LE LEMME DE GABBER

Pierre DELIGNE

Le résultat principal de cet exposé, le théorème 1.4, est dû à O. Gabber.

1.- ÉNONCÉS

1.1.- Dans cet exposé, nous travaillerons systématiquement avec des espaces algébriques([1] ou [6]), plutôt qu'avec des schémas. Ceci pose un problème de références. Nous nous permettrons de renvoyer à un article où un théorème est démontré pour les schémas, et de l'appliquer aux espaces algébriques, lorsque la même preuve permet de le démontrer. Une preuve pose problème lorsqu'elle utilise que tout point à un voisinage affine, et que "voisinage" ne peut pas être remplacé par "voisinage étale".

Ceci nous amène à parler d'*espace algébrique abélien* A sur S, là où on parlerait d'ordinaire de schéma abélien sur S : c'est un S-espace algébrique en groupes commutatifs $f : A \to S$, avec f propre et plat de présentation finie, de fibres géométriques des variétés abéliennes. Nous appellerons *espace algébrique semi-abélien* A sur S un S-espace algébrique en groupes commutatifs $f : A \to S$ avec f séparé plat de présentation finie, de fibres géométriques des extensions de variétés abéliennes par des tores. Noter toutefois que

(a) Pour S le spectre d'un corps, tout espace algébrique en groupes sur S est un schéma ([2] n° 4), d'ailleurs quasi-projectif ([4]).

(b) Pour S un trait, tout espace algébrique en groupes G sur S, localement de type fini et séparé sur S, est un schéma. Voir [9] 3.3.1, où est traité le cas où G est lisse sur S.

(c) Pour S normal intègre de point générique η et A un espace algébrique abélien sur S, des arguments de Grothendieck montrent que toute polarisation de A_η (vue comme morphisme symétrique de A dans sa duale) se prolonge de façon unique en une polarisation de A sur S, de sorte que A est projectif sur S et en particulier que A est un schéma si S en est un. Cf [7], ou [10] XI 1.4, rédigés pour des schémas mais valables en général.

Un espace algébrique $f : X \to S$ plat de présentation finie séparé sur S et à fibres géométriques propres et connexes est propre sur S : par localisation sur S et passage à la limite on se ramène à supposer S spectre d'un anneau noethérien local, qu'on peut supposer complet par descente fidèlement plate, et on applique

EGA III ($1^{\text{ère}}$ partie) 5.5. En particulier, un espace algébrique semi-abélien sur S de fibres des variétés abéliennes est abélien sur S.

Sauf mention expresse du contraire, les schémas et espaces algébriques considérés sont quasi-compacts et quasi-séparés.

1.2.- Soient U un ouvert dense d'un espace algébrique normal S et A un espace algébrique abélien sur U. Un *prolongement semi-abélien* de A sur S est un espace algébrique semi-abélien P sur S, muni d'un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} P|U$.

THÉORÈME (Raynaud [10] XI 1.15): *Sous les hypothèses ci-dessus, si A admet un prolongement semi-abélien, ce dernier est unique (à isomorphisme unique près).*

Localisation et passage à la limite ramènent à supposer que S est un schéma noethérien. Si S est un trait, et U son point générique, tout prolongement semi-abélien P de A coïncide avec la composante neutre N^o du modèle de Néron ([8]) N de A : parce que P est lisse à fibres connexes, on dispose de $\phi : P \to N^o$ avec $\phi_\eta = \mathrm{Id}$ et SGA 7 IX 3.1 montre que ϕ est un isomorphisme (cf SGA 7 IX 3.2). Pour S normal noethérien, il en résulte que deux prolongements P', P'' coïncident sur un ouvert $V \supset U$ de complément de codimension ≥ 2. D'après [10] IX 1.5, P' et P'' coïncident (cf [10] XI 1.15). Correction : voir note (1).

1.3.- Remarque 1 : Si P et Q sont deux espaces algébriques semi-abélien sur S normal et intègre, de fibres génériques P_η et Q_η des variétés abéliennes sur $k(\eta)$, la même démonstration donne que

$$\mathrm{Hom}_S(P,Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\eta(P_\eta, Q_\eta).$$

Remarque 2 : L'hypothèse de normalité faite sur S est indispensable, comme le montre l'exemple suivant : S = cubique à point double sur k algébriquement clos = $\mathbb{P}^1$ avec 0 et ∞ identifiés en un point p, $U = S - \{p\}$, A = courbe elliptique constante E sur U ($A = E \times U$).
Se donner un prolongement P de A revient à se donner un prolongement sur $\mathbb{P}^1$, plus un isomorphisme de recollement entre les fibres de ce prolongement en 0 et ∞. Le prolongement à $\mathbb{P}^1$ est unique : c'est $E \times \mathbb{P}^1$, mais l'isomorphisme de recollement peut être choisi d'au moins deux manières : $\mathrm{Aut}(E) \supset \{\pm 1\}$. Le théorème devrait toutefois être vrai pour U schématiquement dense dans S et S seulement supposé géométriquement unibranche et, pour S quelconque, deux prolongements donnant lieu aux mêmes prolongements P_{ℓ^n} des A_{ℓ^n} devraient être isomorphes [ℓ premier fixe, n variable].

1.4.- Pour éviter d'avoir à faire des références fantômes, et parce que ce cas nous suffira, nous n'énoncerons le lemme de Gabber que sous des hypothèses sans doute inutilement restrictives.

THÉORÈME (*lemme de Gabber*) : *Soient* U *un ouvert dense d'un schéma intègre normal excellent* S *et* A *un espace algébrique abélien sur* U. *Il existe un morphisme propre surjectif* $f : S' \to S$ *tel que l'image inverse de* A *sur* $f^{-1}(U)$ *se prolonge en un espace algébrique semi-abélien sur* S'.

1.5.- S'il existait un espace de modules pour les espaces algébriques semi-abéliens, le théorème de réduction semi-stable (SGA 7 IX 3.6), joint au critère valuatif de propreté, montrerait que cet espace est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, et le lemme de Gabber en serait une conséquence immédiate. On est toutefois loin du compte : non seulement les objets considérés ont des automorphismes, même parfois en nombre infini, mais, pire, un espace algébrique semi-abélien A sur un anneau de valuation discrète complet V n'est pas déterminé par l'espace algébrique formel correspondant. Si la fibre spéciale est isomorphe à $\mathbb{G}_m^n$, la réduction mod m^k est isomorphe à $\mathbb{G}_m^n$ quelque soit k (rigidité des tores), sans pour autant que A soit nécessairement un tore.

Le mauvais comportement des espaces semi-abéliens, vis à vis de la complétion formelle, tient au fait que ceux-ci ne sont pas nécessairement propres. Pour les courbes, la situation est meilleure, car on dispose de la notion de courbe stable de genre g ([5] 1.1). Ces courbes sont propres et, pour $g \geq 2$, n'ont qu'un nombre fini d'automorphismes. A cause des groupes finis d'automorphismes, les courbes stables de genre $g \geq 2$ ne donnent pas lieu à un espace fin de modules mais donnent du moins lieu à un champ algébrique propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ (d'après le critère valuatif de propreté et le théorème de réduction stable pour les courbes ([5] 2.7 ou [3])).On a :

1.6.- LEMME : *Soient* U *un ouvert (quasi-compact) dense d'un espace algébrique* S $u : X \to S$ *une famille de courbes stables de genre* $g \geq 2$ *paramétrée par* U. *Il existe* $f : S' \to S$ *propre surjectif tel que l'image inverse de* X *sur* $f^{-1}(U)$ *se prolonge en une famille de courbes stables paramétrée par* S'.

Preuve : Fixons $g \geq 2$. Pour abréger, nous dirons *courbe stable* pour courbe stable de genre g. Le champ algébrique $\mathcal{M}$ classifiant les courbes stables est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Il existe donc ([5] 4.11, 4.12) S_0, propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et un morphisme surjectif de S_0 dans $\mathcal{M}$. En d'autres termes : S_0 est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, muni d'une famille de courbes stables $u_0 : X_0 \to S_0$ telle que toute courbe stable de genre g sur k algébriquement clos soit la fibre de X_o/S_o en un k-point de S_o.

Sur $U \times S_o$, on dispose des deux courbes stables pr_1^*X et pr_2^*X. Soit l'espace algébrique sur $U_o \times S_o$

$$I := \underline{\mathrm{Isom}}(pr_1^*X, pr_2^*X)$$

(c'est $U_o \times_{\mathcal{M}} S_o$). Il est fini sur $U \times S_o$ et s'envoie *sur* U. Soit Γ son image dans $U_o \times S_o$, $\overline{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans $S \times S_o$, et prolongeons le morphisme fini $I \to \Gamma$ en un morphisme fini $\overline{I} \to \overline{\Gamma}$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U \times S_o \arrow[d, hook] \\
\overline{I} \arrow[r] & \overline{\Gamma} \arrow[r, hook] & S \times S_o
\end{tikzcd}$$

L'espace $\overline{I}$, muni du morphisme propre $\overline{I} \to \overline{\Gamma} \hookrightarrow S \times S_o \to S$, est le S' cherché. L'image inverse sur $\overline{I}$ de X_o/S_o prolonge l'image inverse sur I de X/U.

Au n° 3, nous tâcherons de démystifier l'usage fait dans cette preuve des champs algébriques.

1.7.- Le principe de la démonstration du lemme de Gabber sera de se ramener au cas des courbes en utilisant les jacobiennes. Quelques remarques préliminaires.

(a) Comme expliqué en 1.1 (b), A/U est automatiquement un *schéma* abélien.

(b) Etant donnés $U \hookrightarrow S$, A/U et $f : S' \to S$ comme dans le théorème, tout $f_1 : S'' \to S$ propre surjectif, avec S'' au-dessus de S' (i.e. tel qu'existe un S-morphisme de S'' dans S'), vérifie encore la conclusion. Appliquant le lemme de Chow ([6]IV 3.1) et normalisant, on voit que si la conclusion du théorème vaut pour $U \subset S$ et A/U, elle vaut aussi avec un $f : S' \to S$ projectif et surjectif, S' étant intègre et normal.

(c) Il suffit de vérifier le théorème localement sur S : si S est recouvert par une famille finie d'ouverts S_i, et que pour chaqu'un d'eux on dispose de $f_i : S_i' \to S_i$, on peut trouver $f : S' \to S$ projectif et surjectif tel que $S'|S_i$ soit au-dessus de S_i', que $f^{-1}(U)$ soit dense dans S' et que S' soit normal. Les prolongements de A sur les $S'|S_i$ se recollent en un prolongement sur S, grâce à 1.2.

(d) Il suffit de vérifier le théorème avec U remplacé par un ouvert non vide $V \subset U$: pour S' intègre et normal un prolongement de la restriction de A et V sera automatiquement un prolongement de A (1.2).

2.- DÉMONSTRATION

Soient $U \subset S$ et A/U comme en 1.4, et d la dimension relative de A sur U. On peut supposer, et on suppose, que $d \geq 1$. On cherche S' intègre et normal, et un morphisme surjectif projectif $f : S' \to S$ tel que l'image inverse de A sur $f^{-1}(U)$ se prolonge en un espace semi-abélien sur S'. Pour ce faire, il est loisible de rapetisser U (1.7(d)), et de remplacer S par S_1 intègre normal s'envoyant par un morphisme surjectif projectif sur S, U par son image inverse U_1 dans S_1 et A_η par son image inverse sur U_1.

Soient $\eta = \mathrm{Spec}(K)$ le point générique de U et A_η la variété abélienne sur K fibre de A/U en η. On peut supposer, et on suppose, K infini (sans quoi $S = \mathrm{Spec}(K) = U$). Choisissons un plongement projectif $A_\eta \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ de A. Dans la grassmanienne des sous-espaces linéaires H de $\mathbb{P}^N$ de codimension $d-1$, les H dont l'intersection avec A_η est une courbe lisse sont les points d'un ouvert dense, donc ayant des K-points. La densité se déduit, par itération, de ce qu'une section hyperplane générale est transverse - voir par exemple SGA 7 XVII 3.1.4. Choisissons un tel sous-espace linéaire H et soit $\Gamma_\eta = A_\eta \cap H$. Sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on a

$$H^0(A_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^0(\Gamma_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

et

$$H^1(A_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell) \hookrightarrow H^1(\Gamma_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

(théorème de Lefschetz faible - ou de Bertini - une référence moderne est SGA 2 XIV 4.6 + 1.10) de sorte que $\Gamma_{\overline{\eta}}$ est connexe et que le morphisme $\mathrm{Alb}(\Gamma_{\overline{\eta}}) = \mathrm{Pic}^0(\Gamma_{\overline{\eta}}) \to A_{\overline{\eta}}$ de la jacobienne de $\Gamma_{\overline{\eta}}$ dans $A_{\overline{\eta}}$ est un épimorphisme. En particulier, $\Gamma_{\overline{\eta}}$ est de genre $g \geq d$. Excluons provisoirement le cas $d = 1$. On a alors $g \geq 2$.

Ce qui est vrai sur $\eta = \mathrm{Spec}(K)$ l'est aussi dans un voisinage assez petit V de η : il existe au-dessus de $V \subset U$ convenable une courbe lisse Γ_V de genre $g \geq 2$, plongée dans A_V, avec $\mathrm{Pic}^0_V(\Gamma_V) \twoheadrightarrow A_V$. Rapetissant U, on peut supposer et on suppose que $U = V$.

Appliquons le lemme 1.6 à la courbe Γ_U sur $U \subset S$, et remplaçons S par le S' fournit par le lemme (ou plutôt par le normalisé d'une composante irréductible) :

on se ramène à supposer que Γ_U se prolonge en une famille de courbes stables sur S. D'après [2] 7.3, $\mathrm{Pic}^o_S(\Gamma)$ existe comme espace algébrique sur S. Soit $P := \mathrm{Pic}^o_S(\Gamma)$ le sous-espace algébrique en groupes ouvert qui paramètre les faisceaux inversibles sur Γ dont la restriction à chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique est de degré 0. Cet espace algébrique est séparé et lisse de type fini sur S. Ses fibres géométriques sont des extensions de variétés abéliennes par des tores : c'est un espace algébrique semi-abélien sur S.

On a ainsi obtenu (rappelons-le, après changement de S, et de U) un espace algébrique semi-abélien P sur S, dont la restriction P_U à U est un espace algébrique abélien sur U muni d'un épimorphisme $u : P_U \twoheadrightarrow A$. Soit $K_U = \mathrm{Ker}(u)$. C'est un sous-espace algébrique en groupes de P_U. Quitte à rapetisser U (ce n'est d'ailleurs pas nécessaire), on peut le supposer plat sur U. D'après [11] 5.7.9, une nouvelle modification de S permet de supposer que l'adhérence schématique $\overline{K}_U$ de K_U dans P^o est un sous-espace algébrique *plat* de P^o. Lorsque $\overline{K}_U$ est S-plat, c'est automatiquement un sous-espace algébrique en groupes de P^o.

Pour les espaces algébriques en groupes sur une base S, le passage au quotient par un sous-espace en groupes plat et fermé se fait sans problème. Il est compatible au changement de base et fournit un quotient séparé sur S, plat si l'espace de départ l'est. Voir [1] 7 (les preuves ne sont pas données). Soient K l'adhérence schématique de K_U, supposée plate sur S, et $N = P/K$. Les fibres géométriques de N sont des quotients d'extensions de variété abéliennes par des tores, donc encore des extensions de variétés abéliennes par des tores. L'espace algébrique en groupes N est donc semi-abélien. Puisque $A = P_U/K_U$, il prolonge A et répond au problème posé.

Il reste à traiter le cas $d = 1$ qui avait été exclus. La même preuve continue à s'appliquer si on définit une courbe stable de genre un comme une courbe pointée : $X \underset{\varepsilon}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} S$, avec ε dans l'ouvert de lissité, de fibres géométriques des courbes elliptiques ou des cubiques nodales.
Autre possibilité : définir Γ_η comme une section hyperplane de $A_\eta \times A_\eta$.

3.- EXORCISER LES CHAMPS

3.1.- Rappelons la définition d'un groupoïde en schémas (SGA 3 VI). C'est un diagramme

$$(3.1.1) \qquad S_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; S_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; S_o$$

(flèches d_i, $i = 0,1$ et $0,1,2$ respectivement), avec

$$\begin{tikzcd} S_2 \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "d_2"'] & S_1 \arrow[d, "d_1"] \\ S_1 \arrow[r, "d_o"] & S_o \end{tikzcd}$$

cartésien tel que, pour tout schéma T, si on appelle objets les éléments de $\mathrm{Hom}(T,S_o)$, flèches ceux de $\mathrm{Hom}(T,S_1)$, source (resp but) de f l'objet $d_1(f)$ (resp $d_o(f)$) et si pour f de but la source de g (de sorte qu'il existe un et un seul $\langle g,f\rangle \in \mathrm{Hom}(T,S_2)$ avec $d_2\langle g,f\rangle = f$ et $d_o\langle g,f\rangle = g$), on définit la composition par $g \circ f = d_1\langle g,f\rangle$, on obtient un groupoïde, i.e une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles. On la note $S_*(T)$. Pour T variable, les $S_*(T)$ forment un préchamp en groupoïdes.

Les champs algébriques quasi-compacts et séparés sont les champs en groupoïdes obtenus comme champ associé à un préchamp $S_*(T)$ (pour la topologie étale) pour lequel S_o est quasi-compact, $(d_o,d_1) : S_1 \to S_o \times S_o$ est un morphisme fini et où les $d_i : S_1 \to S_o$ sont *étales*.

Les espaces algébriques quasi-compacts et séparés correspondent au cas particulier où $(d_o,d_1) : S_1 \to S_o \times S_o$ est un plongement fermé. Le sous-schéma S_1 de $S_o \times S_o$ est alors une relation d'équivalence étale et l'espace algébrique "est" le quotient S_o/S_1.

3.2.- Soient g un entier ≥ 2 et disons simplement *courbe stable* pour une courbe stable de genre g. Expliquons comment on peut construire un diagramme (3.1.1) dans le cas du champ $\mathcal{M}$ des courbes stables. Etant donné T_i $(i = 1,2)$, muni d'une courbe stable $u_i : X_i \to T_i$, on note $T_1 \times_{\mathcal{M}} T_2$ le schéma $\underline{\mathrm{Isom}}(X_1,X_2)$ qui représente le foncteur $T \longmapsto \{(a_1,a_2,\phi) \mid a_i$ est un morphisme de T dans T_i $(i = 1,2)$ et ϕ est un isomorphisme de $a_1^*X_1$ avec $a_2^*X_2\}$.

Ce "produit fibré" est fini sur $T_1 \times T_2$. On dit que S, muni d'une courbe stable X (i.e de $S \to \mathcal{M}$) est étale sur $\mathcal{M}$ (resp lisse, resp s'envoie *sur* $\mathcal{M}$) si pour tout T, muni d'une courbe stable Y, $S \times_{\mathcal{M}} T$ est étale sur T (resp lisse, resp s'envoie <u>sur</u> T). Si S est étale sur $\mathcal{M}$ et s'envoie sur $\mathcal{M}$, le champ $\mathcal{M}$ correspond au diagramme (3.1.1) suivant :

$$S \times_{\mathcal{M}} S \times_{\mathcal{M}} S \; \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow} \; S \times_{\mathcal{M}} S \; \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow} \; S$$

L'espace de modules H des courbes stables X munies d'un plongement tricanonique $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6}$ est lisse sur $\mathcal{M}$ et s'envoie sur $\mathcal{M}$. Le groupe $PGL(5g-5)$ agit sur H avec des stabilisateurs finis et réduits. Si S est une somme disjointe de sous-schémas lisses de H, transverses aux orbites de PGL, de dimension complémentaire et les rencontrant toutes, S est étale sur $\mathcal{M}$ et s'envoie sur $\mathcal{M}$, donc fournit un diagramme (3.1.1). Le champ $\mathcal{M}$ est séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ([5] 5.1). Les déformations des courbes n'étant pas obstruées, il est lisse. On peut aussi le déduire de ce que H, lisse sur $\mathcal{M}$, est lisse est $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

3.3.- Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{M}_n^o[1/n]$ le champ algébrique classifiant les courbes propres et lisses de genre g, X, sur des bases S où n est inversible, munies d'un isomorphisme (la *structure de niveau* n) $\alpha : \mathrm{Pic}_S^o(X)_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Si $\mathcal{M}^o$ est l'ouvert de $\mathcal{M}$ correspondant aux courbes lisses, le morphisme "oubli de la structure de niveau n" : $\mathcal{M}_n^o[1/n] \to \mathcal{M}^o[1/n]$ fait de $\mathcal{M}_n^o[1/n]$ un revêtement fini étale de $\mathcal{M}^o[1/n]$.

3.4.- <u>*DÉFINITION*</u> : *$\mathcal{M}_n$ est le normalisé de $\mathcal{M}_g$ dans $\mathcal{M}_n^o[1/n]$.*

Dans le langage 3.1., cette définition signifie ceci.

(a) On choisit S_o étale sur $\mathcal{M}$ et s'envoyant sur $\mathcal{M}$, d'où comme en 3.2 un diagramme (3.1.1) S_*.

(b) Sur chaque S_i, on dispose par construction d'une courbe stable X_i $(i = 0,1,2)$, et elles donnent lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow} & X_1 & \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow} & X_o \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_2 & \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow} & S_1 & \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow} & S_o . \end{array}$$

(c) Soit S_i^o l'ouvert de S_i au-dessus duquel X_i est lisse, et $S_{i,n}^o[1/n]$ revêtement fini étale $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{Pic}^o(X_i)_n, (\mathbb{Z}/n)^{2g})$ de $S_i^o[1/n]$.

Soit enfin $S_{i,n}$ le normalisé de S_i dans $S^o_{i,n}[1/n]$. Parce que $S^o_{i,n}[1/n]$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, donc normal, c'est encore la somme disjointe, sur les composantes irréductibles T de $S^o_{i,n}[1/n]$ du normalisé de la composante image de S_i dans le corps des fonctions rationnelles de T.

La normalisation commutent aux changements de base étale, les $S_{i,n}$ forment à nouveau un diagramme (3.1.1). Le champ $\mathcal{M}_n$ est le champ défini par ce diagramme.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} S_{2,n} & \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} & S_{1,n} & \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow} & S_{o,n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_2 & \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} & S_1 & \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow} & S_o \end{array}$$

est cartésien. Dans le langage des champs, cela fournit $S_{o,n} = S_o \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_n$ et la représentabilité relative de $\mathcal{M}_n$ sur $\mathcal{M}$. Nous aurons seulement à utiliser la conséquence, formelle sur les définitions, que pour $t \in S_{o,n}(T)$ d'image s dans $S_o(T)$, on a dans les groupoïdes $S_{*,n}(T)$ et $S_*(T)$ (3.1)

(3.4.1) $\quad \mathrm{Aut}(t) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(s).$

3.5.-<u>PROPOSITION</u> : *Si* $n \geq 3$, $\mathcal{M}_n[1/n]$ *est un espace algébrique.*

En d'autres termes, avec les notations de 3.4, le morphisme (d_o,d_1) identifie $S_{1,n}[1/n]$ à un sous-schéma fermé de $S_{o,n}[1/n] \times S_{o,n}[1/n]$. Le point essentiel est le

<u>LEMME 3.5.1</u>.- *Soit* X *une courbe stable sur* k *algébriquement clos et* $n \geq 3$ *inversible dans* k. *Tout automorphisme de* X, *agissant trivialement sur* $\mathrm{Pic}^o(X)_n$, *est l'identité.*

<u>Preuve</u> : Ecrivons $\mathrm{Pic}^o(X)$ comme extension d'une variété abélienne par un tore :

$$0 \to T \to \mathrm{Pic}^o(X) \to A \to 0$$

et soit L le groupe des caractères de T. On sait que tout automorphisme u de X est d'ordre fini. S'il agit trivialement sur $\mathrm{Pic}^o(X)_n$, il agit trivialement sur A_n et sur T_n, donc sur $L/n\,L$. Par Serre [12], pour A, et un argument direct analogue pour L, il agit trivialement sur A et sur L, donc sur T.

L'endomorphisme u-1 de $\mathrm{Pic}^o X$ envoie donc A sur T, donc est trivial : u agit trivialement sur $\mathrm{Pic}^o(X)$, et on conclut par [5] 1.13.

<u>LEMME 3.5.2</u>.- *Soient* S *un schéma normal,* $j : U \hookrightarrow S$ *un ouvert dense de* S, A *un espace algébrique abélien sur* U, *prolongé en* N *semi-abélien sur* S_* *et* n *un entier inversible sur* S

(i) Le faisceau étale N_n *sur* S *des points de division par* n *de* N *s'injecte dans* $j_* j^* N_n = j_* A_n$.

(ii) Tout isomorphisme α, *sur* U, *de* A_n *avec le faisceau constant* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$, *se prolonge en un monomorphisme* $N_n \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$.

L'assertion (i) résulte de ce que N_n est séparé sur S. Parce que S est normal, on a $j_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_N^{2g} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$, et

$$N_n \hookrightarrow j_* j^* N_n = j_* A_n \xrightarrow[\alpha]{\sim} j_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_U^{2g} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$$

est le prolongement cherché.

<u>Preuve de la proposition</u> : Posons $T_i = S_{i,n}[1/n]$. Puisque T_1 est fini et net sur $T_o \times T_o$ (net car étale, donc net, sur T_o), il suffit de vérifier que pour tout corps algébriquement clos k, $T_1(k)$ s'injecte dans $T_o(k) \times T_o(k)$. On peut supposer n inversible dans k, sans quoi $T_1(k)=\emptyset$. Parce que $T_*(k)$ est un groupoïde, il suffit de vérifier que pour $t \in T_o(k)$, il existe exactement un objet de $T_1(k)$ au dessus de (t,t) i.e que Aut(t) est réduit à l'identité.

Notons encore X_* la courbe stable sur T_* image inverse de X_* sur S_* de 3.4 (b). Sur les $T_i^o := S_{i,n}^o[1/_n]$, on dispose par définition d'un système cartésien d'isomorphismes $\mathrm{Pic}^o(X_i)_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. D'après 3.5.2, il se prolonge sur T_i en un monomorphisme de faisceaux étales

$$\mathrm{Pic}^o(X_i)_n \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}.$$

Il en résulte que le morphisme du champ défini par T_* dans celui, $\mathcal{M}$, défini par S_* se factorise par le champ (non algébrique, celui-là) des courbes stables X, munies de $\mathrm{Pic}^o(X)_n \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

Pour $t \in T_o(k)$, d'image s dans $(S_o(k)$, le monomorphisme (3.4.1) $\mathrm{Aut}(t) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(s) = \mathrm{Aut}(\text{fibre de } X_o \text{ en } s)$ à donc une image consistant d'automorphismes de $(X_o)_s$ agissant trivialement sur $\mathrm{Pic}^o(X_{os})_n$. D'après 3.5.1, un tel automorphisme est trivial.

3.6.- <u>COROLLAIRE</u> : *Si* n *est divisible par deux entiers* $n_i (i = 1,2)$ *premiers entre eux et* ≥ 3, *alors* $\mathcal{M}_n$ *est un espace algébrique.*

Il suffit de vérifier que chaque $\mathcal{M}_n[1/n_i]$ est un espace algébrique, i.e que les objets du champ correspondant n'ont pas d'automorphisme. On le déduit de (3.4.1) et de sa factorisation $\mathcal{M}_n[1/n_i] \to \mathcal{M}_{n_i}[1/n_i] \to \mathcal{M}$, compte tenu de 3.5.

3.7.-Dans 3.6, le langage des champs a permis de construire, à partir d'une famille S de courbes stables comme en 3.2, un atlas, au sens de la topologie étale, définissant un espace algébrique $\mathcal{M}_n$. Les critères valuatifs de séparation et de propreté montrent, grâce au théorème de réduction semi-stable, que cet espace algébrique est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On peut utiliser ce $\mathcal{M}_n$ comme S_o dans la preuve du lemme 1.6. Si on préfère que S_o y soit projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, il suffit d'appliquer le lemme de Chow à $\mathcal{M}_n$. En fait, $\mathcal{M}_n$ *est* projectif (Mumford).

4.- <u>OBTENIR DES SCHÉMAS</u>

Dans ce n°, nous montrons comment modifier et compléter la preuve du lemme de Gabber pour obtenir des schémas, plutôt que des espaces algébriques. Une autre approche m'a été signalée par Michel Raynaud : il me dit savoir prouver que si X est un S-espace algébrique en groupes, lisse et séparé sur S, à fibres connexes, alors X devient représentable après changement de base à un éclaté convenable S'/S.

Soit g un entier ≥ 2. Pour abréger, nous dirons *courbe stable* pour une courbe stable de genre g.

4.1.- Pour X/S une courbe lisse de genre g, l'autodualité de la jacobienne $\varepsilon : \mathrm{Pic}^o_S(X) \to \mathrm{Pic}^o_S(X)^*$ fournit un faisceau inversible relativement ample canonique sur $\mathrm{Pic}^o_X(X)$:

$$(\mathrm{Id}, \varepsilon)^* \text{(faisceau de Poincaré).}$$

Il est symétrique, et trivialisé le long de la section nulle. Sa formation est compatible à tout changement de base. Notons le $\mathcal{L}(X/S)$.

4.2.- LEMME : *Il est possible, de façon unique à isomorphisme unique près, d'attacher à chaque courbe stable* X/S *un faisceau inversible* $\mathcal{L}(X/S)$, *sur* $\mathrm{Pic}^o_S(X)$, *trivialisé le long de la section nulle, de formation compatible à tout changement de base, et redonnant* $\mathcal{L}(X/S)$ *de 4.1 pour* X *lisse.*

Il suffit de traiter le cas "universel" que voici : on prend X_*/S_* comme en 3.4, et on cherche des faisceaux inversibles $\mathcal{L}(X_i/S_i)$ sur les $\mathrm{Pic}^o_{S_i}(X_i)$, trivialisés le long de la section nulle, prolongeant les faisceaux inversibles 4.1 au-dessus de l'ouvert S_i^o de S_i où X_i est lisse et formant un système cartésien sur S_* (compatibilité aux changements de base $S_i \to S_j$). Pour chaque i, S_i est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, donc régulier. De même pour $\mathrm{Pic}^o_{S_i}(X_i)$, lisse sur S_i. Il existe donc un prolongement $\mathcal{L}'(X_i/S_i)$ du faisceau inversible $\mathcal{L}((X_i|S_i^o)/S_i^o)$ de 4.1 (prendre le déterminant d'un quelconque prolongement cohérent). Le corrigeant par l'image inverse de sa restriction à la section nulle, on obtient un prolongement $\mathcal{L}''(X_i/S_i)$, trivialisé le long de la section nulle (la trivialisation prolongeant celle de 4.1 sur S_i^o). Parce que $\mathrm{Pic}^o_{S_i}(X_i)$ est à fibres géométriques irréductibles, un tel prolongement est unique à isomorphisme unique près. Grâce à cette unicité, les $\mathcal{L}''(X_i/S_i)$ sont compatibles aux changements de base $S_i \to S_j$ et répondent au problème posé.

4.3.- PROPOSITION : *Pour* X/S *une courbe stable, le faisceau inversible* $\mathcal{L}(X/S)$ *de 4.2 est relativement ample. En particulier,* $\mathrm{Pic}^o_S(X)$ *est quasi-projectif sur* S, *et est un schéma si* S *en est un.*

A nouveau, il suffit de le vérifier dans un cas universel, par exemple, avec les notations précédentes, pour X_o/S_o. En particulier, on peut supposer que S est un schéma régulier et que l'ouvert S^o de S au-dessus duquel X est lisse est dense. On le suppose. Si on savait à priori que $\mathrm{Pic}^o_S(X)$ est un schéma, l'assertion résulterait de [10] XI 1.13. Malheureusement, la preuve de loc cit utilise de façon essentielle qu'on ait affaire à un schéma, pour construire à priori, localement sur S, des diviseurs relativement amples comme compléments d'ouverts affines (cf [10] V 3.10).

4.4.- LEMME : *Soit* X *une courbe géométriquement réduite connexe sur* k *séparablement clos. Il existe un diviseur* D, *contenu dans l'ouvert de lissité de* X, *de degré* $g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$, *tel que*

$$H^0(X, \mathcal{O}(D)) = k \quad \textit{et} \quad H^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0.$$

Preuve : L'assersion $H^0(X, \mathcal{O}(D)) = k$ résulte des autres et de Riemann Roch. Si ω est le faisceau dualisant, on a

$$\dim H^0(X, \omega) = g$$

et $H^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0$ équivaut par dualité à $H^0(X, \omega(-D)) = 0$.

Le faisceau ω n'a pas de composante immergée. Ceci permet de construire par récurrence sur i, $0 \leq i \leq g$, une suite croissante de diviseurs D_i de degré i contenus dans l'ouvert de lissité avec $\dim H^0(X, \omega(-D_i)) = g-i$:

prendre $D_0 = \emptyset$ et $D_{i+1} = D_i + P_i$, avec P_i un k-point lisse où les sections de $H^0(X, \omega(-D_i))$ ne s'annulent pas toutes. On prend $D = D_g$.

4.5.- LEMME : *Soit* $f : X \to S$ *avec* f *projectif plat, de fibres géométriques des courbes réduites et connexes. Localement pour la topologie étale sur* S, *il existe un ouvert* $V \subset \mathrm{Pic}^0_S(X)$ *qui rencontre chaque fibre et soit un schéma.*

Preuve : On se ramène à supposer S strictement local, de point fermé s, et il suffit de construire un ouvert $V \subset \mathrm{Pic}^0_S(X)$ qui soit un schéma et rencontre X_s. Soit D_s un diviseur de degré $g := \dim H^1(X_s, \mathcal{O})$ sur X_s, contenu dans l'ouvert de limité X^0 vérifiant $H^1(X_s, \mathcal{O}(D_s)) = 0$ (4.4). Prolongeons-le en un diviseur de Cartier relatif D sur X. C'est possible car S est local hensélien. On a

$$f_* \mathcal{O}(D) = \mathcal{O} \text{ et } R^1 f_* \mathcal{O}(D) = 0.$$

Soit V' l'ouvert de $\mathrm{Pic}^0_S(X)$ correspondant aux faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ tel que $R^1 f_* \mathcal{L}(D) = 0$. Pour un tel $\mathcal{L}$, $f_* \mathcal{L}(D)$ est libre de rang un, de formation compatible à tout changement de base. Soit $V \subset V'$ l'ouvert de V' correspondant aux $\mathcal{L}$ tels que si la section s est une base de $f_* \mathcal{L}$, le sous-schéma $s = 0$ de X soit un diviseur de Cartier relatif $D(\mathcal{L})$, contenu dans l'ouvert de lissité X^0. Par construction, V contient la section nulle. Le morphisme $\mathcal{L} \to D(\mathcal{L})$ identifie V à un ouvert de $\mathrm{Sym}^g(X^0)$ et V est donc un schéma. La projectivité de X sur S a servi à garantir l'existence de $\mathrm{Sym}^g_S(X)$.

4.6.- LEMME : *Sous les hypothèses de 4.5, localement pour la topologie étale sur* S, $\mathrm{Pic}^o_S(X)$ *est un schéma.*

On se ramène encore à supposer S strictement local. Posons $P := \mathrm{Pic}^o_S(X)$. C'est un espace algébrique lisse sur S, purement d'une dimension relative g. Soit V comme en 4.5. Il suffit de montrer que P est la réunion des gV pour g $P(S)$. On se ramène à supposer S essentiellement de type fini sur $\mathbb{Z}$, ce qui permet de "compter les dimensions" sans crainte. Soit n un entier, et P^n la puissance fibrée $n^{\text{-uple}}$ de P sur S. Pour t un point géométrique de S et $g = (g_1,\dots,g_n)$ un point géométrique de P^n au-dessus de t, disons que g est permis si les g_iV recouvrent P_t. Les points géométriques permis sont les points géométriques d'une partie constructible Y de P^n (EGA IV 3ème partie 9.6.1 (1)). Soit Z son complément. On vérifie que Z est fibre à fibre de codimension $\geq n-g$. Si $n-g > \dim S$, il en résulte que l'adhérence Z^- de Z ne contient pas toute la fibre spéciale et on peut trouver une section g de $P^n - Z^-$: P est la réunion des g_iV.

4.7.- Remarque : Dans 4.5 et 4.6, l'hypothèse que f est projectif peut être remplacée par celle que f soit propre : localement sur S pour la topologie étale, f sera automatiquement projectif.

4.8.- Preuve de 4.3 (sous les hypothèses auxquelles on s'est réduit, voir 4.3).

Le problème est local pour S pour la topologie étale. Grâce à 4.6, on peut donc appliquer [8] XI 1.13.

4.9.- Remarque : La démonstration de [8] XI 1.13 ne fait, me semble t-il, usage de l'hypothèse qu'on ait affaire à des schémas que via la conclusion de 4.5. Ceci permettrait d'éviter 4.6.

4.10.- PROPOSITION : *Le lemme de Gabber (théorème 1.4) reste vrai avec, dans la conclusion, espace algébrique semi-abélien remplacé par schéma semi-abélien.*

Preuve : Procédant comme dans la démonstration donnée au § 2, on se ramène à supposer l'existence d'une courbe stable X sur S, lisse sur U, et, sur U, d'un épimorphisme $u : \mathrm{Pic}^o_S(X) \to A$ dont le noyau K_U se prolonge en un sous-espace algébrique en groupes plat K de $\mathrm{Pic}^o_S(X)$. Montrons que l'espace algébrique semi-abélien $P := \mathrm{Pic}^o_S(X)/K$, prolongeant A, est un schéma.

Sur U, le théorème de complète réductibilité de Poincaré assure l'existence de $v : A \to \mathrm{Pic}^{o}_{S}(X)$ tel que uv soit l'endomorphisme de multiplication par un entier $n \geq 1$ de A. Notons encore u le morphisme de passage au quotient de $\mathrm{Pic}^{o}_{S}(X)$ dans P. D'après 1.3 remarque 1, v se prolonge en un morphisme encore noté v de P dans $\mathrm{Pic}^{o}_{S}(X)$. Par densité de U dans S, on a encore $uv = n$. La multiplication par $n : P \to P$ étant quasi-finie, v est quasi-fini, donc quasi-affine. ([6] II 6.15). Puisque $\mathrm{Pic}^{o}_{S}(X)$ est un schéma, P en est un aussi.

Je remercie M. Raynaud et O. Gabber d'une lecture critique d'une première version de ce texte.

Note (1)

(1) O. Gabber m'a fait observer que la preuve de [10] XI 1.15 fait usage de ce qu'on travaille avec des schémas. Ci-dessous, nous donnons la preuve d'énoncés voisins, valables pour les espaces algébriques et suffisant à justifier 1.2 et 1.3 Remarque 1.

(1).1. Pour $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine et U un sous-schéma ouvert de S réunion finie d'ouverts $U_i = \mathrm{Spec}(A[f_i^{-1}])$, l'*adhérence schématique* $\overline{F}$ dans S d'un sous-schéma fermé F de U, défini dans chaque carte U_i par un idéal I_i de $A[f_i^{-1}]$, est le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal I suivant. Pour ε_i l'application canonique de A dans $A[f_i^{-1}]$, on prend

$$I = \bigcap_i \varepsilon_i^{-1}(I_i).$$

Si $S' = \mathrm{Spec}(A')$ est plat sur S, et si U' (resp F', resp$(\overline{F})'$) est l'image inverse de U (resp F, resp $\overline{F}$) dans S (resp U, resp S), $\overline{F}'$ est encore l'adhérence schématique de F' dans S'. En particulier, la construction des adhérences schématiques commute à la localisation étale, donc garde un sens pour les espaces algébriques.

Généralisation : Pour S comme ci-dessus et $f = X \longrightarrow S$ quasi-compact, l'*image schématique fermée* $f(X)^-$ est le sous-schéma fermé d'idéal l'ensemble des $a \in A$ d'image inverse nulle sur X. Pour f l'inclusion de F comme ci-dessus, on retrouve la notion d'adhérence schématique. On a pour $f(X)^-$ la même compatibilité aux changements de base que pour l'adhérence schématique.

(1).2. Soient S un espace algébrique noethérien, X et Y deux S-espaces algébriques, munis de sections e, V un ouvert de X, $U = e^{-1}(V)$ son image réciproque dans S et f_V un S-morphisme de V dans Y, envoyant e sur e : $f_V \circ (e|U) = e|U$. Pour chaque entier n, f_V induit un morphisme du $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de e dans V (ou dans X_U, l'image inverse de U dans X, cela revient au même) dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de e dans Y_U. Le système projectif de ces morphismes est un morphisme f_U^1 de X_U^1, complété formel de X_U le long de e, dans Y_U^1.

PROPOSITION : *On suppose* X *lisse sur* S *et* Y *séparé de type fini.*

(i) Si U *contient tous les points de* S *de profondeur* ≤ 1, *alors* $f^1_U : X^1_U \longrightarrow Y^1_U$ *se prolonge, de façon unique en un morphisme* f^1 *du complété formel* X^1 *de* X *le long de* e *dans celui,* Y^1, *de* Y.

(ii) Soit Γ *l'adhérence schématique, dans* $X \times_S Y$, *du graphe* $\Gamma_V \subset V \times_S Y$ *de* f_V. *Si* $f^1_U : X^1_U \longrightarrow Y^1_U$ *se prolonge en* $f^1 : X^1 \longrightarrow Y^1$ *et que* U *contient tous les points de* S *de profondeur* 0, *alors* Γ *est étale sur* X *le long* e *(de complété le graphe de* f^1*).*

Preuve : Les problèmes sont locaux sur S, pour la topologie étale. Ceci permet de supposer S affine. Les voisinages infinitésimaux de e dans X et Y sont alors également des schémas affines, et (i) se prouve comme dans [10] ; l'hypothèse de lissité sert à assurer que les voisinages infinitésimaux de e dans X sont finis et plats sur S.

Quelques préliminaires avant de prouver (ii). Un espace algébrique E a en chaque point s un *anneau local* - en fait local hensélien - qui, dans le cas particulier où E "est" un schéma est l'hensélisé de l'anneau local ordinaire. Le *complété* de E en s est le spectre du complété de cet anneau local.

LEMME : *Soient* S *le spectre d'un anneau local noethérien complet* A, X *le spectre de* $A[[T_1 \dots T_n]]$, e *la section nulle de* X/S, V *un ouvert de* X *tel que* $U := e^{-1}(V)$ *contienne tous les points de* S *de profondeur* 0 *et* $F \subset V$ *un sous-schéma fermé contenant tous les voisinages infinitésimaux de* $e(U)$ *dans* V. *Alors* $F = V$.

Preuve : Il suffit de montrer que X est l'adhérence schématique de F dans X. En effet, si $f = \Sigma a_{\underline{i}} T^{\underline{i}}$ est nul sur F, chaque $a_{\underline{i}}$ est nul sur $U \subset S$, donc nul, et $f = 0$.

Preuve de (ii) : Soit s un point de S. Ecrivons X^1_s pour $X^1_{e(s)}$ et V^1_s (resp U^1_s) pour l'image inverse de V (resp. U) dans X^1_s (resp S^1_s). Le morphisme formel f^1 induit f_1 $X^1_s \longrightarrow Y$ et f induit $f_2 : V^1_s \longrightarrow Y$. Montrons que f_2 est la restriction f_1 V^1_s de f_1 à V^1_s : ces morphismes coïncident sur un sous-schéma fermé de V_S^1 contenant tous les voisinages infinitésimaux de $e(U_S^1)$, et on applique le lemme précédent. L'image inverse de Γ_V dans $X_S^1 \times_S Y$ est donc le graphe de la restriction de f_1 à V_S^1, d'adhérence schématique le graphe de $f_1 : X_S^1 \longrightarrow Y$. La formation de l'adhérence schématique commutant au changement de base plat $X_S^1 \times_S Y \longrightarrow X \times_S Y$, on voit que, après le changement de base, $X_S^1 \longrightarrow X$, Γ est étale sur X. Il en résulte que Γ est étale sur X en $e(s)$.

(1).3. PROPOSITION : *Soient S un espace algébrique noethérien, G et H deux espaces algébriques en groupes sur S, U un ouvert de S et f_U un morphisme de G_U dans H_U. On suppose G lisse à fibres connexes, H de type fini et séparé sur S et que U contient tous les points de profondeur 0 de S. Si le complété f_U^1 de f_U le long des sections neutres se prolonge en $f^1 : G^1 \longrightarrow H^1$ - tel est le cas si U contient tous les points de S de profondeur ≤ 1 (proposition (1).2 (i)) - alors f se prolonge en un morphisme (unique) de G dans H.*

Preuve : L'unicité provient de ce que U est schématiquement dense dans S, donc G_U schématiquement dense dans G. Prouvons l'existence. Soient Γ_U le graphe de f_U, $\Gamma \subset G \times_S H$ son adhérence schématique et Γ^o l'ouvert de Γ où Γ est étale sur G. D'après (1).2 (ii), Γ^o contient la section neutre de $G \times_S H$. Pour toute section γ de Γ, la translation à gauche par $\gamma|U \times \rho_U(\gamma|U)$ envoie Γ_U sur lui-même. Par transport de structure, la translation à gauche par γ envoie donc Γ^o sur lui-même. Ceci reste vrai après tout changement de base plat. Prenant pour changement de base Γ^o/S, on trouve que Γ^o est un sous-espace en groupes de $G \times_S H$. Son image dans G est un sous-schéma en groupes ouvert de G, donc est G puisque G/S est à fibres connexes. Puisque Γ^o/G est étale et séparé, la fonction sur G "nombres de points de la fibre géométrique de Γ^o/G en $x \in |G|$" est semi-continue inférieurement. Etant partout ≥ 1 et égale à 1 sur G_U, elle est constante égale à 1 : le morphisme $\Gamma^o \longrightarrow G$ est étale, surjectif et radiciel, donc un isomorphisme (SGA 1 I 5.1). Le prolongement cherché est le composé $G \longleftarrow \Gamma^o \longrightarrow H$, de graphe Γ^o.

(1).4. Remarque : La proposition devrait rester vraie avec l'hypothèse G/S lisse affaiblie en G/S plat de type fini, et en omettant l'hypothèse que H est séparé sur S.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN.- *The implicit function theorem in algebraic geometry*, in Proc. Coll. Alg. Geom., Tata Institute (1969).

[2] M. ARTIN.- *Algebraization of formal moduli I*, p. 21-71 in Global analysis, papers in honor of K. Kodaira. Princeton University Press 1969.

[3] M. ARTIN and G. WINTERS.- *Degenerate fibres and stable reduction of curves*. Topology 10 (1971) p. 373-383.

[4] W.L. CHOW.- *On the projective embedding of homogeneous varieties*, p. 122-128 in A symp. in honor of S. Lefschetz. Princeton University Press.

[5] P. DELIGNE and D. MUMFORD.- *The irreducibility of the space of curves of a given genus*. Publ. math. IHES 36 (1969) p. 75-110.

[6] D. KNUTSON.- *Algebraic spaces*. Lecture Notes in Math. 203. Springer Verlag 1971.

[7] J.P MURRE.- *Representation of unramified functors. Applications*, Séminaire Bourbaki, 294, 1964-1965.

[8] M. RAYNAUD.- *Modèles de Néron*. C.R. Acad. Sci. 262, (1966), pp.413-416.

[9] M. RAYNAUD.- *Spécialisation du foncteur de Picard*. Publ. Math. IHES 38 (1970) p. 27-76.

[10] M. RAYNAUD.- *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*. Lecture Notes in Math. 119. Springer Verlag 1970.

[11] M. RAYNAUD et L. GRUSON.- *Critères de platitude et de projectivité*. Inv. Math. 13 (1971) p. 1-89.

[12] J-P.SERRE.- *Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon* $n \geq 3$. App. à l'exposé 17 du séminaire Cartan 60/61.

S I G L E S

E.G.A : Eléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck et J. Dieudonné, publié aux Publ. Math. IHES. EGA III $1^{\text{ère}}$ partie = n° 11, EGA IV $3^{\text{ème}}$ partie = n° 28.

S.G.A. : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. Publié aux Lecture Notes in Math. (sauf SGA 2 : cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux; North Holland Publ. Co 1968). SGA 2 XIV = profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale, par Michèle Raynaud ; SGA 3 V = construction de préschémas quotient, par A. Gabriel, in LN 151 ; SGA 7 XI = modèles de Néron et monodromie, par A. Grothendieck, in LN 288 ; SGA 7 XVII = pinceaux de Lefschetz : théorème d'existence, par N. Katz, in LN 340 .

P. DELIGNE
I.H.E.S
Le Bois Marie
35 route de Chartres
91440 BURES SUR YVETTE