaisons linéaires de 1re, 2e, 3e $\times \theta_2$, 4e $\times \theta_1$. Ceci nous ramène au système sol. triviales

$(++)$	$(+-)$	$(-+)$	$((--)=0)$	
θ_1	$\cancel{a_1}$	$-z_1$		
θ_2	$-z_2$			
	$-\theta_1$			$: b \in (\theta_1, z_2, \theta_2)$
		θ_2		$: c \in (\theta_2, z_1, \theta_1)$

$(++)$	z_2	z_1	
$(+-)$	θ_2		$\theta_1 z_1$
$(-+)$		θ_1	$\theta_2 z_2$
$((--)=0)$			

Soit une solution

(a, b, c) $(d=0)$

L'équation $\theta_1 a = z_1 c$ impose que, ~~modulo (θ_2, z_2), (a, c) est multiple de la 2e solution triviale. En particulier~~, $a \in (z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = (z_1, \theta_1) \oplus (z_2, \theta_2)$.

De même pour b et c : $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$. Modulo les deux premières solutions triviales, on obtient ~~$a=0$, $b_2 = 0$, $c_1 = 0$~~

~~L'équation $\theta_1 b = 0$ donne alors $b = \theta_1$~~

$a_1 \in (\theta_1)$, $a_2 \in (\theta_2)$, $b_2 = c_1 = 0$ et, par les dernières équations

$$\begin{array}{llll} a_1 \in (\theta_1), & a_2 \in (\theta_2), & b_1 \in (\theta_1), & c_1 = 0 \\ & & b_2 = 0 & c_2 \in (\theta_2) \end{array}.$$

et enfin, modulo des θ-multiples des premières solutions triviales, toute solution se ramène à l'une des suivantes:

a	b	c	d
θ_1	0	0	0
θ_2	0	0	0
0	θ_1	0	0
0	0	θ_2	0

et la déformation verselle au 1er ordre est

paramètres $t_1\ t_2\ \tau_1\ \tau_2$

coordonnées $z_1\ z_2\ \theta_1\ \theta_2$

équations
$$\begin{cases} z_1 z_2 + \tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2 = 0 \\ z_1 \theta_2 + t_1 \theta_1 = 0 \\ z_2 \theta_1 + t_2 \theta_2 = 0 \\ \theta_1 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

3.2 D'après 3.1, l'espace verrel de modules de déformations d'une ~~supercourbe~~ singularité de supercourbe est un sous-espace de l'espace verrel de modules du superschéma sous-jacent. Au premier ordre, on a

Lemme 3.3 L'espace verrel de modules d'une singularité de super-courbe est, ~~[illegible]~~ au 1^er ordre, le sous-espace suivant de l'espace verrel de modules (calculé en 3.1) de la singularité de superschéma

$\underline{\mathrm{I}}$: $\tau = 0$

$\underline{\mathrm{II}}$: $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $t_1 + t_2 = 0$.

Il s'agit de savoir quand on peut déformer δ, en respectant les conditions suivantes

(a) δ est à valeurs dans ω_X

(b) sur le lieu lisse, δ vérifie ~~[illegible]~~ 1.4(ii)

Dans les déformations considérées (paramétrées par un sous-~~schéma~~ superschéma S du schéma qui paramétrise la déformation 3.1), le complément U du point singulier est réunion de deux branches :

①: z_1 inversible, ②: z_2 inversible, admettant les coordonnées respectives (z_1, θ_1) et (z_2, θ_2). On décrira une section ω de ω_X par ses restrictions ω_1 et ω_2 aux deux branches. La condition sur ω_1 et ω_2 est que pour toute section f de $\mathcal{O}_X$, ~~décrite par ses~~ de restrictions f_1 et f_2 aux deux branches, on ait dans $\mathcal{O}_S$

$$\mathrm{Res}_0(f_1\omega_1) + \mathrm{Res}(f_2\omega_2) = 0 \qquad (\text{cf } 1.6)$$

Puisque ω_X est plat sur S, pour obtenir un ensemble de generateurs de ω_X, il suffit de relever un ensemble de générateurs de ω_{X_0} (X_0 fibre spéciale)

Dans le cas I (resp II), on notera $\underline{\underline{b}}$ la section suivante de ω_X sur U :

$$\mathrm{I} : \begin{cases} ① & [\frac{dz_1}{z_1} / d\theta] \\ ② & [-\frac{dz_2}{z_2} / d\theta] \end{cases} \qquad \mathrm{II} \begin{cases} ① & [dz_1/d\theta_1] \\ ② & [dz_2/d\theta_2] \end{cases},$$

D_0 la dérivation impaire sur U

$$\mathrm{I} : \begin{cases} ① & \partial_\theta + \theta\partial_{z_1} \\ ② & \partial_\theta - \theta\partial_{z_1} \end{cases} \qquad \mathrm{II} : \begin{cases} ① & \partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_{z_1} \\ ② & \partial_{\theta_2} + \theta_2\partial_{z_2} \end{cases}$$

et $\delta_0 : D_0 . \underline{\underline{b}}$. Ce δ_0 n'envoie pas necessairement $\mathcal{O}_X$ dans ω_X et, pour qu'une déformation comme supercourbe soit possible, il faut pouvoir corriger ce δ_0 pour qu'il envoie $\mathcal{O}_X$ dans ω_X.

Distinguons les cas I et II, et les déformations paires et impaires

Cas I impair. ~~est dans~~ $z_1 z_2 = \tau\theta$

Ici, $\underline{\underline{b}}$ est dans ω_X (on a $\underline{\underline{b}} = [dz_1 dz_2/d\theta]/[d(z_1z_2 - \tau\theta)]$), donc est une base de ω_X. Il faudrait corriger la dérivation impaire D_0 (en $D_0 + \tau D$, D dérivation de $\mathcal{O}_{U_0}$ dans $\mathcal{O}_{U_0}$, paire,) pour qu'elle soit à valeurs dans $\mathcal{O}$. Décrivant une section de $\mathcal{O}_X$ par ses restrictions aux branches, on a

$$z_1 = \begin{cases} ① & z_1 \\ ② & \tau\theta/z_2 \end{cases} \xrightarrow{D_0} \begin{cases} \theta z_1 \\ \tau/z_2 \end{cases} \quad \text{qui n'est pas dans } \mathcal{O} :$$

$\begin{cases} \theta z_1 \\ 0 \end{cases}$ est dans $\mathcal{O}$, et $\begin{cases} 0 \\ \tau/z_2 \end{cases}$ ne l'est pas, car $\begin{matrix} 0 \\ 1/z_2 \end{matrix}$ n'est pas dans $\mathcal{O}_{X_0}$.

La dérivation D devrait envoyer z_1 sur une quantité $\neq 0$ sur la 2^e branche : impossible.

Cas II. Absence de déformation impaire

X_0 est bihomogène : on peut attribuer les poids

$$\theta_1 : (1,0)\ ,\quad z_1 : (2,0)$$
$$\theta_2 : (0,2)\ ,\quad z_2 : (0,2)$$

la déformation verselle de la singularité l'est aussi :

poids : $\tau_1 : (1,2)$ $\quad \tau_2 : (2,1)$ $\quad t_1$ et t_2 : $(1,1)$

Dès lors, s'il existe une déformation avec $\tau_1 = a\tau$, $\tau_2 = b\tau$ $(a,b) \neq (0,0)$, il en existe aussi une avec (a,b) remplacé par $(\lambda a, \mu b)$.

Si a ou $b = 0$, par symétrie, on a une déformation à $\tau_2 = 0$. Sinon, on a deux déformations distinctes et τ_1 et τ_2 sont en fait libres.

Il suffit d'étudier la déformation sur $k[\tau_1]$,

$$z_1 z_2 = \tau_1 \theta_1 \qquad z_1\theta_2 = z_2\theta_1 = \theta_1\theta_2 = 0$$

Calcul de ω_X : on écrit un élément de ω_X d'après ce qu'il est sur chaque branche : $\begin{cases} u_1\,[dz_1/d\theta_1] \\ u_2\,[dz_2/d\theta_2] \end{cases}$

Il s'agit de relever les générateurs :

$[dz_1/d\theta_1]$: pas dans ω_X car

$$z_2 \cdot [dz_1/d\theta_1] = \begin{cases} \tau_1\theta_1/z_1\,[dz_1/d\theta_1] \\ z_2 \cdot 0 \end{cases} \quad : \text{résidu } \tau_1$$

se relève en : $\begin{cases} [dz_1/d\theta_1] \\ -\tau_1 \dfrac{\theta_2}{z_2^2}\,[dz_2/d\theta_2] \end{cases}$

$[dz_2/d\theta_2]$: se relève en $\left\{ [dz_2/d\theta_2] \right.$

$\dfrac{\theta_1}{z_1}[dz_1/d\theta_1] - \dfrac{\theta_2}{z_2}[dz_2/d\theta_2]$: se relève en idem sur chaque branche

Cherchons à relever $\delta = D_0 \underline{\underline{b}}$ (comme en 3.1 III)

le relèvement rationnel donné par la même formule sur chaque branche n'est pas à valeurs dans ω_X : on a

$$\theta_1 = \begin{cases} \theta_1 \\ 0 \end{cases} \rightarrow [dz_1/d\theta_1]$$

et D_0 devrait être corrigé par une ~~défo~~ dérivation rationnelle paire envoyant $\theta_1 \longrightarrow \frac{\theta_2}{z_2^2} [dz_2/d\theta_2]$ ~~ce qui n'est pas par~~

+ réplica sur 2ᵉ branche,

ce qui n'est pas possible (respect du support)

<u>Cas II, déformations paires</u>

$$z_1 z_2 = 0 \qquad z_1\theta_2 = t_1\theta_1 \qquad \theta_1\theta_2 = 0$$

$$z_2\theta_1 = t_2\theta_2$$

branche 1 : $z_2 = 0$, $\theta_2 = t_1\theta_1/z_1$ (coordonnées z_1, θ_1)

branche 2 : $z_1 = 0$, $\theta_1 = t_2\theta_2/z_2$ (coordonnées z_2, θ_2)

Cherchons encore des générateurs de ω_X, sous la forme

$$\begin{cases} u_1(z_1,\theta_1) \cdot [dz_1/d\theta_1] \\ u_2(z_2,\theta_2) \cdot [dz_2/d\theta_2] \end{cases} \qquad u_i \in k[z_i, z_i^{-1}, \theta_i]$$

<u>Relever</u> $[dz_1/d\theta_1]$: $\times\ \theta_2 = t_1\theta_1/z_1$: résidu t_1

relever en $[dz_1/d\theta_1] - t_1 \frac{1}{z_2} [dz_2/d\theta_2]$

$[dz_2/d\theta_2]$: se relève en $\begin{cases} -t_2/z_1\ [dz_1/d\theta_1] \\ [dz_2/d\theta_2] \end{cases}$

$\begin{cases} \theta_1/z_1\,[dz_1/d\theta_1] \\ -\theta_2/z_2\ [dz_2/d\theta_2] \end{cases}$ se relève en le même

Soit D_0 comme précédemment. ~~Il est à~~ On a

$$
\begin{array}{llll}
D_0 : & z_1 = \begin{cases} z_1 \\ 0 \end{cases} & \longrightarrow \begin{matrix} \theta_1 \, [dz_1/d\theta_1] \\ 0 \end{matrix} & \cancel{\text{(à corriger)}} \text{ dans } \omega_X \\
& z_2 & \longrightarrow \theta_2 \, [dz_2/d\theta_2] & \cancel{\text{(à corriger)}} \text{ dans } \omega_X \\
& \theta_1 = \begin{cases} \theta_1 \\ t_2\theta_2/z_2 \end{cases} & \longrightarrow \begin{cases} [dz_1/d\theta_1] \\ \left(\frac{t_2}{z_2}\left[dz_2/d\theta_2\right]\right. \end{cases} & \text{dans } \omega_X \text{ si } t_1 = -t_2 \\
& \theta_2 = \begin{cases} t_1\theta_1/z_1 \\ \theta_2 \end{cases} & \longrightarrow \begin{cases} t_1/z_1 \, [dz_1/d\theta_1] \\ [dz_2/d\theta_2] \end{cases} & \text{dans } \omega_X \text{ si } t_1 = -t_2
\end{array}
$$

Si $t_1 + t_2 \neq 0$, il faut corriger D_0 en $D_0 + \varepsilon D$, D pair, et, à nouveau, D devrait envoyer θ_1 sur une quantité non nulle sur la 2^e branche: impossible.

On ne peut donc déformer que pour $t_1 + t_2 = 0$.

Que les déformations non exclues sont possibles résulte de 2.3.

4. Automorphismes infinitésimaux : preuve de 2.6 (i) :

~~Théorème~~ Une super-courbe stable n'a pas d'automorphisme infinitésimal.

Localement, sur le lieu lisse, le faisceau des automorphismes infinitésimaux

$$\mathcal{A} \hookrightarrow Tg_X$$

* se projette isomorphiquement sur Tg_X / distr. structurale.

Pour X : $C, \mathcal{O}_C \oplus \omega^{1/2}$

$\mathcal{A}$: $tg_C \oplus \omega^{1/2} \otimes tg_C$.

Le premier travail est, près d'une singularité, de calculer quelles sections méromorphes de $\mathcal{A}$ sont des automorphismes infinitésimaux. Il s'agit d'envoyer $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$

Cas I : ici, $\mathcal{O}_X^-$ est une racine carrée de ω_C.

Soit D comme en 3.1 I (où noté D_0) _ un automorphisme infinitésimal s'écrit $aD + bD^2$ avec $(-1)^{\deg a}.2.a + Db = 0$:

$$a = \frac{1}{2}.(-1)^{\deg b}.Db.$$

Pour qu'elle envoye $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$, il faut :

dérivation paire : b pair : $b \in \mathcal{O}^+$

impaire : b impair : $b \in \mathcal{O}^-$

$$\boxed{\mathcal{A} : \omega_C^{-1} \oplus \omega_C^{1/2} \otimes \omega_C^{-1}}$$

---

* car $[D, X + aD] \bmod \mathcal{D} = DX + (-1)^{a,D} a\,\partial_z$: unique a pour amener dans $\mathcal{D}$

Cas II. De même, on prend D comme en 3.1 II et on écrit les dérivations

$$\text{paires : } \quad \tfrac{1}{2} D b \,.\, D + b D^2 \qquad (b \text{ pair})$$

$$\text{impaires : } \quad -\tfrac{1}{2} D b \,.\, D + b D^2 \qquad (b \text{ impair})$$

Condition pour que b, section rationnelle de $\mathcal{O}$, donne lieu à une dérivation : $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$

$$\text{pair : } \quad b \in \mathcal{O}^+, \text{ nul en } o$$

$$\text{impair : } \quad b \in \mathcal{O}^-, \text{ nul en } o$$

en terme des branches B_i

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \,, \qquad \mathcal{A}_i = tg_{B_i}(\text{nul en } o) \oplus tg_{B_i}(\text{nul en } o) \otimes \omega_{B_i}^{1/2}$$

Un automorphisme inf[al] pair / impair fournit donc sur la normalisée d'une composante A de C une section d'un faisceau en droites de degré :

pair : $(2-2g) - \frac{1}{2}$ (# points type I) $-$ (# points type II)

impair : $(1-2g) - \frac{1}{2}$ (# points type I) $-$ (# points type II)

Sous l'hypothèse "stable", ces degrés sont < 0.

5. Critère valuatif de propreté

Ici, on n'a comme espaces de paramètres à considérer que des traits (S, η, s), $S = \mathrm{Spec}(V)$ ~~des schémas (même des anneaux de valuation discrète)~~ (~~V, corps des fractions K~~) et on peut donc utiliser le point de vue 1.5. D'après Deligne – Mumford, la courbe stable ordinaire $C_{\eta}^{(\text{sur } \bar\eta)}$ dégénère de façon unique en une courbe stable C sur S (après ramification de S). Il s'agit (après nouvelle ramification si requis) à faire dégénérer $\mathcal{L}_\eta$ et l'accouplement à valeurs dans $\omega_{C/S}$. En dehors des points singuliers, on peut prolonger $\mathcal{L}_\eta$ en un faisceau inversible $\mathcal{L}$. Corrigeant $\mathcal{L}$ par un diviseur concentré sur la fibre spéciale ~~et~~, on peut après passage à un revêtement double de S supposer que $\mathcal{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \omega$ en dehors des points singuliers. Après ramification, l'image directe de ce $\mathcal{L}$ conviendra.

Au voisinage étale de chaque point singulier, les racines carrées de ω_X sur le complément du point singulier sont classifiées par $H^1(\mu_2) = H^1(\mathbb{Z}/2)$: choisir une section s, et, dans $\mathcal{L}$, sur $(X - s)$, les $\sqrt[2]{s}$ forment un revêtement double. La variété des cycles évanescents a un $H^1(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$: après ramification sur la base S et localisation étale au point singulier, il y a donc deux cas possibles. Ils sont couverts par les cas I et II de 2.3.

Bien à toi

P. Deligne