C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 577-582, 1996
Algèbres de Lie/*Lie Algebras*

La série exceptionnelle de groupes de Lie II

Pierre DELIGNE et Ronald de MAN

P. D.: Institute for Advanced Study, School of Mathematics, Princeton, NJ 08540, USA;
E-mail: deligne@math.ias.edu

R. de M.: Fac. Wisk. and Inf., Technical University Eindhoven,
PO Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands.

Résumé. Numérologie des groupes exceptionnels et de leurs représentations.

The exceptional series of Lie groups II

Abstract. *Numerology of exceptional Lie groups and their representations.*

Comme dans [1] et [2], nous considérons dans cette Note les groupes G de la série exceptionnelle e, A_1, $A_2.2$, G_2, $D_4.S_3$, F_4, $E_6.2$, E_7, E_8. Entre le groupe trivial e et A_1, nous intercalons en outre le super-groupe $\mathrm{SOSp}(1,2)$. Plus que le groupe, ce qui nous intéresse est chaque fois la catégorie de ses représentations. Pour $\mathrm{SOSp}(1,2)$, on considère la catégorie des super-représentations telles que la parité soit donnée par $-1 \in \mathrm{Sp}(2) \subset \mathrm{SOSp}(1,2)$. La composante neutre G^0 de chaque groupe est le groupe adjoint, et la catégorie des représentations considérées est chaque fois $\otimes$-engendrée par la représentation adjointe.

Le nombre de Coxeter dual $h^\vee$ de G^0 est, selon le type: 6/5, 3/2, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 30. Pour le groupe trivial, $h^\vee = 6/5$ par fiat. Nous considérons G comme dépendant du paramètre $h^\vee$. Parfois, il est plus commode d'utiliser $\mu := 6/h^\vee$, que nous préférons maintenant à λ utilisé dans [1] et [2]: $\mu = -\lambda$. Valeurs de μ: $5, 4, 3, 2, 3/2, 1, 2/3, 1/2, 1/3, 1/5$.

Pour G^0 de rang r, considérons les poids dominants $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ suivants. Pour E_8, nous nous arrêtons à Ω_7. Notation: $(a_1, \ldots, a_r)$ pour $\sum a_i\omega_i$, les poids fondamentaux ω_i étant pris dans l'ordre des tables de Bourbaki. Pour G^0 de rang ≥ 1 (*i.e.* $G \neq e$), Ω_1 est la plus grande racine, correspondant à la représentation adjointe. Ceci définit les Ω_i pour G de rang ≤ 1, *i.e.* $G = e$, $\mathrm{SOSp}(1,2)$ ou A_1. Ensuite, on prend:

A_2 : (1,1), (0,3);
G_2 : (0,1), (3,0);
D_4 : (0,1,0,0), (1,0,1,1), (2,0,0,0), (2,0,2,0);
F_4 : (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,2), (0,0,2,0);
E_6 : (0,1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (1,0,0,0,0,1), (0,0,1,0,1,0), (0,0,0,0,1,1), (1,0,0,0,2,0);

Note présentée par Pierre DELIGNE.

0764-4442/96/03230577 $ 2.00 © Académie des Sciences

E_7 : les poids fondamentaux ω_1, ω_3, ω_6, ω_4 et (0,1,0,0,0,0,1), (0,1,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0,1);

E_8 : les poids fondamentaux ω_8, ω_7, ω_1, ω_6, ω_2, ω_5, ω_3.

Pour A_2, D_4 et E_6, il serait indifférent de remplacer ces Ω_i par leurs images par un même automorphisme du diagramme de Dynkin.

Pour G connexe, nous noterons $\Omega(p_1, \ldots, p_r)$ la représentation irréductible de G de poids dominant $\sum p_i \Omega_i$. Pour G disconnexe, ce poids doit être décoré, comme dans [1], pour définir $\Omega(p_1, \ldots, p_r)$. La décoration requise est la suivante. Pour A_1: le signe $(-1)^{p_1}$ si $p_2 = 0$, ^{0} sinon. Pour D_4: $^+$, $^{0+}$, ou ^{0}. Pour E_6: $^+$ ou ^{0}.

Soit V_j la représentation $\Omega(p_1, \ldots, p_r)$ pour $p_i = \delta_{ij}$. La représentation V_1, définie pour G de rang ≥ 1, est la représentation adjointe. Les représentations V_i $(1 \leq i \leq 7)$ sont les représentations $\mathfrak{g}$, X_2, Y_2^*, X_3, C^*, X_4, F^* de [1]. La représentation $\Omega(p_1, \ldots, p_r)$ est caractérisée par les propriétés d'admettre le poids dominant $\sum p_i \Omega_i$ et d'être un constituant du produit tensoriel des $V_i^{\otimes p_i}$.

Pour $s \leq r$, on écrira encore $\Omega(p_1, \ldots, p_s)$ pour $\Omega(p_1, \ldots, p_s, 0, \ldots, 0)$.

Notre but est de décrire, à $p_1, \ldots, p_s$ fixés, des similitudes entre les représentations $\Omega(p_1, \ldots, p_s)$ des groupes de la série exceptionnelle de rang $\geq s$. Analogue dans la série A: une suite décroissante $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_k \geq 0$ d'entiers étant donnée, prendre la représentation correspondante de $\mathrm{GL}(n)$, pour chaque $n \geq k$.

Soient G un groupe simple déployé épinglé, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et H l'algèbre de Lie du tore déployé épinglant T. On identifie le groupe des poids $X := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ à un sous-groupe du dual $H^\vee$ de H. La *forme bilinéaire canonique* (,) est la forme bilinéaire sur $H^\vee$ inverse de la forme de Killing $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x.\mathrm{ad}y)$ sur H. Pour G un super-groupe classique, par exemple $\mathrm{SOSp}(1,2)$: utiliser la super-trace. Si α_0 est la plus grande racine, une des définitions du nombre de Coxeter dual $h^\vee$ est que $(\alpha_0, \alpha_0) = 1/h^\vee$.

A chaque poids dominant λ, nous allons attacher un système fini de nombres rationnels, chacun pris avec une multiplicité $m(q) \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes: une mesure $L_G(\lambda)$ sur $\mathbb{Q}$, combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire $\sum m(q)\delta[q]$ de mesures de Dirac. Soit $[R^+]$ la mesure sur X somme des mesures de Dirac $\delta[\alpha]$ pour α une racine positive. Soit $M(\lambda)$ la mesure sur $\mathbb{Q}$ image de $[R^+]$ par $(12\lambda,\ ): X \to \mathbb{Q}$. Le « 12 » a pour raison d'être l'assertion d'intégralité dans le théorème 1. Si toutes les racines ont la même longueur, ou si α est une racine longue, $(\lambda, \alpha) = \lambda(H_\alpha)/2h^\vee$. Si G admet des racines de deux longueurs différentes et que la racine α est courte, $(\lambda, \alpha) = ((\alpha,\alpha)/(\alpha_0,\alpha_0)).\ \lambda(H_\alpha)/2h^\vee$. Le facteur $(\alpha,\alpha)/(\alpha_0,\alpha_0)$ vaut 1/4, 1/3, 1/2 pour $\mathrm{SOSp}(1,2)$, G_2, F_4. Soit ρ la demi-somme $\frac{1}{2}\int \alpha.[R^+]$ des racines positives. Pour un super-groupe classique, par exemple $\mathrm{SOSp}(1,2)$, il y a lieu dans ces définitions de remplacer $[R^+]$ par la somme sur les racines positives $\sum m(\alpha)\delta[\alpha]$, avec $m(\alpha) = 1$ (resp. $m(\alpha) = -1$) si le sous-espace radiciel correspondant est pair (resp. impair). Nous définissons

$$L_G(\lambda) := M(\lambda + \rho) - M(\rho). \tag{1}$$

Si cela ne crée pas d'ambiguïté, on écrira simplement $L(\lambda)$ pour $L_G(\lambda)$. Si $L(\lambda) = \sum m(q)\delta[q]$, la formule de dimension de Weyl dit que la représentation $V(\lambda)$ de poids dominant λ est de dimension

$$\dim V(\lambda) = \prod q^{m(q)}. \tag{2}$$

Soit F_{2N} la fonction $\mathrm{Tr}((\mathrm{ad}x)^{2N})$ sur $\mathfrak{g}$. Restreignons-la à H, et identifions H à $H^\vee$ par la forme bilinéaire canonique. On obtient une fonction F_{2N} sur $H^\vee$. Par construction,

$$F_{2N}(\lambda + \rho) - F_{2N}(\rho) = 2.12^{-2N} \int x^{2N} L(\lambda). \tag{3}$$

Le facteur 2 est dû à ce que la définition de $L(\lambda)$ part de R^+ et non de l'ensemble $R = R^+ \cup (-R^+)$ de toutes les racines. Appliquant le théorème 2, p. 267 de Duflo [3] aux poids λ et 0, il est possible d'expliciter un élément du centre de l'algèbre enveloppante agissant sur $V(\lambda)$ par $F_{2N}(\lambda+\rho) - F_{2N}(\rho)$. Pour $N = 1$, c'est le Casimir.

Pour $p_1, \ldots, p_7 \in \mathbb{Z}$, nous construirons une combinaison linéaire formelle $L(p_1, \ldots, p_7)$ d'éléments de l'espace $\mathcal{L}$ des formes linéaires $x \mapsto Ax + B$ à coefficients entiers. En d'autres termes: une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire $\sum m(A,B)\delta[Ax+B]$ de mesures de Dirac sur $\mathcal{L}$. La vertu de $L(p_1, \ldots, p_7)$ est d'interpoler les $L(\lambda)$, λ poids dominant de $\Omega(p_1, \ldots, p_7)$:

THÉORÈME 1. – *Pour $p_1, \ldots, p_7 \geq 0$ et pour chaque groupe G de la série exceptionnelle, si $p_i = 0$ pour $i > r = \inf(\mathrm{rang}(G), 7)$, et que λ est un poids dominant de $\Omega(p_1, \ldots, p_r)$, la mesure $L_{G^0}(\lambda)$ est l'image de $L(p_1, \ldots, p_7)$ par l'application de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{Q}$ « évaluation en μ »: $\ell \mapsto \ell(\mu)$.*

Si $L(p_1, \ldots, p_7) = \sum m(A,B)\delta[Ax+B]$, $L(\lambda)$ est donc la somme des $m(A,B)\delta[A\mu+B]$ et (3) se récrit

$$F_{2N}(\lambda+\rho) - F_{2N}(\rho) = 2.12^{-2N} \sum m(A,B)(A\mu+B)^{2N}. \tag{4}$$

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le multiple de la forme bilinéaire canonique tel que $\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle = 2$. En termes de $\langle\ ,\ \rangle$, (1), le théorème 1 et (4) se reformulent comme suit. La différence entre les images de la mesure $[R^+]$ par $\langle \lambda+\rho,\ \rangle$ et par $\langle \rho,\ \rangle$ est:

$$\langle \lambda+\rho, [R^+] \rangle - \langle \rho, [R^+] \rangle = \sum m(A,B)\delta[A + Bh^\vee/6], \tag{5}$$

et

$$\frac{1}{2}.12^{2N}.\mu^{-2N}.(F_{2N}(\lambda+\rho) - F_{2N}(\rho)) = \sum m(A,B)(A + Bh^\vee/6)^{2N}. \tag{6}$$

D'après le théorème 1, à $p_1, \ldots, p_7$ fixés, la fonction $F_{2N}(\lambda+\rho) - F_{2N}(\rho)$ de G est de degré $\leq 2N$ en le paramètre $\mu = 6/h^\vee$ attaché à G. Pour $N = 1$, *i.e.* pour le scalaire par lequel Casimir agit sur $\Omega(p_1, \ldots, p_7)$, c'est même une fonction linéaire:

THÉORÈME 2. – *Avec les notations précédentes, quels que soient $p_1, \ldots, p_7$, la somme $\sum m(A,B)(Ax+B)^2$ est linéaire en x,* i.e.

$$\sum m(A,B)A^2 = 0. \tag{7}$$

Pour $r \leq 7$, nous écrirons $L(p_1, \ldots, p_r)$ pour $L(p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$ ($7-r$ zéros finaux). Fixons $r \leq 7$ et G dans la série exceptionnelle de rang $\geq r$. A G correspond $\mu = 6/h^\vee$.

THÉORÈME 3. – *Si $p_1, \ldots, p_r \geq 0$, la forme linéaire nulle n'est pas dans le support de $L(p_1, \ldots, p_r)$, et la masse totale des formes linéaires $Ax+B$ telles que $A\mu+B=0$ est nulle. Le scalaire*

$$m(p_1, \ldots, p_r) := \prod_{A\mu+B=0} (Ax+B)^{m(A,B)}$$

est un entier. C'est la longueur de la restitution à G^0 de $\Omega(p_1, \ldots, p_r)$. D'après (2), $\dim \Omega(p_1, \ldots, p_r)$ est donc la valeur en μ de la fonction rationnelle $\prod(Ax+B)^{m(A,B)}$.

Plus précisément, si $r \leq \mathrm{rang}(G)$ et que $A\mu + B = 0$, la multiplicité $m(A,B)$ de $Ax+B$ dans $L(p_1, \ldots, p_r)$ est nulle sauf dans les cas suivants. Si $G = A_2.2$ et que $p_2 > 0$: 1 pour $-2x+4$ et -1 pour $-x+2$; si $G = D_4.S_3$ et que $p_3 > 0$, $p_4 = 0$ ou que $p_3 = 0$, $p_4 > 0$: 1 pour $-3x+3$ et

-1 pour $-x+1$; si $G = D_4.S_3$ et que $p_3, p_4 > 0$: 1 pour $-3x+3$ et $-2x+2$, -2 pour $-x+1$; $G = E_6.2$ et p_5 ou $p_6 > 0$: 1 pour $-4x+2$ et -1 pour $-2x+1$.

Les $\Omega(p_1, \ldots, p_7)$ pour $p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 3p_5 + 4p_6 + 4p_7 \leq 4$ sont les représentations 1, $\mathfrak{g}$, A, C, C^*, D, E, F, F^*, G, H, I, J, X_i $(i \leq 4)$, Y_i $(i \leq 4)$ et Y_2^* de [1], qui est qui se lisant sur E_7 ou E_8. Le théorème 3 redonne ainsi une partie des formules de dimension de [1].

Soit $V(p_1, \ldots, p_7)$ la convolution

$$V(p_1, \ldots, p_7) := L(p_1, \ldots, p_7) * (\delta[0] - \delta[-x]). \tag{8}$$

Si $L(p_1, \ldots, p_7) = \sum m(A,B)\delta[Ax+B]$ et que $V(p_1, \ldots, p_7) = \sum n(A,B)\delta[Ax+B]$, les fonctions à support fini $m(A,B)$ et $n(A,B)$ se déterminent l'une l'autre par

$$n(A,B) = m(A,B) - m(A+1,B), \tag{9}$$

$$m(A,B) = \sum (A' \geq A).n(A',B). \tag{10}$$

Dans (10), la somme est sur A'; le facteur $(A' \geq A)$ vaut 1 si $A' \geq A$ et 0 sinon.

Nous prendrons (10) pour définition de $L(p_1, \ldots, p_7)$, $V(p_1, \ldots, p_7)$ étant défini par spécialisation à partir d'une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire V de mesure de Dirac sur l'espace des applications de $\mathbb{Z}^7$ dans $\mathcal{L}$ de la forme

$$(p_i) \longmapsto \left(\sum a_i p_i + n\right)x + B. \tag{11}$$

La mesure V admet une description simple en termes du système de racines de type E_8.

Ecrivons $(B; n; a_1, \ldots, a_7)$ pour la fonction (11), $\delta[B; n; a_1, \ldots, a_7]$ pour la mesure de Dirac localisée en cette fonction, et $\{c_1, \ldots, c_8\}$ pour la racine $\sum c_i\alpha_i$ de E_8. Avec ces notations, la définition de V est la suivante.

(A) Chaque racine positive $\{c, e, g, h, f, d, b, a\}$ fixe par s_4 contribue à V

$$\delta[h;\, n;\, a, b, c, d, e, f, g] - \delta[h;\, n-1;\, a, b, c, d, e, f, g]$$

avec $5h + n = a + b + c + d + e + f + g + h$.

(B) Chaque paire de racines positives $\{c, e, g, h', f, d, b, a\}, \{c, e, g, h'', f, d, b, a\}$ permutées par s_4, avec $h'' < h'$ (on a alors $h'' = h' - 1$) contribue à V

$$\delta[h';\, n';\, a, b, c, d, e, f, g] - \delta[h'';\, n''-1;\, a, b, c, d, e, f, g]$$

avec $5h' + n' = a + b + c + d + e + f + g + h'$ et $5h'' + n'' = a + b + c + d + e + f + g + h''$.

(C) V est la somme de ces contributions et de la combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\delta[B; n; 0, \ldots, 0]$ telle que pour chaque B et n, la masse totale des $(B; n; \ldots)$ soit nulle.

Définition. – (i) $V(p_1, \ldots, p_7)$ est l'image de V par l'application d'évaluation en $(p_1, \ldots, p_7)$:

$$(B; n; a_1, \ldots, a_7) \longmapsto \left(\sum a_i p_i + n\right)x + B \in \mathcal{L}.$$

(ii) Il résulte de (C) ci-dessus que pour chaque B_0, la masse pour $V(p_1, \ldots, p_7)$ des $Ax+B$ avec $B = B_0$ est nulle. On définit $L(p_1, \ldots, p_7)$ par (8), *i.e.* par (10).

Il est immédiat sur la définition de V que

PROPOSITION 1. – (i) *Sur le support de* V, B *et les* a_i *sont* ≥ 0.

(ii) *Les projections de* V *par*

(*a*) $(B; n; a_1, \ldots, a_7) \mapsto (B; n) \in \mathbb{Z}^2$,

(*b*) $(B; n; a_1, \ldots, a_7) \mapsto (a_1, \ldots, a_7) \in \mathbb{Z}^7$,

sont nulles.

La nullité (ii *a*) équivaut à $V(0, \ldots, 0) = 0$, *i.e.* à $L(0, \ldots, 0) = 0$. Ceci est compatible au fait que $\Omega(0, \ldots, 0)$ est, pour chaque G, la représentation triviale, de poids dominant 0, et que $L_{G^0}(0) = 0$.

Compte tenu de (i) et de ce que la masse totale de V est nulle, la nullité (ii *b*) équivaut à ce que, pour tout N, comme fonction de $p_1, \ldots, p_7$,

$$\int (Ax + B)^{2N} L(p_1, \ldots, p_7)$$

est de degré $\leq 2N$. Ceci est compatible, via (4), au fait que pour tout groupe de Lie simple G, $F_{2N}(\lambda)$ est une fonction de degré $\leq 2N$ en le poids λ.

Posons $A = \sum a_i p_i + n$. Le théorème 2 peut se reformuler

$$\int A\left(A + \frac{1}{2}\right)(A + 1).V = 0, \tag{12}$$

identiquement en les indéterminées p_i.

Quelques indications sur la preuve du théorème 1. – Soient G un groupe de la série exceptionnelle et $r = \inf(\text{rang}(G), 7)$. Sauf pour E_8 et la racine simple α_4, aucune racine positive n'est orthogonale à tous les Ω_i $(1 \leq i \leq r)$. On pose $[R_0^+] := [R^+]$ si $G \neq E_8$ et $[R_0^+] = [R^+] - \delta[\alpha_4]$ si $G = E_8$. Définissons la *partie mobile* de $L_{G^0}(\sum p_i \Omega_i)$ par

$$L^+_{G^0}(\sum p_i \Omega_i) = (12(\sum p_i \Omega_i + \rho), [R_0^+]). \tag{13}$$

La définition (1) se récrit $L_{G^0}(\sum p_i \Omega_i) = L^+_{G^0}(\sum p_i \Omega_i) - L^+_{G^0}(0)$.

Le théorème 1 pour G n'utilise de V que son image V_G par

$$(B; n; a_1, \ldots, a_7) \mapsto (n\mu + B; a_1, \ldots, a_r). \tag{14}$$

Décomposons V_G en $V_G^+ - V_G^-$, la *partie mobile* V_G^+ (resp. fixe V_G^-) ayant son support là où $(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ (resp. $= 0$). Le théorème 1 résulte de son analogue pour les parties mobiles de $L_{G^0}(\sum p_i \bar{\Omega}_i)$ et V_G: par la proposition 1 (ii *a*), la partie fixe se récupère en faisant $p = 0$. Pour $(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$, soit $R^{a_1, \cdots, a_r}$ l'ensemble des racines positives α telles que $\langle \alpha, \Omega_i \rangle = a_i$ pour $1 \leq i \leq r$. La forme $\langle\ ,\ \rangle$ est comme en (5)-(6). Pour $G \neq E_8$, chaque $R^{a_1, \cdots, a_r}$ est réduit à un élément ou est vide, et leur réunion est R_+. Pour $G = E_8$, chaque $R^{a_1, \cdots, a_r}$ est une orbite de $\{e, s_4\}$ ou est vide. Leur réunion est $R^+ - \{\alpha_4\}$. Soit $V_G^{a_1, \cdots, a_r}$ la mesure sur $\mathbb{Q}$ image inverse de V_G par $q \longmapsto (\mu q; a_1, \ldots, a_r)$: la masse de q est celle des $(B; n; a_1 \ldots a_r \ldots)$ avec $Bh^\vee/6 + n = q$. Soit $[R^{a_1, \cdots, a_r}]$ la somme des $\delta[\alpha]$ pour $\alpha \in R^{a_1, \cdots, a_r}$. Le théorème 1, pour les parties mobiles de L et V, se décompose en la somme des égalités

$$\langle \rho, [R^{a_1, \cdots, a_r}] \rangle * (\delta[0] - \delta[-1]) = V_G^{a_1, \cdots, a_r}. \tag{15}$$

Notre preuve de (15) est par force brutale. Ci-dessous, quelques propriétés des systèmes de racines en jeu qui peuvent aider à comprendre ce qui se passe.

Lorsque toutes les racines ont la même longueur, $\langle\lambda,\lambda\rangle = \lambda(H_\alpha)$ et $\langle\rho,\alpha\rangle$ est la somme des coefficients de α, exprimé comme combinaison linéaire de racines simples. Pour E_8, $h^\vee/6 = 5$ et (15) résulte immédiatement de la définition de V.

Soient R le système de racines de type A_1, A_2, D_4, E_6 ou E_7 et r son rang. Dans le système de racines de type E_8, aux poids fondamentaux $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ correspondent des racines simples $\alpha(1), \ldots, \alpha(r)$. Soit S_r l'ensemble complémentaire de $(8-r)$ racines simples, et W_r le groupe de Weyl engendré par les réflexions correspondantes. Soit $\langle\Omega_1, \ldots, \Omega_r\rangle$ l'espace vectoriel engendré par $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$. Autres descriptions: l'orthogonal de S_r; le sous-espace fixe par W_r. On peut vérifier, cas par cas, que les racines de E_8 dans $\langle\Omega_1, \ldots, \Omega_r\rangle$ forment un système de racines de type R, et que si l'on prend comme racines positives de ce système de racines celles qui sont positives pour E_8, les poids fondamentaux $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ de E_8 sont les poids dominants $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ de R.

Pour R de l'un des types indiqués, (15) résulte alors des assertions suivantes, que nous avons vérifiées pour D_4, E_6 et E_7:

(*a*) Soit T une orbite de W_r dans l'ensemble des racines de E_8. Si T n'est pas réduite à un point fixe, et que pour $t \in T$ $\langle t, \Omega_i\rangle$ (constant sur T) est > 0 pour un Ω_i $(1 \leq i \leq r)$, alors la contribution de T à V à une image nulle par (14).

(*b*) Notons ρ_R et $h_R^\vee$ la somme des poids fondamentaux, et le nombre de Coxeter dual, de R. Si α est dans $\langle\Omega_1, \ldots, \Omega_r\rangle$ est une racine positive, nécessairement fixe par s_4, avec les notations de la partie (A) de la définition de V, on a $(h_R^\vee/6)h + n = \langle\alpha, \rho_R\rangle$.

Exemples. – Vérifions (*a*) pour E_7. L'orbite T est ici une paire de racines comme dans la partie (B) de la définition de V. Il s'agit de vérifier que $3h' + n' = 3h'' + n'' - 1$. En effet, $h'' = h' - 1$ et $4h' + n' = 4h'' + n''$, *i.e.* $n'' = n' + 4$.

Le théorème 1 donne la dépendance en G des $F_{2N}(\lambda + \rho) - F_{2N}(\rho)$, pour certains λ.

PROPOSITION 2. – *Pour* $1 \leq N \leq 8$, $F_{2N}(\rho)$ *est, comme fonction de* G, *une fonction de* $\mu = 6/h^\vee$ *de la forme* $P_{2N}(\mu)/\mu(\mu+1)$, *pour un certain polynôme* $P_{2N}(X)$ *de degré* $2N$ *vérifiant* $P_{2N}(X) = P_{2N}(-1-X)$.

Il résulte de Duflo [3] que $F_{2N}(\rho)$ est la valeur pour G (au sens de [5]) d'une combinaison linéaire de graphes trivalents à sommets orientés. Pour $N \leq 3$, des arguments imités de [5] 6.8, 6.9 permettent de déduire la proposition de cette présentation de $F_{2N}(\rho)$. Au-delà, nous ne savons la vérifier que par force brutale. Puisque nous n'avons que 10 groupes G à notre disposition, la proposition reste vraie, mais est vide, pour $N \geq 9$.

Correction à [2]. – La formule donnée pour $\dim(X_4)$ est erronée. *Voir* [1] pour la formule correcte.

Note remise le 4 juin 1996, acceptée le 17 juin 1996.

Références bibliographiques

[1] **Cohen A. M. et de Man R., 1996.** Computational evidence for Deligne's conjecture regarding exceptional Lie groups, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322, série I, p. 427-432.

[2] **Deligne P., 1996.** La série exceptionnelle de groupes de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322, série I, p. 321-326.

[3] **Duflo M., 1977.** Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, *Ann. Sci. ENS*, 4e série, 10, p. 265-288.

[4] **van Leeuwen M. A. A., Cohen A. M. et Lisser B., 1992.** LiE, a package for Lie group computations, CAN, Amsterdam.

[5] **Vogel P., août 1995.** Algebraic structures on modules of diagrams, *preprint*.