

Bures sur Yvette, le 1^{er} juillet 1969

Cher monsieur Weil,

Voici la détermination, dans le cas d'un corps de fonctions, de la façon dont varie la constante de l'équation fonctionnelle dont nous avons parlé. Je joins une copie d'une lettre de Langlands, et de quelques calculs qui s'y rapportent. Je n'en utiliserai que l'essentiel (L.) ci-plus bas.

1. Représentations λ -adiques, d'après Serre et Grothendieck.

Soient K un corps de fonctions d'une variable de corps des constantes F_q , X l'ensemble de ses places, E un corps de nombres, λ une place de E ne divisant pas q et E_λ le corps local correspondant, d'anneau des entiers O_λ et de corps résiduel $k_\lambda = O_\lambda / \lambda$.

Une représentation λ -adique de K est une représentation continue de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ dans un E_λ -vecteuriel de dimension finie sur E_λ . Soit ρ une telle représentation telle qu'il existe une partie finie S de X en dehors de laquelle ρ soit non ramifiée.

Si $v \in X$, on désigne par φ_v une substitution de Frobenius correspondante, par $F_v = \varphi_v^{-1}$ un Frobenius géométrique, par I_v le groupe d'inertie du groupe de Galois local en v , par σ_v la représentation locale définie par σ .

On pose

$$Z_v(\sigma, T) = \det(1 - F_v T, \sigma_v^{-1} I_v)^{-1}$$

(action de Frobenius sur les invariants de l'inertie)

$$Z(\sigma, T) = \prod_v Z_v(\sigma, T) \in E_\lambda[[T]]$$

Exemple Une représentation λ -adique de rang 1 de K est autre qu'un homomorphisme du groupe des classes d'idèles de K dans $O_\lambda^\times$, continue pour la topologie discrète de $O_\lambda^\times$. On désigne par $\chi(n)$ la représentation correspondant à $x \mapsto |x|^{-n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) et on pose $\sigma(n) = \sigma \otimes \chi(n)$.

Un théorème de Grothendieck affirme que si σ est une représentation λ -adique de K , alors

- $Z(\sigma, T)$ est une fraction rationnelle (dans $E_\lambda(T)$)
- Elle vérifie une équation fonctionnelle

$$Z(\sigma(1), T) = \epsilon(\sigma, T) Z(\sigma, T)$$

où $\epsilon(\sigma, T)$ est un monôme. Je pose

$$\epsilon(\sigma, T) = q^{(1-g)\dim \sigma} \cdot \epsilon_0(\sigma, T)$$

$$\epsilon_0(\sigma) = \epsilon_0(\sigma, 1) \quad ; \quad \text{cette quantité est une unité } \lambda\text{-adique.}$$

- Si σ désigne encore le faisceau λ -adique défini par σ (image directe de la restriction au point générique), on a encore

$$\epsilon(\sigma, T) = \det(-FT, H^*(\sigma)) = \prod_i \det(-FT, H^i(\sigma))^{(-1)^i}$$

Si S est une partie finie de X , on pose

$$Z_S(\sigma, T) = \prod_{v \notin S} \det Z_v(\sigma, T)$$

et

$$\varepsilon_S(\sigma, T) = \varepsilon(\sigma, T) \cdot \prod_{v \in S} \det(-F_v T, \sigma_v^{I_v})^{-1}$$

= monôme asymptotique à $Z_S(\sigma, T)$ pour $T \rightarrow \infty$

= $\det(-FT, H^*(\sigma_S))$ où σ_S est le faisceau

λ -adique σ , restreint à $X-S$ et prolongé par 0 en $v \in S$.

$$\varepsilon_{0S}(\sigma, T) = q^{(g-1)\dim \sigma} \varepsilon_S(\sigma, T)$$

On définit les conducteurs

$$m_v(\sigma_S) = \text{si } v \notin S : \dim(\sigma) - \dim(\sigma_v^{I_v})$$

$$+ \dim \operatorname{Hom}_{I_v}(Sw_v, \sigma_v)$$

$$\text{si } v \in S : \dim(\sigma)$$

$$+ \dim \operatorname{Hom}_{I_v}(Sw_v, \sigma_v)$$

où on pose par exemple

$$\dim \operatorname{Hom}_{I_v}(Sw_v, \sigma_v) = \dim \operatorname{Hom}_{I_v}(Sw_v, \sigma_v \text{ réduit mod } \lambda)$$

où Sw est la représentation de Swann d'un quotient assez grand I'_v de I_v .

(c'est un $\mathcal{O}_\lambda[I'_v]$ -module projectif).

On omet la mention de S lorsque $S = \emptyset$.

Soit maintenant $\mathbb{L}$ un ensemble non vide de ^{places de} E , et S une partie finie de X . Un système compatible de représentations λ -adiques ($\lambda \in \mathbb{L}$), d'ensemble exceptionnel S , est la donnée, pour chaque $\lambda \in \mathbb{L}$, d'une représentation λ -adique σ_λ de K , les conditions suivantes étant vérifiées :

- (i) Chaque σ_λ est non ramifiée en dehors de S
- (ii) Pour $v \notin S$, $Z_v(\sigma_\lambda, T)$ ne dépend pas de λ et est indépendant de $\lambda \in \mathbb{L}$.

On pose

$$Z_v(\sigma, T) = Z_v(\sigma_\lambda, T) \quad (v \notin S)$$

$$Z_S(\sigma, T) = \prod_{v \notin S} Z_v(\sigma, T)$$

$$\varepsilon_S(\sigma, T) = \varepsilon_S(\sigma_\lambda, T)$$

ces quantités ne dépendant pas de λ (en effet, ε_S peut se définir en terme de Z_S)

2. (L) On admettra l'énoncé suivant :

— Soient σ et ρ deux représentations complexes d'un quotient fini de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Supposons leurs conducteurs disjoints. Avec les notations précédentes, on a alors

$$\varepsilon_0(\sigma \otimes \rho, T) = \varepsilon_0(\sigma, T)^{\dim \rho} \cdot \varepsilon_0(\rho, T)^{\dim \sigma} \cdot \prod_{v \in X} \det \sigma(F_v)^{-m_v(\rho)} \cdot \prod_{v \in X} \det \rho(F_v)^{-m_v(\sigma)}$$

3. Variation des constantes

Théorème. Supposons $\mathbb{L}$ infini, et soient σ et ρ deux systèmes compatibles de représentations λ -adiques ($\lambda \in \mathbb{L}$), d'ensembles exceptionnels disjoints. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{L}$,

$$(*) \quad \varepsilon_{\sigma}(\sigma_{\lambda} \otimes \rho_{\lambda}, T) = \varepsilon_{\sigma}(\sigma_{\lambda}, T)^{\dim \rho} \cdot \varepsilon_{\rho}(P_{\lambda}, T)^{\dim \sigma} \cdot \prod_{v \in X} \det \sigma_{\lambda}(F_v)^{-m_v(\rho_{\lambda})} \prod_{v \in X} \det \rho_{\lambda}(F_v)^{-m_v(\sigma_{\lambda})}$$

ie la formule (L) reste valable.

Soient S et T des ensembles exceptionnels disjoints pour σ et ρ .

Lemme 1. Pour λ donné, la formule (*) équivaut à

$$(*)_{S,T} \quad \varepsilon_{\sigma, S \cup T}(\sigma_{\lambda} \otimes \rho_{\lambda}, T) = \varepsilon_{\sigma, S}(\sigma_{\lambda}, T)^{\dim \rho} \cdot \varepsilon_{\rho, T}(P_{\lambda}, T)^{\dim \sigma} \cdot \prod_{v \in T} \det \sigma_{\lambda}(F_v)^{-m_v(\rho_{\lambda})} \prod_{v \in S} \det \rho_{\lambda}(F_v)^{-m_v(\sigma_{\lambda})}$$

Si (A) (resp (B)) est le rapport des deux membres de (*)

(resp de $(*)_{S,T}$), le quotient (A)/(B) apparaît comme un produit de termes locaux (pour $v \in S \cup T$), dont on va montrer qu'ils sont

tous 1. Si $v \in S$, il faut vérifier :

$$\det(-F_v T, \sigma_v^{I_v} \otimes \rho_v) = \det(-F_v T, \sigma_v^{I_v})^{\dim \rho} \cdot \det \rho(F_v)^{\dim \sigma_v^{I_v}}$$

ce qui est évident.

Si σ est une représentation de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans un vectoriel de dimension finie sur k_{λ} , on définit $Z(\sigma, T)$ et $Z_S(\sigma, T)$ dans $k_{\lambda}[[T]]$ par les mêmes formules que précédemment. Il est trivial par réduction mod λ que, si σ est une représentation de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans un O_{λ} -module libre de type fini, de conducteur contenu dans S , et si σ/λ est la k_{λ} représentation qui s'en déduit par réduction mod λ , on a

Lemme 2. (i) $Z_S(\sigma/\lambda, T)$ est une fraction rationnelle ; on désignera par $q^{(1-g)\dim \sigma} \cdot \varepsilon_0(\sigma/\lambda, T)$ le même asymptotique à $Z(\sigma/\lambda, T)$ pour $T \rightarrow \infty$.

(ii) Si σ et ρ sont comme plus haut, à conducteurs contenus dans des parties finies disjointes S et T de X , les conditions suivantes sont équivalentes

$$(a) \varepsilon_{S,T}(\sigma \otimes \rho, T) = \varepsilon_{0,S}(\sigma, T)^{\dim \rho} \varepsilon_{0,T}(\rho, T)^{\dim \sigma} \prod_{v \in S} \det \sigma(F_v)^{-m_v(\rho)} \prod_{v \in T} \det \rho(F_v)^{-m_v(\sigma)} \pmod{\lambda}$$

$$(b) \varepsilon_{S,T}(\sigma/\lambda \otimes \rho/\lambda, T) = \varepsilon_{0,S}(\sigma/\lambda, T)^{\dim \rho} \varepsilon_{0,T}(\rho/\lambda, T)^{\dim \sigma} \prod_{v \in S} \det \sigma(F_v)^{-m_v(\rho/\lambda)} \prod_{v \in T} \det \rho(F_v)^{-m_v(\sigma/\lambda)} \pmod{\lambda}$$

On va déduire de (L) que

Corollaire 3. (i) Si σ est une représentation de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ dans un k_λ -vectoriel de dimension finie, les fonctions $Z_S(\sigma, T) \in k_\lambda[[T]]$ sont rationnelles

(ii) Si σ et ρ sont deux telles représentations, à conducteurs contenus dans des ensembles finis disjointes S et T , la formule (b) est toujours valable.

Pour prouver (i), on note que, quitte à aggrandir E et k_λ , on sait (Brauer) que σ se relève virtuellement en une représentation de G d'un quotient fini de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ dans un vectoriel de dimension finie sur E ; on applique alors 2.(i) à cette représentation.

L'assertion (ii) se prouve de même, à partir de (L) et du lemme 1.

Il en résulte que l'assertion 2.(ii) a) est toujours vraie, donc que $(*)_{S,T}$ est vraie mod λ .

la même technique de réduction au cas des séries L unilocs, ou une autre méthode, permet de vérifier que

$$\deg_T(\varepsilon_{\sigma, S}(\sigma_\lambda, T)) = \dim(\sigma)(2-2g) - \sum_v m_v(\sigma_\lambda, S)$$

(formule d'Atiyah - Chacaurat - Grothendieck). Le premier membre de cette formule est indépendant de $\lambda \in \mathbb{L}$, de sorte que $\sum_v m_v(\sigma_\lambda, S)$ est indépendant de $\lambda \in \mathbb{L}$. Il existe donc une partie infime $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{L}$ telle que les $m_v(\sigma_\lambda, S)$ ^{et $m_v(P_\lambda, S)$} soient indépendants de $\lambda \in \mathbb{L}_1$. Les deux membres de la formule (*)_{S, T} sont alors indépendants de $\lambda \in \mathbb{L}_1$; puisque ils sont égaux mod λ pour une infinité de λ , ils sont égaux pour $\lambda \in \mathbb{L}_1$. Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier

Lemme 4. Supposons $\mathbb{L}$ infini, et soit σ un système compatible de représentations λ -adiques, d'ensemble exceptionnel S . Alors, les entiers $m_v(\sigma_\lambda, S)$ sont indépendants de $\lambda \in \mathbb{L}_\neq$.

On appliquera les résultats qui précèdent à σ et à un caractère χ ^{d'ordre fini} du groupe des classes d'idèles de K , à valeurs dans une extension finie de E , de conducteur T disjoint de S . On sait déjà qu'il existe des entiers m_v (les $m_v(\sigma_\lambda, S)$ pour $\lambda \in \mathbb{L}_1$) tels que

est

$$\varepsilon_{\sigma, S \cup T}(\sigma \otimes \chi, T) = \varepsilon_{\sigma, S}(\sigma, T) \cdot \varepsilon_{\sigma, T}(\chi, T)^{\dim \sigma} \cdot \prod \det \sigma(F_v)^{-m_v(\chi, T)} \prod \chi(F_v)^{-m_v}$$

et que, d'autre part

$$\varepsilon_{\sigma, S \cup T}(\sigma \otimes \chi, T) \equiv \varepsilon_{\sigma, S}(\sigma, T) \cdot \varepsilon_{\sigma, T}(\chi, T)^{\dim \sigma} \cdot \prod \det \sigma(F_v)^{-m_v(\chi, T)} \cdot \prod \chi(F_v)^{-m_v(\sigma_\lambda, S)} \pmod{\lambda}$$

de sorte que

$$\prod_{v \in S} \chi(F_v)^{m_v - m_v(\sigma_\lambda, S)} \equiv 1 \pmod{\lambda}$$

Ceci, étant vrai pour tout χ , implique que $m_v(\sigma_\lambda, S) = m_v$,
ce qui achève la démonstration

Bien à vous

P. Deligne