generell formulering.

Funksjonsklasse: Trondheim 88, Amalfi 89.

$s = \sigma + it$;

$$L(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\ ; \ a_1 = 1;\ a_n = O(n^{\delta}) \text{ for alle } \delta > 0$$

$$\log L(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}\ ; \ b_n = 0 \text{ undtatt når } n = p^r,\ r > 0$$

$b_n = O(n^{\theta})$ for et $\theta < \frac{1}{2}$. ("Eulerproduktet")

$(s-1)^m L(s)$ hel funksjon av endelig orden ~~[illegible]~~ for noe ~~heltall m~~.

Funksjonal ligning, sett

$$\Phi(s) = \varepsilon\, Q^{\frac{s}{2}}\, \pi^{-\Lambda s} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) \cdot L(s),$$

konstanter
$|\varepsilon| = 1$; $Q > 0$; $\lambda_j > 0$, $\Re \mu_j \geq 0$, $\Lambda = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$.

Da skal vi ha

$$\Phi(s) = \overline{\Phi(1-\bar{s})}\ ; \ \Phi(s) \text{ reell for } \sigma = \frac{1}{2}$$

Conjectures. R.H etc.

Lineær kombinasjon. La $L_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ være distinkte funksjoner men med samme Γ faktorer i og samme combinasjonen, med reelle const c_i

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon_i\, Q_i^{\frac{s}{2}} L_i(s) \text{ eller}$$

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon_i \left(1 + Q_i^{s-\frac{1}{2}}\right) L_i(s) \ : \text{da}$$

er $\pi^{-\Lambda s} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)\, F(s)$, reell og samme med.

Nullpunkter for $F(s)$ eller $F^*(s)$ kan inddeles i trivielle (bragt inn ved poler av Γ faktorene) og ikke-trivielle; de siste ligger i en vertikal stripe $-A < \sigma < A$ og antallet i intervallet $0 \leq t < T$ av disse $N(T, F)$ er $\frac{\Lambda}{\pi} T (\log T + B) + O(\log T)$.

Man formoder at antallet nullpunkter på linjen $\sigma = \frac{1}{2}$ er asymptotisk det samme, så at nesten alle ligger der

$$N_0(T, F) \sim \frac{\Lambda}{\pi} T \log T$$

Dette kan vises hvis man antar en par plausible men hittil ubeviste hypoteser om fordeling av nullpunktene til de individuelle $L_i(s)$.

I 97 Hejhal spurte mig hvad man kunne bevise uten noen hypoteser. Klart at vi kan bare vise dette for lineærkomb. hvis vi kan vise samme resultat for en enkelt $L(s)$. Hittil er det siste bare lykkes for tilfellet $\Lambda = \frac{1}{2}$, 1942, $\zeta(s)$ og Dirichlets $L(s, \chi)$, $\Lambda = 1$; hovedarbeidet her av Hafner i slutten av 80 årene; byggende på arbeid av Anthony Good, Henryk Iwaniec, og andre. Det omfatter L-funksjoner for kvadratiske tallkropper Dirichlet rekker forbundet med klassiske modul former som er egenfunksjoner av Hecke operatorer. og ~~av [illegible] modul funksjoner som er egenfunksjoner~~

Maass former som også er egenfunksjoner av Hecke operatorene.

Fall $\lambda = \frac{1}{4}$; Dirichlets funksjoner

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \;;\; \chi \text{ prim. Charakter mod } q.$$

2 fall $\chi(-1) = 1$; og $\chi(-1) = -1$.

$$a = \frac{1-\chi(-1)}{2}$$

$$\phi(s) = \varepsilon_\chi\, q^{\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\!\left(\tfrac{s+a}{2}\right) L(s,\chi) \;;\quad \phi(s) = \overline{\phi(1-\bar{s})}.$$

For enkelhets skyld behandler fallet χ like, $a=0$. ulike kan behandles på helt analog måte. La χ_j; $j=1,\dots,m$; distinkte karakterer og form.

$$F(s) = \sum_{j=1}^{m} c_j\, \varepsilon_j\, q_j^{\frac{s}{2}} L(s,\chi_j) \text{, eller } \cdots (q_j^{s-\frac{1}{2}})$$

~~reell~~ $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) F(s)$ reell for $\sigma = \frac{1}{2}$.

Skissen bevis for at vi har

(A) $N_0(T,F) > \frac{c}{m} T \log T$ for $T > T_0(F)$

hvor c er en positiv absolut konstant.

(B) om $\omega(t) \to \infty$ når $t \to 0$ så har $F(\frac{1}{2}+it)$ et nullpunkt i intervallet $\left(t, t+\frac{\omega(t)}{\log t}\right)$ for nesten alle (almost all) t.

$s = \frac{1}{2} + it$; $t > 0$; $\vartheta(t) = \arg \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$.

$$X(t, \chi) = \varepsilon_\chi q^{\frac{it}{2}} e^{i\vartheta(t)} L(s, \chi)$$, reell

Skriv

$$(\zeta(s))^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{\alpha_n}{n^s} \; ; \; \alpha_1 = 1 ; (L(s,\chi))^{-\frac{1}{2}} = \sum_n \frac{\alpha_n \chi(n)}{n^s}$$

La for $T \leq t \leq 2T$; $\xi = T^{\frac{1}{10}}$; $T > 16 q^3$

$\beta_n = \alpha_n (1 - \frac{\log n}{\log \xi})$ for $1 \leq n \leq \xi$; og $\beta_n = 0$ for $n \geq \xi$.

Form $\eta(s, \chi) = \sum_{n < \xi} \frac{\beta_n \chi(n)}{n^s}$; ofte skriver $\eta(t,\chi)$ for $\eta(s,\chi)$

for $\frac{1}{\log T} < H \leq \frac{\log \log T}{\log T}$, betrakt tre uttrykk

a $$I_\chi(t, H) = \int_t^{t+H} X(u, \chi) |\eta(u, \chi)|^2 du$$

b $$M_\chi(t, H) = \int_t^{t+H} L(\tfrac{1}{2} + iu, \chi) \eta^2(u, \chi) du - H$$

c og $$J_\chi(t, H) = \int_t^{t+H} |X(u, \chi) \eta^2(u, \chi)| du.$$

Om $J_\chi(t, H) > |I_\chi(t, H)|$ så har

$X(t, \chi)$ et nullpunkt i det indre av intervallet $(t, t+H)$

Vi har

$$J_\chi(t, H) \geq H - |M_\chi(t, H)|$$

så om

$$|M_\chi(t,H)| + |I(t,H)| < H$$

er der et nullpunkt i $(t, t+H)$

Det er nu mulig å vise

$$(1) \quad \int_T^{2T} |I_\chi(t,H)|^2\,dt = O\left(T\frac{H}{\log T}\right)$$

$$(2) \quad \int_T^{2T} |M_\chi(t,H)|^2\,dt = O\left(T\frac{H}{\log T}\right)$$

og som vi trenger senere

$$(3) \quad \int_T^{2T} |X(t,\chi)\eta^2(t,\chi)|^2\,dt = O(T).$$

Ser f. ex at $|I_\chi(t,H)| \le \frac{H}{3}$ og $|M_\chi(t,H)| \le \frac{H}{3}$

i utenfor et sub set av $(T,2T)$ av mål

$O\left(\frac{T}{H\log T}\right)$

Ved å velge H som $\frac{\lambda}{\log T}$ med λ en

stor nok konstant får vi (A) for $N_0(T, L\chi)$

og ved å ta $\lambda = (w(t))^{\frac{1}{2}}$ får vi (B) for

$L\chi$.

For å modifiere idéen til å brukes også for den lineære komb. trenger noen resultater om verdifordelingen av

$$\log|L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)| \text{ eller } \log|X(t,\chi)|$$

Utgangspunktet er at man kan vise

For $T > 16q^3$; k pos heltall $T^{\frac{1}{2k}} \leq x \leq T^{\frac{1}{k}}$, har vi

$$\int_T^{2T} \left| \log|X(t,\chi)| - R\sum_{p\leq x} \chi(p)\, p^{-\frac{1}{2}-it} \right|^{2k} dt$$
$$= O\left(T k^{4k} e^{Ak}\right)$$

Constantene implied av O er igjen absolutte. Av dette kan vises at

$$\frac{\log |X(t,\chi)|}{\sqrt{\pi \log\log t}} \text{ har normal Gaussisk}$$

distribusjon. Mer presis La $\chi_{a,b}$ være den karakteristiske funksjon av intervallet (a,b) da har vi

$$\int_T^{2T} \chi_{a,b}\left(\frac{\log|X(t,\chi)|}{\sqrt{\pi \log\log T}}\right) dt = T\int_a^b e^{-\pi u^2}\,du$$
$$+ O\left(T\,\frac{(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}}\right)$$

For to distinkte karakterer χ og χ'

holder det samme for differensen

$$\log|X(t,\chi)| - \log|X(t,\chi')|$$

bare her må vi dividere med $\sqrt{2\pi \log\log t}$ for å få den normale gaussiske distribusjon.

Så om $0 < \delta < \frac{1}{2}$; subset av $(T, 2T)$ hvor

$$\left| \log|X(t,\chi)| - \log|X(t,\chi')| \right| \leq (\log\log T)^{\delta}$$

har et mål som er

$$O\left(T\,(\log\log T)^{-\frac{1}{2}+\delta}\right).$$

Derfor har vi at det nesten alltid er en av $X(t,\chi_i)$ som dominerer de andre fullstendig. Denne dominans er også varende over avkortningen som er lange i forhold til $\frac{1}{\log T}$.

Definer

$$\Delta_\chi(t,H) = \frac{1}{H}\int_t^{t+H} \log|X(u,\chi)|\,du$$

Vi kan vise at

$$\int_T^{2T}\int_0^H \left(\Delta_\chi(t,H) - \log|X(t+h,\chi)|\right)^{2k} dh\,dt$$

$$= O\left(T H e^{Ak}\left(k^k (\log\log\log T)^k + k^{4k}\right)\right)$$

Om vi kaller $W(t, \chi)$ målet av det set av h for hvilket

$$|\Delta_\chi(t, H) - \log|X(t+h, \chi)|| > (\log\log T)^{\frac{\delta}{2}}$$

ser vi ved å velge k så stor at

$$k\delta > 2N+1$$

at

$$W(t, \chi) \leq \frac{H}{(\log\log T)^N}$$

undtatt for et subset av $(T, 2T)$ av mål $O\left(\frac{T}{(\log\log T)^N}\right)$.

Det gjelder også at for $\chi \neq \chi'$ har vi

$$|\Delta_\chi(t, H) - \Delta_{\chi'}(t, H)| > (\log\log T)^\delta$$

bortsett fra et subset av mål

$$O\left(T(\log\log T)^{-\frac{1}{2}+\delta}\right)$$

for $\chi_1, \ldots \chi_j, \ldots \chi_n$ vi nu kan definere $S_{j,k}$ som settet hvor

$$|\Delta_{\chi_j}(t, H) - \Delta_{\chi_k}(t, H)| \leq (\log\log T)^\delta$$

vi har $m(S_{j,k}) = O\left(T(\log\log T)^{-\frac{1}{2}+\delta}\right)$

If we exclude all of these subsets from $(T, 2T)$ the rest consists of a sets S_j such that in S_j for $k \neq j$ $\Delta_{\chi_j}(t, H) > \Delta_{\chi_k}(t, H) + (\log\log T)^{\delta}$

We now exclude from each S_j all t for which for any k

$$W(t, \chi_k) > \frac{H}{(\log\log T)^3}$$

Call new sets S_j'.

From

$$\int_T^{2T} |X(t, \chi)\, \eta^2(t, \chi)|^2\, dt = O(T)$$

we see that

$$\int_t^{t+H} |X(u, \chi_j)\, \eta^2(u, \chi_j)|^2\, du < H \log\log T$$

except for a subset of measure $O\left(\frac{T}{\log\log T}\right)$ in $(T, 2T)$; we exclude also these t from the S_j' and get S_j''.

Now look at

$I''_{\chi_j}(t,H)$, $M''_{\chi_j}(t,H)$ and $J''_{\chi_1}(t,H)$ which are for t in S''_j the integrals I_{χ_j}, M_{χ_j}, J_{χ_j} but with the bad subset removed. They differ from I_{χ_j}, M_{χ_j} and J_{χ_j} at most by using Schwartz inequality.

$$O\left(\sqrt{\frac{H}{(\log\log T)^3}} \cdot \sqrt{H \log\log T}\right) = O\left(\frac{H}{\log\log T}\right).$$

We see now that we get a sign change of $\chi(u,\chi_j)$ in $(t,t+H)$ for t in S''_j if

$$J''_{\chi_j}(t,H) > |I''_{\chi_j}(t,H)|$$

which is equivalent to

$$H \geq |I_{\chi_j}(t,H)| + |M_{\chi_j}(t,H)| + O\left(\frac{H}{\log\log T}\right)$$

We have
$$\sum_{j=1}^{m} m(S''_j) > T - O(T(\log\log T)^{-\frac{1}{2}+\delta})$$

Can show $m(S_j'') \geq \frac{T}{n} - O(T(\log\log T)^{-\frac{1}{2}+\delta})$

We see we get sign changes in S_j'' if $H = \frac{\lambda n}{\log T}$ with λ a large enough const. and the sign change happens where $\Phi_i(t, \chi_j)$ dominates completely. So there is a ~~signchange of~~.
$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})F(s)$ and thus a zero on $\frac{1}{2}+it$. This gives more than $\frac{c}{n^2}T\log T$ zeros in S_j'' summing over S_j we get more than $\frac{c}{n}T\log T$ for $T > T_0(F)$. Actually do not need that $m(S_j'') \sim \frac{T}{n}$ actually equidistribution is the least favorable case.

Case $\lambda = 1$;

The analog $\mathcal{L}_i(s)$ is ... n.

$(\mathcal{L}_i(s))^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ form $\Phi(s, X) =$

$\sum_{n \leq \xi} \frac{\alpha_n}{n^s}\left(1 - \frac{\log n}{\log \xi}\right)$;

can form analogs of $I_i(t,H)$

and $M_i(t,H)$; $J_i(t,H)$

Hafners work leads to:

$$\int_T^{2T} |I_i(t,H)|^2\,dt = O\left(\frac{TH}{\log \xi}\right) = O\left(\frac{TH}{\log T}\right)$$

but the corresponding integrals for M were never considered in the past. (My fault!).

However by looking at

$$M(t,H) = \int_t^{t+H} \mathcal{L}(\tfrac{1}{2}+iu)\,\eta^2(\tfrac{1}{2}+iu)\,du - H.$$

and noticing that the dirichlet series for $\mathcal{L}(s)\eta^2(s)$ is identical with that of

$$\left(1 - \frac{1}{2\lg\xi}\frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}}(s)\right)^2 \text{ for } n \le \xi$$

subtracting this part $\sum_{n \le \xi}$ from $\mathcal{L}(\tfrac{1}{2}+iu)\eta^2(\tfrac{1}{2}+iu)$ and changing the part of integration going out to $\sigma = 2$ taking absolute values on what remains