OTOMORFIK FORMLARIN BAĞIMSIZ BIR TEORISI VAR MI?

ROBERT P. LANGLANDS

Saygılı Attila Bey, Saygılı Betül Hanım, saygılı Türk Matematik Derneğinin üyeleri: davetiniz için çok teşekkür ederim. Tanıdığım ve saygılarla andığım Tosun Terzioğluyu hatırlatan konuşmayı vermek şereftir.

Zannetiğiniz gibi ama belki nedenlerini bilmeden Türkiye'ye elli yıldan fazla gelip burada adeta on iki ay kaldım. İlk olarak eşim ve dört çok genç çocuklarla hariça gidip kalmak benim için onların için de yeni bir macera olmuş. Tabii ki Amerika'da benim için yabancı yer oldu. Bugün de bana gariptir. Fakat evimizden Amerika'ya yarım saat yürüyerek Amerika'ya yiyerek sınara eriştiniz ve dil aynı oldui Herhalde gerçek yabanci olan dil nasıl öğrenmeyi gerçek ecnebi olan memleketi nasıl takdir etmeyi anlamaya burada başladım fakat o kadar başarılı olmadım.

Tabii ki bu karardan sonra, serbest oldum ve serbest olarak serbest düşünebiliyordum. Yani bu karar özgür bir kişinin veya özgürünü teyit eden bir kişinin kararı oldu. Bu şekilde yani düşüncelerimin serbest olmasının sayesinde buraya geldiğimden evvel bile benim için değerli olan ve matematiğe ait kavramları keşfettim. Dolayısıyla bu memlekete bugüna kadar faydalı kalan fikirler ve kavramlar için minettarim. Tabii ki geldiğimden sonra farklı şekilde ziyaretim faydalı oldu.

Bugün eskiden keşfetiğim imkânlar hatirlamak istemem. Şimdi yaşlı matematikçinin bugünkü zorluklarına koyulalım. İlk olarak bir özet.

İkı teori

1. **Daha kolay olan geometrik teori.** Bunlar bir galoisca grubun ${}^{L}G$'ye gönderimleriyle parametrelenir. L-fonksiyonlar yoktur ve karşılıklılık da yoktur. Bu teori tam olmaktan çok uzaktır ama bana göre tam bir teori erişilebilirdir.

2. **Daha zor olan, belki de daha önemli olan aritmetik teori.** İlk olarak L-fonksiyonlar var. Üstelik sayı teorisi son derece önemli olan karşılıklılık var. Galoısca grubun yerine daha soyut bir Tannakı'ca kategorinin konulması gerek olacak fakat bu çok önemli olmayan usulun bir meselesidir. Mamafih ana zorluk karşılıklılıktır! Hiçbir şey anlamadığımız doğru değil. Benim için doğrudur. Genel olarak çok çok az anlamadığımiz doğrudur.

Aşağıdaki satırlarda, önceki ifadeleri açıklamaya çalışıyorum.

Tarihsel zemin. Başlıktaki soru ne anlama geliyor? Matematikte, farklı seviyelerde, bazen geniş kapsamda olan, tam olarak farklı teoriler vardır. Örnek olarak, Öklid (ölümü milâttan önce 285) geometrisi, çoğumuzun aklında, düzlemdeki düz çizgiler ve çemberlerin hakkındaki hipotez ve teoremlerin bir toplaması ve belki de üç boyutlu uzay ilave edilmiş, fakat daha sonra Appolonius (milâttan önce 262–190) tarafından geliştirilen konik kesitlerinin teorisini içermez.

Date: September 2018.

Belirli bir teorinin doğal sınırlarının oluşturulması zor olabilir. Örneğin, diferansiyel kalkülüs, türevler ve integrallerin çalışılmasıyla başlayabilir ve sona erebilir, ancak adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin teorisini de içerebilir.

Altmış yıl önce hayatımın bir matematikçi olduğum hayat olarak başladığı sırada grup temsilleri teorisi büyük ölçüde sonlu gruplarla ve daha genel olarak kompakt gruplar ile sınırlıydı. Sonlu gruplara aıt teori, bir kaç hafta içinde Frobenius tarafından Dedekind'ın bir sorusunun cevabı olarak[1] makalelerinde geliştirildi. Fakat bunla konu sona ermedi. Kuantum teorisinde önemli olan kompakt gruplara ait teorı ona çok yakında takip etti. Bu konuda Hermann Weyl'ın tarafından yazılmış makaleler[2] tercih ettiğim müracaattır. Kompakt olmayan gruplar arasinda biri çarpıcıdır ve zaman içinde anlaşıldığı gibi, tipik olan $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ grubuydu. Bu grup 1956 yılında V. Bargman'ın tarafından konu edildi. Ancak ilk deneme olmasına rağmen, şaşırtıcı bir şekilde keskin oldu. Yıllar boyunca tüm yarı-basit, dolayısıyla tüm indirgeyici gruplar Harish-Chandra'nın tarafından konu edildi ve bunlar çağdaş otomorfik formlar teorisinin temel bir yönünü oluşturdular.

Ancak bu teori birkaç farklı kaynağa ve kökene sahiptir. Yarı-basit grupların temsil teorisi, birkaç kısımdan sadece biridir. Diğerlerin birisi tarihsel olarak çok önemlidir. Daha önce var olmuşsa bile, Gauss'un *Disquisitiones*'iyle başlayan, böylece karesel karşılıklılık ilkesiyle, ve Hasse'nın makalesiyle[3] ya da Chevalley'nin makalesiyle[4] biten bir teoridir. Kuadratik, yani karesel, karşılıklılık kuralı anlamaya başladığımdan önce kendi matematik hayatimin oldukça ilerlediğini itiraf ediyorum. Yillarca zannediyordum ki tuhaf bir şey olmuş fakat ehemmiyetsiz. Benim için hâlâ o hava var, ama bir anlamda bugün açıklamaya çalıştığım genel teorinin özüdür. Yani, diğer maksatlar şimdilik göz ardı ederek sadece $x^2 = q$ denklemi değil bir veya birkaç değişkende tüm denklemleri uygulayan bir teori arıyoruz. Son iki yüzyılın matematiği yeterince karmaşıktır ki, bu amaçın peşine çok matematikçi takılır. Denklemlerin katsayılarının belirli alanlarda, rasyonel sayılar alanı, bir cebirsel saylar alanı, bir fonksiyonlar alanı. İlerledikçe imkanlar daha açık olacak. Şimdilik, konumuzun gençliğimdeki durumuna açıklık getirmek çalışıyoruz.

Abelya sınıfı alan teorisi, on dokuzuncu yüzyılın sonlarında ve yirminci yüzyılın başlarında, son aşamalarda geliştirilmiştir. Teiji Takagi tarafından alındı. On yıllar sonra Emil Artin düşünmüştü veya ümit etmişti ki Artin L-fonksiyonları ile bağlantılı olarak abel olmayan bir teori bulunabilir. Fakat yaşamın sonunda bu umudunu vazgeçti. Ne yazık ki umudunun nasıl gerçekleştirilebildiğini görecek kadar uzun yaşamadı. Biz onu henüz gerçekleştirebilmeyiz ama anlatacağım gibi umut sebebi var.

Yirminci yüzyılın ortasında, Hecke, Siegel ve Selberg otomorfik formlar teorisinin gelişmesinde üç önemli şahıs oldu. Etkisi güçlü hissedilmeye devam ediyor. Tam mükemmel olmayan bir şekilde özetlenebilir.

Hecke teorisi, klasik kaynakların ismiyle öne sürülen küresel fonksiyonların teorisinin bir cinsidir[5] ancak şimdi akla getirdiği kavramlar temsil-kuramsaldır. Ancak Hecke'nin araştırmalarının kaynağı, Mordell ve diğerlerinin yirminci yüzyılın başlarında Ramanujan'ın

[1] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, 1897.*

[2] *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I,II,III und Nachtrag 1925/26.*

[3] *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1926/27.*

[4] *La théorie du corps de classes, 1940.*

[5] Kisaca yeresel teori p-adik bir cisme ait teori fakat küresel teori az çok geleneksel bir şekilde anlatabilen bir teori. İkisi alakalıdır.

bir varsayımına yaptığı katkılar gibi görünüyor. Grupların modüler ya da otomorfik simetri gibi çeşitli simetrilerle olan ilişkisi o zamanlar bugün olduğu kadar açık değildir. Hecke'nin zamanında, otomorfik formlar teorisinin grup temsillerinin teorisiyle ilişkisi, bugün olduğu kadar belirgin değildi.

Hecke'yi yeterince takdir etmeyen Siegel'in rolü farklıydı. Siegel'in on dokuzuncu yüzyılın sayılar teorısine katkıları genişti, örneğin Eisenstein, Dırıchlet, Riemann'nın katkıları ve özellikle kuadratik formlara ile aritmetiğe bağlanan katkilları. Grup GL(2) dışındaki gruplar için bir otomorfik formlar teorisinin başlangıçının büyük ölçüde onun tarafından yaratıldığına inanıyorum, ancak abartmadan Siegel'in güçlü önyargıları teorinin sonraki gelişimini takdir etmesine engel oldu. Frobenius'la doktora yazmasına rağmen, Frobenius'un tarafından ortaya koymuş temsil teorisini hiç takdir etmedi.

Selberg'in katkısı çok belirgindi. Alman matematikçi Hecke'nin bir öğrencisi olan Hans Maaß, Hecke'nin klasik teorisinin ötesine geçerek GL(2) grupuna ait analitik olmayan otomorfik formlar için bir teori geliştirince bazı başarıları vardı ama bazı temel sorular da çözemedi. Selberg onları çözdü, ama bu onun en çarpıcı katkısı değildi. Onun çözümü, Hermann Weyl'in yazdığı[6] veya E. A. Coddington ile N. Levinson'ın yazdığı[7] bulunduğu gibi, Hermann Weyl ve diğerlerinin geliştirdiği bir teori olan yarım-çizgi üzerinde diferansiyel denklemlerin spektral teorisini sağladı. Bu noktada, eğer daha önce olmasaydı, modern fonksiyonal analiz, onun tarafından gözünü korkmayan o sayı teorisyenlerinin bir aracı haline geldi.

Belki de yarı çizgide olan adî diferansiyel denklemlerin spektral teorisine aşina olmamıştı, Hermann Weyl tarafından Hilbert uzaylarında sınırlanmış ve sınırsız olan Hermite operatörlerinin spektral teorisinin erken gelişiminde geliştirdiği bir teoriydi. Bu, elbette, matrisler teorisinin ve özdeğerlerinin bir uzantısı. Tabii ki sonsuz boyutlu teori nispeten geliştirilen bir teoridir. Elbette ki sonlu boyutlu teori her yerde bulunur ve son günlerde ortaokullarda tanıtılmaktadır. Sonsuz boyutlu mekânlarda teori elbette o kadar erişilebilir değildir. Okuyucunun dikkatını çekmek istediğim netice olarak, Maaß, Selberg ve diğerleri, sayı teorisine oldukça farklı ve analitik olan kavram teklif etti. Bu, henüz çok sayı teorisyen tarafından özümlenmemiş yordam.

Ama bu alanda Selberg'in şöhretini kazandıran icat onun izformulı. James Arthur ve diğerlerinin yaptığı derin katkılara rağmen, bu nispeten basit düşüncenin sonuçlarının pek incelemediğine inaniyorum. Frobenius karşılıklılığı[8] sonsuz boyutlu bir biçiminden fazla olmamasına rağmen, otomorf fonksiyon teorisine ait etkisi ve istidlallarının önemi abartılamaz.

Çağdaş otomorfik formlar teorisine genel bir giriş olarak ve bunun birçok çıkarımı olarak açıklanabilecek pek çok şey var. Ama ben her şeyden önce Harish-Chandra'nın tarafından tefferuatlı şekilde verilen ve kesin belirli olan sonsuz boyutlu temsil teorinin önemini vurgulayım. Bu teorisi mevcut olmazsa bugünkü otomorf fonksiyonların teorisi de mümkün olamaz. Sonsuz boyutlu teoriye tek katkıda bulunmuş olması değil. İndirgeyici Lie gruplarının temsilleri, yani GL(n) veya ortogonal gruplar gibi grupları konusu olarak, ince yapısını araştırmaktan çekinmeyen kesin bir teori yaratmıştır.

Otomorfik form teorisinin üç farklı cins vardır. Üst yarı düzlemde olan klasik teori ile en doğrudan ilişkilerin olduğu teorisiler bunların kesinlikle en önemlisidir. Klasik teorisinin kendisine gelince bir cisim, rasyonel sayıların cisimi ve bir grup yani GL(2) ile ilişkilidir,

[6] *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, 1910.*

[7] *Theory of ordinary differential equations, 1955.*

[8] *Über Relationen zwischen den Charaktern einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen,* 1898.

fakat on dokuz altmışlı yıllarda teorinin yeniden canlandırılmasından beri, herhangi bir sonlu boyutlu cebirsel sayı alanı rasyonel ve herhangi bir indirgeyici Lie grubu kabul edilir. Hem $\mathrm{GL}(n)$ hem de simplektik grup tanınan örneklerdir.

Bizi ilgilendiren diğer iki cins cisim var. İkisi için bir başlangıç cismi seçmek gereklidir. Bu cisim tekil olmayan kapalı bir eğri üzerinde rasyonel fonksiyonların cismidir. Bir durumda temel cisim sonlu bir cişimdır. Diğerinde ise karmaşık sayıların alanıdır. İlk durumda, ben V. Lafforgue'un makalesine[9] başvuruyorum. Ancak, ikincisini daha sonra tartışacağım çünkü son yıllarda bununla çok zaman geçirdim. Ancak ana teori, sayı alanlarındaki teoridir. Bu yüzden sayı teorisinin bir parçasıdır. Konuşma büyük ölçüde onla ilgilidir. Sayı teorisindeki önemli çözülmüş ve çözülmemiş problemlerin aralarındaki bulunan Fermat'ın son teoremi ve Riemann varsayımla ilgilidir.

Bu konuşmayı hazırladığı zaman ilk defa olarak geometrik teorisiyle aritmetik teorisinin arasındaki çok önemli olan fark var. Buna sonradan anlatacağım.

Riemann varsayım, belirli bir Dirichlet serisine ait bir ifadedir. Herkesin bildiği gibi, en azından her sayı teorisyen, bu seri veya bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s}, \tag{1}$$

Genel teoride kendini gösterdiği benzer seriler var ve benzer bir varsayımlar var fakat bunları tam olarak tanımlamak hem erken hem de gereksiz olacaktır. Bunun için Hecke teorisi, sadece Hecke tarafından verilen şekilde değil, tüm indirgeyici gruplar için geçerli olan daha genel güncel form gereklidir. Buna sonradan kısaca döneceğiz. Bence hepsinin aynı zamanda veya en azından aynı yöntemlerle kanıtlanması muhtemeldir. Bu yüzden genel bir otomorfik formlar teorisinin gelişimini teşvik etmeye eğilimliyim. Bu teorinin yapısının çok karmaşık olacağı görülmektedir. Beklenen genel şeklini açıklayacağım. Özel sonuçlar, sayılar teorisindeki önemli ilerlemelerin anahtarı olmuştur.

Riemann varsayım, karesel karşılıklılık yasası, Fermat'ın son teoremi veya daha teknik düzeyde indirgeyici grupların temsil teorisinin cazibesi, Pisagor teoremi veya çemberin dört, beş, altı hatta on yedi eşit olan yaylara bölünmesinin cazibesi kadar çekici olamaz. Onlar fazla *arcane*. Bu yeterli çevirisini bulamadığım bir kelimedir. Sözlükte *sırrı, gizli, saklı, herkesçe bilinmesi caiz olmayan kelimleri* buldum ama bizim için çok zorla öğrendiği şeyler olabilir. Dolayısıyla, otomorfik formlar teorisi, öklid geometrisinin önemi kadar aynı kültürel öneme sahip olamaz ama matematiksel öneme gelince ondan daha önemli olabilir. Bu açıklamanın öne sürdüğü gibi, iki teori çakışmaktadır. Birinin sorunları diğerinin sorunlariyle birleşir. Ayni zamanda onların nitelikleri farklıdır, ayni seviyede değil. Farklı zamanlarda farklı tatlara hitap ederler. Yine de, benim profesyonel yaşamımı yönlendiren zanıma göre matematikte daha yüksek yani sık sık daha soyut amaçlar uygundur ve automorfik formlar teorisi bu amaçların bir ifadesidir. Tabii ki bu teori ancak soyut değil. Son derece derin, istisnai derecede geniş bağlantılarıyla, birçok merkezi matematiksel kavram kapsayan teoridir. Tabii ki matematikçinin ağzında *derin* sözü şüphelidir.

Genel teorinin ana veya daha doğru birinci teması, Riemann zeta fonksiyonın kendisi dahil olmak üzere çok geniş bir fonksiyon sınıfının tanıtılması ve bu fonksiyonların, hem beklenen özelliklerin hem de halihazırda doğrulanmış olan Riemann zeta fonksiyonunun özelliklerine sahip olduğunun kanıtı. Dolayısıyla, büyük bir görevden bahsediyoruz, tek bir matematikçi nesli tarafından tamamlanmanın olasılığı düşüktür. Riemann zeta fonksiyonunun

[9] *Chtoucas et programme de Langlands pour les corps de fonctions.*

belirli özelliklerinin, varsaylı olsa tanıtlanmış olsa, ne ölçüde genel geçerli olduğunu veya ne ölçüde genel geçerlilik içinde olabileceğini bilmiyorum. İlk amaç analitik uzanım, sıfırların bir tanımlama değil.

Bu genel fonksiyon sınıfı, bir kerede aynı anda tanımlanmamıştır. Her bir indirgeyici kompleks grupa ve Q alanın her bir sonlu cebirsel genişlenmesine ilişkin bir sınıf vardır. Daha genel olarak, ancak her sonlu genişleme cisim F'ye ve verilen grubun her şekli alabiliriz fakat öyle demek biraz yanıltıcı olabilir. Buna rağmen bana doğru geliyor.

İlk 1837 yılında Dirichlet tarafından tanıtıldı ve şimdi $\mathbf{Q}$ alan ve GL(1) grubu ile ilişkili Dirichlet L-fonksiyonların aşinadır. Meşhur Riemann zeta fonksiyon bunların birisidir. Bu fonksiyonu 1857'de Riemann karmaşık bir fonksiyon olarak gözden geçirdi. Fakat daha önce o özel değerleri için Euler ve diğerleri tarafından incelenmiştir.

Otomorf L-fonksiyonlarının geniş bir sınıfının tanıtımı iki hususi temel tarafından esinlenmişti yani ilk Hecke teorisi ve Satake'nin yerel bir cisimin üzerindeki genel bir indirgeyici gruba bağlı Hecke cebirine ait çözümlemesi. Baştaki Hecke teorisinin önemi ve tekliği abartılamaz. Bununla beraber, genel indirgeyici grubu tartışmak için bu konuşma bir fırsat değildir. Ortogonal grupları, simplektik grupları ve Cartan anlamında istisnal grupları bir kenara bırakırsak, sadece GL(n) düşünürüz. Genel teori, belirli teoriye benzer ve gerçekten daha zor olan problemler sunmaz. Gözlemlenecek tek şey, otomorf formları teorisine özgü bir kavram olan ${}^LG$, GL(n) için daha kolay, yani ${}^LG = \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Bu L-grubu da karmaşık bir indirgeyici grubudur, ancak G GL(n)'e eşit ise G ile ${}^LG$ arasindaki ilişkiler daha basit, anlaşılması daha kolaydır. Genel olarak, G grubu bir sayı alanı veya yerel alan üzerinden tanımlanır. Ancak ${}^LG$, $\mathbf{C}$ üzerinden tanımlandı ve dediğim gibi tanımı tam anlatmak için yarı basit Lie gruplarının teorisini bilmek gerektir.

Başlangıçta belirttiğimiz gibi, incelenecek üç teori var. Halen cebirsel sayı alanlarının üzerinde ilk sıradayız. İlk önemli problem, belirli bir otomorfik forma yani Hecke operatörlerinin bir özfonksiyonuna ile L-grubunun belirli bir sonlu boyutlu gösterimiye bağlı Dirichlet serisinin analitik uzanımı. Önerilen çözüm iki aşamada ilerliyor. Birincisi zor ama en kolayı. Godement-Jacquet'in bir katkısıdır, *Zeta Functions of Simple Algebras.*

Yani, ilgili analitik özellikler ilk başta ${}^LG = \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ L-grubu kendisinin temsili olarak sadece $G = \mathrm{GL}(n)$ grubu için bahsedeceğiz. Burada ayrıntılara girmemek en iyisidir, ama otomorfik formların teorisi, her indirgeyici grup G için, mesela $n \times n$ matrislerin grubu, her ne kadar değişkenlere ait ortogonal grup veya simplektik grup ve sınırlı sayıda istisnai gruplar. Bu grupların her biri için karmaşık sayılarin cisminin üzerinde bir indirgeyici grup olan ikinci bir grup ${}^LG$ var. Bu grubun karmaşık bir Lie grubu olduğunu vurgularim. Genel tarifinin karmaşık, yani onu anlamak için çok bilgi gerektir, olduğundan onu vermeyim.

İtiraf. Matematiğin tek bir konu, tek bir toplam olduğuna kadar otomorfik formlarının teorisinin en önemli unsurları sayıların teorisiye vasitasız ait unsurlardır. Mamafih bugünkü matematikte bunlar sık sık temsil teorisiye aittir. Gayretimin hepsi öyle oldu. Bu yanda da iki, belki üç bile, imkân dahilinde, yani sayılar cisimlere ait ve karmaşık cebirsel eğrilere ait teoriler. Yazdığım gibi sonlu cisimlere ait teorisi tartışılmıyacak. Çoktan beri, yani elli yıldan beri, uğraştığım birinci teori en önemlisidir. İlk olarak ona ait zorluklar konuşacağım. Bu araştırmaya ait iki makalem var.

(i) *Beyond Endoscopy* ile *A Prologue to "Functoriality and Reciprocity", Part I.*

`https://publications.ias.edu/rpl/section/25`

Burada onların kısa bir ilavesi olarak bir imkan teklif isterim. Başkaların tarafından düşünülmüş veya düşünülür, mesela, Ali Altuğ tarafından. Herhalde ben bugün sadece genel bir ilke önermek istiyorum. Ben kendim belirli bir şey yapmadım.

İkinci teorisine ait teoriyle geçen altı yıldan beri uğraşıyorum. Zannediyorum ki önemli bir ilke keşfetim ama gerçekten az yaptım, yani bu ilke geliştiremedim. Tabii ki konuşurken ben çok anlatamaz fakat bu metin aşağıdaki adreste bulunabilir

(ii) Об аналитическом виде геометрической теории автоморфных форм.

`https://publications.ias.edu/rpl/paper/2678`

Bir taraftan bu makalede geometrik teoride önemli olan otomorfik galoisca grubunun tanımlandır. Ipucu Yang-Mills teorisinde, yani diferensiyel geometrik teoride, bulunur. Ona ait araştırma ikna edici ama pek de eksiksiz değil.

İki teori, aritmetik ve geometrik, farklıdır, fakat aynı ilkeler tarafından yönlendirilir ve benzer sonuçlara ulaşırlar. Bu sebeple onların, sonlu alanlar üzerinde teori ile, bir genel teori oluşturdukları düşünülebilir. ■

Bu konuşmayı hazırlarken ilk defa anladağım ama önemli olan iki teorisinin arasındaki fark. Makale (ii) yazarken galoisca grubu ortaya koydum. Bence geometrik teori için önemlidir. Düşünüyordum ki aritmetik teoride de öyle bir grup olurdu. Anlaşılan öyle değil. ■

Dişardan gözün gezdirdiği ilk defa teori nasıl gözüküyor? Sonsuz boyutlu Hilbert uzayi var. Sayılamaz farklı Hermite operatörler var. Ortak özvektorleri ile farklı özdeğerleri de var. Ama bunu ispatlamak kolay değil. Herhalde öyle bakılır! Bunlarla nasıl kullanabiliriz? Sonrası nedir, ne olabilir? Her şey önce bu özdeğerlerle Dirichlet serileriyle tarif edebiliriz. Onlarla ne yapabiliriz? Tabii ki onları analitik uzatmaya teşebbüs edebiliriz. Başarılı isek bile faydası nedir? Bunlara benzer şeyler var mi sorabiliriz. Öyle çıkar, yani Hasse-Weil L-funktionlar var. Bu Dirichlet serilerin iki cinsi ayni olabilir mi? Öyle ise ve biz bunu ispatlayabilirsek ünlü olup emekliye ayrılabiliriz! Maalesef o zamana kadar, yakında bile ise, tanıdığımız dünya yok olacak. Buna rağmen öyle şeylerle çok zaman verip yıllardan beri uğraştım. Tek başıma olmadım. Herhalde bugün benim düşündüğümü başkaların düşündüğünü de biraz anlatmak isterim. Tabii ki bilimim çok sınırlıdır. ■

Ana konuların kısa bir açıklaması. İlk itiraf, bugün bizim konumuzun sayılar teorisiyle değil, oradan ortaya çıkan problemlerin çözümü için geleneksel yöntemlerin genişlemesi ve silahlandırılması gerektir. Bu genel yöntemler genellikle yalnız Riemann zeta fonksiyonu ile ilgili değil, aynı zamanda Hasse-Weil zeta fonksiyonlarıyle ilgili olan zeta fonksiyonlarının kullanılmasını da gerektir. Genel olarak, bunlar özellikle otomorf L-fonksiyonlarına, yani otomorf formlara, ait Euler çarpımlarına, eşit olur. Ama bu eşitliği ispatlamak gerektir. Hâlâ teoremlerden daha fazla varsayımlar varsa bile yavaş yavaş ilerliyoruz.

Kendimi tekrarlama tehlikelede bile, aritmetik teoride ispatlayacak iki iddia vardır diyebilirim. Birincisi, Hasse-Weil zeta fonksiyonunun hem pay hem de paydaların katsayı otomorf L-fonksiyonlarına eşittir. İkincisi, otomorfik L-fonksiyonlarının tüm karmaşık düzlemde analitik uzanabildiğini göstermektir.

İkincisine ait tanımlayacağım yöntemlerde tek bir merkezi kavram, yani fonktorialitet, ile ilgilidir ve benim ilk görevim, onun anlamı hakkında bir fikir sunmaktır. Bence, onun kurulması için tek bir önerilen yöntemler var. Maalesef o çok zor olan ünlü Selberg'in iz formüle aittir. Buna rağmen o Arthur'un tarafından çok geliştirilmiştir.

(iii) *The endoscopic classification of representations*

Mamafih şu anda gerek olduğuna kadar değil. Herhalde bu geliştirilen fakat sadece başlangıçlarında olan teoride fonktorialitetin kavramı merkez olacak {*ama otomorfik galoisca grubunun da önemli bir kavramı olacaktır.*}[10] Birinci zorluğa gelince ben hiç bilmiyorum. Herhalde o kadar az ki bu konuşmada hiç demek istemem. Araştırma var ama ben buna aşina değilim. Nihayetinde ne kadar uygun olacağını söyleyemem. Zannediyorum ki çok önemlidir ama her şey anlamak o kadar zor ki!

Geometrik teoride hem fonktorialitetin kavramı[11] hem de otomorf formun kavramı olacak. Zor olsun bile bu teoride bu kavramlar daha erişilebilir. Bu (ii)'de açıklıyor. Bu teorinin, yani geometrik teorinin, kökenleri ünlü Dedekind-Weber makalesinde yer alır.[12] Kolay değilse bile geometrik teori, aritmetik teoriden daha erişilebilirdir ve onu incelemek çok öğreticidir. Son altı yılını çok özel ama öğretici olan örneği geometrik teorisiyle geçirdiğimden dolayı, bunu da tanıtmak istiyorum. Bence bu alti yil boşuna sarfetmedim. Yani yalnız otomorf galoisca grubun değeri ile önlemini (veya değersizliğini) anladım fakat ayni zamanda (geometrik teorisindeki) imkânını. Bir tecrübe olarak makale (ii) Rusça yazdım. Anlaşılan bazılar için bu bir mânidir. Bence başarısızlıklarının gerçek sebepi galoisca grubun (geometrik teorisindeki) öneminin gözden kaçması. *Aritmetik teorisinde bu grubun varlığını henüz ispatlamamış. Bence bu önemli bir zorluk.* Bu da artık inamıyorum. Bunanla beraber geometrik teoride varlığiye ve önemiye henüz inanıyorum. ■

Aritmetik teori. Hecke teorisinin ana unsurları: (1) $\mathbf{B}_G = G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ küme; (2) bu kümede tarif edilen fonksiyonların teşkil ettiği bir Hilbert uzayı; (3) değişmeli Hermite operatörün ailesi yani Hecke operatörler. Tabii ki biz bu matematik kavramlar daha basit soyut olmayan bir şekilde tarif edebiliriz. Buna rağmen grup $G = \mathrm{GL}(1)$ için bile ilk küme yani $F^\times\backslash I_F^\times$ her ayrıntılarıyla tarif etmek zordur. İdealların sınıflarına bağlanmış. Bu nedenle her şeyden önce Gauss'un, kuadratik karşılıklılık kuralını ispatlamak için başlattığı, Kummer'in geliştirdiği siklotomik teoriye ait olan, ve sonunda en mühim katkı çok zor olan Takagi'nin teorisidir.

Grup GL(2) için herhalde baştaki teorisi için üst yarı düzleme $Z = \{\, z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0 \,\}$ da aittir, daha doğrusu düzlem modülo bağıntılar

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z},\ ad - bc = 1, \tag{2}$$

ve benzer uzaylar. Genel tanımlama veya tarif benzerdir fakat şu anda gerek değil. Cisim F ya rasyonel sayıların cismi ya da onun sonlu genişlemelerinin birisi olsun. Çarpıcı olan ise GL(1) için vurgu cebirsel olarak gözüküyor fakat GL(2) için geometrik gibi görünüyor. Bu tezat daha yakından incelenerek o ortadan kaybolur.

Bu konuşmada otomorf formların teorisi, ideal teorisi ve Lie grublarıyla başladık fakat şimdi fonksiyonel analizle devam ediyoruz yani üçüncü unsur olan Hecke operatörlerin spektral ayrışımı. Bu operatörlerin ailesi çok buyük! Dolayısıyla özdeğerlerin tarifi çapraşık. Bununla

[10] Anlatacağım gibi bu son iddiaya artık inanmiyorum.

[11] Bence geometrik teoride bu kavramın yerinde galoisca grup var olacak! Yazdığım gibi, ben sadece bugünkü dersin hazırlanmasının sırasında funktorialitet ile geometrik teoride ortaya çıkan galoisca grubun farklı özelliklerini anladım.

[12] R. Dedekind ile H, Weber, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen,* 1880.

beraber otomorfik fonksiyonlara ait otomorfik L-fonksiyonlarin tanimlaması için bu özdeğerler gerektir. Ama otomorfik L-fonksiyonlar neden ve niye gerektir? Ya da ζ-fonksiyon kendisi niye gerektir. Ben ise en basit şekilde bile bu sorunun cevabı veremem. Yani asal sayıların dağılımı aşina zeta fonksiyon nasıl kullanılır? Geçmişte ve bugün benim için otomorf formların teorisinin karesel karşılıklılık ve sınıf-cisim teorisinin bir gelişmesidir. Ona ait çok problem benim için ilgi değil. Bu, kendi sınırlamalarımın bir itirafıdır. Teorinin doğal sınırlarının bir tarifi değil. Bizler bugün tarihsel kökleri derin, olanakları çeşit çeşit olan ve çözülmemiş zorlukları son derece zor olan bir alan çok kısa bir zamanda tanımlamaya çalışıyoruz. Kolay değil.

Uzun yıllardan sonra, öğrenerek, anlayıp anlamadiğımız bilgiden ne kadar, az belirli ve hatta şüpheli olsa olsun, belgi kalar. O kadar az ki beni rahatsız ediyor!

İtiraf edildikten sonra, kendi bilgimin sınırlamaları daha açık olarak, Hecke özfonksiyonlarına ve özdeğerlerine dönüyoruz. Bunlar çok geniş bir operatörlerin ailesi için birlikte özfonksiyonlardır ve bu nedenle özdeğerlerinin tanımlanması zordur. Durum oldukça basit olan $G = \mathrm{GL}(2)$ grubu üzerinde dikkatımızı toplamak en iyisidir. Hayatımda sahip olduğum olanaklara rağmen, çok nadiren bu grubun ötesine geçtim. Şu ana kadar benim için boyutu daha yüksek olan gruplar fazla zordur. Daha doğrusu iki boyutlu zorluklar zaten yeterli zordur. Bu özdeğerler ${}^{L}G$'deki eşlenik sınıf olur ve sınıflandıran uzay $\mathbf{B}_G$ üzerinde tarif edilen fonksiyonlarla tanımlanmıştır. Makale (ii)'de bunun gibi bir şeye *öz eşlenme kesis* isimi verdim. Bunun anlaşıldığı zaman bir soru ortaya çıkar, yani *fonktorialitet.* Bu, genel otomorfik formlar teorisindeki ilk temel çözülmemiş sorulardan biridir. Yanıtın olumlu olduğuna dair çok sayıda kanıt var ama bir kanıt yakında beklenmeyecek.

Belki de herkesin bu kavramı benimsemeye bana kadar bağlı olmadığını itiraf etmeliyim. Benim için ve bence teori de için o çok önemlidir. Yani bana göre sonuncu teoride iki ana temel olacak: fonktorialitet ve karşılıklılık. Geometrik teorıde karşılıklılık yok. Belki ki başkalardan çok ya da başkaların en çoğu inandırılmamiş.

Soru şu şekildedir. Her şeyden önce, herhangi otomorf formlara ait genel derin aritmetik hususiyeti açıklamak istersek, anlaşılmasının gerek olan görüngüler meydana koymalıyız. Onları mümkün kadar kısaca açıklarım. Önemli çapta Harish-Chandra tarafından ortaya konulan özelliklerdir. Yani, sanırım gerçel gruplarla ilgili araştırmada tanıdığı özellikler. Yerel ve küresel cisimler, ikisine ait olan indirgeyici cebirsel gruplar $G(F_v)$ veya $G(F)$, en az tanıdık olan yerel grupların sonsuz çarpımları, yani adel gruplar, $G(\mathbf{A}_F)$ ve otomorf formlar için en önemli olan bölüm $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$, genellikle üst yarı düzlemin bir bölümü olarak rastlanmış. Otomorf form bu kümede bir fonksiyondir. Hangisi olabilir ve hangisi bizim için en önemli? Açık ki biz bugün bu sorulara genel bir şekilde cevap veremez. Buna rağmen anlatmasinin gerek olduğu çok şeyler var.

Birincisi ilk olarak *Automorphic forms on* GL(2), §12, 14, yazarken anlamaya başladım, yani verilmiş bir gruba ait teori kuasi-yarılmış şekline ait teorinin bir parçasıdır. Mesela kuaterniyon gruba ait teori GL(2) grubuna ait teorinin bir parçasıdır. Bu genel teoride ortaya çıkan birçok ilkeden sadece biridir. Çok bu konuşmada anlatılan ilke gibi bu ilke genel bir şekilde henüz gelişmemiş. Mamafih ilerdeki açıklamalarda zımnen anlaşılan. Üstelik ilkenin hem yerel hem de küresel şekli var. Konuştuğumuz cisimde tahminlerle başlayarak teoremlere erişeceğimiz hedefemizdir. Tabii ki bu hedefe tek başına hiçbir kimse ulaşamaz. Harish-Chandra'nın makalelerinin bir özelliği olarak çoğu kez görünür ancak bunların çoğu zaman göz ardı edildiğini fark ettim.

Tanımlamaya çalıştığım teori hakkında birkaç genel açıklama yapmak için kendi sözümü burada kesiyorum. Açıklama genellikle soyutlamaya geçiyor. Bu, kendimden gelen heves olabilir ama ayni zamanda gerek olabilir. Teorinin kendisi, Fermat'ın son teoremi veya zeta fonksiyonlarının özellikleri gibi somut sonuçlar verir, ancak sadece genel teorinin yapısal sonuçlarının bir sonucu olarak, yani ikincil sonuç. Gerekli içgörüler, sadece genel olarak değil, genel yapısal hususlarla ortaya çıkar. Bu, verilen dikkat tarafından genellikle gizlenen bir genel ilkedir. Hemen şimdi gördüğümüz gibi belirli sebepler yani sık sık tarihsel sebeplerdir. Öte yandan, genel ilkeler bazen çok zorlayıcı değildir.

Anlatığım gibi şu anda bizim için en önemli sorular ilk olarak fonktorialitet ve ikinci olarak karşılıklılıktır. Bunlar için kuasi-yarılmış gruplar, mesela $\mathrm{GL}(n)$ ile simplektik gruplar veya

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 1 \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ait ortogonal gruplar yeter. Gerçekten $\mathrm{GL}(n)$ yeter şu anda. Biz burada doğrusal grupların teorisini anlatmak istemeyiz. Zamanımız yok. Genel indirgeyeci gruplar hemen anlamak gerek değil. Ama $\mathrm{GL}(2)$ kendi kendine yetmez. İlk olarak, yani Hecke'nin araştırdığı zamanda yalnız bu grup için teori yeterli zenginti yeterli zor olmuş. Belki bugün de, yani bu konuşmada, öyledir. $\mathrm{GL}(2)$ grubuna ait çok önemli olan çözülmemiş soru var!

Zannediyorum ki genel olarak bazı sayılar teorisine, özellikle Diophant denklemlere, ait sorunlara cevap vermek için cebirsel çokluklara ait Hasse-Weil L-fonksiyonlarının incelenmesi gerektir. Umut edilir ki ertesi iki merhaleden geçerek yapılabilir. Birincisi olarak bu fonksiyonların hepsi otomorf L-fonksiyonlar ile terslerinin bir çarpım olduğunu ispat edilmek. İkincisi ise her otomorf L-fonksiyon Godement ile Jacquet'nin işlendiği L-fonksiyonların birisine eşit olmasını ispat edilmek. Şu ana kadar çok az yapılmış fakat az ise bile faydalı oldu. İkinci merhaleye fonktorialitet veya fonktorialitetin bir sonucu diyebiliriz. Birincisiye karşılıklılık. Şu anda onun için Andrew Wıles'in veya Richard Taylor'un ve diğer birçok teorisyenlerin yazılarına başvurulmalıdır. Maalesef ben kendim o kadar yıllardan sonra bile çok az anlıyorum.

Biz geometrik teoriyi ile olanaklarını henüz tarif etmedik. Beklediğim iki teoriler, tarif ettiğim aritmetik teorisi ile tarif edeceğim geometrik teorisi, beraber 'bağımsiz teori'nin adını veririm. Yani matematiğe gelince başka konulara ima etmeden tek başına önemlidir. Netliğin uğruna biraz abartıyorum

İlk olarak biz aritmetik teorinin birinci merhalelerini anlatacağım. Genel olarak bir cebirsel sayılar cisim F ve bir bu cisimin üzerinde belirlenmiş indirgeyici grup G de verilmişler. Genel Hecke L-fonksiyon Hecke özfonksiyonlar ile grubun ${}^LG$ sonlu boyutlu temsiliyle belirtilir. Bu temsil ρ olsun. Hecke'nin başladığı zaman sonlu boyutlu bir uzay ve (her nokta için) tek bir operatör meselesiydi. Bugün sonsuz boyutlu bir uzay ve birkaç operatör olabilir. Yani fonksiyonsel analizle karıştırmış sayılar teorisidir. Tabii ki Hecke'nin yazdığı ve genel teorinin olmadığı zaman ${}^LG$ gerek değilmiş, yani Hecke için ${}^LG = \mathrm{GL}(2)$. İlave ederek Hecke özdeğerin çok karmaşık bir şey olduğunu diyebilirim çünkü Hecke operatörlerin toplamısı pek büyük. Bu sebepten fonksiyonsel analiz gerektir. Sonsuz boyutlu uzaylarla uğraşıyoruz

Bugün, en az iki asırlık bir teoriyle uğraştığımız için çok şey biliyoruz, ama çok fazla da bilmiyoruz. Yani ilişkili L-fonksiyonlarının analitik uzanım hakkında fazla bir şey bile bilmiyoruz. Sadece çok özel bir grublara, yani $\mathrm{GL}(n)$ bağlı olanlar ve çok özel bir temsili konu edilmiş, yani grubu tarif eden temsil. Bu Godement-Jacquet'in teoremi. Kullanılmışsa genel L-fonksiyonların, analitik uzanımı fonktorialitetin bir sonuçu olurdu. Böylece ihtiyaç duyulan şey, fonktorialitetin bir kanıtıdır. Anlattığımız gibi bu genel teorinin iki ana hedefin arasında birisidir. Aslında bir başlangıç olarak herhangi $n > 2$ için, mesela $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$, $\mathrm{GL}(n)$ grupte olan $\mathrm{GL}(2)$ grubun indirgenmez temsili için bunu ispat edilmiş ise çok memnun olurum. Bu sadece Arthur'un katkılarını anlayanlar çözebilecek, ancak Arthur'un çözmediği bir sorundur.

Bir yöntem kendisi gösterir ve bu iz formülüdür. Birinci müracaat (i)'de verdiğim ama bugün yalnız zorlukla okuyabildiğim makale'de mümkün olan yolu tarif ettim. İkinci müracaat da faydali fakat başka bakımdan. Bununla beraber, geometrik ve otomorfik teori arasında temel bir fark vardır! Geometrik teoriye uygun olan teori Yang-Mılls teorisidir yani değişim kalkülüs (calculus of variations) ama otomorfik teoriye uygun olan teori iz formülüdür. Anlatma çok zordur çünkü çok yıldan beri düşünüp taşınmama rağmen çok az hallettim. Çesitli yöntemler özellikle iz formülü birleştirince Hasse'nin *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper* kitabınde gibi sınıf cisminin teorisinden tanınmış somut hesaplar uygulalayarak fonktorialiteti ispatlayacağımı umut ettim. Fakat öyle değildi yani bu ana kadar öyle değil. Yöntem belki doğru fakat hem zaman hem zekâm yetmemiş.

Sınıf cisminin teorisinin sonraki gelişmelerinin aksine, Hasse'nin kitapındaki hesaplamalar çok somut bir biçim alır. İz formülünün uygulamalarında zaten görülmektedir. Gelecekte bu tür hesaplamalar kullanılıp fonktorialitet ispatlanmasini görmeyi umuyorum. Dedekind'in makalesinde '*Konstruktion von Quaternionenkörpern*' olası bir başlangıç noktası olarak öneririm fakat bu anlamda herhangi bir gelişme takdir edilecektir. Henüz okumadığım makale *The number of D_4-fields ordered by conductor.* bu bakımdan belki ilgili olabilir. Dört yazarı var: S. Ali Altuğ, Arul Shankar, Ila Varma, ve Kevin H. Wilson.

Herhalde fonktorialitet ispatlanırsa arifmetik teorisinde tek bir mesele kalır, yani karşılıklılık. Bu nedir? İlk keşfedilmiş ve en iyi tanınmış karesel karşılıklılık oldu ama genel olarak bu karşılıklılık Hasse-Weil zeta fonksiyonlara aittir, yani doğru ise her Hasse-Weil zeta fonksiyonun iki otomorf L-fonktsionun bir bölümüdür. Bu ifadelerde boyutlara basit örtülü değişimler vardır, yani değişkenin ötelenmesi. Bundan itibaren özellikleri çıkarılabilir. Şu anda biz yerel zeta fonksiyonlardan ziyade onların çarpları olan küresel fonksiyonlar dikkate alırız. Üstelik bu fonksiyonlarla böyle bir ifade verilmiş

$$\zeta(\cdot) = \frac{\zeta_0(\cdot)\zeta_2(\cdot)\cdots\zeta_{2n}(\cdot)}{\zeta_1(\cdot)\cdots\zeta_{2n-1}(\cdot)}. \tag{3}$$

İlgili cebirsel çokluğun boyutu n dir. Ayri çarpanlar ayri homolog boyutlara aittir. Tanıdığımız zeta-fonksiyonlar gibi her çarpan sonsuz bir çarpımdır. Tabii ki bu çarpımda ifade edilmemiş cebirsel sayılar çisim anlaşılmış. Bugünkü karşılıklılığın ilkesi şudır: hem payda hem paydada her çarpan bir yukarda bahsettiğimiz otomorf L-fonksiyona eşittir.

Şu ana kadar genel olan kanıt yok. Daha doğru biz çok az anlıyorum. Buna rağmen pek çok arastıracı bu probleme ait pek çok önemli teorem ispatlamış, mesela iki ünlü ad Andrew Wiles ile Richard Taylor. Bununla beraber bildiğim kadar genel sorun aldirilmaz. Yazık ki! Ben kendim bu sorunları hiç düşünmediğime teessüf ederim.

Bu derste, bu konuşmada (ii)'le işaret edip müracaat edilen makalanin sonuçlarını kısaca açıklamak istiyorum, ancak bunu yapmadan önce, aritmetik teori hakkındaki görüşlerimi üzerine yorum yapmak istiyorum. Beklemediğim şeylerı kavradım. Yani geometrik teoriyi incelerken, bir otomorfik galoisca grubu kavramından çok etkilendim. Bu, yerel teori için, $G(F_v)$ grubunun temsilinin parametresi bu henüz tarif etmediğim galoisca grubun bir ${}^LG(F_v)$ grupte olan temsili olur, yani iki grubun arasındaki homomorfism. Küresel teoriye gelınce kesin olmaya uğraşmamak en iyisidir. İstediğime göre, zannetiğime göre fakat ıspatlamadığım iddia olarak otomorf formların parametreleri bir galoisca grubun ${}^LG$'deki temsilidir. Tekrarlıyorum $G = \mathrm{GL}(n)$ grubu genel doğrusal grup olarak alırsak ${}^LG = \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ olur. Bu galoisca grup nedir.

Galoisca grup. Bu, hem aritmetik hem de geometrik teorilerinde önemli olan kavramı çoktan beri düşünüp taşiyordum fakat tam başarısız olmadım bile gerçek bir teori kuramadım. Buna rağmen otomorfik formlar teorisindeki önemi ve evrensel geçerliliği konusunda ikna olmaya devam ediyorum.[13] Şu ana kadar çok az grup için bu problemi cözebilirim. GL(1) grubu için kolaydır. Yaftası (ii) olan makalede GL(2) için bu problem çözülmüş fakat yalnız hem geometrik teoriye ait hem de eliptik eğriye ait problem. Buna rağmen bence her G gruba ve her M eğriye ait geometrik problem yeterli çaba ile çözülebilir. Zorluklar açıktır. Zannediyorum ki (ii)'(nin) ile Atiyah'nın yazdığı (v)'(nin) makaleleri kullanarak çözülebilir. Sorun şu şekilde ortaya çıkmıştır. Verilen bir eğri M için varsayımsal bir galoisca grubu tanıtılır. Gerek olan galoisca özelliği daha sonra bir seferde verilmiş bir grup G için doğrulanır. Tabii ki nihai hedef genel bir kanıt olur. Anlayış azar azar gelişir. Aşağıdaki (iv) makalesinin bazı bölükleri bu bakımdan önemli olacak.

Aritmek teorisinde kuram çok daha zor olur. Şimdi anladığım gibi onun için galoısca grup yeterli bir kavram değil. Açıklıyoruz!

Bir şey vurgulamak gerektir. (3)'un bölümdeki payda veya paydada her çarpılan bir otomorf L-fonksiyona aittir. Bu soru bu makalede bulunan ikinci soru ve bazı bakımlardan en önemlidir fakat her bakımlardan değil. Yani o Hasse-Weil'in L-fonksiyonlara ait soru. Ama Peter Sarnak'ın bana hatırladığı veya anlattığı gibi diğer imkanlar var ve onların analitik özelliklerini anlamak gerektir. Bundan dolayı ilk tekliflerim yeterli değil. Yani Sarnak'a göre bazı otomorf formlar için özdeğerler transandant olabilir. İlk tekliflerime göre öyle mümkün değil.

Sarnak kendinin makalesine *Maass cusp forms wıth integer coefficients* dikkatımı çekti ama ayni zamanda Buzzard ile Gee'yin yazdığı ve bizim için çok ilginç olan makalesine *The conjectural connections between automorphic connections and Galois connections.* Ama onlar bir tarafa Sarnağın bana anlatığıma göre Hasse-Weil L-funksiyonların ziddi olarak otomorf fonksiyonların katsayları transandant olabilirse onları oldukça basit olan galoisca grupla tarif etmek belki mümkün değil.

Tekrarlamanın pahasına, temel kavramlar bir grup G ve onun L-grubu ${}^LG$ hatırlatıyorum.[14] Birincisi ise bir küresel veya bir yerel cisime ait bir grup olarak, ikincisi de $\mathbf{C}$ üzerinde bir grup olduğunu hatırlıyorum. Bunlarin arasındaki ilişki, Cartan sınıflandırmasının bir sonuçdur. Bu, yarı basit veya indirgeyici grupların bir herkesin tanımadığı sınıflandırmasıdır. Otomorfik teorisindeki önemi beklenmemiş. Bu konuşma için basit örnekler yeter. GL(1) grubu kapsayan ikinci toplama birinciden biraz daha büyük olan bir kümedir. Bu sınıflandırmanın içinde, önemi yalnızca otoformik formların teorisinde kendini gösteren, çarpıcı ama şu anda açıklamadığımız Elie Cartan'ın tarafından keşfeden bir ikilik vardır. O kompakt gruplara veya C veya diğer cebirsel bakımdan kapalı olan cisime aittir. Diğer cisimler üzerinde, mesela $\mathbf{R}$

[13]Bu ifade doğru değil. Bu konuşma için bu metini yazarak galoısca grubun aritmetik teori için uygun olmamasını anladım! Bununla beraber geometrik teorisi için önemlidir.

[14]Okuyan bu çizgilerin bazi parçalarını sıçrayabilir.

sınıflandırma daha çapraşıktır. Otomorfik formların yapısal teorisi için en önemli sınıflandırma daha kaba olandır. Her gereksiz zorluk görmezlikten gelmek ve GL(1) ile GL(2)'ye dikkat toplamak en iyisidir. Onlar için âdeta tek bir belirsizlik var, yani GL(2) veya üniter grup vardır ve ikincisini de görmezlikten gelebiliriz. Fakat o da hem ilginç hem de önemlidir.

Otomorf formların teorisi zorlukların en az iki sebep var: (i) o kadar fazla gruplar o kadar fazla cisimler de var; (ii) otomorf formların kendisine mahsus olan zorluklar. Tabii ki bu konuşmada ikileri en önemlidir.

Kendimize söylediğimiz sözler olarak, indirgeyici Lie grupları ya da cebirsel grupların teorisinde, az ya da çok önem taşıyan ve farklı öneme sahip birçok yapısal özellik olduğunu farkettim. Neyin önemli olduğunu ve belirli bir bağlamda neyin alakasız olduğunu anlamak için çok fazla deneyim gereklidir. Sorulan sorunları çözmek için ipuçları gereklidir. İpuçlarını mümkün olduğunca geniş bir aralıkta aramak en iyisidir. Otomorfik formlar teorisinde, doğal alan sadece aritmetik teoriyi değil, aynı zamanda geometrik teoriyi ve elbette tüm mümkün olan gruplar içerir. Bugün önemli olan bu ikisi arasındaki ilişkidir. Geometrik teori daha kolay fakat onun matematik önemi ve mayası iyi anlamamış. Herhalde bence öyledir. Yazdığım gibi bunu iyi anlamak zor oldu.[15]

Kısaca cevaplanması gereken soruyu tarif edeyim: galoisca grubu dediğim şey var mı yok mu?. Onun varlığı fonktorialitet tarafından ima edilir ve buna karşılık, o fonktorialiteti ima eder. Makale (ii)'de, önceden ilk sayfalarında şekilinin bir tarifidir. Anlaşılan geometrik teoride galoisca grup başka bir şekilde ise zaten var. Bu makalede her şey ispat etmedim. Buna rağmen orada ispatladığım iddianın genel bir kanıtın zaman meselesi olduğuna, yani çok geçmeden çözülecek, beni inandırıyor. Bu yüzden bu makaleye biraz yer ayırıyorum burada. Bundan fazla aritmetik teoriside yoksa bile belki onun yerine geçen bir kavram var.

Keşfedilen şey, geometrik teorinin, daha doğrusu Atiyah-Bott'un bir makalesinde

(iv) *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. Royal Soc. Lond.*

oldukça anlaşilabilen bir şekilde işlenen Yang-Mills teorisinin sonuçlarının gerekli teorik yapıyı sağlamasıdır. Daha büyük gruplar ve diğer eğrileri daha sonraki bir zamana ya da daha genç matematikçilere bırakarak, sadece eliptik bir eğri üzerinde GL(2) grubu inceledim. Bunun için gerekli geometrik bilgiler Atiyah'nın tarafından yazılmış makalede

(v) *Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. vol. 7, 1957*

sağlandı. Benim makalede yalniz GL(n) grubu ile eliptik eğri konu edilmiş. Daha doğru yalnız GL(2) konu edilmiş ama GL(n) için fazla zor olamaz, Diğer gruplar diğer eğriler de çok ilginç olur.

Ben ise yalnız grupları GL(1) ve GL(2) eliptik eğri ile ele aldım. Tüm sonuçlarımı (ii) metinde geliştirdim. Gözönünde bulundurduğum özel durum bile, yani GL(2)'a baktım, yıllarımı yılları aldı, ama genel durum muhtemelen yetenekli, becerikli ve sabırlı bir matematikçi tarafından ele alınabilir. Başarılı ise güzel olur. Bana gelince, bir çok diferensiyel geometrini öğrenmek gerektir.

Galoisca bir grup fikrinin, beni çok uzun bir süre boyunca hortlayan bir kavram olduğunu itiraf ediyorum. Sadece (ii) makale'nin hazırlanması sırasında çok fazla düşünme olmadan onu geometrik teoriye ortaya koyup daha önceki girişimlerimi hatırladım. Ayrıca çok şaşırmadan (iv)'te başka bir benim galoisca grubumla yakından ilişkinin olarak grupla tanıtıldım ve onu Atiyah-Bott grubu olarak adlandırdım. Bir grup geometrik otomorfik temsillerin ve diğer

[15]Okuyucu zaten anladı ki ben onun önemini kısa zaman ise abarttım.

Yang-Mills bağlantıların parametresi tayin eder. Evvelâ bu bir umuttur, fazla değil, ama (ii) sonuçlarıyla teyit edilmiş bir umuttur.

O makaledeki yani benim makalemdeki yöntemler muhtemelen genel olarak geçerlidir. Fakat benim makalem sınırlı oldu. Hem eğri hem de grup için gerekli geometri zaten anlaşılmış. Onları genel anlamak kolay değilse bence o kadar zor da değil. Akıllı sabrıyla erişilebilir. Sonuç olarak, eğer istersek, fonktorialitet hakkındaki düşünürken bu galoisca grubunun var olduğunu farzedebiliriz. Bu olasılıkları artırıyor diye düşünüyorum.[16]

Bununla birlikte, şu ana kadar bu özel olasılık, galoisca grubun varlığı, yalnız geometrik teoride mevcuttur. Dolayısıyla, aritmetik teoride bir galoisca grubunun varlığını ayrıca kurmak faydalı olacaktır. Anlattığım gibi bu fonktorialitete aittir.

Bu konuya ait bu konuşmayi hazırlayınca daha evvel anlamadığı otomorf L-fonksiyonlara bağlanmış bir imkan takdir ettim. Evvelce otomorf L-fonksiyonların analitik uzanımını ispatlamak için tek bir yöntem gördüm yani fonktorialitet. Mamafih otomorf temsiller bir galoisca grubun temsillerine tekabül ederse functorialitet gerekli bir sonuçtur. Başlangıçta iz formülün tek çözüm yolu olduğunu düşünmüştüm. Belki öyle değil. İki imkân var. Ama şimdilik ne fonktorialitet ne de otomorfik bir galoisca grup var. Herhalde genel bir şekilde şu ana kadar değil. Dahası, neyin kanıtlanacağını, nasıl ve hangi sırada olacağını tahmin etmek için acele yok. Göreceğimiz üzere henüz tanınması gereken bazı temel ayrıntılar var.

Otomorf galoisca grubunun imkân bir tanımı kısaca düşünmek faydalı olabilir. Ancak durup dururken sonuç çıkarmak kolaydır ama bundan çekinme tavsiye edilebilir. Ben kendim (ii)'nin sınırlarının yeterince farkında değildim ya da daha doğrusu, ben biraz kararsız oldum. Kendimi sürekli olarak hatırlatmak gerekir ki, iki grup G' ve G arasındaki fonktorialitet - gerek olsa ya da varsayi olsa - $\mathfrak{G}$ galoisca grubuna ${}^LG'$-den ${}^LG$-e bir homomorfizme aittir.

$$\begin{tikzcd} & {}^LG' \arrow[d] \\ \mathfrak{G} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & {}^LG \end{tikzcd}$$

Bununla birlikte, G' ile G'nin temsillerinin arasındaki ortaya çıkan ilişki, belirgin olmayabilir. Yani fonktorialitetin somut biçimleri açıklıktan çok uzak olabilir, hatta somut fonktorialitet.[17]

Önemli fasıla. Bu makaleye ait ve beraber alâkası olan iki kavram var, otomorf galoısca grup ile fonktorialitet. Hem birbirlerle hem de genel teoriyeyle ilişkilerini anlamak önemlidir. Eninde sonunda yalnız aritmetik teori ile ilgilenenler için de geometrik kuramı anlamak faydalıdır. Bunun için fonktorialitetin ve galoisca grubunun kavramı çok daha erişilebilir diye düşünüyordum. Geometri teorisindeki bir anlayış genel geçerliliğine güven duymaya hizmet eder. Üstelik sayılar teorisi daha zor olabilir ama daha ilginç olması gerekli değil. Ben ve diğerleri tarafından öngörülen aritmetik teoride, fonktorialitet iz formülüyle ispatlanacağı ve tüm otomorfik L-fonksiyonlarının analitik uzanımı sağlamak için kullanılır. Bence otomorf galoısca grubun varlığı bunun bir sonucu olacak.[18] Fakat (ii)'de beklenen geometrik teoride, aşağıdaki galoisca grubunun varlığı ilk olarak kurulur ve fonktorialitet bunun bir sonucudur.[19]

Önceki satır bu dersi hazırlamaya başladığım zamanda inançım ve beklentilerimin bir ifadesidir. Yani yalnız geometrik teoride aritmetik kuramda da galoisca grubunun maksat ve

[16] Tereddüt ediyorum! Belki öyle değil.
[17] Bu cümlenin manasi artık tamamen açık değil.
[18] Öyle düşünüyordum!
[19] Öyle de düşünüyordum!

amaç olmasina inanmaya devam ediyordum. Anlaşılan öyle değil! Buna rağmen küresel Hasse-Weil L-funksiyonların otomorf L-fonksiyonlara eşit olacağına inanmaya devam ediyorum, fakat bu dersi hazırlayıp bu konuya gelirken anladım ki aritmetik teoride bir galoisca grubun varlığı muhtemel değil. Aritmetik teorinin asıl amacı belki de her Hasse-Weil L-fonksiyonunun aslında ya bir otomorfik ya da birkaç L-fonksiyon tarafından verildiğini göstermektir.

Ne yazık ki, aritmetik teori hakkındaki bilgim sınırlıdır. Anlaşılan Hasse-Weil L-fonksiyonlar cebirsel çoklukların (ko)-homolojisiye aittir. Anlaşılan bu kohomoloji kendisi bir Galois grubun tarafından değil Tannakian kategorinin tarafından tarif edilmiştir.[20] Bu kavram toplamları ve çarpıları kabul eden bir grubun temsillerinin yerini alan grubun kavramının genelleştirilmesidir. İhtiyacımız olan şey, galoisca grubu değil, galoisca kategorisidir. Notları hazırlarken bunu takdir ettim ama bunu sağlayamayacağım. Aritmetik teorinin geometrik teoriden çok daha zor ve daha derin olduğunu doğrular.

Başka bir deyişle, belki de tatmin edici bir geometrik teoriye yakın olmasına rağmen, tatmin edici bir aritmetik teoriden çok uzaktayız. Bana gelince o kadar gerçek anlamadığım şey var. Yani sayıların teorisi için L-fonksiyon önemli olarak biliyorum fakat esaslı olarak neden anlamıyorum. Herhalde sayıların teorisi gerekli olan L-funksiyonlar Hasse-Weil L-fonksiyon ve biz analitik bakımda yalnız Hecke L-fonksiyonları anlıyoruz. Dolayısıyla birincilerinin ikincilerle ilişkisini anlamalıyız. Bundan fazla ikincisini anlamak için fonktorialiteti anlamak gerektir. Yani her otomorf L-fonksiyon bir Godement-Jacquet L-fonksiyona eşittir. Makale (i)'de bu soru görüşülür. Anlattiğım gibi hakkında aynı zamanda çok anlıyoruz ve az anlıyoruz. Diğer yandan Hasse-Weil L-fonksiyon âdeta hiçbir şey anlamıyoruz.

Gerçekten anlayabileceğim hiçbir şey olmamasına rağmen, olası biçimsel yapı hakkında birkaç açıklama yararlı olabilir. Hem önemli hem de genel olan karşılıklılık nedir? (3) formülünde bulan her $\zeta_i(\cdot)$ fonksiyonunun bir otomorf L-fonksiyona eşit olması. Bunu nasıl ispatlayabiliriz. Ben bilmiyorum. Şu ana kadar Wiles'in Rıchard Taylor'un, herhalde başkaların sorumudur diyerek düşünüyordum. Herhalde ζ_i fonksiyon cebirsel çokluğun kohomologisine aittir ve bunun kohomologsal hususiyetlerine, direkt toplamlara, tensör çarpımlara da aittir. Dolayısıyla bir Tannakian kategoriya aittir. Diğer taraftan fonktorialitet doğru ise otomorf formlar da bir Tannakian kategori belirtir. İkisinin biribirine eşit olduğunu ispatlamak gerek olacak! Belki Gauss bu problemi çözebilir! Onun için fazla zor olsa siz onunla uğraşabilirsiniz.

Aritmetik teoriden ihtiyaç duyacağımız şey, otomorfik formlar için yararlıdır, dolayısıyla yukarıdaki L-grubuyla ilgili çeşitli biçimsel maksatlar sağlanacak. Bu maksatlar, belirli bir küresel cisimde otomorfik formlarla ilgili bir Tannakian kategorisi sağlayacakacaktır. Biz de tarifinden sağlanan bir Tannakian kategorisine sayılar ve Hasse-Weil L-fonksiyonlarının formal özellikleri ile ilgilidir. O zaman kanıtlanacak olan, birinciden ikinciye bir homomorfizmin varlığıdır. Bu, Hasse-Weil L-fonksiyonlarından otomorf L-fonksiyonlarına bir gönderim sağlayacaktır. Bunun kısmi ve eksik ifadeleri, Fermat'ın teoreminin kanıtında, hiç dikkatlice incelediğim çok şey var. Gerçekten de bu derse kadar, onlarca yıldan beri şimdi endişelendiğim kavramların formal özelliklerini hiç incelemedim. Çoktan beri uğraşdığım fonktorialitete ilave ederek otomorf formları ile Hasse-Weil L-funksiyonların arasındaki köprü bulmak gerek olacak. Açık ki bu benim çözeceğim mesele değil.

Yukarıdaki yazdıklarımı yazdığımdan önce (ii)'de buluman geometrik kuramı doğru bir şekilde anlamadım. Geometrik teori güzel ve öğretici fakat aritmetik teorisine kadar zor değil. Bu konuşmayı yazmaya başladığımda bunu anlamadım..

[20]Tannakian categories, P. Deligne ve J. S. Milne, kısaca [DM]. Açıklayacağım gibi, bu kavram büyük ihtimalle aritmetik teorinin temel bir unsurudur, fakat şu anda tanıdığım bir şey değildir.

Sorunumuzun Diophant yönleri konusundaki sınırlı anlayışımıza rağmen, analitik yönleri, yani iz formülünü bildiğimiz kadarıyla, hala eksikse, şimdi çok daha büyüktür. Beklediğime göre fonktorialitet iz teorisini kullanarak ispatlayacak. Dediğim göre şu ana kadar en önemli başarılar Arthur'un sayesindedir fakat, Ali Altuğ gibi daha genç olan matematikçilerin faydalı bağışları var.

Somut sayılardaki meselelerin incelenmesinde bu soyut kavramların ortaya koyması bazılara faydalı değil yolsuz olarak bile görünebilir, ancak Fermat'ın teoreminin ispatını etkiledi. Gelecekte de faydali olabilecek. ■

Aşağıdaki bölüm fazla ciddiye alınamaz. Birkaç gün için düşünüyorum ki aritmetik galoisca grubu sarahatla yani açıkça, doğrudan doğruya tarif edebilirdim. Aşağıdaki tarifte bu kavramın derinliği takdir edilmedi. Buna rağmen belki gelecekte münasebetli olabilir. Aritmetik teorsinde galoisca grup yoksa bile!

Tuhaf belki faydasız fikirler. [21] Tuhaf ise bile, ancak bu dersi hazırlayıp aritmetik teoriye geri dönerek fakat şimdi geometrik teoriye biraz aşina olarak bu ilkin aritmetik teoriyle ne kadar alakalı olduğunu daha iyi anlıyorum. Üstelik şimdi yerel teori üzerine daha önce yazılmış (1973) ve şimdi güçbela anladığım bir makalenin farkli bakimda önemini de anladım. Bu kendim yazıp unuttuğum makale bugünkü dersi hazırlarken danıştığım ve neredeyse anlaşılmaz bulduğum bir yazıdır. Ancak aniden onun tanımlarının ya da benim yorumumun aritmetik teoriye aktarılabileceğini anladım. Bu aktarma şaşırtıcı sonuçlar doğuruyor fakat şu anda sadece farazi olarak.

Bu bölümü yazarak takdir ettiğim veya anladığım durumum, cebirsel sayı teorisini ne kadar az anladığımdır. Çoktan evvel, çabucak Almanca öğrendiğim gibi, Hecke'in yazılarını okumak ve sınıf-alan teorisi hakkında bir ders vermek için cebirsel sayılara ait matematik hızla öğrendim, ama bunu çok somut bir şekilde hiç bir zaman düşünuyordum.

Mesela $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$'in cisimiye bakalım. $x + y\sqrt{2}$'nin normu $x^2 - 2y^2$. Mesela $1 + \sqrt{2}$ birimdir ve normu $1 - 2 = -1$. Kuvvetlerin normu ± 1 olarak $\{1 + \sqrt{2}\}^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $\{1 + \sqrt{2}\}^3 = 7 + 5\sqrt{2}$, $\{1 + \sqrt{2}\}^4 = 17 + 12\sqrt{2}$ filan. Daha önce buna bakmamın sebepi yoktu. Hiç merak etmedim. Dirichlet birim teoreminin örneklerini dikkate almak için fırsatım da olmadı. Bu teoremi hakkında da yeterince düşünmedim. Mesela boyutunun sonlu olduğu bir cisim F verilmiş ise her sonlu yerde birim olan ideller bir grup verir. F'de bulup her yerde birim olan elemanlar ikinci bir grubu verir. Bölüm nasıl? Tabii ki cevap basit.

Hasse'nin makalesinde yerel sınıf alanı teorisini de incelemedim,

Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen.

Meraksız bir cehalet oldum. Ona danışmalıyım, ama şu anda yaptığımla alakalı değil.

Küresel geometrik teoriside, yani Yang-Mills teorisinde şu anda bana göre (ii)'de belirtildiği özel durumlarda, yine temel grubunun, daha ziyade çok basit bir değişmiş grubu tarafından değiştirilmiş temel grubun bir genişlemesidir ki uygun parametreleri tanımlar. Küresel aritmetik teoride benzer bir şey bekliyordum,[22] ama küresel aritmetik durum çok daha karışık bir şey. Buna rağmen ilk düşüncelerimi anlatayım. Çarpımı alırız, yani tam Galois grubu, dolayısıyla sonlu Galois gruplarının ters limiti, idel grubu ile çarpim.[23] Ondan sonra bir alt

[21] Bu bentin okunması tavsiye edilmemiş.

[22] Artık değil!

[23] Bu açık anlatılmaz. İki grup var. Her birisi anlamak zordur. Birisi Galois grubun ters limiti en kolay. İsterseniz sonlu Galoıs grup düşünebilirsiniz. İkincisi daha, yani idel grubu fazla soyuttur. Yaklaşık olarak çisimin yerel bitirmelerinin bir çarpımıdır.

grup tarafından bölünür. Bu alt grup nedir? Galois grupte olan g ve idel olan α verilmiş ise ve ikisinin maksimal değişmeli genişlemesi ait gönderimi eşit iseler (g, α) çift bu alt grupte bulunur.[24] Öyle olacak? Elbette bilmiyorum. Benim yaşımda, gelecekte bileceğim de ihtimal yok. Başlangıçta öyle olduğunu düşünüyordum ama olamaz! Neden imkansız olduğunu aşağıda anlatacağım. Mamafih mümkün ki küçük bir değişlikle olabilir.

İlk olarak bu tanımlamanın fikiri artık anlamadığım makalede

(vi) *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*

verilmiş. Neden ve nasıl artık anlamıyorum. Genç olduğum zaman bugünden daha akıllı oldum. Zannediyorum ki onu iyi hatırlamadığıma rağmen bu makale faydalı! Buna rağmen makalenin kendisi hemen kullanışlı değil. ■

Şimdi bir zorluk tavsif ederim. Şu anda bu zorluğa çare bulamam. Tabii ki GL(1) grubuna ait özdeğerlerin **esas cebir işlemleriyle temin edilmeyen sayı,** kısaca **cebirsel olmayan** sayı, Hecke öz fonksiyonlar var, yani $z \to |z|^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Bazı α için bu cebirsel değil. Ama GL(2) için Hecke öz değer her yerde böyle bir matrisidir

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

α/β sayısı bazı yerlerde cebirsel olamaz mı? Öyle ise nedeni açık değil. Peter Sarnak'ın bana yazdığıne göre öyle olabilir. Şu anda böyle örnekler nasıl bulmak bana belli değil. Okuyucaya diyebilirim ki Dirichlet'nin teoreminin sayesinde GL(1) için başka cebirsel olmayan öz fonksiyon yok, yani onların hepsi sade üsteler.

Bu konuşmanin ana yorum öyledir.[25] Geometrik teorisinde aritmek teorisinde olmayan veya henüz tanınmamış önemli kavramlar var. Bununla beraber aritmek teorisinde ziyadesiyle önemli olan karşılık sürülmüştü, yani (3)'a ait ve otomorf formlar ile Diofant denklemlerin arasındaki bağlantı kuran karşılık. Biz bu karşılık henüz anlamıyorum. Tabii ki, bu herkesin tanıdıkları quadratik karşılıklılık. Bence, iz formülünün somut hesaplamanın sonucunu benzer Diofant sayımlarının verdiği somut sayısal sonuçlarla karşılaştırmak gerektir. Bundan çok uzaktayız.

Ben tekrarlayım. Aritmetik teoride iki önemli genel iddia var: fonktorialitet ile karşılıklılık. Geometrik teoride tek genel iddia var: fonktorialitet. İkisini ve onların ilişkilerini açıklamaya çalışıyorum. Karşılıklılığı yukarısında kısaca anlattım. Açık ki zor bir konu. Onun tarihi de çoktan evvel başlamış.

İlk düşüncelerim öyledi ama (vi)'nın makalesine bakarak farklı bir imkanla kandırmıştım. Yani iki özel durumda, birisi sonsuzda yerel aritmetik teoriye ait olan durum ve diğeri küresel geometrik teoriye ait durum, yapı aynıdır. Dallanmamış (unramified) geometrik teoride galoisca grup – galois grup değil – müracaat (ii), formül (1.d) olarak tanımlanır. O esasli temel grubun bir uzantısıdır, yani Galois grubunun bir çeşiti. İlk önce olası sayısal ilişkiler veya benzer çapraşıklık, en azından benim kavrayışımın ötesinde, hayallerimin ötesindedir. Buna rağmen yukarıda imkân öne sürdüm. Uzman için bu konuşmamın en ilginç teklifi veya yorumudur diye düşünüyordum. Ama öyle değil. Buna rağmen ilk fikirlerime bakalım.

Sonsuzluktaki teori yani $\mathbf{R}$ cismiye ait yerel teori galoisca grup müracaat (iii)'de tarif edildi. Bu yazdiğım ama şu anda artık tam anlamadığım makalede küresel değil yerel teoriye bakıyordum. Esas grup bir $\mathbf{C}^\times$'in genişlemesi, daha ziyade Galois grubu $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, tarafından

[24] Türkçem bu cümleye yetmez.

[25] Artik tam öyle değil fakat burada iddia ettiğim tam yanlış değil.

$\mathbf{C}^{\times}$'ın bir genişlemesi. Küresel geometrik teoride (ii) makalesinde anlatılan tekrar bir uzantısı görünür. Bunu anlatmak o makalenin amacı oldu. Temel grup - daha ziyade çok basit bir değişmeli grubu tarafından değiştirilmiş bir temel grup - Hecke eşlenik sınıflar belirler. Küresel aritmetik teoride benzer bir şey bekler. Çarpımı alırdık Tam Galois grubu, dolayısıyla sonlu Galois gruplarının ters sınırı, idel grubu ile ve (g, α) çiftlerine bölerek Galois grubunun g ve α Zemin cisimin maksimum abelian uzantısı aynıdır. Bu genel otomorf olurdu galoisca grup. Öyle olup olmadığı, elbette bilmiyorum. Benim yaşımda, gelecekte bileceğim hiç ümitim yok.

Aritmetik ve geometrik teorinin farklılık ve benzerliklerinin kısa bir tarifi. Aşağıdaki satırlar da, ister istemez, geçen yıllarda hem benim çabalarım hem diğerlerin çabaları – daha doğru, çabaların hedefleri – bir değerlendirmesidir. Geometrik teoride, bildiğim kadar yani (ii)'de bulunan arıştırmanın teyit ettigi kadar Yang-Mills bağlantılara ait galoisca grup var. Bunu her eğri M ve her grup G için bunu ispatlamak gerek olacak. Galoisca grup kendisi (ii)'de tanıtılmış fakat bu ibare kullanmamış. Bence gerek ispatları yavaş yavaş bulunacak.

Aritmetik teori çok daha zor. Onun için bir galoisca grubun basit kavramı yeterli değil. Daha doğru şimdi anladığım kadar bu teoride galoısca grup yok! Bu konuşmayı hazırlamasını başlanarak aritmetik teorisinde bile öyle bir şey var olmasına inaniyordum. Bu sadece kalın kafalığım! Var olan kavram genel olarak artık kurulmamış ama

Beyond endoscopy

makalesinde *fonktorialitet*'in tarif edilmiş. Aritmetik teori çok daha karmaşık çok daha zor ve birden fazla şekilde. Bu yazılara başladığımda bunu anladım ama henüz dökmediğim yanlış anlamalar vardı. Aritmetik teorinin iki bölüm veya iki ana zorluk veya fırsat var, fonktorialitet ve karşılıklılık. Birisinde Arthur'ın tarafında geliştirilmiş ama yakın zamanda yaptığı yeni katkıları incelemek için fırsatım olmadı. Daha doğru son yıllarda tek bir şeyle uğraşıyordum yani geometrık teorisiyle. Bu, nispi önemlere ait değildi. İki teoriyi bütün bütün anlamak bir ihtiyaç oldu. Matematiksel bir teori olarak, geometrik teori kesinlikle çok daha kolaydır. Buna rağmen geometrik teori güzeldir. Belki de fizik bakımından çok önemlidir. Aritmetik teoride hiçbir galoisca grubunun olmadığını anlamak benim için bir hayal kırıklığıydı. Herhalde kısaca. Maalesef fiziksel teoriye olarak önemini değerlendiremiyorum. Ama eninde sonunda fizikçi değilim. Matematikçi olarak benim mesuliyetim matematik! Yani konumuz cebirsel çokluklar ile onlara ait L-funksiyonlar. Bu tam doğru değil. Daha büyük bir küme – en azında öyle zannediyoruz – Hecke L-fonksiyonlara ait L-funksiyonlar. İz formülüne ait bunların analitik uzamını anlarsak, anlatığıma göre ilk ve son vazifemiz bu her Hasse-Weıl funksiyonların otomorf L-funksiyonlara eşit olmasını ispatlamak olacak. Yani geriye kalan Hasse-Weil zeta fonksiyonları ya payları ya paydalar hepsi otomorf L-fonksiyonların bir çarpımı olmasini ispatlamak gerektir. Burada ne zaten kanıtlamış, kanitlamamiş ise nasıl kanıtlamış, hangi yöntemlerin var olduğunu bilmiyorum. Bu, bir çok matematikçinin tarafından araştırılan, açıkça bir merkezi diophantin sorusu. Maalesef benim tarafımda değil. Bunun için hiç zamanım yoktu. Bence genç matematikçilere çok çekici olanaklar verir.

Belirli bir anlamda geometrik teori ile çok uzun yıllar kaybettim. Ama öyle değil. Herhangi bir fiziksel geometrik teoriye karşı matematiksel geometrik teoriyi anlamak önemlidir. Dahası, dört, beş, altı yılda bir aritmetik teoriye girilmez yeterli anlaşılmaz.

Oldukça yaşlı bir matematikçi olarak benim şimdiki durumum öyle, onlarca yıldır beni asla başarısızlığa uğratmayan bir kavramım besledim, ama henuz ispatına sahip olmıyorum. Yanı onu geleneksel matematiksel seviyeye kadar gelişememiştim, önerilen genel iddiaların kanıtlarını bulamadım. Şimdi daha genç olsaydım ne yapabilirdim. Birincisi gemetrik teoriye dönerek genel teorem ispatlayabilirim, ilk olarak bir elliptik eğri ve genel grup ${}^LG$ için. Ondan sonra genel bir eğri için. Bu o kadar zor değil ama buna rağmen hızla yapılamaz. Öyleyse zamanla taman olan bir geometrik teoriye ele geçireceksiniz. Ama çok daha genç olsaydım ve kendime büyük güven duyuyor aritmetik teoriye dönüp hem Arthur'un hem Richard Taylor'un hem de diğer matematikçilerin makalelerı okuyarak genel aritmetik teorinin yaratısına katkıda bulmamı tercih ederim. Tabii ki çok önemli ve zor olan yerel zorluklar da var. Belki $\mathbf{R}$ ile $\mathbf{C}$ cisimlere ait oldukça gelişmiş bir teori vardır. Harish-Chandra'nın teorisine rağmen, tam olarak gelişmiş değildir. Diğer yerel alanlar üzerinde yapılacak daha çok şey var, çoğu zaman kendi başına çok çekici olarak, mesela endoskopluk. Bu belki size bilinmez, herhalde matematiğe ait olarak. Harish-Chandra'yı hatirlayarak biz Grothendieck'i de hatırlayabiliriz çünkü ikilerin farklı olan teorisinin farklı olan mirasının her beklediğimiz ilerlemenin bir parçasıdır, bir parçası da olacak.

Bu konuşmayı hazırlayarak öğrendiğim önemli ayrıntılar ile önemli kavramsal zemin. Aritmetik teorisi geometrik teorisinden çok daha zor. Bu konuşmayi hazırlarken aritmetik ile geometrik teorilerin aralarındaki farkın ne olduğunu ile onun sonuçlarının ne olabileceğini anladım. Anlatığım gibi ve anladığımız kadar geometrik teoride her cebirsel eğriye ait bir galoisca grup var ve bu grup uygun olan ${}^LG$'la, yani L-grupla, beraber G grubun otomorf temsillerini belirtir. Tabii ki bu teori henüz tamamen geliştirilmiş değil. Buna aldırmasak teorinin kavramsal yapı açıktır. Üstelik muhtemel ki gelişmesi zaman ve sabır meselesidir. Aritmetik teoriye gelince öyle değil.

Anlaşılan aritmetik teoride yeni çok daha zor olan kavram gerektir. Bu kavram Tannaka kategori fakat asıl zorlukları kendileri temsil etmezler.

Bugün ayrıntılar önemli değil. Aslında öyle bir kategori ki toplamlar ile tensör çarpımlar var. Örneğin verilmiş bir grubun temsilleri. Geometrik teorisinde bunlar yeter. Aritmetik teorisinde yetmez. Neden? Çünkü aritmetik teorisinde öyle olmalı ki her Hasse-Weil L-fonksiyon otomorf L-fonksiyonlarla verilmiştir. İnşallah! Mamafih Hasse-Weil zeta fonksiyonlarından[26] çok daha fazla otomorf L-fonksiyonlar var.

Buna aldırmasak bile aritmetik teori Hasse-Weil L-fonksiyonların teorisinden daha basit olamaz. Bana göre, belki de herkese göre, bu teorinin amaçlarını gerçekleştirmek için her Hasse-Weil L-fonksiyon, daha doğru olarak (3)'de her ζ_i, bir otomorf L-fonksiyona eşittir.

En basit en çok tanınmış Tannaka kategoriler verilmiş bir grubun sonlu boyutlu temsilleri. Onların toplamları ile (tensör) çarpımları herkese tanınmış. Cebirsel çokluklar ile eşhomologi de, daha doğru olarak sadece eşhomologisi de ikinci bir örnek, fakat [DM] göre bu örnek iyi belirtmek kolay değil. Ben bu makaleyi henüz tamamen anlamıyorum, yani güçbela anlıyorum. Buna rağmen kurmak istediğimiz ilkeler yaklaşık öyle dir. Cisim F rasyonel sayilarin cisminin bir sonlu boyutlu genişlemesı olsun. Her F için iki kategori meydana koymak isteriz. Birisi ya herhangi bir indirgeyici gruba G ait otomorf formları. Bizim umutlarımıza ve gayretimize göre fonktorialitet kurulmuş ise bu bir Tannaka kategori olacak. Sonraki en zor olan soru için, $G = \mathrm{GL}(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ olsun.

Bu noktaya kadar, aritmetik yoktur, tartışma tamamen geometrik veya analıtık dir. Kendi araştırmam da öyle oldu. Örneğin, Fermat'ın son teoreminin ve onunla alakalı çağdaş araştırmaların herhangi bir kanıtını incelemedim. Yani aşağıdaki yorumlar herhangi bir yetkiyle yapılmaz. Belki de hiç kimse böyle bir yetkiye sahip değildir.

[26]Pay ve paydanın çeşitli çarpanlarını düşünmekteyiz.

İzleyiciye anlatmak istediğim fikirler iki farklı alanın birleşimidir. Birincisi otomorf formların teorisi, yani izformül, ikincisi Diophant denklemler. Birincisinden gerek olduğundan daha az anlıyorum. İkinciden âdeta hiç bir şey anlamıyorum. Buna rağmen isteyiğ beklediğim delilleri anlatayım.

İkincisi, (3)'ün kendisinin ζ-fonksiyonuna çok fazla ilgili değildir. Beklenen ve aritmetik, yani geometrik olmayan, otomorf teori bağlamında analitik sayı teorisini çağırmak gerekirse neyin kanıtlanması gerektir? (3)'deki ζ_i-faktörlerin her birinin otomorfik bir L fonksiyonuna eşit olduğunu gösterildiğini gerektir. Bu bizim problemimiz! Özellikle bu dersi hazırlarken bilmiyorum, Fermat'ın son teorisinin bağlamında bilinen nedir? Ben buna dikkat ettim çünkü şu anda, sorulan sorunun çözümü hakkında nasıl bir fikre sahip olduğum hakkında hiçbir fikrim yok. Mümkün ki sınıf çismin teorisi bir yanda başka tanımadığım örnekler de var.

Sorluğumuzu tanıdığımızdan sonra nasıl onu halledebiliriz. Otomorf formlara ait otomorf L-fonksiyonları iz formülüyle anlayabiliyoruz. ζ_i fonksiyonlarını nasıl anlamak henüz anlamıyorum! Anlanması zor olsa bile Hasse'nin raporunda gibi iz formülü kesin sayılar verebilir. Ben şu anda ζ_i fonksiyonların aritmetik şekline ait mevcut teoriyi yeterince kavramam ve gelecekteki olası yöntemlere dair net bir fikre sahip değilim. Oyunda bir çeşit karşılıklılı var, ama ne olduğunu bilmiyorum!

İkinci kategori F cisimine ait cebirsel çoklukların eşhomologisidir. Yaklaşık bir gönderim arıyoruz, ikinci kategoriden birinci kategoriye. Bunu anlamak zordur ama bu bir Diophant meseledir. Bu zorlukla Hasse'nin kitabındaki malumatta karşılaşıyoruz ama şimdiki, yani değişmeli olmayan teoride, zorluk ondan çok daha çetindir. Bir yanda izformülünün verdiği bir sayı var. İkinci yanda hiç anlamıyorum. Orada da karşılaştırılacak bir sayı arıyoruz.

Tabii ki tüm bu yıllar sonra, otomorf formlar teorisine ait olan şeylere, başlıca Diophant uygulaması gibi görünen şeylere, tamamen yabancı değilim. Buna rağmen cebirsel çokluklarla ilişkili çeşitli derecelere ait Euler çarpımlarının analitik özelliklerinin incelenmesine gelince çok az bilgim var. Bu çarpımın fonksiyonların bir $\mathrm{GL}(n)$ otomorf L-fonksiyona eşit olmasından bileceğımız hemen sonra Godement-Jacquet teorisinin gelişmelerinden çıkarılabilecek analitik özellikleri hakkında çok malumat elimizde olacak.

Vurgulanması gereken olduğu gibi taslak Hasse'nin malumatında olduğu gibi, ama şimdi ek ile yani iz formülü ile, istediğimiz ilişki bir Diophant iddiasıdır.

Matematiğe doğru ait olmayan ve benim yazılmadığım bir metin ilave ediyorum.

Orhan Pamuğ'un romanı *Kirmizi saçlı kadın*'dan almıştır. O kadar geçmiş olmayan zamandaki usta kuyucuların nasıl çalıştığını anlatıyor. Türkiye'de değil Kanada'da Fraser Vadisi'nde kuyucu olan akrabam oldu, yani ailemin memleketi. Bir defa memleketimden ayrıldığımdan sonra annemin hasta olduğu zaman onu orada ziyaret ettim. Tesadüfen kuyucu da hastanede oldu. Annemden daha yaşlı oldu yani dedemin kuzinin kocası oldu. Onunla da konuşuyordum. O hem çiftçi hem de kuyucu oldu. Vadide yeraltı su nasıl aktığını bana anlattı. Bu bilgi esnafı için çok önemli oldu. Bu konuşma hâlâ hatırlıyorum. Bu sebepten Pamuğ'un tarifini dikkatla okudum. Bence biz matematikçiler ayni şekilde matematikte yeni anlayışa ulaşıyoruz. Onun tarifi öyledir.

O zamanlar sondaj makinaları daha kullanılmıyordu. Usta kuyucular bir arizide suyun nereden çıkacağını, nerede kuyu kazılacağını binlerce yıldır sezgiyle bulurlardı.Mahmut Usta ağzi kalabalık eski ustaların süslü belagatını elbette biliyordu. Ama eline çatal alıp arazide bir aşağı bir yukarı yürüyen, okuyup üfleyen gösterişçi kimi eski ustaların yaptıkları ciddiye almıyordu. Binlerce yıllık bir mesleği icra edenlerin son kuşağından olduğunu hissediyordu. Bu yüzden mesleği konusunda gösterişci değil, alçakgönülluydu. “Toprağin koyusuna, nemlisine, siyahına bakacaksın” diye konuştu benimle. “Arazinin alçak yerine, taşlı. kayalık, inişli çıkışlı, gölgeli yerini görecek, aşağıdaki suyu hissedeceksin” dedi bir başka sefer beni eğitip yetiştirmek isteğiyle. “Ağaçların, yeşilliklerin olduğu yerde toprak koyu ve nemlidir, tamam mi? Dikkat edeceksin; ama hiçbir şeye kolay kanmayacaksın.”

Çünkü toprak, ayni zamanda yedi kat gökyüzü gibi tabaka tabakaydı. (Bazı geceler gökdeki yıldızlara bakarak altımızdaki karanlık âlemi hissederim.) Mesela koyu, kara toprağın iki metre altından, killi, su geçirmiş, kupkuru, berbat bir toprak ya da kum çıkarabilirdi. Su aranacak yeri kestirmeye çalışan eski kuyucu ustaları, toprağın, otların, büceklerin, hatta kuşların bile dilinden anlamak, yukarıda yürürken alttaki kaya ya da kil tabakasını sezmek zorundaydılar.

Kendim olan birkaç kelime eklerim. Bu konuşma başlayarak iki aradığımız teori tarif ettim. Onları büyük bir arka plana, sayı teorisi ve temsil teorisinin bir arka planına karşı arıyoruz. Hangi belirtileri aramalıyız? Hangi kavramları? Herkes aynı şeyi araştırmıyor. Herkes başarılı olmayacak. Herkes başarılı olamayacak. Benim görüşlerimi bu yazıda sunuyorum.

Compiled on July 30, 2024.