KONFORM DEĞIŞMEZ ALAN TEORISINDE ORTAYA ÇIKAN BAZI TEMEL MATEMATIK SORUNLAR

ROBERT P. LANGLANDS

Bu konuşmada genel istatistik mekanik çerçevesinde temel ama hiç çözülmemiş bazı matematik sorunları anlatmak istiyorum. Bence hem fizikçiler hem matematikçiler bu sorunları haksızca ihmal ediyorlar. Görüşlerimi başlığı "The renormalization fixed-point as a mathematical object" olan yakında bastırılan bir makalede anlattım. Orada anlattığım yaklaşımı henüz başarıyla uygulamadım. Hakikaten tasvir ettiğim yaklaşım eksik idi. Hatta varsayım olarak, aradığım kuramı henüz tam kavrayamadım. Çözümlere gerek olan her kavram ve her yapıyı henüz bulmadığımdan, onları meydana koyamadım. Aslında maksatım hırslı değil. Tam bir kuramın oluşturulmasını yalnız en sonunda, yıllarca çalıştıktan sonra beklerim. Arada kavramlar ile yapıları tek tek ve yavaş yavaş keşfedip kısmen kuramsal, kısmen sayısal yönden deniyorum. Henüz bitirilmemiş bu gelişmeyi size bugün anlatmak istiyorum. Fakat genel sorunlara dokunmamdan önce, iki somut sorun anlatayım. Birincisi perkolasyonda meydana gelen bir problemdir. Ikincisi Ising modelinde meydana gelir.

Iki model iki boyutlu bir düzlem örgüsü tarafından tanımlanır. Modeller ilk tanımlandığında kare örgüsü kullanılıyormuş, ama şimdi başka örgüler kullanılır, neredeyse her boyuttan olan herhangi bir örgü kullanılabilir. Fakat başlarken iki boyutlu kare örgü modelleri kullanalım.

Perkolasyon modeli Ising modelinden daha kolay olduğundan onunla başlayalım. Her ikisini tanımlamak için bir olasılık uzayı Π ile ortaya çıkarız. Bunun bir noktasına durum denilir. Bir durum belirlemek için örgünün her noktasının halini belirlemek lazım. Her nokta açık veya kapalı olabilir. Sistemin bir durumu o zaman birinci şekilde görülen bir nesnedir. Örgünün her kara olan noktası açıktır ve her beyaz olan noktası kapalıdır. Belli ki Π uzayı bir çarpım uzayıdır

$$\Pi = \prod_{\mathbf{Z}^2} \{0,1\}, \qquad \text{açık: } 0, \quad \text{kapalı: } 1.$$

Bu uzayda bir çarpım ölçüsü olarak bir olasılık ölçüsü ortaya çıkar. p bir olasılık olsun, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Biz bu sayıyı kullanarak $\{0,1\}$ kümesinde bir olasılık ölçüsü belirleriz.

$$\mu(0) = p, \quad \mu(1) = 1 - p,$$

yani örgüde her nokta p olasılığıyla açıktır. Π uzayındaki olasılık

$$\nu = \prod_{\mathbf{Z}^2} \mu$$

formülüyle tanımlanır.

Biz şimdi bazı olaylar ve olasılıklarını inceleyebiliriz. Mesela bir durum verilirse, biz onu sınırlı $-n \leqslant x, y \leqslant n$ karesine sınırlayabiliriz. O zaman onun bir yatay geçişi kabul edip etmediğini sorabiliriz. Bu soruyu açıklıkla anlatmak için şekilde iki basit durum gösterilir. Birisi için yatay geçiş var, diğeri için yatay geçis yok. Bir durumun en azından bir yatay geçisi

Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Kasım, 2004.

kabul etmesi olasılığı $\pi_n(p)$ olsun. Amerikalı matematikçi Kesten temel bir teorem ispatladı. Kritik olasılık denilen bir p_c sayısı var ki $0 < p_c < 1$ ve ilk olarak, $p < p_c$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(p) = 0,$$

$p_c < p$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(p) = 1,$$

ve en önemli olarak, $p = p_c$ ise,

$$0 < \overline{\lim}_{n\to\infty}\pi_n(p) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\pi_n(p) < 1.$$

Bu kritik olasılığa sayısal yaklaşabiliriz. Yaklaşık $0.5927\ldots$ dır. İstatik mekanikte biz olağan olarak yalnız çok nokta içeren sistemlerle ilgileniyoruz. Kesten'in teoremine göre kare büyük ise, yani n büyük ise, kritik olasılık p_c bazı açılardan tek bir incelenecek olasılık olur. Fakat cevaplanmamış soru var.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\pi_n(p) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\pi_n(p) = \frac{1}{2} \tag{1}$$

mi? Gerçekten bu iddiada iki denklem olduğundan iki soru var. Perkolasyon kuramında yakında çok yeni güzel teorem kanıtlanmasına rağmen, bu somut sorun çözülmemiştir.

Her yanlış anlamadan kaçınmak için, bazı örgüler için, mesela ücgen veya altıgen örgüleri için, iki denklem basit kanıtlarla oldukça kolay kanıtlanabilir, ama genel bir kanıt henüz yok. Anlatacağımız gibi bu alanda kapsamlı ve âdeta her önemli iddia içeren ana bir ilke var. Bence bu ilkenin kanıtlanması matematik açısından alanın en önemli sorunudur. Denklemlerin neredeyse her örgü için doğru olduğu ilkenin en sade ifadesidir.

Şimdi Ising modeline dönerek ikinci somut sorunu açıklamak isterim. Hem perkolasyon hem de Ising modeli her boyutta ve âdeta her örgüde tanımlanabilmesine rağmen biz gene iki boyutlu kare örgüsü modelini inceliyoruz. Gene sistemin durumu kümesi basit bir çarpımdır,

$$\prod_{\mathbf{Z}^2}\{-1, 1\}.$$

$\{0, 1\}$ kümesinin yerine $\{-1, 1\}$ kümesini koyduk. Durum verilirse, örgünün her noktasında bir mıknatıs koyulur ama bu mıknatısın tek bir gücü ve yalnız iki yönü mümkündür.

Ising modeli için durumlar kümesinde bir olasılık ölçüsü tanimlamak daha zor. Ilk olarak sonlu olan bir kareye sınırlanmış durumlar kümesinde bir olasılık ölçüsü tanımlayalım. Her duruma bir Boltzmann ağırlığı verelim. Bir durum bir fonksiyona eşdeğerdir. Fonksiyon σ olsun, her durum sonlu kareye sınırlanmış olduğundan dolayı

$$\sigma(x, y) = \pm 1, \qquad -n \leqslant x, y \leqslant n.$$

Durumun Boltzmann ağırlığı

$$\kappa(\sigma) = \sum_{x,y}\sum_{x',y'} e^{\beta\sigma(x,y)\sigma(x',y')}.$$

Toplamda (x, y) ile (x', y') çiftleri bitişiktir, $(x', y') = (x, y) \pm (1, 0)$ veya $(x', y') = (x, y) \pm (0, 1)$. (x, y) ile (x', y') iki noktası karede bulunmalı. Durumun çok bitişik çiftinde iki mıknatısın yönleri aynı ise, ağırlığı büyüktür. Halbuki bitişik çiftlerdeki mıknatısın yönleri sık sık farklı ise, ağırlığı küçüktür. Olanağı belirlemek için, Z ile gösterilen bölüşüm fonksiyonu kullanıyoruz,

$$Z = \sum_{\sigma} \kappa(\sigma).$$

O zaman σ durumunun olasılığı $\kappa(\sigma)/Z$ bölümüdür. Karelerin büyüklüğü sonsuza giderken biz limitini alıp bir ölçü ν elde ederek bütün düzlemde Ising modelini tanımlıyoruz.

Ama dikkat etmemiz lazım. Modelin sıcaklığa ait parametresi β var. Bu parametre büyük ise, karelerin büyüklüğü sonsuza giderken limit yok. En azından limit sınırdaki şartlara bağlıdır ve her mümkün limitten ibaret olan dışbükey bir küme hâsıl olur. Kritik bir sıcaklık veya kritik bir β_c sayısı var. $\beta \leqslant \beta_c$ ise, limit var. $\beta > \beta_c$ ise, limit yok. En zor sorular β_c parametresi için ortaya çıkar. Daha doğrusu bugün ilgilendiğim sorular bu parametre için ortaya çıkar.

Bazı açılardan $c_{X,X'}(\sigma) = \sigma(X)\sigma(X')$ rastsal değişkeni önemlidir. $X = (x, y)$, $X' = (x', y')$ olsun. $\beta < \beta_c$ ise ve

$$E(c_{X,X'}) = \int \sigma(X)\sigma(X')\, d\nu(\sigma)$$

beklenen değeri ise,

$$\big|E(c_{X,X'})\big| \leqslant C_1 e^{-C_2|X-X'|}, \qquad C_1, C_2 > 0 \tag{2}$$

fakat $\beta > \beta_c$ ise, tek bir ölçü ν olmamasına rağmen ölçülerin çoğunluğu için

$$\lim_{|X-X'|=\infty} E(c_{X,X'}) \neq 0. \tag{3}$$

Özellikle limit var. $\beta = \beta_c$ ise, ünlü bir varsayım var,

$$E(c_{X,X'}) \sim_{|X-X'|\to\infty} \frac{C}{|X-X'|^{1/4}}. \tag{4}$$

$X - X'$ vektörünün şekli $(a, 0)$, $(0, a)$ veya (a, a) ise, dördüncü denklem kanıtlanmıştır. Ama genel denklem henüz kanıtlanmamışdurumda. Bu problem ikinci dikkatiniza çekmek istediğim çözülmemiş somut problemdir. Bu iki problem fizikçiler tarafından geliştirilmiş olan ama gelecekteki gelişmesi için matematikçilerin sorumlu oldukları bir kurama bağlıdır. Elbette falcı değil matematikçi isek geleceği önceden görmemiz imkânı yok. Buna rağmen bu iki sorum bu kuramın dışında çözülürse çok hayret ederim. Kuramın üç ana kavramı var: evrensellik, konform değişmezlik, ve konform değişmez kuantum alan teorisi. Her boyut için geçerli olan evrensellik en önemli kavramdır. Anlaşılan konform değizmezlik de her boyutta geçerlidir, ama boyut ikiden daha büyük ise, konform değişmezlik çok güçlü değil, neredeyse döngüsel değişmezliğe eşdeğerdir. Halbuki konform değişmez alan teorisi aslında iki boyutlu bir kavramdır.

Evrensellik hem laboratuvarda hem de modellerde incelenen faz geçişlerine ait önemli bir fenomendir. Modellere veya donma ile buharlaşma gibi doğal süreçlere ait kritik üsler evrenseldir, yani kapsamlı şekilde modelden veya özel kimyasal maddeden bağımsızdır. Çok abartmadan bu keşifin matematik açısından yirmi yüzyılın ortasinin fizik ile kimyada en önemli keşiflerden birisi olduğunu diyebiliriz.[1] Bu fenomenin dinamik sistemlerin çerçevesinde güzel ve inandırıcı bir yorumu var.

Dördüncü denklemi anlatırken, incelediğimiz bölgeyi daima büyütürdük, yani X ile X''i arasındaki uzunluğu sonsuza götürdük. Ama bu işleme eşdeğer olarak biz örgünün gözeneğini küçültürsek, X ile X' değiştirmeden hep aynı bölgede kalıyoruz. Bu değişmeyi doğru yorumlamalıyız. Ölçek değişmesin, model değişsin diye, yorumluyoruz. Örgünün gözeneği küçülerek ne kadar ufak olsa olsun herhangi bir bölgede nihayet çok gözü olur. Dolayısıyla değişme ölçeği değiştirmeyerek bir modeli başka bir modele yollayan bir dönüşüm bulunur. Bu

[1] Keşifin tarihi Cyril Domb'un yazdiği *The critical point* adlı güzel bir kitapta tarif edilir.

dönüşümü R_λ işaretiyle gösterelim. Örgünün gözeneğinin küçüldüğü oran $1/\lambda$ sayısıdır. Belli ki $R_\lambda \circ R_\mu = R_{\lambda\mu}$. Hatta başladığımız model basit ise, dönüşümün verdiği model karmaşık olabilir. İşlem tekrarlanarak modelin karmaşıklığı daima artar ki R_λ dönüşümler yalnız sonsuz boyutlu uzayda tanımlanabilir.

Bu dönüşümler, gerçekten ihtimamla henüz tanımlanmış olmamalarına rağmen, evrenselliği inandırıcı hale getirirler. Evrensellik, parametrenin kritik olduğunda meydana gelen bir fenomendir. Anlattığımız nedenle dönüşümleri ihtimamla tanımlamak istersek sonsuz boyutlu bir uzayda çalışmalıyız. Istersek uzayın modellerden ibaret olduğunu tasavvur edebiliriz. Evrenselliğin genel anlatımına göre, modeller uzayında karşı boyutu (codimension) sonlu olan altuzay bulunur. Bu uzayda bulunan modellere kritik denilir. En basit hallerde λ sonsuza giderken dönüşümler kritik altuzayda bulunan her noktayı veya istersek her modeli bir sabit noktaya sürerler, ama kritik altuzayda bulunmayan noktaları altuzaydan uzaklaştırırlar. Başka dinamik sistemlerde olağan olarak birçok sabit nokta mevcut olabilir, ama birinin civarında dönüşümler tasvir ettiğim gibi davranırlar. Dolayısıyla her modelin kritik üşları dönüşümlerin bir sabit noktanın civarındaki davranış tarafından belirlenmiştir ve bu noktaya bağlı olan altuzayın yakındaki her model veya her parametre için aynıdır.

Fizikçiler bu açıklamaya kanidir. Çok yönden, mesela hesapların sonuçların açıklaması nedeniyle, fakat hele doğal fenomenlerin birleştirilmiş şekilde anlatılması nedeniyle, hakları var, ama aynı zamanda matematik açısından açıklama o kadar güzel ki onu ispatlamak isteriz. Ispatına engel olan zorluk bellidir. Kritik altuzayın karşı boyutu sıfır olsa sabit noktası çekici olur, ve o zaman Newton'un yönteminde kullanılan yöntemlerle biz kuşkusuz bir kanıt bulabiliriz. Fakat örgünün boyutu birden daha büyük ise, problemdeki karşı boyut sıfır değil. Dolayısıyla problem olağan sabit nokta teorisinin çerçevesine sokulamıyor.

Perkolasyon için evrensellik ispatlanmış ise, birinci denklem derhal elde ettiğimiz sonucudur. O zaman en azından iki kanıt olacaktı. Mesela evrenselliğe göre geçiş olasılıkları perkolasyon modellerin hepsine ortak olduğundan, birinci denklem de üçgen örgüsü veya altıgen örgüsü için doğru olduğundan, her örgü için, özellikle kare örgüsü için, doğrudur. Başka kanıt olarak, model ve dual model aynı evrensellik sınıfında bulunduklarından yatay geçiş olasılıkları birbirine eşittir. Aynı zamanda toplamları 1 sayısına eşittir. Ising modelinde ise, döngüsel değişmezlik konform değizmezliğin açık bir sonucudur, ve döngüsel değişmezliğe göre $E(c_{X,X'})$ sayısı yalnız $|X-X'|$ sayısına bağlıdır. Dolayısıyla genel olarak dördüncü denklem anlattığımız özel hallerin sonucudur.

Genel olarak döngüsel değişmezlik evrenselliğin bir sonucudur. Verilmiş modele dönersek evrensellik sınıfını değiştirmeyiz. Bence her evrenselliği ispatlamaya yeten fikirler takımı konform değişmezliği ispatlamaya da yeter.

R_λ işaretiyle iddia edilen renormalizasyon dönüşümlerin işlediği uzayı tanımlamak için, koordinatlar ortaya koyup onların geometrik anlamının anlatılması lazım. Perkolasyon için Montréal'daki meslektaşlar ile ögrencilerle beraber dört makalede uygun koordinatlar önerip özellikleri belirtmeye uğraştık.[2] Biz bu kooordinatların istediğimiz her niteliğin sahibi olduğunu ispatlayamayız, fakat en azından önerdiğimiz koordinatlara ve gerekli niteliklere sahip bir sabit noktasının var olduğuna kendimizi hesap yaparak inandırmak istiyorduk.

Perkolasyon için aktardığım makalelerde geçiş olasılıkları kullanarak uygun sandığımız koordinatları önerip incelemiştik. Deneylerimize göre kare örgüsü modeli veya herhangi

[2]Bu makalelerin başlıkları ile bastığı yerleri *Twenty Years of Bialowieza: A Mathematical Anthology* adlı kitabında yeni yayımlanmış başlığı *The renormalization fixed-point as a mathematical object* olan bir makalede verilmiştir. Bu makaleyi RFPMO kısaltmasıyla aktarırım.

bir örgü modeli için her karenin iki düşey kenarından birisinden diğerine geçen ve birinci denklemde meydana gelen yatay geçişin mevcut olması olasılığı belirlenmiştir. Biz bu olasılığı modelin koordinatlarından birisi olarak, kullandık. Örgünün gözeneği sıfıra giderken onun limitinin var olduğundan, bu limit renormalizasyon dönüşümün sabit noktasının bir koordinatı olabilir. Ama çok benzer koordinatları var. Mesela sınırı basit kapalı bir eğri olan herhangi bir düzlem bölgenin sınırında bulunan iki birbirini kesişmeyen aralıktan birisinden diğerine geçen geçiş olasılığı da bir koordinat olabilir. Bu şekilde sayısı sonsuz olan koordinatlar elde ederiz. Her gerekli limitin var olduğunu ve limit noktası karşı boyutu sonlu olan kasılan (contracting) altuzayda bulduğunu hesapca doğruladık. Fazladan Michael Aizenman'la konuştuğumuzdan sonra bu koordinatların konform değişmez olduğunu sayısal doğruladık. RFPMO makalesinde koordinatların mevcut olup her gerekli niteliğe sahib olmasının ispatının olanağını tasvir ettim. Fakat bu taslağın gerçekten bir ispata yol göstereceğinden emin değilim.

Mamafih ispatları verememememize rağmen geçiş olasılıklarıyla ifade eden konform değişmezlik birkaç genç matematikçiyi etkiledi. Konform değişmezliği kabul edip ondan başlayarak ya da bir iki özel perkolasyon modeli için konform değişmezlik ispatlayarak Oded Schramm, Wendelin Werner, Stanislav Smirnov gibi matemakçiler stokastik süreçler teorisi ile stokastik diferansiyel denklemlerin temellerinde fizikçilerin birçok sorusunu yanıtlayan güzel bir kuram yarattılar. Kuramlarının çok güzel, çok derin olmasına rağmen evrenselliğe dokunmamış ve genel anlamda konform değişmezliği ispatlamamışlardır. Özellikle birinci denklem henüz kurulmamıştır. Bence RFPMO'da kabataslak kanıta benzer bir kanıt hala lazımdır.

Bu yetenekli matematikçilerin yaptıkları ile meslektaşlarımla yaptığımızı ele alarak önerdiğim koordinatlar hakkında tekrar düşündüm. Sabit noktanın koordinatlarının verilmiş bir teoriye ait her yapıyı ifade edebilmesini bekleriz. Mesela fizikçilere göre her iki boyutlu istatistik mekanik modele bağlı konform değişmez bir kuantum alan teorisi var. Önerdikleri tanıtlar inandırıcı olduğu halde fizikçiler teorinin gerçekten mevcut olduğunu kurmamışlardır. Mesela fizikçiler verilmiş bir örgü modeline hangi alan teorisinin ait olduğunu bütün ayrıntılarıyla hiç anlatmazlar. Özellikle matematik anlamda teorinin modelden nasıl oluşturulduğunu hiç anlatmazlar. Ising modeli vesilesiyle bir yaklaşım açıklamak isterim.

Başlamamdan evvel bir alan teorisinin her şey önce bir cebirsel yapı olduğunu vurgulayayım. Her cebirsel yapı, mesela her cebir veya her halka, sayısı sonlu veya sonsuz olarak bir parametreler takımı tarafından verilir. Perkolasyona ait alan teorisinin parametreleri geçiş olasılığı tarafından belirlenmiş değilse, tamamlayan koordinatlara ihtiyacımız var. Geçiş olasılığının tanımladığı teorinin hangi anlamda eksik olduğunu anlatmak zordur. Bence tartışılacak bir şeydir ve bu noktada birkaç sorun olması herkes için belli değil.

Fazla tekrarlama tehlikesine rağmen, bir defa daha asıl bir zorluğu vurgulayım. R_λ renormalizasyon dönüşümlerini tanımladığımızda üzerinde çalıştığımız uzayı fazla küçük olarak almak istemeyiz. Hem perkolasyon hem de Ising modeli için geçiş olasılıkların tanımladıkları uzay yeteri kadar büyük değil.

Elbette mükemmel teori henüz elde olmadığından her sorunu kesinlikle ifade edemeyiz. Aslında iki farklı soruyu yanıtlayıp birbirine benzeyen teori var. Birbirlerine nasıl bağlı oldukları henüz tam anlaşılmamasına rağmen sık sık ayırt edilmezler. Mükemmel teori bu iki birbirine benzeyen teoriyi içerecekti ve R_λ dönüşümlerinin işledikleri uzaya uygun tanımlanma iki teoriyi birleştirip belirleyebilen koordinatlardan ibaret olacaktı. Bence SLE teorisine yakından bağlı geçiş olasılıkları iki teoriden birisini verir ama diğerini vermez.[3] Bu

[3]Hatta bu görüş fazla basittir. Konuşmanın son satırlarına bakın!

nedenle diğer teoriye uygun RFPMO'da geçis olasılıklarına ait anlattığım sürece benzer olan bir süreci bulmalıyız.

Iki teoride Virasoro cebiri $\mathfrak{V}$ meydana geliyor. Bildiğiniz gibi, Virasoro cebiri bir sonsuz boyutlu Lie cebiridir. Cebirin tabanı $\{ X_k \mid k \in \mathbf{Z} \} \cup \{Z\}$ kümesidir ve cebirdeki çarpma

$$[X_k, X_\ell] = (k-\ell)X_{k+\ell} + \frac{c}{2}k(k^2-1)Z, \quad [X_k, Z] = 0$$

denklemleriyle belirlenir.

Birinci teorinin ilk meydana konmasından birkaç yıl sonra, Graeme Segal onu daha geometrik bir şekilde ifade etti. Teorinin kısaca tarif edeceğimiz bu geometrik şeklinden daha yaygın olan cebirsel ifadesinde $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{V}$ cebiri meydana geliyor. Bildiğim kadar John Cardy tarafından sonra meydana konulan ikinci teoride iki örneği değil, $\mathfrak{V}$ cebirinin tek bir örneği kullanılır. Oded Schramm'ın keşfettiği geçiş olasılıklarına ait ünlü SLE teorisi bazı anlamlarda Cardy'nin geliştirdiği teoriye güvenilir matematik temelleri sağlar. Daha doğrusu bazı anlamda matematik temelleri sağlar fakat fazladan fizikçilerin hesaplayamadiği kritik üsleri hesaplamaya başarır. Onsager'in ünlü katkısından sonra fizikçiler kritik üslerin her yeni hesabına çok hayran kalıyor.

Bazı fizik açılarından Schramm, Werner ve başkaların geliştirdiği SLE teorisinin büyük bir kusuru yok gibi geliyor, ama gerçekten kavrayışımızın önemli bir eksiğini açıklayan noksanı var. Smirnov'un ispatladığı bir istisna bir yana genel olarak bugüne kadar teorileri örgü modellerine henüz uygulanamaz çünkü mikyas limitinin mevcut olduğu henüz ispatlanmamıştır. RFPMO'da mikyas limitinin var olması kanıtına bir yaklaşımın taslağını verdim. Gelecekte ya tek başıma ya meslektaşlarımla bu yaklaşımı geliştirmek umudundayım. Bu konuşmada makalemde anlattığımı kısmen ve kısaca tekrarlamak istiyorum.

İlk önce kısa bir şekilde konform değişmez alan teorisinin ne olduğunu size hatırlatmak istiyorum. Biz düzlemdeki örgü modelleri inceledik, ama neredeyse herhangi bir konform yapısı verilmiş olan yüzeyde, hele bir Riemann yüzeyinde örgü modelleri veya örgü modellerine benzer modelleri ortaya çıkarabiliriz. Örgü yoğunlaşırken limiti alarak biz yüzeyde modele bağlı bir konform yapı elde ederiz. Tabii bu limitte meydana gelen konform yapı yüzeyin verilmiş yapısı olmalı. Genel teorinin henüz var olmamasından dolayı bu iddiayı bilinçli olarak belirsiz şekilde ifade ediyorum.

Basit bir örnek vereyim. Kare örgüsündeki Ising modelinde her noktanın dört etkilediği komşusu var. Düşey etkisi yatay etkisinden daha şiddetli ise, modele ait konform yapı yatay yönde uzatılır.

Başka bir sizi belki hayrette bırakacak modeli vereyim. Düzleme sonsuzda bir nokta eklersek, Riemann küresini elde ederiz. Dolayısıyla kare örgüsü modeli küredeki modeli olarak düşünebiliriz. Örgünün gözeneği sıfıra giderken en azından hesapça örgü modelinin limiti Riemann küresine olağan olan konform yapıya bağlı konform alan teorisidir.

Tabii yüzeyde her noktanın civarında farklı olup ama aynı evrensellik sınıfında kalan model kullanılması olanağı ortaya çıkarsa çok tehlikeye düşeriz. Tehlikelere rağmen konform alan teorisi kavramlarından yararlanmak istersek bu çerçevede düşünmeliyiz.

Segal'ın geometrik şeklini kullanmak istersek, konform dĕğişmez teoriyi belirlemek için her şeyden önce bir Hilbert uzayına ihtiyacımız var. Bu $\mathcal{H}$ işaretiyle gösterilen Hilbert uzayı parametrize edilmiş bir çembere takılmıştır, mesela kompleks düzlemdeki $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant z < 2\pi$, çemberine. Bu çemberi $\c{C}$ harfiyla işaret ederiz. Parametrizasyon sayesinde her parametrize edilmiş eğri bu çembere eşdeğerdir ve her parametrize edilmiş eğriye aynı Hilbert uzayını takarız. Bir Riemann yüzeyinde yalnız analitik parametrizasyonları kabul ederiz. Yüzeyde $C_1, \ldots, C_n$ bir takım birbiri ile kesişmeyen basit, kapalı ve parametrize edilmiş eğriler ise biz bu takıma

$$\bigotimes_1^n \mathcal{H}$$

Hilbert uzayını takarız.

Fazladan sınırı $C_1 \cup \cdots \cup C_m \cup C'_1 \cup \cdots \cup C'_n$ olan sınırlı bir Riemann yüzeyi S verilsin. Hem $C_1, \ldots, C_m$ hem $C'_1, \ldots, C'_n$ basit, kapalı ve parametrize edilmiş eğriler olsunlar. Parametrenin belirlediği yönelimle C_i eğrisi boyunca geçersek S yüzeyi sağımızda kalsın, fakat C'_j boyunca geçersek solumuzda kalsın. Şu halde teoriyi geometrik şekilde ifade edersek konform değişmez teori bir

$$\Gamma_S : \bigotimes_1^m \mathcal{H} \to \bigotimes_1^n \mathcal{H}$$

dönüşümünü belirler.

RFPMO'da aktardığım makalelerden birisinde örgü modelinin düzlemdeki veya yüzeydeki basit kapalı parametrize edilmiş eğri veya sayısı sonlu olup birbirini kesmeyen parametrize edilmiş eğrilerin bileşimine bir Hilbert uzayı takarız. Uzayın boyutu başta sonludur, ama örgünün gözeneği sıfıra giderken boyutu sonsuza gider. Kare veya dörtgen modelini alabiriz ama her noktasının altı komşusu olan üçgen örgüsü için bunu yapmak daha kolaydır.

Örgü, bulunduğu yüzeyi veya düzlemi üçgenlere bölüyor. Elbette bu üçgenler örgünün gözenektir. Zirveleri üçgenlerin veya altıgenin merkezleri olan eş (dual) örgüyü çizebiliriz. İlk örgü üçgen örgüsü ise, eş örgü altıgen olur. İki örgünün kenarları birer birer kesişiyor. Iki örgüde her kenar bir bitişik çifte bağlı olduğundan, ilk örgünün bitişik çiftlerini eş örgünün kenarlarına gönderen birebir fonksiyon var. Çiftin gönderildiği kenara eşkenarı denilir.[4]

Ising modelinin bir durumu verilmiş ise, her iki bitişik noktada mıknatıslanma ya aynı ya da farklıdır. Farklı ise ikisini birleştiren kenarı kesen eş kenarını çizeriz, aynı ise çizmeyiz. Çizilmiş kenarların bileşimi bir seviye hatların takımı olur.[5] Çizilmiş kenarları izleyerek biz yüzeyde bir takım basit kapalı seviye hatları elde ederiz. Hatlar basit olduğundan her birine bir yönelim verebiliriz. Modelin her durumu ile ona bağlı basit kapalı hatlar kümesine bir olasalığı vererek, yeni bir olasılık uzayı tanımlıyoruz. Hatların sayısı ℓ ise, 2^ℓ farklı yönelim var. Durumun olasılığı ν ise, ondan oluşturulan her hatlar kümesinin olasılığı $\nu/2^\ell$ olur. Tabii örgü sonsuz ise ℓ sayısı da sonsuz olabilir. Fakat ℓ sayısı sonsuz ise, formüller anlamsızdır. Bu nedenle biz ya kapalı, sınırı boş olan bir Riemann yüzeyinde, ya sınırlı ama sınırı boş olmayan bir Riemann yüzeyinde bulunan örgüyle, ya da örgünün sınırlı bölgesinde çalışıyoruz. Sınırlı bölgede çalışırsak sonunda aynı Riemann yüzeyinde kalarak sınırı sonsuza genişletiriz. Mesela düzlemdeki sayısal deneylerimizde büyük bir çemberin içerdiği örgünün noktalarını inceleriz.

Şu halde Ising modelinin tanımladığı durumlar kümesi ve ölçüsü vasıtasıyla yeni bir olasılık kümesi tanımlıyoruz. Örgünün gözeneğini kısalttığımızdan, ϵ'u vurguluyup bu kümeyi M_ϵ adlandırıyoruz. C eğrisi yüzeyde basit bir parametrelenmiş eğri ise, M_ϵ kümesinin her δ öğesi bir Schwartz dağılımını belirliyor. Yani $T_1, \ldots, T_\ell$ yönelmiş seviye hatlar olarak bu öğe Ising modelinin durumundan ile ona bağlı $\{T_1, \ldots, T_\ell\}$ hatlarından ibaret olsun. Basitlik uğruna farzedelim ki her T_i hattıC eğrisini enine keser. C eğrisinin parametrizasyon sayesinde C de yönelmiştir. Dolayısıyla T_i ile C birbirini kestiği her $x_{i,j}$ noktasinda yönelmiş T_i hattı ile

[4]İkinci şekilde düzlemdeki düzensiz bir üçgen örgüsü çizilir. Örgünün düzlemi böldüğü üçgenler örgünün gözenekleridir. Örgü yeşil olarak çizilir. Eş örgüs kırmızıdır.

[5]Üçüncü şekilde Ising modelinin durumlarıdan bir örneği gösteriliyor. $+1$ veya -1 olarak zirvedeki mıknatıs da gösteriliyor. Seviye hatları kırmızıdır. Bu şekilde dört basit kapalı seviye hatları olarak, ℓ sayısı 4 dir.

yönelmiş C eğrisi arasındaki açının positif veya negatif yönelmiş olduğuna göre bu noktaya $\delta_{i,j} = \pm 1$ işareti verilir. O zaman biz δ öğesini

$$\Delta = \Delta_\delta : f \to \sum_i \sum_j \delta_{i,j} f(x_{i,j}) \tag{5}$$

ifadesinin belirlediği dağılıma yolluyoruz. M_ϵ kumesinin bir olasılık uzayıolması sayesinde Δ dönüşümü kullanarak ölçüsünü dağılımlar kümesine yollabiliriz. Tabii böyle elde ettiğimiz μ_ϵ ölçüsünün desteği sonludur. Dolayısıyla tanımladığı Hilbert uzayı $L^2\bigl(\mu_\epsilon(C)\bigr)$ sonlu boyutludur. Bizim deneylerimize göre öz ölçüsü sıfıra $\mu_\epsilon(C)$ ölçüsü bir limit ölçüsüne $\mu(C)$ yaklaşır. Tabii yüzey düzlem gibi sınırsız ise, anlattığımız gibi sonlu olan örgünün sınırı da sonsuza gider. $\mu(C)$ ölçüsünün tanımladığı $L^2\bigl(\mu(C)\bigr)$ Hilbert uzayı sonlu boyutlu olmaz.

$\mu(C)$ ölçüsü parametrize edilmiş bir eğrideki dağılımların kümesinde tanımlanmıştır. Parametrizasyonu kullanarak biz C'yi olağan $Ç$ çemberiyle bir tutabiliriz. Bu nedenle C'deki fonksiyonlar kümesini veya dağılımlar kümesini $Ç$'deki fonksiyonlarla veya dağılımlarla bir tutabiliriz. Dolayısıyla elde ettiğimiz ölçülerin hepsini birbirine benzetebiliriz. Elbette $\mu(C)$ ölçüsü C eğrisinin bulunduğu Riemann yüzeyine bağlıdır. Bu nedenle $\mu(C)$ yerinde $\mu^S(C)$ yazarız. Tabii ölçü parametrize eden fonksiyona da bağlıdır, fakat fonksiyon sayesinde $\mu^S(C)$ ölçüsünün $Ç$ çemberindeki dağılımlar kümesinde de bir ölçü olduğu sayesinde fonksiyon kendisi ifadede dikkate alınmamıştır.

Sayıların yeteri kadar kesin değil olmadıkları halde elde ettiğimiz deneysel bilgiyi inceleyerek beni hayrette bırakan bir fenomen farkettim. Anlaşılan kapalı S yüzeylerinin hepsi için $\mu^S(C)$ ölçüleri birbirine göre mutlak süreklidir. Elbette eninde sonunda bu iddiayı ispatlamak veya en azından sayısal olsa dikkatla sağlamak isteyeceğiz. Fakat geçici olarak iddiayı kabul ederek başka benzer iddiaları ile muhtemel neticelerini inceleyebiliriz. Bu konuşmanın son dakikalarında evvelce yaptığımı değil, gelecekte ya sayısal yolla ya da kuramsal yapabilmek umudunda olduğumu tasvir edeceğim.

Tabii herhangi iki ölçü, μ ile ν birbirine göre mutlak sürekli ise, $L^2(\mu)$ ile $L^2(\nu)$ Hilbert uzaylarını bir tutabiliriz. Yani,

$$\xi = \frac{d\nu}{d\mu}$$

μ ölçüsüne göre ν ölçüsünün Radon-Nikodym türevi ise, o zaman

$$f \in L^2(\nu) \to g = f\sqrt{\xi} \in L^2(\mu)$$

bir eşlemedir. Dolayısıyla $L^2\bigl(\mu^S(C)\bigr)$ Hilbert uzayı $C \to S$ gömmesine bağlı değil ve tanımlama olarak $\mathcal{H} = L^2\bigl(\mu^S(C)\bigr)$ alabiliriz.

Şimdiye kadar C basit kapalı eğriydi. Fakat $C_1, \ldots, C_k$ eğrilerinin hepsi basit kapalı birbirini kesmeyen eğri ise, o zaman $C = \cup_j C_j$ bileşiminde benzer $\mu^S(C)$ ölçüsü meydana koyabiliriz. Biz bir daha bu ölçünün mutlak sürekli sınıfının gömmeye bağlı olmadığını kabul edersek, gömme olarak bağımsız gömmeleri $C_i \to S_i$ alıp

$$\mu^S(C) = \kappa(\phi_1, \ldots, \phi_k) \prod_{i=1}^k \mu^{S_i}(C_i)$$

denklemini gösterebiliriz. $\mu^S(C)$ dağılımlar kümesinde bir ölçü olduğundan $\phi_1, \ldots, \phi_k$ dağılımlardır. Biz $\{C_1, \ldots, C_k\}$ yerine $\{C_1, \ldots, C_m, C'_1, \ldots, C'_n\}$ alıp κ çekirdeğini kullanarak Γ_S doğrusal dönüşümünü tanımlamaya teşebbüs edebiliriz. Fakat RFPMO'da anlattığım gibi, bu tanımlama tam doğru olmadığından değistirilmesi lazımdır.

Fakat ölçülerin temel bir niteliğini ispatlamadan tanımlamanın değistirilmesi mümkün değil. Hatta nümerik olarak bu niteliği henüz doğrulamadık. Onu anlatayım. Basit kapalı C eğrisi iki kapalı Riemann yüzeyinde gömülsün. Bu iki yüzey S ile S' ise, ikisinin C tarafından ikiye bölündüğünü kabul ederiz. C eğrisinin yönelimden dolayı hem S yüzeyinde hem S' yüzeyinde C eğrisinin sağ tarafı ve sol tarafı var. Sağ tarafları S_r ile S'_r olsun, sol tarafları S_ℓ ile S'_ℓ olsun. Radon-Nikodym türevi

$$\frac{d\mu^{S'}(C)}{d\mu^{S}(C)} = \xi^{S',S}$$

olsun. Lazım olan niteliki bu fonksiyonun çarpma şekilde ifade edilmesidir,

$$\xi^{S',S} = \xi^{S'_\ell,S_\ell}\xi^{S'_r,S_r}. \tag{6}$$

S'_ℓ ile S_ℓ sınırları bir tutulmuş Riemann yüzeyleridir. Ortak sınır C eğrisidir. $\xi^{S'_\ell,S_\ell}$ yalnız S'_ℓ, S_ℓ ile C ortak eğrisine bağlıdır. $\xi^{S'_r,S_r}$ fonksiyonu için benzer bir şart koşulur. Tabii C eğrisi her dört yüzeyin sınırıdır fakat bir tarafta S_ℓ ve S'_ℓ yüzeyine göre yönelmesi, diğer tarafta S_r ve S'_r göre yönelmesi farklıdır.

Bir limit almak suretiyle $\mu^S(C)$ ölçülerini tanımlamak istediğimizden örgü modeli düzeyinde bu niteliğe benzer bir niteliği bulmak isteriz.

Örgü modelinin düzeyinde ölçünün $\delta \to \Delta_\delta$ dönüşümü kullanılarak tanımlanmasını hatırlatıyorum. Beşinci denklemde bulunan $x_{i,j}$ birbirinden farklıdır. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ her tekabül edilen $e_{i,j}$ sayısı 1'e eşit olan $x_{i,j}$ içeren küme olsun, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ her tekabül edilen $e_{i,j}$ sayısı -1'e eşit olan $x_{i,j}$ içeren küme olsun. X ile Y'nin içerdiği noktaların sayısı birbirine eşittir. Yani bir seviye hat C eğrisinden sağdan sola geçerse, aynı hat eğriden soldan sağa geçmeli. X ile Y kümeler verilmiş ise, $\Delta = \Delta_\delta$ dağılımı belirlenmiştir. Dolayısıyla $\Delta = \Delta_{X,Y}$ ama aynı zamanda Δ belirlenmiş ise, X ile Y belirlenmiştir.

Sonlu düzeyde, $\mu^S(C)$ ölçüsu, $\mu^S(\Delta_{X,Y}) = \mu^S(X,Y)$ sayıları tarafından belirlenmiştir. Tabii $\mu^S(X,Y) \neq 0$ denklemin tanımladığı (X,Y) kümesi sonludur. Sonlu düzeyinde altıncı denklem

$$\mu^S(X,Y) = \mu^{S_\ell}(X,Y)\mu^{S_r}(X,Y) \tag{7}$$

denkleminin bir sonucu olacaktı. Maalesef bu denklem doğru değil. Anlatalım. Basitlik uğruna C eğrisinin örgünün bitişik noktalarını birleştiren kenarlardan ibaret olduğunu kabul ederiz. O zaman x_i ile y_i noktaları C eğrisinin içerdiği kenarların orta noktarları arasında bulunur. Tanıma göre

$$\mu^S(X,Y) = \frac{1}{Z}\sum_\sigma\sum_\Lambda \frac{\kappa(\sigma)}{2^\ell}. \tag{8}$$

Bu toplamda σ her (X,Y) kümesine uygun durumlardan değerler alıyor ve Λ her σ durumuna uygun yöneltilmiş seviye hatlar kümeleri üzerinden toplanıyor. ℓ sayısı hatlar kümesinin sayısıdır.

$$\frac{\kappa(\sigma)}{2^\ell}$$

bölümü birkaç çarpanı içeren bir çarpma şekilde ifade edilebilir. Başta örgünün C eğrisinin içerdiği her kenarının çarpıma katkıda bulunan bir çarpan var. Kenarın orta noktası ne X ne Y kümesinde bulunmazsa çarpan 1 sayısıdır, fakat bu kümede bulunursa çarpan $e^{-\beta}$ sayısıdır.

a kenarının belirlediği çarpan γ_a olsun. Şu halde sekizinci denklemde bulunan ifadenin bir çarpanı

$$\gamma = \prod_{a \subset C} \gamma_a$$

olur. Bu çarpan S yüzeyine bağlı olmadığından hem μ^{S_ℓ} hem de μ^{S_r} sayısına $\sqrt{\gamma}$ çarpanını verebiliriz.

Her Λ takımı iki dönüşümü belirlıyor. Yani her x_i noktasında bir Λ takımının içerdiği hat S_ℓ yüzeyinden S_r yüzeyine giriyor. Sonra bu hat Y içerdiği $y_{i'}$ noktasından geçerek S_r yüzeyini terkedip S_ℓ yüzeyine giriyor. Her X içerdiği noktanın Λ kümesinden bir hattında içerildiğinden dolayı biz böylece X kümesini Y'e gönderen bir eşleme $\rho = \rho_\Lambda : x_i \to y_{i'}$ elde ederiz. Aynı şekilde S_r'den S_ℓ'e giren hatların kavislerini kullanarak Y kümesini X'e gönderen $\sigma^{-1} = \sigma_\Lambda^{-1}$ işaretiyle ifade edilen bir eşleme belirliyoruz. O zaman $\tau = \sigma^{-1}\rho$ eşlemesi X kümesinin bir permutasyonudur. ℓ doğal sayısı bir toplamdır, $\ell = \ell_\tau + \ell_\ell + \ell_r$. Ilk önce $\tau = \tau_\Lambda = \sigma_\Lambda^{-1}\rho_\Lambda$ olarak, ℓ_τ sayısı τ permutasyonunun çevrimi kümesinin sayısıdır. ℓ_ℓ sayısı ise, S_ℓ'in tamamen içerdiği, C eğrisini kesmeyen ve Λ'da bulunan hatların sayısıdır. S_r yüzeyi S_ℓ yüzeyinin yerine alınarak ℓ_r sayısı aynı şekilde tanımlanır. Tabii (X, Y) çiftlerini belirleyen Λ hatlarının hem S_ℓ'deki kısımlarının kümesi Λ_ℓ, hem S_r'deki kısımlarının kümesi Λ_r tarafından belirlenir. Λ_ℓ'daki hatların iki çesiti var. Bir tarafta S_ℓ'in içerisinde tamamen bulunan kapalı hatlar, diğer tarafta C eğrisindeki y_j noktasında başlayıp $x_{j'} = \sigma_\Lambda^{-1} y_j$ noktasına dönen hatlar. Λ_r kümesi benzer şekilde belirleniyor. Λ_ℓ ile Λ_r iki kümesi bağımsız belirlenebilir. Belli ki $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda_r}$ ve $\sigma_\Lambda = \sigma_{\Lambda_\ell}$. Örgünün bir hattı kesen her kenarının $e^{-\beta}$ sayısına eşit olan Boltzmann ağırlığına bir katkısı var. Dolayısıyla $\kappa_\ell = \kappa_{\Lambda_\ell}$, $\kappa_r = \kappa_{\Lambda_r}$ olarak, ağırlık $\kappa(\sigma) = \kappa_\ell \kappa_r$ çarpım şeklinde yazılabilir.

Şu halde $\tau = \sigma^{-1}\rho$ olarak sekizinci denklemi şöyle yazabiliriz,

$$\begin{aligned}
\mu^S(X, Y) &= \frac{\gamma}{Z} \sum_{\sigma,\rho} 2^{-\ell_\tau} \sum_{\{\,\Lambda_\ell, \Lambda_r \,|\, \rho_{\Lambda_r} = \rho,\, \sigma_{\Lambda_\ell} = \sigma\,\}} \{\kappa_\ell 2^{-\ell_\ell}\}\{\kappa_r 2^{-\ell_r}\} \\
&= \frac{\gamma}{Z} \sum_{\sigma,\rho} 2^{-\ell_\tau} \left\{ \sum_{\{\Lambda_\ell = \sigma_\ell\}} \kappa_\ell 2^{-\ell_\ell} \right\} \left\{ \sum_{\{\Lambda_r = \rho_r\}} \kappa_r 2^{-\ell_r} \right\} \\
&= \frac{\gamma}{Z} \sum_{\sigma,\rho} \chi_\sigma A_{\sigma,\rho} \chi_\rho.
\end{aligned}$$

Bu denklemlerde

$$A = (A_{\sigma,\rho}) = (2^{-\ell_\tau}), \qquad \tau = \sigma^{-1}\rho,$$

matrisdir ve

$$\chi_\rho = \sum_{\Lambda_r = \rho} \kappa_r 2^{-\ell_r},$$

$$\chi_\sigma = \sum_{\Lambda_\ell = \sigma} \kappa_\ell 2^{-\ell_\ell}.$$

Biz herhangi bir şekilde X ile Y'yi bir tutarsak, hem ρ hem σ eşlemesi X kümesinin bir permutasyondur. Fazladan $\{\chi_\rho\} = \chi^{S_r}(X, Y)$ yalnız X, Y ve S_r yüzeyine bağlı bir sayıdır ve

$\{\chi_\sigma\} = \chi^{S_\ell}(X,Y)$ vektör yalnız X, Y ve $S'_\ell ye$ bağlıdır. Dolayısıyla

$$\mu^S(X,Y) = \frac{\gamma}{Z}\sum_{\sigma,\rho}\chi^{S_\ell}(X,Y)_\sigma A_{\sigma,\rho}\chi^{S_r}(X,Y)_\rho.$$

simetrik A matrisinin rangı 1 ise, o zaman bir vektör α_σ var ki

$$A_{\sigma,\rho} = \alpha_\sigma\alpha_\rho$$

Şu halde

$$\mu^{S_\ell}(X,Y) = \sqrt{\frac{\gamma}{Z}}\sum_{\sigma}\chi^{S_\ell}(X,Y)_\sigma\alpha_\sigma,$$

$$\mu^{S_r}(X,Y) = \sqrt{\frac{\gamma}{Z}}\sum_{\rho}\chi^{S_r}(X,Y)_\rho\alpha_\rho$$

ise, yedinci denklem doğru olur.

Tabii simetrik olan A matrisinin rangı 1 değil, fakat örgünün gözeneği sıfıra giderken büyük olasılıkla X kümesinin sayısı çok büyük olur. Bu şartla en büyük özdeğere göre diğerleri küçük iseler, o zaman sıfıra eşitmişler gibi onlara aldırmayarak problemi belki çözebiliriz. Fakat biz problemi henüz çözmemiştik. Buna rağmen, permutasyon grubu hakkında temsil teorisini kullanarak Montréal'daki araştırıcılar Yvan Saint-Aubin ile Dominique Chassé X kümesinin sayısı sonsuza giderken A matrisinin en büyük özdeğerine göre diğerlerinin sıfıra gittiklerini ispatladılar. Bu iddia en azından kanıtlamak istediğimiz sonuca yönelik bir adımdır.

Şu ana kadar incelediğimiz sorunları anlatmamdan sonra, benim bakımımdan kalan problemleri kısaca tarif etmek istiyorum. Analitik açıdan en zor olan problemler, hem genel perkolasyon modeli için, hem İsing modeli için, hem de başka fizikte meydana gelen modeller için mikyas limiti alarak örgü modellerden sürekli (continuum) modellere geçiştir. RFPMO makalesinde önerdiğim yönteme göre, meydana gelen sonsuz boyutlu dinamik sisteminin niteliklerini paylaşan sonlu boyutlu yaklaştırımlara benzetmeliyiz. Bunun için sınırlı karede, soyut anlamda ama sayısı sonlu olan geçis olasılıklarını kullanıyoruz. Sonlu modelin dinamiğini tanımlamak için dört küçük kare birbirine yapıştırıp büyük bir kare yaparız. Perkolasyon sürecini taklit ederek küçük karedeki geçiş olasılıklarını kullanıp büyük karedeki geçis olasılıklarını belirliyoruz. Bu yöntem perkolasyona mahsustur zira perkolasyonda iki yan yana bulunan bölgedeki durumlar bağımsızdır.

Başka modeller için, mesela Ising modeli için, bu bağımsızlık mevcut değil. Dolayısıyla sonlu boyutlu yaklaşımları yalnız sınırlı bir karedeki durumlara ait olasılıklarla değil, bütün düzlemdeki durumlara ait olasılıklarla tanımlanmalılar. Mesela C bir karenin sınırı ise, dört kareyi gene yapıştırarak temel nesne olarak $\mu(C)$ ölçüsünün bir yaklaştırımını kullanabiliriz. Bu ölçü sonsuz boyutlu dağılımlar uzayında tanımlanmış olduğundan, önceden bu sonsuz boyutlu uzayın yerine sonlu boyutlu bir uzay almalıyız. Bence dağılımların yerine onlara yaklaştırılan dalgacıkları kullanmalıyız. Bu nedenle bu yöne ilerlemeden evvel dalgacık teorisini öğrenmeliyiz.

Başka ögreneceğimiz şeyler var. Önerdiğim sonlu boyutlu yaklaşımları kullanırsak, hemen bütün düzlemde çalışmalıyız. O zaman perkolasyona karşıt, çabalarımızdan sonra Virasoro cebirin bir örneğinin meydana geldiği değişmez alan teorisini değil iki örneğinin meydana geldiği teoriyi elde ederiz. Öte yanda Schramm ile başkaların geliştirdiği sürekli teorinin asıl öğesi sınırdaki şartlar olduğundan, bu teori Cardy'nin önerdiği fiziksel teoriye aittir. Anladığım kadar Schramm'ın teorisine benzer, Virasoro cebirinin iki örneğini kullanan sürekli teorinin geliştirilmesi çözülmemiş problemdir. Özellikle Schramm'ın teorisinden henüz çıkarılmamıştır. Dolayısıyla mükemmel, her bakımdan tam olan teoriyi geliştirmek istersek, iki değişmez alan teorisinin ilişkilerini anlayıp Cardy'nin teorisini Schramm'ın yarattığı matematik şekilde Belavin-Polyakov-Zamalodçikov fiziksel teorisine genişletmeliyiz.

Eninde sonunda genellenmiş Schramm'ın teorisinin örgü modellerinin sürekli limitlerini içerdiğini ispatlamalıyız. Daha çok işimiz var.

Compiled on February 14, 2025.