Actes du Congrès International des Mathématiciens
Vancouver, 1974

Poids dans la Cohomologie des Variétés Algébriques

Pierre Deligne

1. Soit X une variété algébrique complexe (i.e., un schéma séparé de type fini sur $\boldsymbol{C}$). On note encore X l'espace topologique usuel $X(\boldsymbol{C})$ sous-jacent à X. Dans cet exposé, nous décrivons une filtration remarquable des groupes de cohomologie rationnelle de X, la *filtration par le poids*, et nous donnons un fascicule de résultats de ses propriétés. Sa définition sera donnée au §12. Pour les démonstrations, nous renvoyons aux travaux cités dans la bibliographie où les théorèmes sont souvent prouvés dans des cadres plus généraux; travailler sur $\boldsymbol{C}$ nous permet de disposer simultanément de la théorie de Hodge, d'action de groupes de Galois, et de la résolution des singularités.

La filtration par le poids est une filtration finie croissante. Nous la noterons W. Elle est également définie dans des situations relatives (ou en cohomologie à support propres). Elle dépend non seulement de l'espace topologique X, mais encore de la façon dont il est réalisé comme variété algébrique. Elle est compatible aux isomorphismes de Künneth (i.e., via l'isomorphisme $H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y)$, on a

$$W_j(H^*(X \times Y)) = \sum_{j'+j''=j} W_{j'}(H^*(X)) \otimes W_{j''}(H^*(Y))$$

et est fonctorielle pour les morphismes algébriques. Plus précisément, si $f\colon X \to Y$ est algébrique, alors $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ est *strictement* compatible aux filtrations par le poids de $H^*(Y)$ et $H^*(X)$: Si la classe $x \in H^i(X)$ est dans l'image de f^*, elle est de filtration $\leqq i$ si et seulement si elle est l'image d'une classe de filtration $\leqq i$. Plus généralement, toute application naturelle est *strictement* compatible aux filtrations par le poids.

La filtration par le poids est un invariant discret; elle est invariante par déformation de la structure algébrique de X. Plus précisément, on a le théorème suivant.

2. THÉORÈME. *Soit $f:X \to S$ un morphisme. Pour $t \in S$, soit $X_t = f^{-1}(t)$. Si le faisceau $R^i f Q_*$ est localement constant (un système local), il existe une filtration par le poids W de $R^i f_* Q$ par des sous-systèmes locaux, telles que les flèches r_t: $(R^i f_* Q)_t \to H^i(X_t)$ soient strictement compatibles aux filtrations par le poids, et qu'en particulier là où r_t est un isomorphisme, W induise la filtration par le poids de $H^i(X_t)$.*

3. En gros, la filtration par le poids exprime comment la cohomologie de X peut se bâtir en terme de la cohomologie de variétés projectives non singulières. Voici quelques exemples.

EXEMPLE 3.1. Si X est propre (= compacte, par exemple projective) et lisse (= non singulière), alors $H^i(X) =_{\mathrm{dfn}} H^i(X, Q)$ est purement de poids i: $\mathrm{Gr}_j^W(H^i(X)) = 0$ pour $i \neq j$. En d'autres termes, $W_{i-1}(H^i(X)) = 0$ et $W_i(H^i(X)) = H^i(X)$.

EXEMPLE 3.2. Soient X propre, lisse, connexe, de dimension d et P un point de X. Des groupes de cohomologie à support $H^i_{\{P\}}(X) = H^i(X \bmod (X - \{P\}))$, seul celui d'indice $2d$ est non nul, et

$$H^{2d}_{\{P\}}(X) \xrightarrow{\sim} H^{2d}(X) = Q. \tag{3.2.1}$$

D'après nos principes, $H^{2d}_{\{P\}}(X)$ est donc purement de poids $2d$. L'inverse de l'isomorphisme (3.2.1) peut être vu comme un isomorphisme de Thom-Gysin

$$Q = H^0(P) \xrightarrow{\sim} H^{2d}_{\{P\}}(X);$$

on constate qu'il ne respecte pas les poids. La situation générale est la suivante: pour Y une sous-variété lisse purement de codimension d dans une variété lisse X, l'isomorphisme de Thom-Gysin $H^i(Y) \xrightarrow{\sim} H^{i+2d}_Y(X)$ transforme W^k en W^{k+2d}. Notant (n) un décalage de $2n$ pour W $(W(n)_k = W_{k-2n})$, ceci s'écrit comme un isomorphisme filtré

$$H^i(Y)(-d) \xrightarrow{\sim} H^{i+2d}_Y(X).$$

EXEMPLE 3.3. Soient X propre et lisse, et Y une sous-variété lisse (fermée) purement de codimension d. On dispose d'une suite exacte

$$\cdots \to H^i(X) \to H^i(X - Y) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}_Y(X) \to \cdots.$$

D'après 3.1 et 3.2, on a donc $\mathrm{Gr}_j^W(H^i(X - Y)) = 0$ pour $j \neq i$, $i + 1$; W_i est l'image de $H^i(X)$.

EXEMPLE 3.4. Soit X propre, et lisse sauf pour un point singulier isolé P. Supposons que la variété $\tilde{X}$ déduite de X en éclatant P soit lisse, et que le diviseur exceptionnel D image inverse de P soit lisse: X se déduit de $\tilde{X}$ (propre et lisse) en contractant en un point D (propre et lisse). L'espace X a le type d'homotopie de $[\tilde{X} \cup$ (un cône de base D)], dont la cohomologie se calcule par Mayer-Vietoris; on trouve une suite exacte

$$\cdots \to H^{i-1}(D) \xrightarrow{\delta} H^i(X) \to H^i(\tilde{X}) \oplus H^i(P) \to \cdots$$

qui montre que $\mathrm{Gr}_j^W(H^i(X)) = 0$ pour $j \neq i - 1$, i; W_{i-1} est l'image de δ. Pour

$i \neq 0$, c'est encore le noyau de $H^i(X) \to H^i(\bar{X})$, et $\mathrm{Gr}_i^W(H^i(X))$ est l'image de $H^i(X)$ dans $H^i(\bar{X})$.

EXEMPLE 3.5. Les variétés de drapeaux sont des variétés propres et lisses. La filtration par le poids de leur cohomologie est donc donnée par 3.1. Si G est un groupe réductif connexe, le même resultat vaut pour la cohomologie de BG [**1**, III]. Ceci permet de calculer la filtration par le poids de la cohomologie de G, liée à celle de BG par transgression. On trouve que $W_i H^i(G) = 0$, et que $W_{i+1}H^i(G)$, nul pour i pair, est égal à la partie primitive de la cohomologie de degré i de G [**1**, III]. Si $f: G \to H$ est une application algébrique entre variétés de groupes réductifs, l'image réciproque d'une classe de cohomologie rationnelle primitive de H est donc encore primitive. Pour d'autres corollaires, voir [**1**, III].

4. La filtration par le poids est graduable en un sens très fort. Il existe des graduations $\underline{W}$ des $H^i(X)$, qui décomposent W:

$$W_n(H^i(X)) = \bigoplus_{j \leq n} \underline{W}_j(H^i(X)) \tag{4.1}$$

et qui soient compatibles au cup-produit et aux opérations supérieures dérivées du cup-produit (produits de Massey $\cdots$). Ces dernières n'étant pas partout définies, le sens de "compatible à une graduation" doit être précisé. Le plus simple est de voir une graduation comme une action du groupe $\boldsymbol{G}_m$, i.e., une action de $\boldsymbol{Q}^*$ donnée par des formules algébriques: à une graduation $\underline{W}$ on associe l'action où $\lambda \in \boldsymbol{Q}^*$ agit sur $\underline{W}_j$ par multiplication par λ^j. La "compatibilité" est que $\boldsymbol{Q}^*$ agit par des automorphismes de $H^*(X)$ muni de sa graduation par le degré, du cup-produit, et des opérations supérieures dérivées du cup-produit.

5. Supposons pour simplifier X connexe, et soit $\mathscr{M}$ le modèle minimal du type d'homotopie rationnel de X, au sens de Sullivan [7]. C'est une algèbre différentielle graduée à degrés $\geqq 0$, connexe ($\mathscr{M}^0 = \boldsymbol{Q}$), (anti) commutative libre en tant qu'algèbre graduée, et engendrée par ses éléments indécomposables (i.e., $d\mathscr{M} \subset (\mathscr{M}^{>0})^2$). On a $H^*(\mathscr{M}) = H^*(X)$, et si X est simplement connexe, $\mathscr{M}^{>0}/(\mathscr{M}^{>0})^2 = (\pi_*(X) \otimes \boldsymbol{Q})^\vee$.

Un énoncé plus précis, et plus commode, que celui donné en § 4 est qu'il existe une graduation $\underline{W}$ vérifiant (4.1) déduite d'une graduation $\underline{W}$ de $\mathscr{M}$ (à degrés $\geqq 0$, somme de graduations des $\mathscr{M}^i$, telle que d et le produit soient homogènes de degré 0; en d'autres termes, $\boldsymbol{Q}^*$ agit par automorphismes de $\mathscr{M}$).

6. La seule existence de W et $\underline{W}$ n'impose aucune restriction au type d'homotopie de X: On peut toujours prétendre que $\mathscr{M}$ est tout entière de poids 0. N'importe quel polyèdre fini a d'ailleurs le même type d'homotopie qu'une variété algébrique. Soit en effet S un ensemble fini, muni d'un ensemble $\mathscr{S}$ de parties (les simplexes). On suppose que toute partie d'un élément de $\mathscr{S}$ est encore dans $\mathscr{S}$. Identifions S à l'ensemble des vecteurs de base de $\boldsymbol{R}^S$, et pour $\sigma \subset S$, soit $|\sigma|$ le simplexe tendu par les $s \in \sigma$. Montrons que $|S| = \bigcup_{\sigma \in \mathscr{S}} |\sigma|$ a le type d'homotopie d'une variété algébrique X. Si on pose $|\sigma|_C$ = espace affine complexe tendu par $\sigma \subset \boldsymbol{C}^S$, il suffit de prendre $X = \bigcup_{\sigma \in \mathscr{S}} |\sigma|_C$, dont $|S|$ est un rétracte par déformation. On peut vérifier que dans cet exemple $H^*(X)$ est purement de filtration par le poids 0.

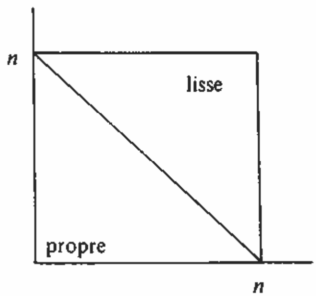
Toutefois, dès que les poids sont non nuls, des contraintes apparaissent sur le type d'homotopie de X (cf. §10.). Les règles suivantes aident à localiser les poids.

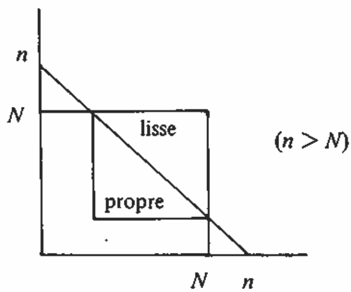
7. Pour un groupe de cohomologie H de type donné, chaque règle consistera à décrire une partie $\mathscr{E}$ de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Les poids seront *contrôlés* par $\mathscr{E}$ au sens suivant: Si $\mathrm{Gr}^W_n(H) \neq 0$, il existe $(p, q) \in \mathscr{E}$, avec $p + q = n$. Cette façon de s'exprimer, qui ici parait artificielle, ne l'est pas: D'autres informations que les poids possibles sont contrôlées par la même région $\mathscr{E}$, cf. §15.

(7.1) $H^n(X)$ est contrôlé par le carré $[0, n] \times [0, n]$.

(7.2) Si X est propre, $H^n(X)$ est contrôlé par la partie de ce carré en-dessous de la seconde diagonale, soit $\{(p, q) \in [0, n] \times [0, n] \mid p + q \leqq n\}$. Si X est lisse, $H^n(X)$ est contrôlé par la partie de ce carré au-dessus de cette diagonale, soit $\{(p, q) \in [0, n] \times [0, n] \mid p + q \geqq n\}$.

(7.3) Si $N = \dim X \leqq n$, le carré $[0, n] \times [0, n]$ peut être remplacé par le carré $[n - N, N] \times [n - N, N]$.





8. Variantes. (8.1) Le groupe de cohomologie à support propre $H^n_c(X)$ est contrôlé par la partie du carré $[0, n] \times [0, n]$ en-dessous de la seconde diagonale. Pour $N = \dim X \leqq n$, on peut encore remplacer ce carré par $[n - N, N] \times [n - N, N]$. En particulier, $H^{2N}_c(X)$ est purement de poids $2N$.

(8.2) La "dualité" entre les cas propres et lisses peut se déduire de la dualité de Poincaré: pour X lisse purement de dimension N,

$$H^n(X) = \mathrm{Hom}(H^{2N-n}_c(X), H^{2N}_c(X)) = (H^{2N-n}_c(X)^{\mathrm{dual}})(-N).$$

Cet argument permet d'étendre les résultats donnés pour X lisse au cas où X est une "rational homology manifold". Pour un tel X, l'image de $H^n_c(X)$ dans $H^n(X)$ est purement de poids n.

(8.3) Pour X seulement supposé normal, il reste vrai que $H^1(X)$ est contrôlé par $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

9. Soient X une variété connexe, $x \in X$, et $\Pi^{(n)}$ le plus grand quotient nilpotent de longueur n et sans torsion de $\pi_1(X, x)$. On sait que les groupes H d'indice fini dans $\Pi^{(n)}$ et assez petits ont la propriété suivante.

$(*)$ Il existe une algèbre de Lie nilpotente de longueur n, $(\mathscr{H}, [\ ])$, avec $\mathscr{H}$ un

$\boldsymbol{Z}$-module libre, telle que la formule de Campbell-Hausdorff

$$x \circ y = x + y + [x, y]/2 + [x, [x, y]]/12 + [y, [y, x]]/12 + \cdots$$

fasse de $\mathscr{H}$ un groupe, isomorphe à H.

De plus, l'algèbre de Lie $\mathscr{L}^{(n)} = \mathscr{H} \otimes \boldsymbol{Q}$ ne dépend que de $\Pi^{(n)}$, non de H.

10. Théorème (Morgan). *Si X est normale, $\mathscr{L}^{(n)}$ admet une graduation W, à degrés < 0, telle que $\mathscr{L}^{(n)}$ soit engendrée par des éléments de degré -1 et -2, ceux ci n'étant soumis qu'à des relations de degré -2, -3 et -4, plus la nullité des commutateurs n fois itérés.*

Il est plus commode de travailler avec le système projectif $\mathscr{L}^{(\infty)}$ des $\mathscr{L}^{(n)}$. Définissant $H^i(\mathscr{L}^{(\infty)}) = \text{inj lim } H^i(\mathscr{L}^{(n)})$, on a

$$H^1(\mathscr{L}^{(\infty)}) = H^1(X), \qquad H^2(\mathscr{L}^{\infty}) \subsetneq H^2(X).$$

De plus, une graduation $\underline{W}$ de $\mathscr{M}$ comme au §5 définit des graduations compatibles de $\mathscr{L}^{(\infty)}$, de sa cohomologie, et de celle de X. D'après (8.3), (resp. (7.1)), $H^1(X)$ est de poids 1 et 2 et $H^2(X)$ de poids $\leqq 4$. Dès lors, $H^1(\mathscr{L}^{(\infty)})$ (le dual du groupe $\mathscr{L}^{\infty}/[\mathscr{L}^{\infty}, \mathscr{L}^{\infty}]$ des générateurs de $\mathscr{L}^{\infty}$) est de poids 1 et 2, et $H^2(\mathscr{L}^{(\infty)})$, le dual du groupe des relations entre générateurs, est de poids $\leqq 4$. Ceci vérifie le théorème.

11. Pour une variété propre et lisse la filtration par le poids se réduit à peu de chose (3.1). Le fait qu'elle soit graduable au sens §4 implique la nullité de tous les produits de Massey. Qu'elle le soit au sens §5 implique même que le type d'homotopie rationnel de X peut se lire sur son algèbre de cohomologie—voir [3].

12. Théorie de Hodge. Le groupe de cohomologie $H^i(X)$ de toute variété algébrique complexe est munie d'une structure de Hodge mixte (W, F) (W est une filtration de $H^i(X)$, et F une filtration de $H^i(X) \otimes \boldsymbol{C} = H^i(X, \boldsymbol{C})$, W et F vérifiant des axiomes convenables—voir [1]). La filtration par le poids est par définition la filtration W.

13. Théorie l-adique. Une variété algébrique X se définit en terme d'un nombre fini d'équations polynômes. Les coefficients de ces équations engendrent un sous-anneau de type fini R de $\boldsymbol{C}$, de corps des fractions K, et X se déduit par extension des scalaires à $\boldsymbol{C}$ d'un schéma sur K, voire sur R. Les énoncés qui suivent deviennent vrai lorsqu'on remplace R par $R[1/f]$ avec $f \in R$ assez divisible.

(13.1) Soit l un nombre premier. Le groupe $H^i(X) \otimes \boldsymbol{Q}_l$ s'identifie au groupe de cohomologie l-adique $H^i(X, \boldsymbol{Q}_l)$. Ce dernier est défini de façon purement algébrique, donc est muni par transport de structure d'une action de $\text{Aut}(\boldsymbol{C}/K)$.

(13.2) Soit $\bar{K}$ la clôture algébrique de K dans $\boldsymbol{C}$. L'action se factorise par $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Elle est non ramifiée sur $R[1/l]$, i.e., se factorise par le groupe de Galois de la plus grande extension $K_{\text{nr}}^{(l)} \subset \bar{K}$ de K non ramifiée sur $R[1/l]$.

(13.3) Soit m un idéal maximal de $R[1/l]$, et $N(m) = \# R/m$ (R/m est un corps fini). A m correspond une classe de conjugaison de substitutions de Frobenius $\phi_m \in \text{Gal}(K_{\text{nr}}/K)$, d'inverses les Frobenius géométriques $F_m = \phi_m^{-1}$.

14. Théorème. *Pour f assez divisible, on a*

(i) *Pour tout l et m, les valeurs propres α de F_m (dans une extension finie convenable de $\mathbf{Q}_l$) sont des entiers algébriques. Pour chaque α, il existe un entier $w(\alpha)$ tels que tous les conjugués complexes de α soient de valeur absolue $N(m)^{w(\alpha)/2}$.*

(ii) *Choisissons un Frobenius géométrique F_m, et soit ${}_mW_j$. la somme des sous-espaces propres généralisés correspondant aux valeurs propres α de F_m telles que $w(\alpha) = j$. La filtration par les $\bigoplus_{j \leq i}\, {}_mW_j$ est indépendante de m et du choix de F_m; elle est rationnelle et sa trace sur $H^i(X)$ est indépendante de l; c'est la filtration par le poids.*

Principe de Démonstration. On exprime (via une suite spectrale) la cohomologie de X en terme de la cohomologie de variétés propres et lisses, comme en [**1**]. La suite spectrale aboutit à une filtration W de $H^*(X)$, qui est par définition la filtration par le poids de la théorie de Hodge. Cette suite spectrale a un analogue l-adique; le l-adifié W_l de W est donc stable par un groupe de Galois. On déduit de la conjecture de Weil que les valeurs propres de F_m sur $\mathrm{Gr}_j^{W_l}$ sont des entiers algébriques de valeurs absolues complexes $N(m)^{j/2}$, et le théorème en résulte.

15. Dans les cas considérés en (7.1), (7.2) et (7.3), la région $\mathscr{E}$ décrite contrôle non seulement les poids, mais encore les nombres de Hodge et la divisibilitié des valeurs propres des F_m: dans (7.1), (7.2) et (7.3), une région $\mathscr{E}$ a été assignée à un groupe H, et

(a) Les nombres de Hodge h^{pq} non nuls des structure de Hodge $\mathrm{Gr}_j^W(H)$ vérifient $(p, q) \in \mathscr{E}$.

(b) (Utile seulement dans le cas (7.3).) Si les $(p, q) \in \mathscr{E}$ avec $p + q = j$ vérifient $p, q \geqq k$, alors (toujours pour f assez divisible), les valeurs propres de F_m de valeurs absolues complexes $N(m)^{j/2}$ sont divisibles par $N(m)^k$.

On espère que ceci est un cas particulier d'un principe général, cf. [**4**].

16. Le résultat suivant est clair du point de vue de la théorie de Hodge.

(16.1) Pour j impair dim $\mathrm{Gr}_j^W H^i(X)$ est pair.

Par contre, je ne sais démontrer jusqu'ici §§ 2 et 5 que par voie 1-adique. Pour § 5, la méthode de § 14 permet d'obtenir une graduation 1-adique; une astuce de Sullivan permet d'en déduire l'existence de graduations rationnelles du type voulu.

Les propriétés de fonctorialité de la filtration par le poids sont évidentes du point de vue l-adique (car Galois commute à tout ce qui se peut définir). Il est toutefois utile de les prouver du point de vue de la théorie de Hodge, pour obtenir des propriétés analogues pour la filtration F. Morgan a obtenu de nombreux résultats dans cette direction—assez pour prouver un résultat un peu plus faible que §10 par théorie de Hodge.

17. Ainsi que § 5 le suggère, une filtration par le poids existe aussi sur les groupes d'homotopie (tensorisés par $\mathbf{Q}$) sous des hypothèses de simple connexité.

Elle existe aussi sur les groupes de cycles évanescents (cf. [**6**]), et j'espère qu'elles nous aideront à mieux comprendre ces derniers.

Bibliographie

1. P. Deligne, *Théorie de Hodge*. I, Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), vol. I, Gauthier-

Villars, Paris, 1971, pp. 425–430; II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 40 (1972), 5–58; III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 44 (à paraître).

2. ———, *La conjecture de Weil.* I, II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. Nos. 43 et 44 (á paraître).

3. P. Deligne, P. A. Griffiths, J. Morgan and D. Sullivan. *Real homotopy theory of Kähler manifolds* (à paraître).

4. B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration* (*estimates*), Ann. of Math. (2) **98** (1973), 58–95. MR **48** #297.

5. J. Morgan.

6. J. H. M. Steenbrink, *Limits of Hodge structures and intermediate jacobians*, Thèse, Amsterdam, 1974.

7. D. Sullivan, *Differential forms and the topology of manifolds*, Proc. Japan Conference on Manifolds, 1973.

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91440 Bures-sur-Yvette, France