1 mai 2007

Cher Serre,

Ta lettre me donne l'occasion d'essayer de rassembler mes idées. Je commence par énumérer des obstacles quant à saisir la relation entre formes automorphes et motifs.

A. Pour avoir une correspondance avec une fonctorialité raisonnable entre représentations de $G(F)$ (F local non archimédien) et représentations du groupe de Weil (– Deligne) $W'(/F)$, Langlands est amené à utiliser la correspondance que j'appelle "unitaire" dans Anvers II (formes ..., §3, p. Del42-45). La fonctorialité étant ici cruciale, à mon corps défendant, je m'y rallie. Le problème apparaît déjà pour GL(2).

Exemple: si π est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}(2, F)$, son caractère central ω_π est un caractère de F^*, i.e. de $W(/F)$ par le corps de classe. Le dual $G^\vee$ de $\mathrm{GL}(2, F)$ est $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ [$\mathbb{C}$ car on considère des représentations complexes de $\mathrm{GL}(2, F)$] et on veut que π corresponde à une classe de conjugasion de représentations $\sigma\colon W'(/F) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. On veut une relation entre ω_π et $\det(\sigma)$, du type $\omega_\pi = \det(\sigma)\| \quad \|^k$. On veut aussi pouvoir considérer un groupe G isomorphe à $\mathrm{GL}(2, F)$, mais pour lequel on m'a pas fixé quelle était la représentation de dimension 2 "évidente": V ou $V^\vee$? En d'autres termes, on veut une compatibilité avec l'automorphisme extérieur τ de $\mathrm{GL}(2, F)$ (qui induit itou sur le dual $G^\vee$): si π correspond à σ, $\pi \circ \tau$ (isomorphe à $\pi^\vee$) doit correspondre à $\tau \circ \sigma$ (isomorphe à $\sigma^\vee$). Puisque ω_π et $\det(\sigma)$ sont ainsi remplacé par leur inverse, ce n'est possible que si $k = 0$.

Si χ_1 et χ_2 sont des caractères de F^*, la représentation $\chi_1 \oplus \chi_2$ de $W'(/F)$ doit, pour $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \| \quad \|^{\pm 1}$, correspondre à une représentation induite, ne dépendant pas de l'ordre dans lequels χ_1 et χ_2 sont pris, et de caractère central $\chi_1\chi_2$. Ces contraints sont vérifiées par l'induction unitaire du caractère (χ_1, χ_2) d'un tore déployé. Unitaire: tordre par $\delta^{1/2}$.

L'inconvénient, est que, bien que la notion de représentation admissible irreductible π soit purement algébrique (on peut remplacer $\mathbb{C}$ par K algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque, $G^\vee$ devenant un groupe sur K), la correspondance ne l'est pas: elle utilise une racine carrée de q (le nombre d'éléments du corps résiduel). Un analyste comme Langlands croit que q a une racine carrée meilleure que l'autre. Moi pas. Ceci me force à affirmer qu'on n'a pas une correspondance entre les π et les σ, mais deux. Pour pouvoir en nommer une, il faut avoir choisi un caractère de F^* racine carrée de $\| \quad \|$ (à valeurs dans K quand π est $/K$). Je supposerai la racine carrée choisie non ramifiée, mais ce n'est sans doute pas nécessaire. Dans le cas de $\mathrm{GL}(n)$, si on remplace un choix de $\| \quad \|^{1/2}$ par un autre, le rapport entre les deux est ε d'ordre 2, et si π correspond à σ pour l'un, alors $\pi.\varepsilon(\det)^{(n-1)/2}$ correspond à σ pour l'autre. Note que le caractère central n'a pas changé.

Dans le cas global, de même, je ne voudrais une correspondance entre motifs et certaines représentations automorphes que pour F *muni* d'un caractère du groupe des classes d'idèle racine carrée de $\| \quad \|$.

Exemple: la représentations triviale de $\mathrm{GL}(2, F)$ correspond à la représentation $\| \quad \|^{1/2} \oplus \| \quad \|^{-1/2}$ de $W'(/F)$.

Exemple: une forme automorphe classique de poids $2k$ pour $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ est une fonction de réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ vérifiant entre autres $f(\lambda\Lambda) = \lambda^{-2k} f(\Lambda)$. Le groupe est ici $\mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(\mathbb{C})$ et le caractère central est $\| \quad \|^{2k}$ (ou $\| \quad \|^{-2k}$ selon les conventions). Le determinant de la représentation ℓ-adique correspondante "est" $\| \quad \|^{2k-1}$. Ceci montre que la correspondance dont on a l'habitude entre formes modulaires et motifs n'est pas compatible avec l'automorphisme exterieur de $\mathrm{GL}(2)$. Si on a muni $\mathbb{Q}$ de la racine carrée positive de $\| \quad \|$ sur $\mathbb{A}^*$, je suis contraint d'affirmer que c'est $\mathrm{vol}(\mathbb{C}/\Lambda)^{1/2} f$ qu'on veut faire correspondre à un motif. Je ne vois pas comment on pourrait espérer rien dire de sensé pour un groupe unitaire si la correspondance pour $\mathrm{GL}(n)$ n'était pas compatible aux automorphismes extérieurs.

Question de signe: le $\| \quad \|^{\pm 2k}$ est lié au cauchemard suivant: si T est un tore, et qu'on fait agir $T(\mathbb{A})$ sur $T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q})$ par translations à gauche, puis sur les fonctions sur $T(\mathbb{Z})/T(\mathbb{Q})$ par transport de structures, on a $[t * f](u) = f(t^{-1}u)$. Un caractère χ définit la représentation automorphe $\mathbb{C}.\chi$; l'action de $T(\mathbb{A})$ sur celle-ci est par χ^{-1}.

Complément. Pour G un groupe réductif sur un corps k, on a un morphisme canonique $G(k) \to H^1(\mathrm{Gal}(/k), \mu_2) = k^*/k^{*2}$, défini comme suit. Il se factorise par G^{ad}, est compatible au produit, et pour $R_{k'/k}(G')$, se déduit par $N\colon k'^* \to k^*$ de son analogue pour $G'(k')$. Ceci ramène au cas G absolument simple adjoint. Soit G_{sc} le groupe simplement connexe correspondant, et Z son centre. Le morphisme voula est déduit de $\gamma\colon Z \to \mu_2$, à définir. La question est géométrique, et il suffit de définir ce γ pour G déployé. On choisit un tore $T_{sc} \subset G_{sc}$ et un Borel B le contenant, et on prend par γ la restriction du caractère $\delta_B^{1/2} = \prod \omega_i$ de T_{sc} à Z. Le carré de ce caractère se factorise par l'image de T_{sc} dans G; sa restriction à Z est donc à valeurs dans μ_2. Changer B change $\delta_B^{1/2}$ par un caractère du tore de G, et γ est donc bien défini [autre argument: deux B sont conjugués, alors que Z est central].

Pour G quelconque, ceci définit en fait une extension centrale de G^{ad} par μ_2, dont ou peut prendre le pull-back à G:

$$1 \to \mu_2 \to G_1 \to G \to 1.$$

Pour le groupe $G^\vee$, ceci correspond à un élément central canonique c d'ordre divisant 2. Pour G adjoint (absolument simple pour simplifier), $G^\vee$ est simplement connexe, et l'élément en question est $\prod\limits_{\alpha>0} \alpha^\vee(-1)$. Si E est une représentation irréductible autoduale de $G^\vee$, c agit par ± 1 selon que E est orthogonale ou symplectique (Bourb. Lie VIII §7 prop.12, p. 152). On a en fait une propriété un peu plus précise que Bourb. loc. cit, qui caractérise c. Epinglons $G^\vee$ et soit $P = \mathbb{Z}/2 \ltimes G^\vee$ le produit semi-direct pour l'action de $\mathbb{Z}/2$ qui respecte l'épinglage et agit sur le diagramme de Dynkin par l'involution d'opposition. Chaque représentation irréductible E de P est auto-duale, c est central dans P, et c agit sur E par ± 1 selon que E est orthogonale ou symplectique.

En d'autre termes, si on regarde les représentations de P comme des super espaces vectoriels, grâce à l'action de c, et qu'on modifie la commutativité du produit tensoriel en conséquence, toutes les représentations de P admettent une forme bilinéaire (super) symmétrique invariante.

Ceci s'étend à G réductif quelconque et fournit c central d'ordre divisant 2 dans $G^\vee$. Ces caractère/élements doivent, comme pour $\mathrm{GL}(n)$, controler l'effet de changer de $\|\ \ \|^{1/2}$.

B. Si f est une forme automorphe classique de poids $2k$, par exemple sur $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, et que E est le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par ses coefficients, ce qui lui correspond est un motif

M à coefficients dans E, ou plus concrètement un système compatible de représentations E_λ-adiques de dimension 2. Un motif à coefficients dans E est un motif M muni de $E \to \mathrm{End}(M)$, et on a un foncteur d'extension des coefficients $M \mapsto E' \otimes_E M$ pour $E \subset E'$. Passant à la limite, on définit la catégorie des motifs à coefficients dans une extension algébrique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{Q}$ par

$$(\mathcal{M} \text{ coeff } \mathcal{E}) = \lim \mathrm{ind}(\mathcal{M} \text{ coeff } E \subset \mathcal{E}).$$

J'aimerais me limiter, pour commencer, à avoir une correspondance entre certaines représentations automorphes et des objets motiviques, rel. aux motifs à coefficients dans la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Le corps $\mathbb{C}$ apparaît car on considère des représentations automorphes contenues dans l'espace des fonctions complexes sur $G(\mathbb{A})/G(F)$.

Dans le cas des corps de fonctions, on peut plutôt considérer des fonctions à valeurs dans K algébriquement clos de caractéristique 0, et il faudrait considérer les motifs à coefficients dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K. L'histoire devrait être invariante sous $\mathrm{Aut}(K)$ (qui agit sur cette clôture algébrique ainsi que sur $\| \quad \|^{1/2}$).

Dans le cas des corps de nombres, on pourrait espérer que les représentations automorphes ayant à voir avec les motifs sont celles auxquelles on peut attacher des nombres de Hodge, mais c'est un espoir inaccessible: comme on ne comprend pas pourquoi existent les formes de Maass avec une valeur propre du Laplacien autre que la bonne, λ_0, correspondant aux fonctions L de corps quadratique réels, comment pourrait-on montrer que pour $\Delta = \lambda_0$ elles sont toutes motivées?

Il ne faut pas espérer que toute représentation automorphe motivée, "à coefficients dans E" corresponde à un objet motivique à coefficients dans E. Si F'/F est Galois de groupe quaternionien, la représentation de dim 2 de $\mathrm{Gal}(F'/F)$ donne une représentation automorphe "à coefficients dans $\mathbb{Q}$", mais on n'a pas de motif à coefficient dans $\mathbb{Q}$ correspondant (seulement à coefficient dans L si L déploye les quaternions). De même, conjecturalement, pour les variétés abéliennes de dimension 2 à algèbre de quaternions d'endomorphismes.

C. Comment comprendre le produit semi-direct ${}^L G = \mathrm{Gal}(F'/F) \ltimes G^\vee$ qu'introduit Langlands? Dans le cas local non archimédien, ce qui joue le rôle de σ dans les explications précédentes est

$$\varphi\colon W'(/F) \longrightarrow {}^L G$$

compatible aux projections sur $\mathrm{Gal}(F'/F)$ et pris à $G^\vee$-conjugaison près. Si je me permet de remplacer $G^\vee$, groupe complexe, par $G^\vee(E_\lambda)$, groupe sur une extension E_λ de $\mathbb{Q}_\ell$, W' par Gal, et φ par un homomorphisme continu (ce qui restaure la partie unipotente de W'), ce qu'on considère est

$$H^1(\mathrm{Gal}(/F), G^\vee(E_\lambda)),$$

dans la définition duquel entre l'action de $\mathrm{Gal}(/F)$ sur $G^\vee$. Ce qui correspond à π est une classe d'isomorphie de $G^\vee(E_\lambda)$-torseurs $\mathrm{Gal}(/F)$-équivariants (l'équivariance touchant aussi $G^\vee(E_\lambda)$). Quand les choses sont dites ainsi, l'analogue motivique devient clair.

Expliciter: $\varphi\colon \mathrm{Gal}(/F) \to {}^L G(E_\lambda)$ versus H^1: soit P le $G^\vee(E_\lambda)$ trivial. Si Γ est un groupe d'automorphismes, de $G^\vee(E_\lambda)$, le groupe des automorphismes du système (torseur P sous $G^\vee(E_\lambda)$) induisant sur $G^\vee(E_\lambda)$ un élément de Γ est le produit semi-direct $\Gamma \ltimes G(E_\lambda)$: γ agit par (γ, γ), $g \in G(E_\lambda)$ agit par (translation à gauche g, Id). Par cet isomorphisme, φ fournit un torseur équivariant. Si on change la trivialisation du torseur, φ change par un automorphisme $G(E_\lambda)$-intérieur.

Tout ceci m'amène à la suggestion suivante. Soit F un corps global et G réductif sur F. On suppose donnée une racine carrée $\|\ \|^{1/2}$ du caractère $\|\ \|$ du groupe des classes d'idèles. Si F est un corps de nombres, $\|\ \|^{1/2}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si F est un corps de fonctions et qu'on définit les formes automorphes comme étant des fonctions à valeurs dans K algébriquement clos de caractéristique 0, $\|\ \|^{1/2}$ est à valeurs dans K.

On regarde le dual $G^\vee$ de G comme étant un système local, sur $\mathrm{Spec}(F)_{\mathrm{et}}$, de groupes réductifs sur $\mathbb{Q}$. Concrètement, un tel objet est la donnée, pour chaque une extension étale assez grande F' de F, d'un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ $G^\vee\langle F'\rangle$, fonctoriel en F', et ce de sorte que pour $F' \to F''$, le morphisme $G^\vee\langle F'\rangle \to G^\vee\langle F''\rangle$ soit un isomorphisme.

définition de $G^\vee$: dire que F'/F est assez grand si F' déploye G. Partant de $G \otimes_F F'$, on définit son dual $G^\vee$ (déployé épinglé) comme d'habitude. Je n'aurai en fait qu'à utiliser le système local $G^\vee_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de groupes réductifs sur $\bar{\mathbb{Q}}$ correspondant, $\bar{\mathbb{Q}}$ étant la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ (resp. K pour un corps de fonctions). Il n'est pas nécessaire pour disposer de $G^\vee\langle F'\rangle$ que F' déploye F: il suffit que $\mathrm{Gal}(/F')$ agisse trivialement sur le diagramme de Dynkin et que F' déploye le centre connexe.

Ceci étant donné, ce que doit corresponde à certaines représentations automorphes π est une classe d'isomorphie de $G^\vee_{\bar{\mathbb{Q}}}$-torseurs motiviques σ, i.e. d'objets du type suivant: pour F'/F assez grand pour que $G^\vee\langle F'\rangle$ soit défini, un $\otimes$-foncteur $\bar{\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\mathrm{Rep}\left(G^\vee_{\bar{\mathbb{Q}}}\langle F'\rangle\right) \longrightarrow (\text{motifs à coefficients dans } \bar{\mathbb{Q}} \text{ sur } F'),$$

fonctoriel en F'.

Changer le choix de $\| \ \|^{1/2}$. Supposons $\| \ \|^{1/2}$ remplacé par $\varepsilon.\| \ \|^{1/2}$, où ε est un caractère d'ordre 2 du groupe des classes d'idèles. On a construit en (A., Complément) une extension

$$1 \to \mu_2 \to \widetilde{G} \to G \to 1.$$

Poussons par $\mu_2 \hookrightarrow \mathbb{G}_m$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \widetilde{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle x^2} & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathbb{G}_m & = & \mathbb{G}_m. & & & &
\end{array}$$

A l'aide de ce diagramme, on définit un caractère encore noté ε de $G(\mathbb{A})$, trivial sur $G(F)$: relever g en $g_1 \in G_1(\mathbb{A})$, projeter sur $\mathbb{G}_m(\mathbb{A})$, et appliquer ε. Si, pour $\| \ \|^{1/2}$, π correspond à σ, pour $\| \ \|^{1/2}\varepsilon$, $\pi\varepsilon$ doit correspondre à σ.

Changer le choix de $\| \ \|^{1/2}$ (bis). On a aussi construit un élément canonique c d'ordre divisant 2 de $G^\vee$. Le caractère ε fournit un motif (d'Artin) L_ε de rang 1 sur F, muni de $L_\varepsilon^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} 1$. L'élément c permet de tordre σ par L_ε: si σ associe le motif $\sigma(E)$ à la représentation E

sur laquelle c agit par $(-1)^n$, $\sigma \otimes \varepsilon$ associe à E le motif $\sigma(E) \otimes L_\varepsilon$. Si, pour $\| \ \|^{1/2}$, π correspond à σ,, π doit encore correspondre à un torseur motivique quand $\| \ \|^{1/2}$ est remplacé par $\| \ \|^{1/2}\varepsilon$: il doit correspondre à $\sigma \otimes \varepsilon$.

Ces deux règles devraient bien sûr être compatibles.

Loose ends: (i) Pour G réductif sur F déployé sur F'/F, il est peut-être plus naturel de considérer $[G(\mathbb{A}_{F'})/G(F')]^{\mathrm{Gal}(F'/F)} =: G(\mathbb{A}/F)$ que $G(\mathbb{A})/G(F)$. Dans le cas des corps de fonctions, c'est requis si on veut les points d'un champ algébrique. Pour les tores, le groupe des caractères de $T(\mathbb{A}/F)$ semble plus sympatique que celui de $T(\mathbb{A})/T(F)$.

(ii) Que faire si π apparaît dans $L(G(\mathbb{A})/G(F))$ avec une multiplicité > 1? Peut-on espérer que la composante π-isotopique soit canoniquement somme directe de représentations isomorphes à π (et, dans le cas des corps de fonctions, chacun de ces sommands contenant des fonctions correspondant à des faisceaux ℓ-adiques)? Et que chaque sommand donne lieu à un σ?

(iii) Comment caractériser σ si sa classe d'isomorphie n'est pas uniquement déterminée par les classes d'isomorphie locales correspondantes? Si une telle indétermination, est responsable d'une multiplicité > 1 comme en (ii), comment relier des $\pi \subset L(G(\mathbb{A})/G(F))$ à des σ?

Exemple: GL(2). Lci, à π et à $\| \ \|^{1/2}$, on peut associer $\pi.|\det\|^{1/2}$, et cette représentation automorphe associée est la même pour $(\pi, \| \ \|^{1/2})$ et pour $(\pi\varepsilon, \| \ \|^{1/2}\varepsilon)$ (ε d'ordre 2). Ceci rend naturel d'attacher un σ à $\pi\|\det\|^{1/2}$ plutôt qu'à $(\pi, \| \ \|^{1/2})$. C'est ce qui est usuel, bien que non compatible à la dualité. On peut faire de même pour $\mathrm{GL}(2n)$.

Je pensais expliciter d'autres exemples, mais ils retardent trop cette lettre. Ce sera pour la prochaine.

A suivre ...

Bien à toi

P. Deligne