

TOPOLOGIE. — *Fibrés vectoriels complexes à groupe structural discret*,
Note (*) de MM. Pierre Deligne et Dennis Sullivan, transmise par M. Jean-
Pierre Serre.

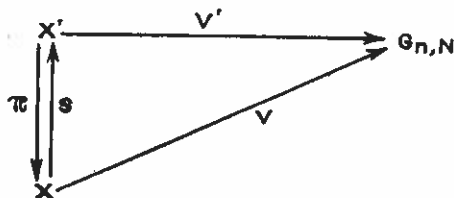
Tout fibré vectoriel complexe dont le groupe structural peut être réduit à un groupe discret, et dont la base est un polyèdre compact, devient trivial sur un revêtement fini de la base.

THÉORÈME. — Soient V un système local complexe de dimension finie n sur un polyèdre compact X , et \mathcal{V} le fibré vectoriel complexe correspondant. Il existe un revêtement fini surjectif $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ de X tel que l'image réciproque de \mathcal{V} sur \tilde{X} soit triviale (en tant que fibré vectoriel).

On peut supposer X connexe, muni d'un point base p . Une fois choisie une base de V_p , le système local V correspond à un homomorphisme $\rho : \pi_1(X, p) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Le groupe $\pi_1(X, p)$ étant de type fini, il existe un sous-anneau A de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Z} , tel que ρ se factorise à travers $GL(n, A)$ [prendre une famille génératrice finie (g_i) de $\pi_1(X, p)$, et A engendré par les coefficients des g_i]. Soient m_1 et m_2 deux idéaux maximaux de A , tels que les corps finis A/m_1 et A/m_2 soient de caractéristiques distinctes. Nous prendrons pour \tilde{X} le revêtement de X correspondant au sous-groupe de $\pi_1(X, p)$ formé des g tels que $\rho(g) \equiv 1 \pmod{m_1}$ et $\pmod{m_2}$. Son indice divise l'ordre de $GL(n, A/m_1) \times GL(n, A/m_2)$. Montrer que \tilde{X} convient revient à prouver la

PROPOSITION. — Supposons que V soit défini par $\rho : \pi_1(X, p) \rightarrow GL(n, A)$, où A est un sous-anneau de \mathbb{C} de type fini sur \mathbb{Z} . S'il existe deux idéaux maximaux m_1 et m_2 de A , de caractéristiques résiduelles distinctes, tels que ρ soit trivial mod m_1 et m_2 , alors \mathcal{V} est trivial.

Soient d et N deux entiers, avec $\dim(X) \leq d$ et N assez grand ($N \geq d/2$). La grassmannienne $G_{n,N}$ des n -plans de \mathbb{C}^{n+N} est une assez bonne approximation de $BGL(n, \mathbb{C})$ pour que $[X, G_{n,N}] = [X, BGL(n, \mathbb{C})]$ et \mathcal{V} correspond à une classe d'homotopie d'applications $v : X \rightarrow G_{n,N}$. Soit X' l'espace fibré sur X dont la fibre en $x \in X$ est l'espace $((2N+1)$ -connexe, donc $(d+1)$ -connexe) des injections linéaires de \mathcal{V}_x dans \mathbb{C}^{n+N} , et v' l'application $\iota \mapsto$ image de ι , de X' dans $G_{n,N}$. La projection $\pi : X' \rightarrow X$ admet une section s , unique à homotopie près, et $v = v' s$.



Les conditions suivantes sont équivalentes : (a) \mathcal{V} est trivial; (b) $v \sim 0$ (i. e. v est homotope à une application constante); (c) v' est ~ 0 sur le d -squelette de X' , i. e. pour tout $w : K \rightarrow X'$ avec $\dim K \leq d$ (ou seulement pour K le d -squelette d'une triangulation de X') on a $v' w \sim 0$; (d) l'application composée $v'' : X' \xrightarrow{v'} G_{n,N} \rightarrow \cosq_d(G_{n,N})$,

où $\text{cosq}_d(G_{n,N})$ est le d -ième étage de la décomposition de Postnikov de $G_{n,N}$ (mêmes π_i pour $i \leq d$), est ~ 0 . L'équivalence de (c) et (d) est un fait général, pour toute application v' ; celle de (b) et (c) résulte de ce que, pour tout complexe K de dimension $\leq d$, on a $[K, X'] \xrightarrow{\sim} [K, X]$.

L'espace $G_{n,N}$ étant simplement connexe, il résulte du principe de Hasse pour les applications [(4), th. 3.1] que $v'' \sim 0$ si et seulement si pour tout l son complété l -adique $v'_l : X'_l \rightarrow \text{cosq}_d(G_{n,N})_l = \text{cosq}_d((G_{n,N})_l)$ est homotope à zéro. La proposition résulte du

LEMME. — *Supposons V défini par $\rho : \pi_1(X, p) \rightarrow \text{GL}(n, A)$, où A est un sous-anneau de \mathbb{C} de type fini sur \mathbb{Z} . S'il existe un idéal maximal m de A , de caractéristique résiduelle distincte du nombre premier l , tel que ρ soit trivial mod m , alors $v'_l \sim 0$.*

On peut supposer que X est une réunion de facettes du simplexe $\Delta \subset \mathbb{R}^M$ tendu par les vecteurs de base. Pour chaque facette σ de Δ , soit $\sigma_{\mathbb{R}}$ le sous-espace affine tendu par σ , et $\sigma_{\mathbb{Z}}$ la sous-variété affine de l'espace affine $A_{\mathbb{Z}}^M$ sur \mathbb{Z} dont $\sigma_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des points réels. Soit $X_{\mathbb{Z}}$ la réunion des $\sigma_{\mathbb{Z}}$ pour $\sigma \subset X$. C'est un schéma sur \mathbb{Z} ; pour tout anneau B , on note X_B le schéma sur B qui s'en déduit par extension des scalaires. L'inclusion de X dans $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^M$ est une équivalence d'homotopie et, pour $l \neq p$, la cohomologie mod l de X [ou de $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$] coïncide avec la cohomologie mod l (étale) de $X_{\mathbb{F}_p}$. Cela résulte par Mayer-Vietoris du même fait pour l'espace affine (SGA 4, XV 2.2).

La représentation ρ fournit un fibré vectoriel \mathcal{V}_A sur X_A . Le fibré \mathcal{V} s'en déduit par extension des scalaires à \mathbb{C} , et sa réduction mod m est triviale. La définition de X' a un sens purement algébrique, d'où un diagramme de schémas sur A :

$$(1) \quad X_A \xleftarrow{\pi_A} X'_A \xrightarrow{v'_A} (G_{n,N})_A.$$

Notons avec un indice l les objets analogues pour la représentation unité de $\pi_1(X, p)$ dans $\text{GL}(n, A)$. Les morphismes de schémas v'_A et v'_{1A} deviennent isomorphes après réduction mod m . Si k est une clôture algébrique de A/m , et B l'hensélisé strict de A en k , on a une chaîne d'isomorphismes entre morphismes de types d'homotopie complétés en l :

$$(2) \quad v'_l \sim (v'_C)_l \sim (v'_B)_l \sim (v'_k)_l \sim (v'_{1k})_l \sim (v'_{1B})_l \sim (v'_{1C})_l \sim v'_{1l};$$

d'où

$$v''_l \sim v''_{1l} \sim 0.$$

Dans la chaîne (2), les termes extrêmes sont des complétés de morphismes entre espaces ordinaires [(4), § 3], les autres des complétés de morphismes, entre types d'homotopie étale [(4), § 3, (1)].

Remarques. — (a) Si N est grand, et que $2p \geq d$, l'application induite par les classes de Chern : $\text{cosq}_d(G_{n,N}) \rightarrow \text{cosq}_d\left(\prod_1^n K(\mathbb{Z}, 2i)\right)$ est un isomorphisme après localisation en p . On peut déduire de ce fait que l'hypothèse de la proposition peut être remplacée par : « ρ est trivial mod m , pour un idéal maximal m de caractéristique résiduelle p telle que $H_*(X)$ n'ait pas de p -torsion et que $2p \geq \dim(X)$ ».

(b) Dans (a) et la proposition, on peut remplacer « ρ trivial mod m » par « mod m , p d'image dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel ».

(c) Le théorème renforce le théorème de géométrie différentielle ⁽³⁾ selon lequel les classes de Chern réelles d'un fibré vectoriel à connexion intégrable sont triviales. Sa démonstration rappelle la démonstration algébrique de ce fait donnée par Grothendieck ⁽²⁾.

(d) Le problème a été suggéré à l'un de nous par ⁽⁵⁾ : le théorème étend le domaine d'applications de calculs qui y sont faits (th. C.2 et th. D.2).

(e) L'analogue du théorème pour les fibrés vectoriels réels à groupe structural discret dans $SL(n, \mathbf{R})$ est faux : la classe d'Euler réelle peut être non nulle, déjà pour $n = 2$ et X une surface de Riemann.

PROBLÈMES. — L'analogue réel du théorème vaut-il pour les fibrés dont le groupe structural peut être réduit à $SL(n, \mathbf{Z})$ [cf. ⁽⁶⁾], ou pour n impair ? La classe d'Euler réelle est-elle la seule obstruction ?

(f) La technique qui consiste à réduire modulo deux idéaux maximaux, et un problème d'Atiyah quant aux fibrés vectoriels, sont décrits dans l'introduction de ⁽¹⁾. L'application classifiante algébrique [le diagramme (1)] et les méthodes de ⁽⁵⁾ utilisées ci-dessus permettent de résoudre le problème d'Atiyah.

(*) Séance du 10 novembre 1975.

⁽¹⁾ M. ARTIN et B. MAZUR, *Etale Homotopy (Lecture Notes in Math., 100, Springer-Verlag, 1969)*.

⁽²⁾ A. GROTHENDIECK, *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, 1968.

⁽³⁾ J. MILNOR, *Comm. Math. Helv.*, 32, 1958, p. 215-223.

⁽⁴⁾ D. SULLIVAN, *Ann. of Math.*, 100, 1974, p. 1-89.

⁽⁵⁾ D. SULLIVAN, *Infinitesimal Computations in Topology* (à paraître dans *Ann. of Math.*).

⁽⁶⁾ D. SULLIVAN, *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 17.

Institut des Hautes Études Scientifiques
Le Bois-Marie,
91440 Bures-sur-Yvette.