SHIMURAVARIETÄTEN UND GERBEN*

Von R. P. Langlands in Princeton und M. Rapoport in Bonn

§1. EINLEITUNG

Das Problem der Fortsetzbarkeit der Hasse-Weil-Zeta-Funktionen und allgemeiner der motivischen L-Funktionen ist nach wie vor ein zentrales Problem der Zahlentheorie. Es wird oft in zwei Probleme aufgeteilt, die getrennt zu lösen sind. Es ist erstens zu zeigen, daß jede motivische L-Funktion gleich einer automorphen L-Funktion ist, und zweitens, daß jede automorphe L-Funktion fortsetzbar ist. Beide Probleme sind in herzlich wenigen Fällen gelöst und dann nur dank der Bemühungen vieler Mathematiker über lange Zeit.

Nach den abelschen Varietäten sind in arithmetischer Hinsicht die Shimuravarietäten wohl die zugänglichsten, und diese Arbeit soll ein Beitrag zum ersten Problem für die ihnen zugeordneten motivischen L-Funktionen sein. Die Shimuravarietäten gehen aus der Theorie der automorphen Funktionen hervor und werden durch eine reduktive Gruppe G mit zusätzlicher Struktur definiert. Erfahrungsgemäß besteht die Lösung des Problems in einem gegebenen Fall aus zwei Bestandteilen, einer gruppentheoretischen Beschreibung der Punkte der reduzierten Varietät, und kombinatorischen Argumenten, die das fundamentale Lemma

* Appeared in Jour. für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 378 (1987).

von [L3] einschleißen, um den erhaltenen Ausdruck in eine Form zu bringen, die mit der Arthur-Selberg'schen Spurformel verglichen werden kann. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem ersten Problemkreis und verweisen für die Umformung auf zukünftige Arbeiten von R. Kottwitz.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Vermutung über die Reduktion modulo p von Shimuravarietäten zu formulieren, sie plausibel zu machen, indem wir sie mit den Standardvermutungen von Grothendieck in Beziehung setzen, und die Tatsachen zu beweisen, die auf eine rein gruppentheoretische Formel für die Anzahl der Punkte der Reduktion modulo p führen. Über die Primzahl p müssen wir einige einschränkende Voraussetzungen machen die aber über den Fall guter Reduktion hinaus gewisse Fälle schlechter Reduktion zulassen. Es sei $S = \mathrm{Sh}(G,h)_K \big(K = K^p K_p \subset G(\mathbf{A}_f)\big)$ eine Shimuravarietät, definiert über dem Reflexkörper $E = E(G,h)$, und $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von E über p, die gut ist. Es sei κ der Restklassenkörper von $E_{\mathfrak{p}}$ und κ_m die Erweiterung von Grad m. Die Formel hat folgende Gestalt. Die Anzahl $|S(\kappa_m)|$ ist gleich

$$\sum_{(\varepsilon)_{st}} \iota(\varepsilon) \cdot \mathrm{vol}\big(G_\varepsilon(\mathbf{Q}) Z_K / G_\varepsilon(\mathbf{A}_f)\big) \cdot \sum_{\substack{(\gamma),(\delta) \\ \kappa(\varepsilon;\gamma,\delta)=1}} O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi_p). \tag{1.1}$$

Hier ist Z_K gleich $Z(\mathbf{A}_f) \cap K$; die äußere Summe läuft über die stabilen Konjugationsklassen von $Z(\mathbf{Q}) \cap Z_K \backslash G(\mathbf{Q})$. Die Zahl $\iota(\varepsilon)$ ist eine kohomologische Invariante,

$$\iota(\varepsilon) = |\mathrm{Ker} : H^1(\mathbf{Q}, G_\varepsilon) \to H^1(\mathbf{A}, G_\varepsilon) \times H^1(\mathbf{Q}, G_{\mathrm{ab}})|.$$

Die innere Summe läuft über Konjugationsklassen von Elementen $\gamma \in G(\mathbf{A}_f^p)$ und getwistete Konjugationsklassen von Elementen $\delta \in G(L)$. Hier ist L die unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ mit Restklassenkörper κ_m. Die Symbole O_γ bzw. TO_δ bedeuten Bahnenintegrale bzw. getwistete Bahnenintegrale, und die Funktion auf $G(\mathbf{A}_f^p)$ ist

$$f^p = \frac{1}{\mathrm{vol}(K^p)} \cdot \mathrm{char}\, K^p,$$

während ϕ_p ein durch die Shimuravarietät definiertes Element der Heckealgebra von $G(L)$ bezüglich K_p ist. Von den Paaren γ, δ wird verlangt, daß γ stabil konjugiert zu ε ist, daß die Norm von δ stabil konjugiert zu ε ist und, die interessanteste Bedingung, daß die Kottwitz-Invariante $\kappa(\varepsilon; \gamma, \delta)$ definiert und gleich 1 ist. Obgleich diese Formel in unserer Arbeit nicht auftritt, sondern einer zukünftigen Arbeit von Kottwitz vorbehalten ist, ist sie unschwer aus unseren Ergebnissen abzuleiten. Dies ist eine Folgerung der Ergebnisse von Kottwitz [K3].

Im Fall, daß die Shimuravarietät S_K kompakt ist, treten die Zahlen (1.1) in der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus der Hasse-Weil-Zeta-Funktion von S_K in der guten Primstelle p auf. Um die rechte Seite von (1.1) mit der entsprechenden Potenzreihenentwicklung von automorphen L-Funktionen, die zu automorphen Darstellungen von G gehören, zu vergleichen, müßte man zunächst das getwistete Bahnenintegral von ϕ_p in ein gewöhnliches Bahnenintegral einer Funktion f_p auf $G(\mathbf{Q}_p)$ umschreiben. Falls des fundamentale Lemma im allgemeinen zur Verfügung stünde, könnte dies nach Stabilisierung erreicht werden, und mit dem Satz von Kottwitz [K3] würde überdies die Funktion f_p explizit hingeschrieben werden können. Es ist das Auftreten der Bedingung über die Kottwitz-Invariante, die dieses einfache Vorgehen vereitelt. Man kann diese Bedingung als den Grund für das Einführen der endoskopischen Gruppen in diesem Zusammenhang ansehen. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist es, die Hasse-Weil-Zeta-Funktion nicht mit einer zu G gehörigen automorphen L-Funktion zu vergleichen, sondern mit einem Produkt von automorphen L-Funktionen, die zu automorphen Darstellungen von endoskopischen Gruppen von G assoziiert sind, etwa einem Produkt von der folgenden Form

$$\prod_H \prod_\Pi L(s, \Pi, r_H)^{m(H)}. \tag{1.2}$$

Dabei ist Π ein L-Paket, r_H eine virtuelle Darstellung der L-Gruppe ${}^LH$ und der Exponent möglicherweise eine rationale Zahl. Man kann erwarten, daß die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus von (1.2) als Summe von stabilisierten Spuren in einem gewissen Sinne geschrieben werden kann:

$$\sum_H ST(f_H). \tag{1.3}$$

Die Funktionen f_H werden von der Form von (1.2) diktiert. Die weitere Strategie besteht jetzt darin, die einzelnen Terme von (1.3) mit den stabilisierten Spurformeln für die verschiedenen H auszudrücken und andererseits die Stabilisierung der rechten Seite von (1.1) durchzuführen, die auch auf eine Summe von stabilisierten Spurformeln für die endoskopischen Gruppen für passende Funktionen f'_H führt. Schließlich wären die Funktionen f_H und f'_H zu vergleichen. Obgleich dieses Programm im Augenblick noch Zukunftsmusik ist, ist es Kottwitz gelungen, den elliptischen Teil der Summe auf der rechten Seite von (1.1) in der passenden Form zu schreiben.

Wir bemerken nebenbei, daß aus der Darstellung der Hasse-Weil-Zeta-Funktion in der Form (1.2) leicht folgt, daß die Eigenwerte des Frobeniuselements Wurzeln von Polynomen sind, deren Koeffizienten aus den Eigenwerten von Heckeoperatoren gebildet werden. Diese Aussage ist auch eine Folge von Kongruenzrelationen, die in vielen Fällen relativ einfach zu beweisen sind. Während aber im Fall der Gruppe $GL(2)$ die Darstellung der Hasse-Weil-Zeta-Funktion als Produkt von automorphen L-Funktionen eine Folge der Kongruenzrelationen ist, ist dies für andere Gruppen kaum zu erwarten.

Für die Berechnung der Zetafunktion reicht es, statt unserer Vermutung die Formel (1.1) zur Verfügung zu haben, und der Versuch eines Beweises dieser Formel im Falle der Gruppe G der symplektischen Ähnlichkeiten führt auf eine verhältnismäßig elementare aber subtile Frage über prinzipal polarisierte abelsche Varietäten, die wir an dieser Stelle explizit formulieren wollen. Es sei (A, Λ) eine abelsche Varietät vom CM-Typ über $\mathbf{C}$ mit einer $\mathbf{Q}$-Klasse von Polarisierungen. Dann ist (A, Λ) bereits über einer endlichen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ definiert und hat in einer gewählten Stelle $\mathfrak{p}$ über p gute Reduktion $(\bar{A}, \bar{\Lambda})$ über dem endlichen Körper $\mathbf{F}_q, q = p^n$. Der Frobeniusendomorphismus von $(\bar{A}, \bar{\Lambda})$ über $\mathbf{F}_q$ ist in einen Endomorphismus von (A,Λ) geliftet, der durch seine Aktion auf der rationalen Kohomologie ein Element $\varepsilon \in G(\mathbf{Q})$ definiert. Andererseits definiert die l-adische Kohomologie $H^1(\bar{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, \mathbf{Q}_l)$ für alle $l \neq p$ eine Konjugationsklasse $\gamma \in G(\mathbf{A}_f^p)$ und die kristalline Kohomologie (d.h. die Theorie der Dieudonnémoduln) eine getwistete Konjugationsklasse $\delta \in G(L)$. Die Vermutung von Kottwitz ist, daß die Invariante $\kappa(\varepsilon;\gamma,\delta)$ gleich 1 ist.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt jedoch nicht in dem Beweis unserer Vermutung oder ihrer Abschwächung, sondern in ihrer Formulierung. Die Vermutung beschreibt die Punkte der Reduktion modulo p als disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen, die von Konjugationsklassen von *zulässigen* Homomorphismen von *Gerben* in die zu G assoziierte neutrale Gerbe parametrisiert werden,

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_G.$$

Hier ist $\mathcal{P}$ eine explizit konstruierte Gerbe. Um diese Konstruktion durchführen zu können, haben wir es vorgezogen, den Begriff einer Gerbe möglichst einfach aufzufassen, als eine Erweiterung einer Galoisgruppe durch eine algebraische Gruppe (den “Kern” der Gerbe), da wir uns außerstande fühlten, mit dem abstrakten Begriff umzugehen. Die Konstruktion von $\mathcal{P}$ ist ein Hauptanliegen unserer Arbeit, wie auch die Konstruktion des Homomorphismus

$$\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_T,$$

der zu einem über $\mathbf{Q}$ definierten algebraischen Torus T und einem Kocharakter μ von T assoziiert ist. Falls $(T,h_T) \subset (G,h)$ einen “speziellen Punkt” der Shimuravarietät definiert, so erhalten wir aus $\psi_{T,\mu}$, mit $\mu = \mu_{h_T}$, durch Komposition mit der Inklusion $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_G$ einen Homomorphismus $\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_G$, der sich als zulässig erweist. Im Falle der guten Reduktion ist jeder zulässige Homomorphismus konjugiert zu einem Homomorphismus von dieser Form für ein passendes (T,h_T). Da im Kern von $\mathcal{P}$ ein Element δ existiert (genauer: eine Folge von Elementen δ_n, die Potenzen voneinander sind), dessen Bild in T unter $\psi_{T,\mu}$ rational ist, erhalten wir aus $\psi_{T,\mu}$ ein Element $\gamma \in G(\mathbf{Q})$. Man kann leicht zeigen, daß

(γ, h_T) ein Frobeniuspaar im Sinne von [L1] ist und daß die Zuordnung $\phi \longrightarrow (\gamma, h)$ eine Bijektion zwischen den *lokalen* Äquivalenzklassen von zulässigen Homomorphismen ϕ und den Äquivalenzklassen von Frobeniuspaaren liefert. Hier heißen zwei Homomorphismen von Gerben über $\mathbf{Q}$ lokal äquivalent, falls ihre Lokalisierungen in jeder Stelle konjugiert sind. Man sieht auf diese Weise ein, daß die hier formulierte Vermutung die von dem ersten von uns in [L1] geäußerte Vermutung zur Folge hat; aber die neue Vermutung ist präziser, insofern als die in [L1] definierte Einbettung der dort definierten Gruppe $I(\mathbf{A}_f^p)$ in $G(\mathbf{A}_f^p)$ dort nicht hinreichend genau definiert ist, um die Formel (1.1) aus ihr abzuleiten.

Die neue Vermutung hat aber auch einen anderen Vorteil gegenüber der alten, der sogar historisch gesehen ihr Ursprung ist. Der alte Vermutung versagt nämlich bereits in den enfachsten Fällen schlechter Reduktion. Dies spiegelt sich einerseits darin wider, daß dann nicht jeder zulässige Homomorphismus von der Form $\psi_{T,\mu}$ ist, und andererseits darin, daß der Liftungssatz von Zink [Z1] in diesen Fällen nicht mehr gültig ist. In der vorliegenden Arbeit haben wir den Fall schlechter Reduktion weitgehend vernachlässigt. Der zweite Autor beabsichtigt, in einer noch zu schreibenden Arbeit einige Fälle schlechter Reduktion eingehender zu behandeln, und so die Vermutung aus einer zweiten Perspektive zu beleuchten.

Die Natur der neuen Vermutung hat ihren philosophischen Hintergrund in der Grothendieck'schen Theorie der Motive. Die Existenz der Kategorie der Motive über einem endlichen Körper kann bisher nur unter Benutzung der noch nicht bewiesenen Standardvermutungen nachgewiesen werden. Andererseits ordnet die von Grothendieck entworfene Theorie der Tannakakategorien, die von Saavedra Rivano in [Sa] und Deligne und Milne in [DM] entwickelt wurde, einer abelschen Kategorie mit Zusatzstrukturen, inbesondere einem Tensorprodukt, eine Gerbe zu (wir haben das französische Wort beibehalten, denn die am nächsten liegenden Übersetzungen scheinen schon besetzt zu sein). Die Gerbe $\mathcal{P}$ ist diejenige Gerbe, die zur Kategorie der Motive über endlichen Körpern, falls sie existierte, gehört.

Wir erklären jetzt die Organisation des Artikels. Im §2 definieren wir eine Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ mit Zusatzstrukturen über einem globalen Körper, die zu einem Torus T und zwei Kocharakteren

ν_1, ν_2 gehört. Falls diese Kocharaktere durch "Mittelung" aus einem einzigen Kocharakter μ entstehen, so konstruieren wir eine explizite Neutralisierung $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2} \cong \mathcal{G}_T$. Die Hauptresultate dieses Abschnitts sind die Sätze 2.1 und 2.2. Die Konstruktion benutzt die Klassenkörpertheorie und die Theorie von Tate-Nakayama und verläuft ähnlich wie die Konstruktion der Taniyamagruppe. Es scheint uns ein nützliches Unterfangen, die Konstruktion durch eine Universaleigenschaft zu charakterisieren. Dies würde unsere unständlichen Kozykel-Verifikationen ersetzen und vielleicht mehr Einsicht in die hier herrschenden Verhältnisse liefern. Im §3 wenden wir diese Konstruktionen auf den Torus T an, dessen Charaktergruppe von der Menge der Weil-q-Zahlen erzeugt ist. Wir zeigen, daß dieser Torus so einfache Kohomologie hat, daß die so konstruierte Gerbe $\mathcal{P}$, wie auch die zu (T, μ) assoziierten Homomorphismen $\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_T$ eindeutig charakterisiert werden können. Die Abschnitte 2 und 3 liefern die Basis für die Formulierung unserer Vermutung. Die Vermutung über die Reduktion modulo p einer Shimuravarietät $S(G, h)$ ist zu Beginn des §5 formuliert. Dort erklären wir auch genau, welche Bedingungen wir an G und an die Primzahl p stellen. Der Rest des §5 ist dem Beweis der Sätze 5.21 und 5.25 gewidmet, die den Übergang von der Vermutung zur Formel (1.1) gestatten. Breiter Raum wird dabei der Definition der Kottwitz-Invariante gewidmet. Die restlichen Abschnitte sind von weniger zentralen Interesse für unsere Arbeit. Im §4 zeigen wir unter Annahme der Tate- und der Hodgevermutung, daß die Gerbe, die der mittels der Standardvermutungen konstruierten Tannakakategorie $M_{\mathbf{F}}$ der Motive über endlichen Körpern entspricht, samt zusätzlicher, beispielsweise durch die verschiedenen Kohomologietheorien definierten Struktur, zur Gerbe $\mathcal{P}$ des dritten Abschnitts isomorph ist.

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen eine etwas ausführlichere, aber immer noch skizzenhafte Darlegung des Kapitels VI. in [Sa]. Im §6 zeigen wir, daß die in §4 vorgenommene Identifizierung von Gerben die Vermutung des §5 für Shimuravarietäten, die gewisse Modulprobleme lösen, zum Beispiel für die der symplektischen Gruppe entsprechende Varietät, zur Folge hat. In diesem Abschnitt stützen wir uns auf Arbeiten von T. Zink [Z1], [Z2]. Da es sich dabei um einen konditionellen Satz handelt, haben wir uns kurz gefaßt. Wir weisen jedoch ausdrücklich auf den Beweis von Satz 6.3 hin, in dem der Satz 4.4 verwendet wird. Es ist an dieser Stelle, daß die weiter oben formulierte Kottwitz'sche Vermutung über abelsche Varietäten zum Tragen kommen sollte, so daß aus ihr die Formel (1.1) zumindest im Falle der symplektischen Gruppe folgen solle. Wir haben in der Tat den Beweis mit Absicht so geführt, daß er sich möglicherweise auf den Beweis der Formel (1.1) anwenden läßt. Im §7 führen wir zwei Beispiele an, eines, das zeigt, daß wir in der Vermutung des §5 die derivierte Gruppe als einfach-zusammenhängend annehmen müssen, und eines, das zeigt, daß im Falle schlechter Reduktion viele zulässige Homomorphismen ϕ nicht von der Form $\psi_{T,\mu}$ sind.

Zwei Fragen, die kaum zu umgehen sind, wenn man die Vermutung allgemein beweisen will, werden in dieser Arbeit nicht berührt. Erstens, wenn $G \to G'$ eine zentrale Erweiterung ist mit $G_{\mathrm{der}} = G'_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$, und wenn die Vermutung für G' gilt, gilt sie dann auch für G? Zweitens kommt es oft vor, daß eine Shimuravarietät Sh_1 auf eine natürliche Weise in eine zweite Sh_2 eingebettet ist. Das ist insbesondere so bei speziellen Punkten, für die Sh_1 nulldimensional ist. Wie spiegelt sich diese Einbettung in der Beschreibung der Reduktion der beiden Varietäten wider?

Wir bedanken uns bei Kottwitz, der uns seine Ergebnisse und Ideen mitgeteilt hat und uns seine Aufzeichnungen zur Verfügung gestellt hat. Der erste Autor hat anläßlich der Issai Schur Memorial Lecture in Tel-Aviv im May 1984 und der Ritt Lecture an der Columbia University im Februar 1985 über die vorliegenden Ergebnisse vorgetragen und bedankt sich bei den Zuhörern an beiden Orten für ihre Nachsicht und Geduld beim Vortragen eines immer noch provisorischen Stoffes. Wir danken beide der Humboldt-Stiftung für ihre Unterstützung mehrmaliger Besuche des ersten Autors in Heidelberg, während derer diese Arbeit zustande gekommen ist.

Im folgenden ist p eine feste Primzahl, $\bar{\mathbf{Q}}$ der Körper der algebraischen Zahlen, den wir in einen algebraischen Abschluß $\bar{\mathbf{Q}}_p$ von $\bar{\mathbf{Q}}_p$ eingebettet haben. Wir bezeichnen mit $\mathbf{F}$ den entsprechenden algebraischen Abschluß von $\mathbf{F}_p$.

§2. KOHOMOLOGISCHE KONSTRUKTIONEN

Dieser Abschnitt ist einigen Konstruktionen aus der Galoiskohomologie gewidmet. Zunächst erklären wir unsere Terminologie.

Es sei k ein Körper der Charakteristik Null, der für uns entweder ein globaler oder ein lokaler Körper sein wird. Es sei G eine algebraische Gruppe über einem algebraischen Abschluß $\bar{k}$. Falls $G = \operatorname{Spec} A$, $A = \Gamma(G)$, und falls $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$, so heißt ein Automorphismus κ von $G(\bar{k})$ σ-linear, falls es einen σ-linearen Automorphismus κ' der Algebra A gibt, so daß

$$\kappa'(f)\big(\kappa(g)\big) = \sigma\big(f(g)\big), \quad f \in A,\, g \in G(k).$$

Das einfachste Beispiel ergibt sich durch die Aktion von $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ auf $G(\bar{k})$, falls G über k definiert ist. Eine Galoisgerbe über k ist eine Gruppenerweiterung

$$1 \longrightarrow G(\bar{k}) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1$$

zusammen mit einem Schnitt $\sigma \longrightarrow g_\sigma$ für $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/K)$, für eine passende endliche Erweiterung K von k, so daß der σ-lineare Automorphismus

$$\kappa(\sigma) : g \longrightarrow g_\sigma g g_\sigma^{-1}, \quad g \in G(\bar{k}),$$

von einer K-Struktur auf G herrührt. Es muß außerdem für jedes $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ und jeden Repräsentanten g_σ der Automorphismus $\kappa(\sigma)$ σ-linear sein. Es ist dabei verstanden, daß die endliche Erweiterung K durch eine größere endliche Erweiterung K' ersetzt werden kann, so daß es sich in Wirklichkeit um einen Schnittkeim $\{g_\sigma\}$ für die Krulltopologie auf $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ handelt. In den Bezeichnungen lassen wir den Schnittkeim häufig weg und bezeichnen eine Galoisgerbe, manchmal auch kurz Gerbe genannt, einfach mit $\mathcal{G}$. Wir nennen G den *Kern* der Gerbe. Ein Homomorphismus von Gerben ist ein Homomorphismus der entsprechenden Erweiterungen, der die Schnittkeime ineinander überführt und dessen Einschränkung auf den Kern algebraisch ist. Ein Element g aus dem Kern definiert durch Konjugation einen

Automorphismus einer Gerbe. In der Tat ist für eine genügend große endliche Erweiterung K/k das Element g K-rational.

$$g_\sigma g g_\sigma^{-1} = \sigma(g) = g,$$

so daß die Konjugation mit g den Schnittkeim erhält. Zwei Homomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 zwischen zwei Gerben heißen *äquivalent*, falls $\phi_2 = \mathrm{ad}\, g \circ \phi_1$ mit g aus dem Kern der zweiten Gerbe. Wir verweisen auf den §4 für den Vergleich unserer Terminologie mit der in der Theorie der Tannakakategorien üblichen. Das einfachste Beispiel einer Gerbe wird durch eine über k definierte algebraische Gruppe G definiert, das halbdirekte Produkt

$$\mathcal{G}_G = G(\bar{k}) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{k}/k).$$

Eine solche Gerbe heißt *neutral*.

Wir führen zunächst einige Gerben über lokalen Körpern ein, als erste die Gewichtgerbe $\mathcal{W}$, die über $\mathbf{R}$ definiert ist. Sie ist eine Erweiterung

$$1 \to \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathcal{W} \to \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow 1.$$

Wenn $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) = \{1, \iota\}$, dann ist $\mathcal{W}$ durch $\mathbf{C}^\times$ und $w = w(\iota)$ erzeugt, wobei

$$w(\iota)^2 = -1 \in \mathbf{C}^\times$$

und

$$wzw^{-1} = \iota(z) = \bar{z}, \quad z \in \mathbf{C}^\times.$$

Die Gruppe $\mathbf{C}^\times$ ist also als $\mathbf{G}_m(\mathbf{C})$ aufzufassen.

Als zweites führen wir die Dieudonnégerben ein. Die eigentliche Dieudonnégerbe wird sich als direkter Limes solcher Gerben erweisen. Es sei also K eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbf{Q}_p$. Wir definieren folgendermaßen eine Erweiterung:

$$1 \to K^\times \to \mathcal{D}_K^K \to \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p) \to 1.$$

Sie wird durch $K^\times$ und $d_K^K(\sigma)$ erzeugt, wobei $d_K^K(\sigma) \to \sigma, d_K^K(\sigma)z = \sigma(z)d_K^K(\sigma), z \in K^\times$, und $d_K^K(\varrho)d_K^K(\sigma) = d_{\varrho,\sigma}^K d_K^K(\varrho\sigma)$. Dabei ist $d_{\varrho,\sigma}^K$ ein 2-Kozyklus in der fundamentalen Klasse der Erweiterung $K/\mathbf{Q}_p$. Die Erweiterung ist bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt, und dem Satz 90 zufolge ist dieser Isomorphismus bis auf Konjugation mit einem Element aus $K^\times$ eindeutig bestimmt.

Die Gerbe $\mathcal{D}^K$ erhalten wir durch Zurückziehen und Vorwärtsschieben mittels des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & K^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_K^K \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p) \arrow[r] & 1 \\
 & \bar{\mathbf{Q}}_p^\times & & &
\end{tikzcd}$$

Die Gruppe $\bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ ist wiederum als $\mathbf{G}_m(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ aufzufassen.

Wir bezeichnen den Repräsentanten von σ in $\mathcal{D}^K$ mit $d_\sigma^K = d_\sigma$, und fassen $d_{\varrho,\sigma}^K$ als einen Kozyklus zur Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ auf. Es sei $K \subseteqq K'$. Dann gilt

$$(d_{\varrho,\sigma}^{K'})^k = d_{\varrho,\sigma}^K c_\varrho \varrho(c_\sigma) c_{\varrho\sigma}^{-1},\ k = [K' : K].$$

Wir können also einen Homomorphismus $\mathcal{D}^{K'} \to \mathcal{D}^K$ definieren, indem wir $z \in \bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ nach z^k schicken, und $d_\varrho^{K'}$ nach $c_\varrho^{-1} d_\varrho^K$. Wegen des Satz 90 ist dieser Homomorphismus bis auf Konjugation mit einem Element aus $\bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ eindeutig bestimmt.

Lemma 2.1. *Es sei $\phi : \mathcal{D}^K \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Gerben. Dann gibt es eine unverzweigte Erweiterung L von $\mathbf{Q}_p$, einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{D}^L \to \mathcal{G}$, und eine Erweiterung K_1, die K und L enthält, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{K_1} & \longrightarrow & \mathcal{D}^{L} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \psi \\ \mathcal{D}^{K} & \xrightarrow[\phi]{} & \mathcal{G}. \end{array}$$

Es seien L die unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$, deren Grad über $\mathbf{Q}_p$ gleich dem von K ist und K_1 die Zusammensetzung von L und K. Da die zwei Kozyklen $d^K_{\varrho,\sigma}$ und $d^L_{\varrho,\sigma}$ äquivalent sind, sind $\mathcal{D}^K$ und $\mathcal{D}^L$ isomorph. Der Isomorphismus ist bis auf Konjugation mit einem Element aus $\bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ eindeutig bestimmt. Die Existenz von ψ ist deshalb klar.

Es ist klar, daß das Verfahren, mit dem wir $\mathcal{D}^K$ definiert haben, über einem beliebigen lokalen Körper verwendbar ist. Über $\mathbf{R}$ führt es zur Gruppe $\mathcal{D}^{\mathbf{C}} = \mathcal{W}$, und wir brauchen es tatsächlich nur über $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}_p$. Nichtsdestoweniger der Klarheit halber werden wir die globalen Gerben dieses Abschnitts allgemeiner als eigentlich nötig einführen, und dafür brauchen wir die allgemeinen $\mathcal{D}^K$'s. Die triviale Gerbe

$$1 \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1$$

bezeichnen wir mit Gal_k und, wenn $k = \mathbf{Q}_l$, mit $\mathcal{G}_l$.

Es sei jetzt T ein Torus über dem endlichen Zahlkörper F, der über der Galoiserweiterung L zerfällt. Wie üblich seien

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m), \quad X_*(T) = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{Z}).$$

Das zu $\mu \in X_*(T)$ gehörige Element aus $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ schreiben wir in der Form: $x \to x^\mu$. Wir fixieren im folgenden zwei Stellen ν_1 und ν_2 von F, die wir auf L erweitern. Die erweiterten Stellen werden mit ν_1' und ν_2' bezeichnet. Es seien gegeben zwei Elemente ν_1 und ν_2 aus $X_*(T)$ mit folgenden Eigenschaften:

(2.a) $\qquad$ ν_i ist invariant unter $\mathrm{Gal}(L_{\nu_i'}/F_{\nu_i})$.

(2.b) Es gilt

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})} \sigma\nu_1 + \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L_{v_2'}/F_{v_2})} \sigma\nu_2 = 0.$$

Nach der Theorie von Tate-Nakayama entspricht ν_i einer Klasse α_i aus $H^2\big(\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})\big)\big(T(L_{v_i})\big)$. Wegen (2.b) existiert ferner eine globale Klasse aus $H^2\big(\mathrm{Gal}(L/F), T(L)\big)$, deren lokale Komponenten außerhalb v_1 und v_2 trivial sind und die in v_i gleich α_i ist. Diese globale Klasse, die allerdings nicht eindeutig definiert ist, spielt eine wichtige Rolle in der Konstruktion der T, ν_1, ν_2 zugeordneten Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$. Sie wird jetzt mit Hilfe der Weilgruppe explizit eingeführt.

Die Gerbe $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ ist eine Gerbe über F mit Kern T, folglich eine Erweiterung

$$1 \to T(\bar{F}) \to \mathcal{T} \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to 1.$$

Um sie zu definieren, brauchen wir einen 2-Kozyklus $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ von $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ mit Werten aus $T(\bar{F})$. Dann ist $\mathcal{T}$ durch t_ϱ, $\varrho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ und $T(\bar{F})$ erzeugt, und

$$t_\varrho t_\sigma = t_{\varrho,\sigma} t_{\varrho\sigma}.$$

Die Lokalisierung $\mathcal{G}_v$ von $\mathcal{G}$ an der Stelle v von F ist eine Gerbe über F_v, die durch folgendes Diagramm definiert werden kann:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \mathcal{G}(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \\
 & \mathcal{G}(\bar{F}_v) & &
\end{tikzcd}$$

Ein Homomorphismus ϕ einer über F_v definierten Gerbe $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}_v$.

Gewöhnlicherweise ist es besser, eine endliche Erweiterung K von F derart zu wählen, daß $\mathcal{G}$ über K definiert werden kann, also durch ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & G(K) & \longrightarrow & \mathcal{G}_K & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & G(\bar{K}) & & & & & & \end{array}$$

Wenn v_0' eine Erweiterung von v auf K ist, kann $\mathcal{G}_v$ über $K_{v_0'}$ definiert werden, und wenn K hinreichend groß ist, ist $\mathcal{H}$ auch über $K_{v_0'}$ definiert und ϕ durch $\phi : \mathcal{H}_{K_{v_0'}} \to \mathcal{G}_{K_{v_0'}}$.

Um die Wahl von v_0' zu vermeiden, können wir durch die Einbettung

$$G(K) \to \prod_{v'|v} G(K_{v'})$$

eine Erweiterung

$$1 \to \prod_{v'|v} G(_{Kv'}) \to \mathcal{G}_v^* \to \mathrm{Gal}(K/F) \to 1$$

einführen. In dem Fall, daß G über F definiert ist und $g_\sigma g g_\sigma^{-1} = \sigma(g)$, und wir intressieren uns für keinen anderen, läßt sich die Erweiterung $\mathcal{G}_v^*$ mittels $\mathcal{G}_v$ allein definieren.

In der Tat, jedem v' ordnen wir ein $\mu = \mu_{v'}$ aus $\mathrm{Gal}(K/F)$ der Art zu, daß $|\mu x|_{v'} = |x|_{v_0'}$, $x \in K$. Dann erweitert sich $\mu : x \to \mu x$ zu einem Isomorphismus $\mu : K_{v_0'} \to K_v'$, der wiederum $\mu : G(K_{v_0'}) \to G(K_{v'})$ definiert. Folglich ist

$$\prod_{v'|v} G(K_{v'})$$

ein induziertes Objekt für die Gruppe $\mathrm{Gal}(K/F)$. Der Kozyklus $\{g_{\varrho,\sigma}\}$ nimmt Werte in dieser Gruppe und zwar in ihrem Zentrum an. Wir können einen zweiten Kozyklus einführen, indem wir

$$\sigma\mu = \mu'\sigma_{\mu'}, \quad \varrho\mu' = \mu''\varrho_{u''}, \quad \varrho_{\mu''}, \sigma_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(K_{v_0'}|F_v)$$

schreiben, und

$$g'_{\varrho,\sigma} = \prod_{\mu''} \mu'' g_{\varrho_{\mu''},\sigma_{\mu'}}.$$

setzen. Es liegen μ, μ', μ'' in $\{\mu_{v'}\}$, das ein Repräsentantensystem für $\mathrm{Gal}(K_{v'_0}/K_v)$ in $\mathrm{Gal}(K/F)$ ist, und das Produkt erstreckt sich über diese Menge. Nach dem Shapirolemma angewandt auf das Zentrum sind die beiden Kozyklen $\{g_{\varrho,\sigma}\}$ und $\{g'_{\varrho,\sigma}\}$ äquivalent.

Wir können dasselbe Verfahren auf $\mathcal{H}$ anwenden, um $\mathcal{H}^*$ zu bekommen. Dann definiert $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}_v$ auch $\phi^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{G}_v^*$. Wenn wir das Shapirolemma nochmals anwenden, diesmal auf G, sehen wir sofort ein, daß zwei Homomorphismen ϕ, ϕ_1 dann und nur dann äquivalent sind, wenn $\phi_1^* = \mathrm{ad}\, g \circ \phi^*$ mit $g \in \prod_{v'|v} G(K_{v'})$.

Diese etwas umständlichen Betrachtungen werden vorgeführt, weil $\mathcal{T}$ mit Homomorphismen

$$\zeta_{v_i} : \mathcal{D}^{L_{v'_i}} \to \mathcal{T}, i = 1, 2, \quad \zeta_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{T}, v \neq v_i,$$

ausgestattet werden soll. Die Einschränkung von ζ_{v_i} auf den Kern wird durch $x \to x^{\nu_i}$ definiert. Es seien $d^1_{\varrho,\sigma}$ und $d^2_{\varrho,\sigma}$ die durch $(d^{L_{v'_1}}_{\varrho,\sigma})^{\nu_1}$ und $(d^{L_{v'_2}}_{\varrho,\sigma})^{\nu_2}$ definierten Kozyklen von $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ mit jeweiligen Werten in $\prod_{v'|v_{i'}} T(L_{v'})$.

Nach den vorangestellten Bemerkungen werden ζ_{v_i} und ζ_v definiert sein, wenn wir jedem ϱ aus $\mathrm{Gal}(L/F)$ ein Element e_ϱ aus $T(\mathbf{A}_L)$ zuordnen können, so daß

$$e_\varrho \varrho(e_\sigma) e^{-1}_{\varrho\sigma} t_{\varrho,\sigma} = d^1_{\varrho,\sigma} d^2_{\varrho,\sigma}.$$

Die Abbildung ζ_v^*, wobei v gleich v_i sein kann, erhält man, indem man e_ϱ auf $\prod_{v'|v} T(L_v)$ projiziert, um $e_\varrho(v)$ zu bekommen, und dann d_ϱ $(v = v_i)$ oder ϱ $(v \neq v_i)$ nach $e_\varrho(v) t_\varrho$ schickt.

Um den Kozyklus $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ und die Elemente e_ϱ zu bekommen, wählen wir in der üblichen Weise [MS1] Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & L^*_{v_i} & \longrightarrow & W_{L_{v_i}/F_{v_i}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L_{v_{i'}}/F_{v_i}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & C_L & \longrightarrow & W_{L/F} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/F) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Wir wählen ferner wie in [MS1] Repräentantensysteme $\mathfrak{S}_i$ von $\mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$ mit $1 \in \mathfrak{S}_i$. Schließlich wählen wir Repräsentanten $\omega_\sigma \in W_{L_{v_i'}/F_{v_i}}$ von $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$ und $\omega_\mu \in W_{L/F}$ von $\mu \in \mathfrak{S}_i$ mit $\omega_1 = 1$ in beiden Fällen und setzen

$$\omega_{\mu\sigma} = \omega_\mu\omega_\sigma,\ \mu \in \mathfrak{S}_i,\ ,\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}).$$

Diese Repräsentanten sowie der entsprechende durch die Gleichungen

$$\omega_\varrho\omega_\sigma = A_{\varrho,\sigma}(i)\omega_{\varrho\sigma},\ \varrho,\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$$

definierte Kozyklus hängen von i ab. Es gelten folgende Bedingungen:

(i) $A_{\varrho,\sigma}(i) = d_{\varrho,\sigma}^{L_{v_i'}}, \quad \varrho,\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$,

(ii) $A_{\mu,\sigma}(i) = 1, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}),\ \mu \in \mathfrak{S}_i$,

(iii) $A_{\mu\varrho,\sigma}(i) = \mu A_{\varrho,\sigma}(i) \in \mu(L_{v_{i'}}), \quad \varrho,\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}),\ \mu \in \mathfrak{S}_i$.

Um $d^i_{\varrho,\sigma}$ zu definieren, brauchen wir ein Repräsentantensystem von $\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$. Wir nehmen die ω_σ.

Es sei

$$\eta = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})} \sigma\nu_1 = -\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L_{v_2'}/F_{v_2})} \sigma\nu_2.$$

Die Kozyklen $\{A_{\varrho,\sigma}(1)\}$ und $\{A_{\varrho,\sigma}(2)\}$ sind kohomolog. Es gelte

$$A_{\varrho,\sigma}(1)A^{-1}_{\varrho,\sigma}(2) = B_\varrho\varrho(B_\sigma)B^{-1}_{\varrho\sigma},$$

mit $B_\varrho \in C_L$. Dann gilt auch

(2.c) $$A^\eta_{\varrho,\sigma}(1)A^{-\eta}_{\varrho,\sigma}(2) = B^\eta_\varrho\varrho(B_\sigma)^\eta B^{-\eta}_{\varrho\sigma}.$$

Wir führen folgende Elemente aus $C_L \otimes X_*(T)$ ein:

$$C_\varrho(i) = \prod_{\mu \in \mathfrak{S}_i} A^{-\varrho\mu\nu_i}_{\varrho,\mu}(i); \qquad E_\varrho = C_\varrho(1)C_\varrho(2)B^\eta_\varrho.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$E_\varrho \varrho(E_\sigma) E_{\varrho\sigma}^{-1} = d^1_{\varrho,\sigma} d^2_{\varrho,\sigma}, \quad \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F). \tag{2.d}$$

Diese Gleichung gewinnt erst einen Sinn, wenn man bemerkt, daß

$$\prod_{v'|v_i} T(L_{v'}) \hookrightarrow C_L \otimes X_*(T).$$

Der Rand von $C_\varrho(i)$ ist nämlich

$$\{\prod_\mu A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}\} \{\prod_\mu \varrho A_{\sigma,\mu}^{-\varrho\sigma\mu\nu_i} A_{\varrho\sigma,\mu}^{\varrho\sigma\mu\nu_i}\}$$

oder

$$A_{\varrho,\sigma}^{\pm\eta}(i) \prod_\mu A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}(i) A_{\varrho,\mu\sigma_\mu}^{\varrho\mu\nu_i}(i),$$

mit Vorzeichen gleich $(-1)^i$. Es gilt ferner

$$\prod_\mu A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}(i) A_{\varrho,\mu\sigma_\mu}^{\varrho\mu\nu_i}(i) = \prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma_\mu}^{\varrho\mu\nu_i}(i) = \prod_{\mu'} \mu' A_{\varrho\mu',\sigma_\mu}^{\mu'\nu_i}(i) = d^i_{\varrho,\sigma}.$$

Damit folgt (2.d) aus (2.c).

Die Elemente $d^i_{\varrho,\sigma}$ gehören schon zu $\prod_{v'|v_i} T(L_{v'}) \subseteqq T(\mathbf{A}_L)$. Wir liften E_ϱ nach $e_\varrho \in T(\mathbf{A}_L)$ und erhalten somit aus (2.d) Gleichungen

$$e_\varrho \varrho(e_\sigma) e_{\varrho\sigma}^{-1} t_{\varrho,\sigma} = d^1_{\varrho,\sigma} d^2_{\varrho,\sigma}$$

mit $t_{\varrho,\sigma} \in T(L)$.

Es muß jetzt nachgeprüft werden, daß $\mathfrak{T}$ mit den zusätzlichen lokalen Homomorphismen von sämtlichen während seiner Konstruktion getroffenen Wählen unabhängig ist, wobei zu bemerken ist, daß eine Abänderung von e_ϱ in $f\varrho(f^{-1})e_\varrho$, $f \in T(\mathbf{A}_L)$ zulässig ist, denn die lokalen Homomorphismen werden dabei durch äquivalente ersetzt.

Diese Wählakte zählen wir zunächst auf: (i) die Liftungen e_ϱ von E_ϱ: (ii) die berandende Kokette $\{B_\varrho\}$; (iii) das Repräsentantensystem $\mathfrak{S}_i$ und die Repräsentanten ω_μ; (iv) die Einbettung $W_{L_{v_i'}/F_{v_i}} \to W_{L/F}$ und die Repräsentanten ω_ϱ, $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'/F_{v_i}})$; (v) die v_i teilende Stelle v_i'.

(i) Wenn wir e_ϱ durch $e_\varrho' = s_\varrho e_\varrho$ ersetzen, erhalten wir den Kozyklus

$$t'_{\varrho,\sigma} = s_\varrho^{-1}\varrho(s_\sigma)^{-1}s_{\varrho\sigma}t_{\varrho,\sigma}.$$

Der durch $t'_\varrho \to S_\varrho^{-1}t_\varrho$ definierte Homomorphismus überträgt die gestrichenen lokalen Homomorphismen in die ungestrichenen.

(ii) Wenn wir B_ϱ durch $F\varrho(F^{-1})B_\varrho$ ersetzen, wird E_ϱ durch $E_\varrho F^\eta\varrho(F^{-\eta})$ ersetzt. Wir können also e_ϱ durch $e_\varrho f\varrho(f^{-1})$ ersetzen, wobei f eine Liftung von F^η ist. Somit bleibt $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ erhalten.

(iii) Die Repräsentanten $\omega_\mu, \mu \in \mathfrak{S}_1$, können wir durch $b_\mu\omega_\mu$ ersetzen. Dann wird allgemein ω_σ durch $b_\sigma\omega_\sigma$ ersetzt, wobei $b_{\mu\varrho} = b_\mu$, $\mu \in \mathfrak{S}_1$, $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_{i'}}/F_{v_1})$. Wir hätten ferner

$$B'_\varrho = b_\varrho B_\varrho$$

statt B_ϱ und

$$\begin{aligned} C_{\varrho'}(1) &= C_\varrho(1).\prod_\mu b_\varrho^{-\varrho\mu\nu_1}\varrho(b_\mu)^{-\varrho\mu\nu_1}b_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_1} \\ &= C_\varrho(1)b_\varrho^{-\eta}F\varrho(F)^{-1} \end{aligned}$$

mit

$$F = \prod_\mu b_\mu^{\mu\nu_i},$$

denn

$$b_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_i} = b_\mu^{\mu'\nu_i},$$

wenn $\varrho\mu = \mu'\varrho_{\mu'}, \varrho_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$. Daher können wir e_ϱ durch $e_\varrho f\varrho(f^{-1})$ mit f einer Liftung von F ersetzen, und $t_{\varrho,\sigma}$ bleibt dabei erhalten.

Das Repräsentantensystem $\{\mu\}$ können wir durch $\{\mu' = \mu\sigma(\mu)\}$ ersetzen, wobei $\sigma(\mu) \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$. Wir wählen $\omega'_{\mu'} = \omega_{\mu'} = \omega_\mu \omega_{\sigma(\mu)}$. Dann gilt allgemein

$$\omega'_{\mu'\sigma} = \omega_\mu \omega_{\sigma(\mu)} \omega_\sigma = \mu\bigl(A_{\sigma(\mu),\sigma}(1)\bigr)\omega_{\mu'\sigma}, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1}).$$

Wir setzen

$$b_{\mu'\sigma} = \mu A_{\sigma(\mu),\sigma}(1).$$

Es liegt in $\mu(L_{v_i'})$. Der neue Kozyklus ist

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = \varrho(b_\sigma) b_\varrho b_{\varrho\sigma}^{-1} A_{\varrho,\sigma}(1).$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} C'_\varrho(1) &= \prod_{\mu'} A'_{\varrho,\mu'}(1)^{-\varrho\mu'\nu_1} \\ &= \{\prod_\mu A_{\varrho,\mu\sigma(\mu)}(1)^{-\varrho\mu\nu_1}\}\,\{\prod_\mu \bigl(b_\varrho b_{\varrho\mu'}^{-1}\varrho\mu(A_{\sigma(\mu),1})\bigr)^{-\varrho\mu\nu_1}\}. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ist gleich

$$\prod (b_\varrho b_{\varrho\mu'}^{-1})^{-\varrho\mu\nu_1},$$

denn $A_{\sigma(\mu),1} = 1$. Der erste ist

$$C_\varrho(1) \cdot \prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma(\mu)}^{-\varrho\mu\nu_1}.$$

Folglich ist

$$E'_\varrho = E_\varrho \{\prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma(\mu)}^{-\varrho\mu\nu_1} b_{\varrho\mu'}^{\varrho\mu\nu_1}\},$$

wenn $B'_\varrho = b_\varrho B_\varrho$. Der zweite Faktor liegt in $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ und wird deshalb automatisch geliftet.

Es unterscheiden sich also $t'_{\varrho,\sigma}$ und $t_{\varrho,\sigma}$ nur um ein Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$. Da $t_{\varrho,\sigma}$ und $t'_{\varrho,\sigma}$ in $T(L)$ liegen, gilt $t_{\varrho,\sigma} = t'_{\varrho,\sigma}$. Es unterscheiden sich auch e'_ϱ und e_ϱ nur um ein Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$. Folglich sind die lokalen Homomorphismen außerhalb der Stelle

v_1 gleich. Um zu zeigen, daß sie auch in v_1 gleich sind, genügt es zu zeigen, daß die Projektion von

$$\prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma(\mu)}^{-\varrho\mu\nu_1} b_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_1}$$

auf $T(L_{v_1'})$ gleich 1 ist, wenn $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$. Das einzige Glied des Produkts, das zu dieser Projektion beiträgt, ist das $\mu = 1$ entsprechende, und es ist 1, denn $\sigma(1) = 1$ und

$$A_{\varrho\mu,1} = 1,\ b_\varrho = 1.$$

(iv) Die Einbettung $\phi : W_{L_{v_1'}/F_{v_1}} \to W_{L/F}$ können wir nur abändern, indem wir ϕ durch $\mathrm{ad}\, x \circ \phi$ ersetzen, $x \in C_L$. Wir können also ω_σ durch $x\sigma(x^{-1})\omega_\sigma$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ ersetzen. Alle Kozyklen bleiben dabei erhalten.

Wenn wir ω_ϱ durch $b_\varrho\omega_\varrho, b_\varrho \in L_{v_1'}^\times$ ersetzen, können wir ω_μ behalten, so daß $A_{\varrho,\sigma}(1)$ durch

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = A_{\varrho,\sigma}(1) b_\varrho \varrho(b_\sigma) b_{\varrho\sigma}^{-1}$$

ersetzt wird, wobei

$$b_{\mu\varrho} = \mu(b_\varrho), \quad \varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1}).$$

Da $\mu(b_\varrho) \in \mu(L_{v_1'})$ liegt, hat diese Abänderung keinen Einfluß, weder auf $t_{\varrho,\sigma}$ noch auf die lokalen Homomorphismen außerhalb v_1. Daß die Abänderung auch keinen Einfluß auf die Äquivalenzklasse von ζ_{v_1} hat, prüft man leich nach, wenn man darauf achtet, daß der auf $\mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$ abgeänderte Kozyklus auch in der Definition von $\mathcal{D}^{L_{v_1'}}$ auftritt. Die Repräsentanten $\omega_\sigma, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$ werden nämlich durch $\omega_{\sigma'} = b_\sigma\omega_\sigma$ ersetzt, und die Projektion von e_σ auf $T(L_{v_1'})$ mit b_σ^η multipliziert.

(v) Die letzte zu behandelnde Willkürlichkeit ist die Wahl von v_1'. Jede andere v_1 teilende Stelle v_1'' von L bekommt man, indem man $\lambda \in \mathfrak{S}_1$ wählt und v_1'' durch

$$|\lambda x|_{v_1''} = |x|_{v_1'}$$

definiert. Dann ist

$$\mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1}) = \lambda \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})\lambda^{-1}.$$

Dementsprechend erhalten wir die der Stelle v_1'' entsprechenden Kozyklen und Objekte, indem wir mit λ konjugieren. Zum Beispiel

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = \lambda\big(A_{\lambda^{-1}\varrho\lambda,\lambda^{-1}\sigma\lambda}(1)\big).$$

Dieser Kozyklus ist dem alten kohomolog und eine leichte Rechnung ergibt

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = A_{\varrho,\sigma}(1) D_\varrho \varrho(D_\sigma) D_{\varrho\sigma}^{-1}$$

mit

$$D_\varrho = \lambda\big(A^{-1}_{\lambda^{-1},\varrho\lambda}(1)\big) A^{-1}_{\varrho,\lambda}(1) A_{\lambda,\lambda^{-1}}(1).$$

Es gilt ferner, wenn wir $A'_{\varrho,\sigma}(1)$ zu $A'_{\varrho,\sigma}$ abkürzen,

$$C'_\varrho(1) = \prod_\mu (A_{\varrho,\lambda\mu\lambda^{-1}})^{-\varrho\lambda\mu\nu_1},$$

denn $\nu_1' = \lambda\nu_1$. Es sei $\lambda\mu = \mu'\lambda_{\mu'}$ mit $\mu' \in \mathfrak{S}_1$ und $\lambda_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_{\varrho,\lambda\mu\lambda^{-1}} &= A_{\varrho,\mu'\lambda_{\mu'}\lambda^{-1}} \\ &= \varrho(A'_{\mu',\lambda_\mu,\lambda^{-1}})^{-1} A'_{\varrho,\mu'} A'_{\varrho\mu',\lambda_{\mu'}\lambda^{-1}}, \end{aligned}$$

und

$$A'_{\varrho,\mu'} = A_{\varrho,\mu'}\varrho(D_{\mu'}) D_\varrho D^{-1}_{\varrho\mu'}.$$

Hieraus schließen wir sofort, daß E'_ϱ und E_ϱ sich um den Faktor

$$\{\prod_\mu \varrho(A_{\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}})^{\varrho\mu\nu_1}\}\,\{\prod_\mu A'_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\}^{-\varrho\mu\nu_1}\{\prod_\mu \varrho(D_\mu)^{-\varrho\mu\nu_1} D_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_1}\} \tag{2.e}$$

unterscheiden, wo wir μ statt μ' schreiben.

Wir betrachten

(2.f) $$\prod_\mu (A'_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}} D^{-1}_{\varrho\mu})^{\varrho\mu\nu_1},$$

das von ϱ abhängt und zeigen, daß es sich als ein Produkt

$$\varrho(X)YZ_\varrho$$

darstellen läßt, wobei X und Y von ϱ unabhängig sind, und Z_ϱ in $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ liegt. Dann ist (2.e) gleich

$$\varrho(Y)Y^{-1}\varrho(Z_1)Z_\varrho^{-1},$$

woraus sofort folgt, daß $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ erhalten bleibt, sowie die lokalen Homomorphismen außerhalb v_1.

Statt (2.f) behandeln wir

(2.g) $$A'_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}} D^{-1}_{\varrho\mu}$$

und schreiben es als

$$\varrho(X_\mu)Y_{\mu'}Z_{\mu,\varrho}.$$

Hier ist $\varrho\mu = \mu'\varrho_{\mu'}$, $\varrho_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(L_{v'_1/F_{v_1}})$. Der Ausdruck (2.g) gleicht

$$A_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\varrho\mu(D_{\lambda_\mu\lambda^{-1}})D^{-1}_{\varrho\mu\lambda_\mu\lambda^{-1}},$$

das wir entwickeln, um ein Produkt mit sieben Gliedern zu bekommen

$$A_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\varrho\mu\lambda(A^{-1}_{\lambda^{-1}\lambda_\mu})\varrho\mu(A^{-1}_{\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda})\varrho\mu(A_{\lambda,\lambda^{-1}})\lambda(A_{\lambda^{-1},\varrho\mu\lambda_\mu})A_{\varrho\mu\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda}A^{-1}_{\lambda,\lambda^{-1}}.$$

Wir setzen

$$X_\mu = \mu\lambda(A^{-1}_{\lambda^{-1},\lambda_\mu})\mu(A_{\lambda,\lambda^{-1}}).$$

Aus dem gesamten Produkt schneiden wir

$$A_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\varrho\mu(A^{-1}_{\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda}) = A_{\varrho\mu\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda} = A_{\varrho\mu,\lambda_\mu}$$

heraus und fügen es $Z_{\mu',\varrho}$ zu. Das Glied $A^{-1}_{\lambda,\lambda^{-1}}$ wird $Y_{\mu'}$ beigefügt. Es bleibt übrig

$$\begin{aligned}\lambda(A_{\lambda^{-1},\varrho\mu\lambda_\mu}) &= \lambda(A_{\lambda^{-1},\mu'\varrho_{\mu'},\lambda_\mu})\\ &= A^{-1}_{\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu}\lambda(A_{\lambda^{-1}\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu})\lambda(A_{\lambda^{-1},\mu'}).\end{aligned}$$

Hiervon bekommt $Z_{\mu,\varrho}$ das Produkt

$$A^{-1}_{\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu}\lambda(A_{\lambda^{-1}\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu}) = \lambda(A_{\lambda^{-1}\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu})$$

und $Y_{\mu'}$ das Glied $\lambda(A_{\lambda^{-1},\mu'})$.

Wie schon hervorgehoben, müssen wir, um die Äquivalenz der Homomorphismen in v_1 zu zeigen, nur die Homomorphismen von $\mathcal{D}^{L_{v_1''}}$ nach $\mathcal{T}$ betrachten. Der durch v_1'' definierte Homomorphismus entspricht dem Kozyklus $A'_{\varrho,\sigma}(1), \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$. Der durch v_1' definierte entspricht der Projektion von $d^1_{\varrho,\sigma}$ auf $T(L_{v_1''}), \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$. Da $\varrho\lambda = \lambda\lambda^{-1}\varrho\lambda = \lambda\varrho_\lambda,\ \varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$, ist diese Projektion nichts anderes als $A'_{\varrho,\sigma}(1)$. Bis auf einen Rand ist für $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$ die Projektion von (2.e) auf $T(L_{v_1''})$ gleich der von $\varrho(Z_1)Z_\varrho^{-1}$, die ihrerseits gleich ist

$$\varrho(A_{\lambda,1})\varrho\lambda(A_{1,1})A^{-1}_{\varrho\mu,1}\lambda(A^{-1}_{1,\varrho\lambda}) = 1,$$

denn $\lambda_\lambda = 1,\ \varrho\lambda = \lambda\varrho_\lambda$.

Es gibt noch eine Verträglichkeit nachzuprüfen, die sogar etwas ärgerlicher als die vorherigen ist. Es sei nämlich $L' \supseteqq L$ eine zweite Galoiserweiterung von F und w_i' Primstellen von L', die v_i' teilen. Es sei

$$\nu_i' = [L_{w_i'} : L_{v_i'}]\nu_i = l_i\nu_i.$$

Wir können $\mathcal{T}_{\nu_1',\nu_2'}$ samt zusätzlichen lokalen Homomorphismen einführen, und wir müssen zeigen, daß die so ausgestatteten $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ und $\mathcal{T}_{\nu_1',\nu_2'}$ kanonisch isomorph sind.

Wir vereinfachen die Bezeichnungen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{Gal}(L/F), & G' &= \mathrm{Gal}(L'/F), & H &= \mathrm{Gal}(L'/L),\\ G_i &= \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}), & G_i' &= \mathrm{Gal}(L'_{w_i'}/F_{v_i}), & H_i &= \mathrm{Gal}(L_{w_i'}/L_{v_i}).\end{aligned}$$

Die Gruppe H_i ist $H \cap G_i$, und wir wählen Repräsentanten λ von H_i in H. Dann wählen wir Repräsentanten μ' von HG_i' in G'. Als Repräsentanten von G_i' in G' nehmen wir die $\mu'\lambda$. Schließlich nehmen wir die Projektionen μ der μ' auf G als Repräsentanten von G_i in G. In der Weilgruppe $W_{L'/F}$ wählen wir $\omega_{\mu'\lambda} = \omega_{\mu'} \cdot \omega_\lambda$ mit $\omega_\lambda \in w_{L'/L}$. Wir wählen auch Rechtsrepräsentanten ν von H_i in G_i' und setzen

$$\omega_{\gamma\nu} = \omega_\gamma \omega_\nu,\ \gamma \in H_i.$$

Dann gilt

$$\omega_{\lambda\cdot\gamma}\omega_\nu := \omega_\lambda \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\nu = \omega_{\lambda\gamma\nu},$$

so daß

$$A_{\gamma,\nu} = 1,$$

wenn γ in H und ν in dem Rechtsrepräsentantensystem enthalten sind.

Es sei

$$D_{\varrho'}(i) = \prod_{\gamma\in H} A_{\varrho',\gamma}(i).$$

Wir betrachten den Kozyklus

$$A'_{\varrho',\sigma'}(i) = A^l_{\varrho',\sigma'}(i) D^{-1}_{\varrho'}(i) \varrho'\big(D^{-1}_{\sigma'}(i)\big) D_{\varrho'\sigma'}(i)$$

mit $l = [H : 1]$. Man rechnet leicht nach, daß er gleich ist

$$\prod_\gamma A^{-1}_{\varrho',\gamma} A_{\varrho',\sigma',\gamma}.$$

Folglich hängt er nur von der Projektion σ von σ' auf G ab und ist 1, falls $\sigma' \in H$.

Wir zeigen zunächst, daß

(2.h) $$A'_{\varrho',\sigma'}(i) = 1,$$

wenn $\varrho' \in H$ und $\sigma' \in HG'_i$. Das Element $\sigma'\gamma$ läßt sich als $\delta\nu$ schreiben mit $\delta \in H$ und ν aus dem Rechtsrepräsentantensystem. Dann gilt

$$A'_{\varrho',\sigma',\gamma}(i) = \varrho'\big(A'_{\delta,\nu}(i)\big)^{-1} A'_{\varrho'\delta,\nu}(i) A'_{\varrho',\delta}(i) = A'_{\varrho',\delta}(i).$$

Folglich

$$\prod_\gamma A_{\varrho',\sigma'\gamma}(i) = \prod_\delta A'_{\varrho',\delta}(i).$$

Da δ auch H durchläuft, ist (2.h) gültig.

Aus der Kozykelbedingung schließen wir, daß $A'_{\varrho',\sigma'}(i)$ nur von den Projektionen ϱ, σ abhängt und in C_L enthalten ist, wenn ϱ', σ' in HG'_i liegen. Es liegt in der Tat in $L_{v'_i} = C_L \cap \prod_{w'|v'_i} L'_{w'}$, denn

$$A'_{\varrho',\sigma'}(i) = \prod_\gamma A^{-1}_{\varrho',\gamma} A_{\varrho',\sigma'\gamma} = \prod_\gamma A^{-1}_{\varrho',\gamma}\ A_{\varrho',\gamma\nu}$$

mit $\nu = \nu(\sigma)$. Die rechte Seite ist selbst gleich

$$\prod_\gamma \varrho'(A^{-1}_{\gamma,\nu}) A_{\varrho'\gamma,\nu} = \prod_\gamma A_{\varrho'\gamma,\nu},$$

und $\varrho'\gamma \in HG'_i$.

Da die Kozyklen $A^l_{\varrho',\sigma'}$ und $A_{\varrho,\sigma}$ sowieso kohomolog sind, können wir $A_{\varrho,\sigma}$ so wählen, daß

$$A_{\varrho,\sigma} = A'_{\varrho',\sigma'},\ \varrho', \sigma' \in HG'_i.$$

Es gibt im allgemeinen eine Kokette $B_{\varrho'}(i)$, so daß

$$A^l_{\varrho',\sigma'}(i) = A_{\varrho,\sigma}(i) B_{\varrho'}(i) \varrho'\big(B_{\sigma'}(i)\big) B^{-1}_{\varrho'\sigma'}(i).$$

Das Produkt $B_{\varrho'}(i) D^{-1}_{\varrho'}(i)$ ist ein Kozyklus auf HG'_i. Folglich ist

$$B_{\varrho'}(i) = D_{\varrho'}(i) F' \varrho'(F')^{-1}, \quad F' \in C_{L'}.$$

Weil wir $B_{\varrho'}(i)$, $\varrho' \in G'$, durch

$$B_{\varrho'}(i){F'}^{-1}\varrho'(F')$$

ersetzen können, können wir annehmen, daß

$$B_{\varrho'}(i) = D_{\varrho'}(i), \quad \varrho' \in HG'_i.$$

Nachdem wir die auftretenden Kozyklen und Koketten sorgfältig und zweckmäßig gewählt haben, werden wir jetzt die erwünschte Verträglichkeit ohne allzu große Mühe nachprüfen können.

Es gilt

$$\sum_{G'|G'_1} \sigma\nu'_1 = \eta' = l\eta.$$

Wenn

$$A_{\varrho',\sigma'}(1)A^{-1}_{\varrho',\sigma'}(2) = B_{\varrho'}\varrho'(B_{\sigma'})B^{-1}_{\varrho'\sigma'},$$

dann ist der Rand von $B^l_{\varrho'}$ gleich dem von $B_\varrho B_{\varrho'}(1)B^{-1}_{\varrho'}(2)$. Folglich gilt

$$B^l_{\varrho'} = B_\varrho B_{\varrho'}(1)B^{-1}_{\varrho'}(2)F'\varrho(F')^{-1},\ F' \in C_{L'}.$$

Wir rechnen zunächst $C_{\varrho'}(i)$ aus, wobei wir z.T. das i fallen lassen.

$$\begin{aligned} C_{\varrho'}(i) &= \prod_{\mu'}\prod_{\lambda} A^{-\varrho\mu'\lambda\nu'_i}_{\varrho',\mu'\lambda} \\ &= \prod_{\mu'}\prod_{\lambda}\{\varrho'(A^{\varrho\mu'\lambda\nu'_i}_{\mu',\lambda})A^{-\varrho\mu'\lambda\nu'_i}_{\varrho',\mu',\lambda}A^{-\varrho\mu'\nu_i}_{\varrho',\mu'}\} \\ &= \prod_{\mu',\lambda}\{A^{-\varrho\mu'\lambda\nu'_i}_{\varrho'\mu,\lambda}A^{-\varrho\mu'\nu'_i}_{\varrho',\mu'}\}. \end{aligned}$$

Wir entwickeln

$$\prod_{\mu',\lambda'} A^{-\varrho\mu'\nu'_i}_{\varrho',\mu'}$$

als

$$\{\prod_{\mu} A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}\}\{\prod_{\mu'} B_{\varrho'}(i)^{-\varrho\mu'\nu_i}\varrho'\big(B_{\mu'}(i)\big)^{-\varrho\mu'\nu_i} B_{\varrho'\mu'}(i)^{\varrho\mu'\nu_i}\}$$

und bemerken, daß

$$\prod_{\mu'} B_{\varrho'}(i)^{-\varrho\mu'\nu_i} = B_{\varrho'}(i)^{(-1)^i\eta}.$$

Wir schließen aus diesem Gleichungen, daß $E_{\varrho'}$ das Produkt ist von E_ϱ, einem Rand, und den Ausdrücken

$$\text{(2.i)} \qquad \{\prod_{\mu',\lambda} A_{\varrho'\mu',\lambda}^{-\varrho\mu'\nu_i'}\}\{\prod_{\mu'} \varrho\big(B_{\mu'}(i)\big)^{-\varrho\mu'\nu_i} B_{\varrho'\mu'}(i)^{\varrho\mu'\nu}\},\ i=1,2.$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit dem Rand

$$\varrho(\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{\mu'\nu_i})\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{-\mu'\nu_i}$$

und erhalten

$$\{\prod_{\mu',\lambda} A_{\varrho'\mu',\lambda}^{-\varrho\mu'\nu_i'}\}\{\prod_{\mu'} B_{\varrho'\mu'}(i)^{\varrho\mu'\nu_i} B_{\mu'}(i)^{-\mu'\nu_i}\}.$$

Es sei $\varrho'\mu' = \mu_1'\varrho'_{\mu_1'}$, $\varrho'_{\mu_1'} \in HG_i'$. Es gelten

$$B_{\varrho'\mu'}(i)B_{\mu_1'}(i)^{-1} = A_{\mu_1',\varrho'_{\mu_1'}} A^{-1}_{\mu_1',\varrho'_{\mu_1'}}\mu_1'\big(B_{\varrho'_{\mu_1'}}(i)\big) = \mu_1'\big(B_{\varrho'_{\mu_1'}}(i)\big)$$

und

$$A_{\mu_1'\varrho'_{\mu_1'},\lambda}(i) = \mu_1'\big(A_{\varrho'_{\mu_1},\lambda}(i)\big)\, A_{\mu_1',\varrho_{\mu_1'}\lambda}(i)A^{-1}_{\mu_1',\varrho_{\mu_1'}}(i) = \mu_1'\big(A_{\varrho_{\mu_1'},\lambda}(i)\big).$$

Infolgedessen ist (2.i) durch

$$\text{(2.j)} \qquad \{\prod_{\mu',\lambda}\mu'\big(A_{\varrho'_{\mu'},\lambda}(i)\big)^{-\mu'\nu_1'}\}\{\prod_{\mu'}\mu'\big(B_{\varrho'_{\mu'}}(i)\big)^{\mu'\nu_1}\}$$

zu ersetzen. Wir schreiben hier μ' statt μ_1', um die Bezeichnung zu entlasten. Das Element $\varrho'_{\mu'}$ liegt in HG_i', so daß

$$\begin{aligned} B_{\varrho'_{\mu'}}(i) &= \prod_{\gamma\in H} A_{\varrho'_{\mu'},\gamma}(i) \\ &= \prod_{\lambda}\prod_{\gamma\in H_i} A'_{\varrho'_{\mu'},\lambda\gamma}(i) \\ &= \prod_{\lambda}\prod_{\gamma} A_{\varrho'_{\mu'},\lambda,\gamma}(i)A_{\varrho'_{\mu'},\lambda}(i). \end{aligned}$$

Da $[H_i : 1] = l_i$ und $\nu'_i = l_i\nu_i$, folgern wir hieraus, daß (2.j) gleich ist

$$\prod_{\mu',\lambda,\gamma} \mu'(A_{\varrho'_{\mu'},\lambda,\gamma})^{\mu'\nu_i}, \tag{2.k}$$

das in $\prod_{w'|v_i} T(L'_{w'})$ liegt. Es ergibt sofort die Gleichung

$$t_{\varrho',\sigma'} = t_{\varrho,\sigma}, \quad \varrho',\sigma' \in \mathrm{Gal}(L'/F), \tag{2.l}$$

denn $t^{-1}_{\varrho,\sigma} t_{\varrho',\sigma'}$ ist einerseits in $T(L')$ erhalten und andererseits in

$$\prod_{w'|v_1} T(L'_{w'}) \prod_{w'|v_2} T(L'_{w'}).$$

Es ist auch klar, daß die lokalen Homomorphismen außerhalb v_1 un v_2 äquivalent sind. Wir wollen auch zeigen, daß z.B.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{L'_{w'_1}} & \longrightarrow & \mathcal{T}'_{\nu'_1,\nu'_2} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{D}^{L_{v'_1}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}. \end{array}$$

kommutativ ist. Rechts steht der aus (2.e) hervorgehende Isomorphismus. Auf dem Kern von $\mathcal{D}^{L'_{v'_1}}$ ist die Kommutativität allerdings klar. Was sonst in Betracht kommt, ist die Projektion von (2.k) auf $T(L'_{w'_1})$, nähmlich

$$\prod_{\gamma\in H_1} A^{\nu_1}_{\varrho',\gamma}(1) = G^{\nu_1}_{\varrho'}.$$

Daher genügt es, folgende Gleichung zu zeigen:

$$A'_{\varrho',\sigma'}(1) = A^{l_1}_{\varrho',\sigma'}(1) G^{-1}_{\varrho'} \varrho'(G_{\sigma'})^{-1} G_{\varrho',\sigma'}, \quad \varrho',\sigma' \in G'_1,$$

wobei beide Ausdrücke in der Gruppe $L'^{\times}_{w'_1}$ enthalten sind.

Wir haben schon gesehen, daß

$$\begin{aligned} A'_{\varrho',\sigma'}(1) &= \prod_{\gamma\in H} A^{-1}_{\varrho',\gamma}(1) A_{\varrho',\sigma'\gamma}(1) \\ &= \prod_{\gamma} A^{-1}_{\varrho',\gamma}(1) A_{\varrho',\gamma\nu}(1), \end{aligned}$$

wobei ν der Repräsentant von σ' im Rechtsrepräsentantensystem ist. Wir haben auch gesehen, daß rechts stehende Produkt gleich $\prod_\gamma A_{\varrho',\gamma,\nu}(1)$ ist. Wir interessieren uns für dieses Produkt als ein Element aus $L'_{w_1'}$, so daß wir es auf die entsprechende Koordinate projizieren und

$$\prod_{\gamma\in H_1} A_{\varrho'\gamma,\nu}(1)$$

bekommen. Dieses Produkt ist wiederum gleich

$$\prod_{\gamma\in H_1} A^{-1}_{\varrho',\sigma'}(1)A_{\varrho',\sigma'\gamma}(1) = A^{l_1}_{\varrho',\sigma'}(1)G^{-1}_{\varrho'}\varrho'(G^{-1}_{\sigma'})G_{\varrho'\sigma'}.$$

Die Konstruktion von $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ ist offensichtlich funktoriell in T,ν_1,ν_2. Wenn wir nämlich einen über F definierten Homomorphismus $\phi : T \to T'$ und $\nu_i' = \phi(\nu_i), i = 1,2$ haben, dann bekommen wir ohne weiteres einen Homomorphismus ϕ von $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ nach $\mathcal{T}_{\nu_1',\nu_2'}$.

Wir formulieren einige der erhaltenen Resultate in einem Satz.

Satz 2.2. *Es sei T ein über F definierter Torus, der über der Galoiserweiterung L von F zerfällt. Es seien v_1 und v_2 zwei Stellen von F und v_1' und v_2' gewählte Erweiterungen auf L. Es seien zwei Kocharaktere ν_1 und ν_2 aus $X_*(T)$ gegeben, die die Bedingungen* (2.a) *und* (2.b) *erfüllen. Dann definiert die obige Konstruktion eine Gerbe $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ über F mit Kern T, die ausgestattet ist mit Homomorphismen*

$$\begin{aligned} \zeta_v &: \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{T} \qquad && v \neq v_1, v_2, \\ \zeta_{v_i} &: \mathcal{D}^{L_{v_i'}} \to \mathcal{T} \qquad && i = 1,2, \end{aligned}$$

so daß ζ_{v_i} auf dem Kern durch $x \to x^{v_i}$ gegeben ist. Diese Gerbe ist eindeutig bestimmt bis auf einen Isomorphismus, der die lokalen Homomorphismen in äquivalente überführt. Falls $L' \supseteq L$ eine größere Galoiserweiterung ist, auf die die Stellen v_i' in w_i' erweitert sind, so ergibt die obige Konstruktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}'_{\nu_1,\nu_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2},$$

wobei

$$\nu_i' = [L'_{w_i'} : L_{v_i'}] \cdot \nu_i \qquad i = 1, 2,$$

so daß die folgenden beiden Diagramme bis auf Äquivalenz kommutativ sind:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}'_{\nu_{1'},\nu_2'} \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Gal}_{F_v} \arrow[ur, "\zeta_v'"] \arrow[r, "\zeta_v"'] & \mathcal{T}'_{\nu_1,\nu_2} \end{tikzcd} \qquad v \neq v_1, v_2$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{L'_{w_i'}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}'_{\nu_1',\nu_2'} \arrow[d, "\wr"] \\ \mathcal{D}^{L_{v_i'}} \arrow[r] & \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}. \end{tikzcd}$$

Die Konstruktion ist funktoriell in T, ν_1, ν_2.

Eine Möglichkeit, die obige Situation zu erhalten, ist, daß ν_1 und ν_2 durch Mittelung aus ein und demselben Kogewicht entstehen. Es seien also T ein Torus über F und μ ein Element aus $X_*(T)$. Wir setzen

$$\nu_i = (-1)^{i+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})} \sigma\mu.$$

Wir werden einen kanonischen Homomorphismus τ_μ von der entsprechenden Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ nach der neutralen Gerbe $\mathcal{G}_T$ einführen.

Vorher definieren wir in einer sehr einfachen Weise einen Homomorphismus ξ_μ von $\mathcal{D}^{L_{v'}}$ nach $\mathcal{G}_T$. Der Körper L zerfällt T, und v' ist eine Primstelle von L, die eine Primstelle v von F teilt. Es sei

$$\nu = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'}/F_v)} \sigma\mu.$$

ξ_μ wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}\xi_\mu(z) &= z^\nu, \qquad z \in L_{v'}^\times,\\ \xi_\mu(d_\varrho) &= \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v'}/F_v)} d_{\varrho,\sigma}^{\varrho\sigma\mu} \rtimes \varrho,\end{aligned}$$

wobei $d_{\varrho,\sigma}$ der $\mathcal{D}^{L_{v'}}$ definierende Kozyklus ist, und $d_\varrho = d_\varrho^{L_{v'}}$. Man prüft leicht nach, daß ξ_μ in der Tat ein Homomorphismus ist.

Der einzuführende Homomorphismus τ_μ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\tau_\mu \circ \zeta_{v_1}$ ist zu ξ_μ äquivalent;

(ii) $\tau_\mu \circ \zeta_{v_2}$ ist zu $\xi_{-\mu}$ äquivalent;

(iii) $\tau_\mu \circ \zeta_v$ ist die kanonische Neutralisierung von $\mathcal{G}_T$. Es wird τ_μ durch

$$\tau_\mu : t_\varrho \to s_\varrho \rtimes \varrho$$

definiert, wobei $s_\varrho \in T(L)$ und

$$s_\varrho \varrho(s_\sigma) s_{\varrho\sigma}^{-1} = t_{\varrho\sigma}.$$

Es existiert ferner $f \in T(\mathbf{A}_L)$, so daß

$$f e_\varrho s_\varrho \varrho(f^{-1}) = e'_\varrho$$

folgende Eigenschaften besitzt:

(i) die Projektion von e'_ϱ auf $L_{v'}$ ist 1, wenn v' weder v_1 noch v_2 teilt;

(ii) die Projektion von e'_ϱ auf $T(L_{v'_1})$ ist

$$\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v'_i}/F_{v_i})} A_{\varrho,\sigma}^{-(-1)^i \varrho\sigma\mu}(i).$$

Es sei $\{B_\varrho\}$ die in (2.c) auftretende Kokette. Wir setzen

$$F = \prod_{\varrho \in \mathrm{Gal}(L/F)} B_\varrho^{-\varrho\mu},$$

$$E_\varrho(i) = \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_i} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})} A_{\varrho^{\tau,\sigma}}^{-(-1)^i \varrho\tau\sigma\mu}(i),$$

so daß

$$E_\varrho(i) \in \prod_{v' | v_i} T(L_{v'}).$$

Eine leichte Rechnung ergibt die Gleichung

(2.m) $$E_\varrho = E_\varrho(1) E_\varrho(2) F \varrho(F^{-1}).$$

Es gilt nähmlich für $\tau \in \mathfrak{S}_i, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_{i'}/F_{v_i}})$

$$A_{\varrho,\tau\sigma}(i) = A_{\varrho\tau,\sigma}(i) A_{\varrho,\tau}(i),$$

so daß $C_\varrho(i)$ das Produkt von

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)} A_{\varrho,\sigma}^{(-1)^i \varrho\sigma\mu}(i)$$

und

$$\prod_{\tau \in \mathfrak{S}_i} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_1'})} A_{\varrho\tau,\sigma}^{-(-1)^i \varrho\tau\sigma\mu} = E_\varrho(i)$$

ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} E_\varrho &= \{\prod_\sigma A_{\varrho,\sigma}^{-\varrho\sigma\mu}(1) A_{\varrho,\sigma}^{\varrho\sigma\mu}(2)\}\{B_\varrho^\eta E_\varrho(1) E_\varrho(2)\} \\ &= \{\prod_\sigma (B_\varrho \varrho(B_\sigma) B_{\varrho\sigma}^{-1})^{-\varrho\sigma\mu}\}\{B_\varrho^\eta E_\varrho(1) E_\varrho(2)\} \\ &= F^{-1} \varrho(F) E_\varrho(1) E_\varrho(2). \end{aligned}$$

Die Elemente $E_\varrho(i)$ sind schon nach $T(\mathbf{A}_L)$ geliftet. Wir liften F in ein Element f und bekommen

$$s_\varrho e_\varrho f \varrho(f^{-1}) = E_\varrho(1) E_\varrho(2)$$

mit $s_\varrho \in T(L)$. Es gilt also

$$e'_\varrho = E_\varrho(1)E_\varrho(2),$$

so daß e'_ϱ offensichtlich die erwünschten Eigenschaften besitzt.

Es muß nochmals nachgeprüft werden, ob s_ϱ bis auf einen Rand von den in ihrer Konstruktion getroffenen Wählakten unabhängig ist. Diese werden wieder als (i) bis (v) aufgezählt. Die unter (v) erwähnte Möglichkeit bedarf besonderer Beachtung.

(i) Wenn wir eine Liftung $e''_\varrho = r_\varrho e_\varrho,\ r_\varrho \in T(L)$ nehmen, dann wird $t_{\varrho,\sigma}$ in $t''_{\varrho,\sigma} = r_\varrho^{-1}\varrho(r_\sigma^{-1})r_{\varrho\sigma}t_{\varrho,\sigma}$ abgeändert, und der Isomorphismus zwischen den zwei so zustande gekommenen Gerben durch

$$t''_\varrho \to r_\varrho^{-1}t_\varrho$$

definiert. Da s_ϱ durch $r_\varrho^{-1}s_\varrho$ ersetzt wird, geht t''_ϱ nach $r_\varrho^{-1}s_\varrho \rtimes \varrho$ in der neutralen Gerbe $\mathcal{G}_T$, das auch das Bild von $r_\varrho^{-1}t_\varrho$ ist.

(ii) Wenn wir B_ϱ durch $B_\varrho G\varrho(G^{-1})$ ersetzen, wird F mit

$$\prod_\varrho G^{-\varrho\mu}\varrho(G)^{\varrho\mu}$$

multipliziert. Wenn wir G in g liften, können wir

$$f' = f\prod_\varrho g^{-\varrho\mu}\varrho(g)^{\varrho\mu}$$

statt f wählen, und

$$f'\varrho(f')^{-1} = f\varrho(f^{-1})g^{-\eta}\varrho(g^\eta).$$

Wir hatten schon gesehen, daß e_ϱ durch $e_\varrho g^\eta\varrho(g^{-\eta})$ ersetzt wird. Somit bleibt $\{s_\varrho\}$ erhalten.

(iii) Eine ähnliche Rechnung zeigt die Kompatibilität unter Abänderung der Repräsentanten $\omega_\tau, \tau \in \mathfrak{S}_i$. Wenn wir das Repräsentantensystem $\mathfrak{S}_i$ selbst abändern, dann wird B_ϱ mit einem Element aus $\prod_{v'|v_i} L_{v'}^\times$ multipliziert. Folglich werden weder $t_{\varrho,\sigma}$ noch s_ϱ geändert.

(iv) Eine Abänderung der Einbettung $W_{L_{v_1'}/F_{v_1}} \to W_{L/F}$ ändert die Kozyklen nicht und folglich auch nicht $\{s_\varrho\}$. Eine Abänderung von ω_ϱ, $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$ multipliziert B_ϱ mit einem Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ und verursacht keine Änderung von $\{s_\varrho\}$.

(v) Wenn wir v_1' abändern und durch v_1'' ersetzen,

$$|\lambda x|_{v_i''} = |x|_{v_1'},$$

dann ist

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})} \sigma\mu = \lambda \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})} \sigma\lambda^{-1}\mu$$

und wird im allgemeinen nur dann gleich $\lambda\nu_1$ sein, wenn λ so gewählt werden kann, daß $\lambda^{-1}\mu = \mu$. Deshalb setzen wir diese Bedingung voraus. Es ist aber sogar in diesem Fall nicht so, daß τ_μ unabhängig von v_1'' ist. Es seien nämlich $\tilde{A}_{\varrho,\sigma}$ Liftungen von $A_{\varrho,\sigma}$ und $C_{\varrho,\sigma,\tau}$ der durch

$$\varrho(\tilde{A}_{\sigma,t})\tilde{A}^{-1}_{\varrho\sigma,\tau}\tilde{A}_{\varrho,\sigma\tau}\tilde{A}^{-1}_{\varrho,\sigma} = C_{\varrho,\sigma,\tau}$$

definierte Teichmüllerkozyklus. Dann ist

$$r_\varrho = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})} C^{-\varrho\sigma\mu}_{\varrho,\sigma,\lambda}$$

ein 1-Kozyklus von $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ mit Werten aus $T(L)$ und τ_μ wird durch $\tau_\mu' : t_\varrho \to r_\varrho\tau_\mu(t_\varrho)$ ersetzt, wenn v_1' durch v_1'' ersetz wird.

E_ϱ wird nämlich mit dem Ausdruck (2.e) multipliziert, der gleich ist

$$\varrho(Y)Y^{-1}\varrho(Z_1)Z_\varrho^{-1}.$$

Andererseits wird F mit

$$U = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)} D_\sigma^{-\sigma\mu}$$

multipliziert. Nach den Definitionen ist

$$U = \prod_{\sigma} \lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma\lambda})^{\sigma\mu} A^{\sigma\mu}_{\sigma,\lambda} A^{-\sigma\mu}_{\lambda,\lambda^{-1}}$$

und

$$Y = \prod_{\tau\in\mathfrak{S}_1} A^{-\tau\nu_1}_{\lambda,\lambda^{-1}} \prod_{\tau\in\mathfrak{S}_1} \lambda(A_{\lambda^{-1},\tau})^{\tau\nu_1}.$$

Folglich gilt

$$UY^{-1} = \prod_{\sigma} \left(\lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma\lambda})^{\sigma\mu} A^{\sigma\mu}_{\sigma,\lambda}\right) \prod_{\tau} \lambda(A_{\lambda^{-1},\tau})^{\tau\nu_1}.$$

Wegen der Kozykeleigenschaft ist das erste Produkt auf der rechten Seite gleich

$$\prod_{\sigma} \lambda(A_{\lambda^{-1}\sigma,\lambda} A_{\lambda^{-1},\sigma})^{\sigma\mu} = \prod_{\sigma} A^{\sigma\mu}_{\sigma,\lambda} \prod_{\sigma} \lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma})^{\sigma\mu}.$$

Wenn σ in $\tau\ \mathrm{Gal}\,(L_{v_i'}/F_{v_1})$ liegt, ist

$$\lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma}) \equiv \lambda(A_{\lambda^{-1},t}) \qquad \left(\operatorname{mod} \tau(L_{v_1'})\right).$$

Wir können daher UY^{-1} in das Produkt von $\prod_{\sigma} \tilde{A}^{\sigma\mu}_{\sigma,\lambda}$ und einem Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ liften. Es gilt ferner

$$\prod \tilde{A}^{\sigma\mu}_{\sigma,\lambda} \prod_{\sigma} \varrho(\tilde{A}_{\sigma,\lambda})^{-\varrho\sigma\mu} = \prod_{\sigma} C^{-\varrho\sigma\mu}_{\varrho,\sigma,\lambda} = r_{\varrho},$$

denn

$$\prod_{\sigma} \tilde{A}^{\varrho\sigma\mu}_{\varrho,\sigma\lambda} A^{-\varrho\sigma\mu}_{\varrho,\sigma} = 1.$$

Somit ist $s'_{\varrho} = r_{\varrho} s_{\varrho}$.

Wir wollen schließlich zeigen, daß τ_{μ} unabhängig von L ist. Es sei $L' \supseteqq L$ eine Galoiserweiterung von F. Wir werwenden die früheren Formeln wieder. Um dasselbe Symbol nicht mit zwei Bedeutungen zu verwenden, schrieben wir

$$B^{l}_{\varrho'} = B_{\varrho} B_{\varrho'}(1) B^{-1}_{\varrho'}(2) G \varrho(G)^{-1}.$$

Aus den früheren Rechnungen ergibt sich, daß $E_{\varrho'}$ das Produkt von E_ϱ und zwei anderen Faktoren ist. Einer ist für $s_{\varrho'}$ belanglos, weil er in

$$\prod_{v'|v_1} T(L_{v'}) \prod_{v'|v_2} T(L_{v'})$$

liegt. Der andere ist

$$G^\eta \varrho(G)^{-\eta} \prod_{i=1}^{2} \{\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{\mu'\nu_i} \prod_{\mu'} \varrho\big(B_{\mu'}(i)\big)^{-\varrho\mu'\nu_i}\}.$$

Andererseits ist

$$F' = \prod_{\varrho' \in \mathrm{Gal}(L'/F)} B_{\varrho'}^{-\varrho'\mu}.$$

Wir zeigen, daß

$$F'F^{-1}G^\eta \prod_{i=1}^{2} \prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{\mu'\nu_i} \equiv V \qquad \big(\text{modulo} \prod_{v'|v_1,v_2} T(L_{v'})\big),$$

wobei V nicht nur invariant ist, sondern tatsächlich das Bild eines Elements aus $T(\mathbf{A}_F)$. Somit wird $s_{\varrho'} = s_\varrho$. Wir zeigen in der Tat, daß

$$W = (\prod_{\gamma \in H} B_\gamma^{-1}) G$$

in C_L liegt, und

$$V = \prod_{\varrho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})} \varrho(W)^{\varrho\mu},$$

was hinreicht, denn $\mathbf{A}_L \to C_L$ ist surjektiv.

Es sei $\varrho' \in \mathrm{Gal}(L'/F)$ und es sei μ'_i sein Repräsentant modulo HG'_i. Es muß gezeigt werden, daß

$$\varrho'^{-1}\big(\textstyle\prod_{\gamma\in H} B_{\varrho'\gamma}^{-1} B_\varrho G B_{\mu'_1}(1) B_{\mu'_2}^{-1}(2)\big) \tag{2.n}$$

kongruent ist zu

(2.o) $\prod_{\gamma\in H} B_\gamma^{-1}G,$

mit Gleichheit, wenn $\varrho'\in H$.

Es gilt erstens

$$\begin{aligned}\varrho'^{-1}\Big(\prod_{\gamma\in H} B_{\varrho'\gamma}^{-1}\Big) &= \prod_{\gamma} B_{\sigma'}\cdot\prod_{\gamma} B_\gamma^{-1}\cdot A_{\sigma',\varrho'\gamma}^{-1}(1)A_{\sigma',\varrho'\gamma}(2)\\ &= B_{\sigma'}^{1}\prod_{\gamma}\big(A_{\sigma',\varrho'\gamma}^{-1}(1)A_{\sigma',\varrho'\gamma}(2)\big)\prod_{\gamma}B_\gamma^{-1},\end{aligned}$$

wobei $\sigma'=\varrho'^{-1}$. Somit ist (2.n) gleich

(2.p) $B_{\sigma'}(1)B_{\sigma'}^{-1}(2)\prod_\gamma\big(A_{\sigma',\varrho'\gamma}^{-1}(1)A_{\sigma',\varrho'\gamma}(2)\big)\sigma'\big(B_{\mu_1'}(1)B_{\mu_2'}^{-1}(2)\big)\sigma(B_\varrho)B_\sigma$

mal (2.o).

Zweitens gilt

$$\sigma'\big(B_{\mu_i'}(i)\big)B_{\sigma'}(i)=B_{\sigma'\mu_i'}(i)A_{\sigma',\mu_i'}^{l}(i)A_{\sigma,\mu_i}^{-1}(i),$$

und

$$B_{\sigma'\mu_i'}(i)=\prod_{\gamma\in H}A_{\sigma'\mu_i',\gamma}(i),$$

da $\sigma'\mu_i'\in HG_i'$.

Wenn $\varrho'\in H$, so ist $B_\varrho=B_\sigma=1,\ \mu_i'=1$, und

$$\prod_\gamma A_{\sigma',\varrho'\gamma}(i)=\prod_\gamma A_{\sigma',\gamma}(i),$$

was die erwünschte Gleichheit ergibt.

Im allgemeinen, wenn $\varrho'\in\mu_i'H\nu_i$ mit ν_i aus dem Rechtsrepräsentantensystem von H_i in G_i', so gilt

$$\prod_\gamma A_{\sigma',\varrho'\gamma}(i)=\prod_\gamma A_{\sigma',\mu_i'\gamma\nu_i}(i)$$

und

$$A_{\sigma',\mu_i'\gamma\nu_i}(i)A_{\sigma',\mu_i'\gamma}^{-1}(i)=\sigma'\big(A_{\mu_i'\gamma,\nu_i}(i)^{-1}\big)A_{\sigma'\mu_i'\gamma,\nu_i}(i)\in\sigma'\mu_i'\gamma(L_{w_i'}').$$

Ferner ist

$$A^{-1}_{\sigma',\mu'_i\gamma}(i)A_{\sigma'\mu'_i,\gamma}(i)A_{\sigma',\mu'_i}(i) = \sigma' A_{\mu'_i,\gamma}(i) = 1.$$

Somit ist (2.p) gleich

$$\sigma(B_\varrho)B_\sigma A^{-1}_{\sigma,\mu_1}(1)A_{\sigma,\mu_2}(2).$$

Aber

$$A_{\sigma,\mu_i}(i) \equiv A_{\sigma,\varrho}(i) \pmod{L'_{w'_i}},$$

und

$$\sigma(B_\varrho)B_\sigma A^{-1}_{\sigma,\varrho}(1)A_{\sigma,\varrho}(2) = 1,$$

da $\varrho\sigma = 1$.

Wir formulieren wieder das Wesentliche in einem Satz.

Satz 2.3. *In der Situation von Satz 2.2 sei μ ein Element aus $X_*(T)$, das die Kocharaktere ν_i durch Mittelung ergibt*

$$\nu_i = (-1)^{i+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'_1}/F_{v_i})} \sigma\mu.$$

Dann liefert die obige Konstruktion einen Homomorphismus τ_μ von der Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ in die neutrale Gerbe $\mathcal{G}_T$, so daß $\tau_\mu \circ \zeta_v$ für $v \neq v_1, v_2$ zur kanonischen Neutralisierung äquivalent ist und so daß $\tau_\mu \circ \zeta_{v_1}$ zu ξ_μ äquivalent ist und $\tau_\mu \circ \zeta_{v_2}$ zu $\xi_{-\mu}$ (die Definition von ξ_μ erscheint nach Satz 2.2). Der Homomorphismus τ_μ ist eindeutig bestimmt bis auf die Komposition mit einem Automorphismus von $\mathcal{G}_T$, der in allen Stellen äquivalent zum identischen Automorphismus ist. Die Konstruktion ist funktoriell in T, μ.

§3. DIE PSEUDOMOTIVISCHE GALOISGRUPPE

In diesem Abschnitt führen wir zwei Gerben ein, nicht nur die eigentlich wichtige, die wir die pseudomotivische Galoisgruppe nennen, sondern auch eine untergeordnete, die nur da ist, um die Vermutung im fünften Abschnitt für die allgemeinste Shimuravarietät formulieren zu können.

Die pseudomotivische Galoisgruppe $\mathcal{P}$ ist als direkter Limes definiert. Es sei L eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbf{Q}$ im Körper $\bar{\mathbf{Q}}$ der algebraischen Zahlen in $\mathbf{C}$ und m sei eine natürliche Zahl. Wir definieren zunächst eine Gerbe $\mathcal{P}(L, m)$, deren Kern ein Torus $P(L, m)$ ist, den wir definieren, indem wir den Galoismodul seiner Charaktere vorschreiben. Es sei $q = p^m$, wobei p die ein für allemal fixierte rationale Primzahl ist.

Definition 3.1. Die Gruppe $X(L, m)$ der zu L und m zugeordneten Weilzahlen besteht aus denjenigen π aus L mit folgenden Eigenschaften.

(a) Es gibt eine ganze Zahl $v_1 = v_1(\pi)$, so daß für alle archimedischen Primstellen v von L gilt

$$|\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{R})} \sigma\pi| = q^{v_1}.$$

(b) Für jede Primstelle $v \in L$ über p gibt es ein $v_2(v) = v_2(\pi, v) \in \mathbf{Z}$ mit

$$|\pi|_v = |\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi|_p = q^{v_2(v)}.$$

(c) In allen endlichen Stellen außerhalb p ist π eine Einheit.

Aus dem Dirichletschen Einheitensatz folgt, daß $X(L, m)$ endlich erzeugt ist. Aus $X(L, m)$ dividieren wir die endliche Gruppe der darin enthaltenen Einheitswurzeln aus, um einen torsionsfreien Modul $X^*(L, m)$ zu erhalten. Den entsprechenden Torus bezeichnen wir mit $P(L, m)$. Der Modul $X^*(L, m)$ ist offensichtlich ein $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$-Modul. Folglich ist $P(L, m)$ über $\mathbf{Q}$ definiert.

Notfalls, um Mißverständnissen vorzubeugen, schreiben wir χ_π für den Charakter von $P(L,m)$, der der Weilzahl $\pi \in X(L,m)$ entspricht. Wir fixieren ein für allemal eine Einbettung $\bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{Q}}_p$ und folglich eine Primstelle v_2 von jedem in $\bar{\mathbf{Q}}$ enthaltenen endlichen algebraischen Zahlkörper L. Es sei v_1 die durch $L \subsetneqq \bar{\mathbf{Q}} \subsetneqq \mathbf{C}$ gegebene archimedische Stelle von L. Wir definieren folgendermaßen die Kogewichte ν_1, ν_2 aus $X_*(L,m) = X_*\big(P(L,m)\big)$:

(3.a) $$\langle \nu_1, \chi_\pi \rangle = \nu_1(\pi),$$

(3.b) $$\langle \nu_2, \chi_\pi \rangle = \nu_2(\pi, v_2).$$

Die Relation (2.a) ist offensichtlich, während (2.b) aus der Produktformel folgt. Dabei sollte bemerkt werden, daß dieses ν_1 sogar unter der vollen Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ invariant ist.

Folgende Funktorialitäten sind vorhanden:

(3.c) Wenn $L \subset L', \phi^*, \phi^*_{L,L'} : X^*(L,m) \to X^*(L',m)$ schickt π nach sich selbst.

(3.d) Wenn $m|m', \phi^* = \phi^*_{m,m'} : X^*(L,m) \to X^*(L,m')$ schickt π nach $\pi^{m'/m}$.

Die kontragredienten Abbildungen sind Homomorphismen der über $\mathbf{Q}$ definierten Tori $P(L',m)$ und $P(L,m')$ nach $P(L,m)$.

Lemma 3.2. *(a) Es gilt*

$$\phi_{m,m'}(\nu_i') = \nu_i.$$

(b) Es gilt

$$\phi_{L,L'}(\nu_i') = [L'_{v_i'} : L_{v_i}]\nu_i.$$

Dabei sind v_i' die durch $L' \subsetneqq \bar{\mathbf{Q}} \subsetneqq \mathbf{C}$ und $L' \subsetneqq \bar{\mathbf{Q}} \subsetneqq \bar{\mathbf{Q}}_p$ definierten Primstellen von L'.

Wenn m durch m' ersetzt wird, wird q durch $q^{m'/m}$ ersetzt. Daraus folgt die erste Behauptung sofort. Die zweite folgt aus der Gleichung

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'_{v_i'}/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi = \Big(\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i}/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi\Big)^{[L'_{v_i'}:L_{v_i}]},$$

die für $\pi \in L$ gilt.

Das Verfahren des vorigen Abschnitts ordnet dem Tripel $P(L,m), \nu_1, \nu_2$ und dem Körper L eine Gerbe $\mathcal{P}(L,m)$ zu. Aus Lemma 3.2(a) folgt, daß es einen kanonischen Homomorphismus $\phi = \phi_{m,m'} : \mathcal{P}(L,m') \to \mathcal{P}(L,m)$ gibt. Im vorigen Abschnitt worde gezeigt, daß die mittels $P(L,m), \nu_1, \nu_2$ und L definierte Gerbe der mittels $P(L,m), [L'_{v_1} : L_{v_1}]\nu_1, [L'_{v'_2} : L_{v_2}]\nu_2$ und L' definierten isomorph ist. Infolgedessen gibt es auch einen kanonischen Homomorphismus $\phi = \phi_{L,L} : \mathcal{P}(L',m) \to \mathcal{P}(L,m)$.

Als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt, in dem wir einen kanonischen Isomorphismus zwischen der pseudomotivischen Galoisgruppe

$$\mathcal{P} = \varprojlim_{L,m} \mathcal{P}(L,m)$$

und der echten motivischen Galoisgruppe aus den Standardvermutungen und der Tatevermutung ableiten, müssen wir einige kohomologische Eigenschaften des inversen Systems der $P(L,m)$ zeigen. Vorher führen wir eine zweite etwas künstliche Gerbe ein, die wir mangels Erfindungsgabe die quasimotivische Galoisgruppe nennen. Sie wird mittels der quasi-Weilzahlen definiert.

Definition 3.3. Die Gruppe $Y(L,m)$ der L und m zugeordneten quasi-Weilzahlen besteht aus denjenigen π aus L mit folgenden Eigenschaften.

(a) Es gibt eine ganze Zahl $\nu_1 = \nu_1(\pi)$, so daß für alle archimedischen Primstellen v von L gilt

$$|\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/Q)} \sigma\pi|^{[L_v:\mathbf{R}]} = q^{\nu_1 [L:\mathbf{Q}]}.$$

(b) Für jede Primstelle $v \in L$ über p gibt es ein $\nu_2(v) = \nu_2(\pi, v) \in \mathbf{Z}$ mit

$$|\pi|_v = |\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi\Big|_p = q^{\nu_2(v)}.$$

(c) In allen endlichen Primstellen außerhalb p ist π eine Einheit.