Appendix to Residues and Duality(Lect.Notes in Math.20(Springer-Verlag 1966)pp.404-421

APPENDIX : COHOMOLOGIE A SUPPORT PROPRE ET CONSTRUCTION DU FONCTEUR $f^!$.

par P. DELIGNE (1)

Verdier a montré que dans le cas topologique, le formalisme de la dualité de Poincaré se ramenait à des problèmes locaux en haut (voir [1]). Pour transposer sa construction au cadre schématique, il faut disposer d'une théorie de la cohomologie "à support propre" pour les faisceaux cohérents.

Sauf mention explicite du contraire, tous les préschémas considérés sont noethériens et les préfaisceaux quasi-cohérents.

n° 1. Le sorite des pro-objets.

Proposition 1. *Soit* C *une* U *-catégorie* (2) *où existent les*

---

(1) Ceci est une version complétée d'une lettre de P. Deligne à R. Hartshorne (lettre du 3 Mars 1966). Les notes de bas de page ont été ajoutées par le copiste.

(2) U désigne un univers fixé dans toute la suite.

limites inductives finies. Soit h un foncteur $C^\circ \longrightarrow$ (ens). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) h est limite inductive, selon un petit (3) ensemble ordonné filtrant, de foncteurs représentables.

(ii) h est limite inductive, selon une petite catégorie filtrante, de foncteurs représentables.

(iii) h transforme $\varinjlim$ finies en $\varprojlim$ finies, et il existe un petit ensemble d'objets tel que tout élément d'un h(X) se factorise par l'un d'eux.

Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales et (iii) $\Longrightarrow$ (ii) standard (h est limite des h_F selon la catégorie des (F, α) pour $\alpha \in h(F)$ et F dans la sous-catégorie de C stable par $\varinjlim$ finie engendrée par le petit ensemble donné). Reste à prouver que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont deux catégories filtrantes, un foncteur $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ est dit cofinal si $\varinjlim_{\mathcal{L}} h_{F(L)}$ est le foncteur final. Pour tout $G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, on a alors $\varinjlim_{\mathcal{M}} G = \varinjlim_{\mathcal{L}} GF$. Il s'agit de prouver:

lemme. Pour toute petite catégorie filtrante $\mathcal{L}$, il existe un foncteur cofinal d'un petit ensemble ordonné filtrant dans $\mathcal{L}$.

La première projection : $\mathcal{L} \times N \longrightarrow \mathcal{L}$, est un foncteur cofinal (N muni de l'ordre naturel) ; ceci permet de se

---

(3) "petit" = "$\in U$" .

ramener à supposer que $\mathrm{Ob}\mathcal{L}$, préordonné par Hom $(X,Y) \neq \emptyset$, n'a pas de plus grand élément. On ordonne par inclusion l'ensemble E des sous-catégories finies de $\mathcal{L}$ ayant un seul objet final (fini signifie d'ensemble de flèches fini). On définit un foncteur de E dans $\mathcal{L}$ en associant à chacune de ces catégories son objet final. Sous les hypothèses faites, E est filtrant et ce foncteur cofinal.

Les foncteurs vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 1 sont les Ind -objets de C . Ils forment une sous-catégorie pleine Ind C de $\underline{\mathrm{Hom}}$ $(C^{\circ}, (\mathrm{Ens}))$, stable par limite inductive. $C \longmapsto \mathrm{Ind}\, C$ est un foncteur $(\mathrm{cat}) \to (\mathrm{cat})$. Si les limites inductives filtrantes existent dans C , pour tout $h \in \mathrm{Ind}\, C$, le foncteur $X \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(h, h_X)$ est coreprésentable, d'où un foncteur, noté $\varinjlim$, de Ind C dans C . En particulier, on a toujours un foncteur $\mathrm{Ind\, Ind}\, C \longrightarrow \mathrm{Ind}\, C$, et tout foncteur $C \longrightarrow \mathrm{Ind}\,\mathcal{D}$ se prolonge en un foncteur $\mathrm{Ind}\, C \longrightarrow \mathrm{Ind}\,\mathcal{D}$. Dans Ind C , les limites inductives filtrantes sont exactes, et seront notées "$\varinjlim$" ; en particulier, identifiant C à une sous-catégorie pleine de Ind C , si $(X_i)_{i\in I}$ est un système inductif filtrant dans C ,

$$\varinjlim_{i\in I} X_i = \varinjlim \text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, X_i$$

Pour qu'un foncteur sur Ind C soit représentable, il faut et suffit qu'il transforme $\varinjlim$ finies en $\varprojlim$ finies, $\varinjlim$ filtrantes en $\varprojlim$ filtrantes et que sa restriction à C satisfasse à la condition de petitesse de la prop. 1 (iii) (en effet, la proposition 1 montre alors que sa restriction à C est un Ind -objet, auquel il est partout égal vu la condition sur les limites).

Ce qui précède, sauf la prop. 1 (iii) et l'assertion précédente reste vrai en utilisant partout des limites de suites (ou dénombrables, c'est la même chose).

On définit par dualité la catégorie pro C des pro-objets (sous-catégorie pleine de <u>Hom</u> (C, (Ens))°) .

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> X <u>un préschéma quasi-compact quasi-séparé</u> (non nécessairement noethérien). <u>La catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur</u> X <u>est équivalente à la catégorie des</u> <u>Ind - objets de la catégorie des faisceaux quasi-cohérents de présentation finie sur</u> X .

La flêche est $\text{"}\varinjlim\text{"}\,\mathcal{F}_i \longmapsto \varinjlim \mathcal{F}_i$. Si $\mathcal{F}$ est de p.f. (présentation finie), pour tout système inductif filtrant $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \varinjlim \mathcal{G}_i) = \varinjlim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_i)$ (par un recollement fini qui commute à $\varinjlim$, on se ramène au cas affine). Le foncteur précédent est donc pleinement fidèle. Son image est stable par limites inductives filtrantes et sommes finies. Il suffit de prouver que pour tout $x \in X$, tout $\mathcal{F}$ sur X , et tout $s \in \mathcal{F}_x$, il existe $\mathcal{G}$ de p.f. et une flêche de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$ dans l'image de laquelle se trouve s :

$\mathcal{F}$ sera limite d'images de faisceaux de p.f. et chacune d'elles quotient d'un faisceau de p.f. par une limite de sous-faisceaux de type fini.

Soit <u>sur</u> un voisinage quasi-compact U de x une flêche $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ de p.f. , s dans l'image. Il suffit de prolonger $\mathcal{C}$ et f à X entier, et, procédant pas à pas, il suffit de savoir prolonger à $U \cup V$ si V est affine, ce qui revient à effectuer un prolongement de $U \cap V$ à V :

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{C}$ <u>un faisceau de p.f. sur un ouvert quasi-compact</u> U <u>d'un schéma affine</u> X , $\mathcal{F}$ <u>un faisceau sur</u> X <u>et</u> f <u>une flêche de</u> $\mathcal{C}$ <u>dans</u> $\mathcal{F}|U$. <u>Il est possible de prolonger</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> f <u>en</u> $\overline{\mathcal{C}}$ <u>et</u> $\overline{f}$, <u>définis sur</u> X ($\overline{\mathcal{C}}$ étant de p.f.).

Soit ι l'inclusion de U dans X et $\mathcal{C}_1$ le produit fibré de $\iota_*\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ sur $\iota_*\iota^*\mathcal{F}$. $\mathcal{C}_1$ prolonge $\mathcal{C}$ et s'envoie dans $\mathcal{F}$. Si on représente $\mathcal{C}_1$ comme limite de ses sous-faisceaux de type fini, comme U est quasi-compact et $\mathcal{C}$ de p.f;, l'un d'eux prolonge déjà $\mathcal{C}$. Si on représente ce dernier comme quotient de $\mathcal{O}^n$ par une limite de sous-faisceaux de type fini de $\mathcal{O}^n$, on voit de même qu'on peut remplacer $\mathcal{C}_1$ par un faisceau de p.f.

<u>Cor 1</u>. <u>Pour qu'un foncteur contravariant additif</u> F : $(\text{q coh}) \longrightarrow \text{Ab}$ <u>soit représentable</u>, <u>il faut et suffit qu'il soit èxact à gauche et transforme</u> $\varinjlim$ <u>filtrante en</u> $\varprojlim$ <u>filtrante</u>.

<u>Cor 2</u>. <u>Tout faisceau de p.f. défini sur un ouvert quasi-compact</u>

Appendix to Residues and Duality(Lect.Notes in Math.20(Springer-Verlag 1966)pp.404-421

U *de* X *se prolonge en un faisceau de p.f. sur* X .

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On aura à travailler de façon essentielle dans pro $D^b\mathcal{A}$, sous-catégorie pleine de pro $D(\mathcal{A})$ formée des "$\varprojlim$" K_i où la cohomologie de K est uniformément bornée avec i . H^p se prolonge en un foncteur pro $D(\mathcal{A}) \longrightarrow$ pro $\mathcal{A}$.

Proposition 3. *Les foncteurs* H^p *forment un système conservatif* (4) *de foncteurs sur* pro $D^b\mathcal{A}$.

Soit $f : K \longrightarrow L$ une flêche de pro $D^b\mathcal{A}$ telle que les $H^p(K) \longrightarrow H^p(L)$ soient des isomorphismes (dans pro $\mathcal{A}$). Il s'agit de vérifier que pour tout M dans $D^b(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}(K,M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(L,M)$ est un isomorphisme. Pésons K = "$\varprojlim$"K_α . On dispose d'une suite spectrale convergente

$\mathrm{Ext}^p(H^qK_\alpha ,M) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(K_\alpha ,M)$ d'où par passage à la limite $\varinjlim \mathrm{Ext}^p(H^qK_\alpha ,M) \Longrightarrow \varinjlim \mathrm{Ext}^{p+q}(K_\alpha ,M)$, encore convergente car q est uniformément borné. Utilisant que tout foncteur (ici Ext) passe aux pro-objets et le foncteur

$\varinjlim$: Ind Ab $\longrightarrow$ Ab , on peut réécrire :

$$\varinjlim \mathrm{Ext}^p(H^qK,M) \Longrightarrow \varinjlim \mathrm{Ext}^{p+q}(K,M) = \mathrm{Hom}\ (K\,[-p-q]\ ,M)$$

Cette suite spectrale reste d'ailleurs vraie pour $M\in D(\mathcal{A})$. La proposition résulte aussitôt de l'existence de ces suites.

---

(4) i.e. si u est une flêche telle que les $H^p(u)$ soient inversibles, u est inversible.

n° 2. Lemmes fondamentaux.

Rappelons que les préschémas considérés sont noethériens.

Proposition 4. (Théorème de dualité pour une immersion ouverte).

Soient U un ouvert de X, j la flèche d'inclusion, $\mathcal{J}$ un idéal définissant le fermé complémentaire, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U et $\mathcal{G}$ quasi-cohérent sur X. Soit $\overline{\mathcal{F}}$ un prolongement cohérent de $\mathcal{F}$. On a

$$\underline{\mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}, j^*\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_X(\text{"}\varprojlim\text{"}\,\mathcal{J}^n\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{G})} \qquad (5)$$

La flèche $\varinjlim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{J}^n\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est injective : si l'image par f de $\mathcal{J}^n\overline{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{G}$ a son support dans le complémentaire de U, elle est annulée par une puissance de $\mathcal{J}$, soit $\mathcal{J}^k$, et l'image de $\mathcal{J}^{n+k}\overline{\mathcal{F}}$ est nulle.

Supposons maintenant X affine et soit $f \in \mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Pour k assez grand, toute section s de $\mathcal{J}^k\overline{\mathcal{F}}$ sur X a une image (sur U) qui se prolonge en une section de $\mathcal{G}$ sur X. Remplaçant $\overline{\mathcal{F}}$ par $\mathcal{J}^k\overline{\mathcal{F}}$, on peut supposer disposer d'un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & \mathcal{O}^n & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & \mathcal{O}^n & \longrightarrow & \mathcal{G} & &
\end{array}$$

---

(5) Cette formule est évidemment bien connue, cf. p. ex. la thèse de P. GABRIEL.

Appendix to Residues and Duality(Lect.Notes in Math.20(Springer-Verlag 1966)pp.404-421

où les flèches pointillées sont définies sur U .

Pour ℓ assez grand, en vertu de Krull et du fait que $R/R \cap R_1$ est concentré hors de U , on a $R \cap \mathcal{J}^{\ell}.\theta^{n} \subset R_1$. , ce qui permet de prolonger f en $\bar{f} : \mathcal{J}^{\ell}\mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Dans le cas général U_i un recouvrement affine fini de X et U_{ijk} des recouvrements affins finis des $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Les $\varinjlim$ commutent aux produits finis, d'où :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}, j^*\mathcal{G}) \arrow[r] & \prod_i \mathrm{Hom}_{U_1 \cap U}(\mathcal{F}, j^*\mathcal{G}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{ijk} \mathrm{Hom}_{U_{ijk} \cap U}(\mathcal{F}, j^*\mathcal{G}) \\
0 \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{J}^n\mathcal{F}, j^*\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[u] & \prod_i \varinjlim \mathrm{Hom}_{U_i}(\mathcal{J}^n\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\wr"'] & \prod_{ijk} \varinjlim \mathrm{hom}_{U_{ijk}}(\mathcal{J}^n\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

ce qui achève la démonstration.

La proposition 4 donne une formule explicite pour le foncteur (coh sur U) $\longrightarrow$ pro (coh sur X) "adjoint" à gauche à j^* . On notera ce foncteur $j_!$ ("prolongement par zéro") (6) ; il résulte de Krull qu'il est exact ; cela résulte aussi de ce que, X étant noethérien, un injectif de la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X , restreint à U , reste injectif quasi-cohérent sur U .

<u>Proposition 5</u>. (Indépendance de la compactification).

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "f"] \\
U \arrow[r, hook] & Y
\end{tikzcd}$$

<u>Soit</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre</u>, <u>induisant un isomorphisme entre l'ouvert</u> U <u>de</u> Y

---

(6) Cette terminologie et notation conflictent évidemment avec ceux généralement admis (livre de Godement, SGA 1962 ...). Le lecteur préfèrera peut-être lire $\mathfrak{j}_!$ au lieu de $j_!$

<u>et</u> $f^{-1}(U)$. <u>Soit</u> $\mathfrak{I}$ <u>un faisceau d'idéaux définissant</u> $Y - U$, <u>et soit</u> $\mathfrak{J} = f^{*}\mathfrak{I}$. <u>Si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est cohérent sur</u> X , <u>on a</u>

(i) <u>si</u> $k > 0$, <u>le système projectif</u> $R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F}$ <u>est essentiellement nul</u> (i.e. définit le proobjet nul)

(ii) <u>si</u> $k = 0$, <u>pour</u> n <u>assez grand</u>, $f_* \mathfrak{J}^{n+1}\mathfrak{F} = \mathfrak{I}.f_*\mathfrak{J}^n\mathfrak{F}$

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F} \text{ est un } \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{I}^n\text{-module de type fini (EGA III)}$$

donc pour n assez grand, $\mathfrak{I} \otimes R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F} \longrightarrow R^k f_* \mathfrak{J}^{n+1}\mathfrak{F}$ est surjectif ; (ii) en résulte. Si $k > 0$, $R^k f_*$ est nul sur U ; il existe N tel que $\mathfrak{I}^N . R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F}$ soit nul (quel que soit n). Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}^p \otimes R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F} \arrow[r] \arrow[d] & R^k f_* \mathfrak{J}^{n+p}\mathfrak{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \quad (\text{si } n \ \ n_o) \\
\mathfrak{I}^p . R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F} \arrow[r] & R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F} &
\end{tikzcd}$$

prouve que pour N assez grand et $k > 0$,

$$R^k f_* \mathfrak{J}^{n+N}\mathfrak{F} \longrightarrow R^k f_* \mathfrak{J}^n \mathfrak{F} \quad \text{est nul, soit (i) .}$$

n° 3. Définition de $Rf_!$.

Un morphisme f (resp un couple de morphismes composables, resp. un triple ...) sera dit compactifiable si on peut respectivement trouver des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \bar{X} \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & \bar{X} \arrow[r, hook] & \bar{\bar{X}} \arrow[dl] \\ Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \bar{Y} \arrow[dl] & \\ S & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & \bar{X} \arrow[r, hook] \arrow[dl] & \bar{\bar{X}} \arrow[r, hook] \arrow[dl] & \bar{\bar{\bar{X}}} \arrow[dl] \\ Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & \bar{Y} \arrow[r, hook] \arrow[dl] & \bar{\bar{Y}} \arrow[dl] & \\ Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \bar{Z} \arrow[dl] & & \\ S & & & \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et les flèches obliques sont propres. Tout morphisme compactifiable est séparé de type fini, et Nagata affirme dans [2] que sa démonstration prouve la réciproque pour les schémas noethériens intègres, mais les hypothèses qu'il fait sur la base ne sont pas claires (7).

On se propose, pour tout f compactifiable, de définir $Rf_! : \mathrm{pro}D^b_{coh}(X) \longrightarrow \mathrm{pro}D^b_{coh}(S)$. Rappelons que la catégorie $D^b_{coh}(S)$, catégorie dérivée bornée de la catégorie des faisceaux cohérents sur S , est sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de celle de tous les faisceaux (non nécessairement quasi-cohérents) sur S , l'image essentielle étant formée des complexes à cohomologie cohérente et bornée.

Si f est propre, on dispose de $Rf_*: D^b_{coh}(X) \longrightarrow D^b_{coh}(S)$, de dimension finie, qui induit $Rf_! : \mathrm{pro}D^b_{coh}(X) \longrightarrow \mathrm{pro}D^b_{coh}(S)$. Si f est une immersion ouverte, $f_! : (\text{coh sur } X) \longrightarrow \mathrm{pro}(\text{coh sur } S)$ induit $D^b(\text{coh sur } X) \longrightarrow D^b\ \mathrm{pro}\ (\text{coh sur } S)$ qui s'envoie dans $\mathrm{pro}\ D^b_{coh}(S)$, et cette flèche se prolonge en $Rf_! : \mathrm{pro}D^b_{coh}(X) \longrightarrow \mathrm{pro}D^b_{coh}(S)$. Si on prolonge le complexe

(7) Mumford aurait vérifié via la démonstration de Nagata que tout morphisme séparé de type fini des schémas noethériens est compactifiable.

cohérent K sur X en $\bar{K}$ sur S , son image est $\text{"}\varprojlim\text{"}\,\mathcal{J}^n\bar{K}$, où $\mathcal{J}$ définit $S \smallsetminus X$.

Pour un composé $f = gh$ (g propre, h immersion ouverte) on prend $Rf_! = Rg_!\, Rh_!$. Il faut vérifier.

Indépendance de la compactification.

Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "j''"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ S & X'' \arrow[l, "\bar{f}"] \end{tikzcd}$$

où j' et j'' sont des immersions ouvertes, $\bar{f}$ et g des applications propres. $j'X = g^{-1}j''X \cap j'X$. Il faut prouver que $R\bar{f}_* \, Rj''_! = R(\bar{f}g)_* \, Rj'_!$, soit encore, puisque $R(\bar{f}g)_* = R\bar{f}_* \, Rg_*$, que $Rj''_! = Rg_* \, Rj'_!$. On se ramène à supposer X dense dans X' , pour être dans les conditions de la proposition 5. Soit K un complexe cohérent borné sur X , prolongé en $\bar{K}$ sur X' . $g_*\bar{K}$ prolonge K sur X'' , et on a une flêche

$$g_*\mathcal{J}'^n\bar{K} \longrightarrow Rg_*\mathcal{J}'^n\bar{K} \qquad (1)$$

où ' désigne un faisceau d'idéaux qui définit X' X . La prop. 5 (ii) montre que $j''_!K = \text{"}\varprojlim\text{"}\,g_*\mathcal{J}'^n\bar{K}$. Par passage à la "limite", on trouve $\text{"}\varprojlim\text{"}\, R^pg_*\mathcal{J}'^n\bar{K}^q \Rightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, R^{p+q}g_*\mathcal{J}'^n\bar{K}$, la proposition 5 (i) montre que cette suite spectrale dégénère, et il résulte de la prop. 3 que la flêche déduite de (1) par passage à la "limite" est un isomorphisme, d'où la formule voulue.

Il reste à vérifier

a) pour tout diagramme, on a une compatibilité

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & X'' \arrow[d, "g"] \\
 & X \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
S &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
R\bar{f}_* Rj'''_! &= R\bar{f}_* Rg_* Rj''_! = R\bar{f}_* Rg_* Rh_* Rj'_! \\
&= R\bar{f}_* Rgh_* Rj'_! = Rf_* Rj'''_!
\end{aligned}$$

Comme deux compactifiactions peuvent toujours être coiffées par une troisième (par exemple $X' \underset{S}{\times} X''$) , ceci suffit à prouver l'indépendance de l'arbitraire.

b) pour tout couple compactifiable, une identification

$Rfg_! = Rf_! Rg_!$

c) pour tout triple compactifiable, une compatibilité

$$\begin{array}{ccc}
Rfgh_! & = & Rfg_! \, Rh_! \\
\| & & \| \\
Rf_! Rgh_! & = & Rf_! \, Rg_! \, Rh_!
\end{array}$$

On aurait alors prouvé

<u>Théorème 1</u>. <u>Pour</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>compactifiable</u>, $K \in \mathrm{proD}^b_{coh}(X)$, $L \in \mathrm{proD}^b_{coh}(Y)$ <u>posons</u> $\mathrm{Hom}_f(K,L) = \mathrm{Hom}_Y(Rf_! K,L)$. <u>Modulo des questions de compactificabilité</u>, <u>on fait ainsi des catégories</u> $\mathrm{proD}^b_{coh}(X)$ <u>une catégorie cofibrée sur les préschémas noethériens</u> (les flêches étant compactifiables ...)

n° 4. Définition de $Rf^!$.

Il résulte d'un tapis général de Verdier [1] que le foncteur $Rf_* : D(X) \longrightarrow D(S)$ a un adjoint à droite $D^+(S) \longrightarrow D^+(X)$; il ne mérite un nom, soit $Rf^!$, que pour f propre, et sa définition ne se prête pas directement au calcul.

Il faut tout d'abord expliciter un procédé de calcul de Rf_* au niveau des complexes, du type $Rf_*K = f_*C^*(K)$ où C^* est une résolution acyclique finie dépendant de façon fonctorielle, exacte, et compatible avec les limites inductives filtrantes de l'objet auquel on l'applique. A ce moment, pour tout injectif I sur S , $\mathrm{Hom}(f_*C^p\mathcal{F},I)$ est exact en quasi-cohérent sur X , et transforme $\varinjlim$ en $\varprojlim$, donc est représentable par $f^!_p\, I$, injectif quasi-cohérent. Les $f^!_p\, I$ forment un complexe, ce qui définit $Rf^!: D^+S \longrightarrow D^+X$, adjoint à droite à $Rf_* : D(X) \longrightarrow D(S)$.

Voici comment définir une telle résolution :

1) Si S est séparé : on prend un recouvrement fini de X par des ouverts affines sur S (par exemple affines) et $Rf_*K = f_*\check{C}(\mathfrak{U},K)$ (complexe de Čech alterné)

2) Sinon : les résolutions flasques canoniques ont ici deux défauts ; a) $f_*C^*\mathcal{F}$ n'est plus quasi-cohérent ; cela ne porte pas à conséquence tant que, comme ici, les injectifs quasi-cohérents sont injectifs en tant que faisceaux.

b) C^* ne commute pas aux limites inductives filtrantes. Il est facile de corriger ce défaut : on représente quasi-cohérent comme $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_i$ ($\mathcal{F}_i$ de présentation finie) et on pose $C'^*\mathcal{F} = \varinjlim C^*\mathcal{F}_i$. Cela ne dépend pas de l'arbitraire.

Pour une immersion ouverte, on prendra $Rf^!K = f^*K$. Pour un morphisme composé $f = gh$ (g propre, h immersion ouverte), on prendra $Rf^! = Rg^!\ Rh^!$. Mettant bout à bout la proposition 4 et ce qui précède, on trouve

<u>Théorème 2</u>. (Dualité) <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>compactifiable</u>, $f = gh$. <u>Les foncteurs</u> $Rf_! : \mathrm{pro}D^b_{coh}(X) \longrightarrow \mathrm{pro}D^b_{coh}(S)$ <u>et</u> $Rf^! : D^+(S) \longrightarrow D^+(X)$ <u>sont "adjoints" l'un de l'autre</u>.

Il faudrait vérifier l'indépendance de la compactification et un sorite de compatibilités et d'identifications analogue au cas de $Rf_!$. Des cas particuliers du formulaire résultent de la formule d'adjonction (unicité d'un vrai adjoint ...)

On pourra dans le cas général s'appuyer sur la proposition suivante :

<u>Proposition 6</u>. <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>compactifiable et</u> $L \in D^+_{qc}(S)$. <u>La fibre en</u> $x \in X$ <u>de</u> $\mathcal{H}^p\, Rf^!L$ <u>est donnée par</u>

$$(\mathcal{H}^p Rf^!L)_x = \varinjlim_{x \in U} \mathrm{Hom}^p_S\,(Rf_!(U, \mathcal{O}_U), L)$$

On peut supposer X propre et L donné comme complexe de faisceaux injectifs quasi-cohérents. Soient U un ouvert affine de

X et $\mathcal{J}$ un idéal qui définit $X \setminus U$.

$$(\mathcal{H}^p Rf^! L)(U) = H^p(Rf^! L(U)) = H^p \operatorname{Hom}_U (\mathcal{O}, Rf^! L)$$

$$= H^p \varinjlim \operatorname{Hom}_X (\mathcal{J}^n, Rf^! L) = \varinjlim \operatorname{Hom}_S^p (Rf_* \mathcal{J}^n, L)$$

$$= \operatorname{Hom}_S^p (Rf_! (U, \mathcal{O}_U), L)$$ – La proposition en résulte.

On supposera admis pour $Rf^!$ un formalisme de variance analogue à celui du théorème 1 pour $Rf_!$.

Si on veut rendre plus explicite la définition de $Rf^!$ dans le cas propre, on peut remarquer que si $\mathcal{F}$ quasi-cohérent représente un foncteur F , pour tout ouvert U et $\mathcal{J}$ définissant $X \setminus U$, on a $\mathcal{F}(U) = \varinjlim \operatorname{Hom} (\mathcal{J}^n, \mathcal{F}) = \varinjlim F(\mathcal{J}^n)$.

n° 5. Calcul de $Rf^!$.

Pour un morphisme fini, $Rf^!$ est ce qu'on veut ; pour le voir, il suffit de prendre pour foncteur résolvant, dans le calcul de Rf_* , l'identité. Pour l'espace projectif, l'unicité d'un adjoint ne laisse pas le choix (on utilise le fait qu'on a la formule d'adjonction pour $Rf_! = Rf_* : D(X) \longrightarrow D(S)$), on reviendra sur la flêche. Pour une immersion ouverte, $Rf^! = Rf^*$. Pour tout ouvert quasi-projectif U de X au-dessus de S , on peut donc calculer la restriction à U de $Rf^!$. En particulier, si on peut vérifier localement que $R^q f^! K = 0$ pour $q \neq p$, on connaît $Rf^! K$, puisqu'un objet de la catégorie dérivée n'ayant qu'un faisceau de cohomologie non nul est déterminé par ce faisceau. Rappelons un cas important où cette condition est vérifiée, avec $K = \mathcal{O}$.

Proposition 7. Soit $f : X \longrightarrow Y$, compactifiable. Supposons que localement (sur X et Y) on puisse trouver un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où g et h sont localement intersection complète de dimension relative d' et d'' , et soit $d = d' - d''$.

Alors $Rf^! \mathcal{O}$ est réduit à un seul faisceau de cohomologie, situé en degré $-d$, qui est inversible.

En effet, $Rg^! \mathcal{O} = Rf^! \, Rh^! \mathcal{O}$, on sait que $Rg^! \mathcal{O}$ et $Rh^! \mathcal{O}$ sont du type indiqué, situés en degré $-d'$ et $-d''$, par des calculs locaux dans l'espace projectif; tout étant local, on peut supposer $R^{-d''}h^! \mathcal{O}$ isomorphe à $\mathcal{O}$, et l'assertion en résulte.

Pour passer de là à des complexes plus généraux, il faudrait au préalable démontrer des formules du type

$Rf^!(K \overset{L}{\otimes} L) = Rf^!(K) \overset{L}{\otimes} Lf^* L$. Seule la définition de la flèche pose un problème, l'isomorphie étant un problème local. Il faut bien sûr des restrictions de degré. Je n'ai rien vérifié en détail de ce qui suit.

1ère méthode pour définir la flèche.

Supposons K et L dans $D^b_{coh}(S)$ (et pas seulement quasi-cohérents), et en outre que

a) $Rf^!K$ est à degré borné (il est automatiquement cohérent, c'est un problème local)

b) $K \overset{L}{\otimes} L$ est à degré borné

c) $Rf^!K \overset{L}{\otimes} Lf^*L$ est à degré borné.

Pour définir $Rf^!K \overset{L}{\otimes} Lf^*L \longrightarrow Rf^!(K \overset{L}{\otimes} L)$, il suffit par dualité de définir $Rf_!(Rf^!K \overset{L}{\otimes} Lf L) \longrightarrow K \overset{L}{\otimes} L$, et par Kunneth $Rf_!(Rf^!K \overset{L}{\otimes} Lf^*L) = Rf_! \; Rf^!K \overset{L}{\otimes} L$; la flêche cherchée est induite par la flêche d'adjonction $Rf_!Rf^!K \longrightarrow K$.

<u>2ème méthode</u>.

On suppose f compactifiable, plat et localement d'intersection complète relative. On a alors $Rf^!\mathcal{O} = \omega[d]$, ω étant inversible. Désignons par $Rf_!$ un procédé de calcul de $Rf_!$ au niveau des complexes (c-à-d un tel procédé pour un compactifié $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow S$, de f), qu'on suppose du type décrit au n° 4, et tel que $C^p\mathcal{F}$ soit nul pour $p > d$ (ce qui peut s'obtenir par tronquage). On a alors une flêche $R^d\bar{f}_*\mathcal{F}[-d] \longrightarrow R\bar{f}_*\mathcal{F}$ pour tout $\mathcal{F}$ sur $\bar{X}$ (le dernier faisceau de cohomologie s'envoie dans son complexe). On en tire des morphismes de complexe $\mathrm{Hom}_S(Rf_*\mathcal{F}, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(R^d\bar{f}_*\mathcal{F}[-d], I)$ pour tout complexe I sur S . Soit I un injectif . $R^d\bar{f}_*\mathcal{F}[-d]$ est exact à droite en $\mathcal{F}$, le foncteur en $\mathcal{F}$ à droite de la flêche est donc représentable : on définit I_1 par

$$\mathrm{Hom}_S(R^d f_*\mathcal{F}, I) = \mathrm{Hom}_{\bar{X}}(\mathcal{F}, I_1) \quad \text{et} \quad Rf_1^! I = I_1[d]$$

Ce qui précède définit

$$Rf^! I \longrightarrow Rf_1^! I$$

et pour un complexe d'injectifs, $Rf_1^!$ se définit terme à terme. Il reste à évaluer $Rf_1^! I$ sur des ouverts affines, soit U, de X ; c'est donné par $\varinjlim \mathrm{Hom}\,(R^d f_! \mathcal{J}^n, I)$. Ce problème étant local en haut, il est facile de montrer par des méthodes projectives que le dual de "$\varprojlim$" $R^d f_! \mathcal{J}^n = R^d f_!(U, \mathcal{O})$, un ind-objet, est $f_*(U, \omega)$, représenté comme limite de ses sous-modules de sections ayant un pôle d'ordre ou plus n hors de $U (n \longrightarrow \infty)$.

Ceci donne $Rf_1^! I = \omega \otimes f^* I[d]$, et la formule générale $Rf^! K = fK \otimes \omega[d]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L. VERDIER, Séminaire Bourbaki, Novembre 65, exposé 300.

[2] M. NAGATA, Imbedding of an abstract variety in a complete variety. Journal of Math. of Kyoto University, vol. 2 n°1 1962.