28/10/76

Cher Luc,

Voici une preuve globale de l'existence d'un complexe de DR donnant lieu à la théorie de Hodge mixte.

<u>Objets considérés</u> la cat. dérivée de la cat. suivante de complexes bifiltrés (K^*, d, W, F) :

K^i : faisceau <u>quasi-cohérent</u>?, ainsi que les $W_j K^i$ et les $F^j K^i$
d : op. diff du 1er ordre (qui respecte W et F)
$Gr_F(d)$: $\mathcal{O}$-linéaire

$\left.\begin{matrix} F \\ W \end{matrix}\right\}$ <u>finis</u> ?

<u>Variantes</u> a) demander seulement $\mathcal{H}^i Gr_F K$ quasi-cohérent ?

b) on en a surtout, dans cette lettre, à F, plutot qu'à W

<u>Remarques</u> : a) on a des Rf_*

b) pour $X_* \xrightarrow{\varepsilon} X$, on définit comme suit $R\varepsilon_*$:

après avoir résolu et pris ε_*, on trouve un double complexe ~~[illegible]~~ K^{ij} sur X.

(i = indice de X_i, j = degré), avec W, F. On prend

complexe simple associé
F : " " " aux F^i
W : diagonal entre "i" et W : $W^i = \bigoplus_{i'+i''=i} W^{i'} K^{i''*}$

c) on a une image inverse par un morphisme <u>lisse</u> $f : Y \to X$:

$$f^*K =_{\text{dfn}} \Omega^*_Y \otimes_{\Omega^*_X} K$$

<u>On veut</u> construire fonctoriellement, pour $U \subset X$, X propre, un tel objet <u>sur</u> X, dont le $R\Gamma$ "soit" un complexe de Hodge mixte et donne lieu à la structure de Hodge mixte de ~~[illegible]~~ $H(U, \mathbb{C})$. En particulier les assertions de 8.1.9 dans Hodge III sont vraies.

Je m'aperçois demander trop : seul (K^*, d, F) peut être ainsi canonique. pourquoi ?

si U n'est pas propre $R\varepsilon(\Omega(\log))$ est-il [illegible] U ?
(ou [illegible] X ?)

La construction est donnée dans Hodge III (9.3) : on prend une résolution :
$(U_*, X_*) \xrightarrow{\varepsilon} (U, X)$ comme en Hodge III, et, pour $D_* = X_* - U_*$,

$$R\varepsilon_*(\Omega^*_{X_*}(\log D_*), W, F)$$

Le problème est celui de l'indépendance du choix de U_*, X_*. Soit donc

$$\begin{array}{ccc} (U'_*, X'_*) & \xrightarrow{\varphi} & (U_*, X_*) \\ & {\scriptstyle\varepsilon'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varepsilon} & \\ & (U, X) & \end{array}$$

et

$$K = R\varepsilon_*\, \Omega(\log) \qquad K' = R\varepsilon'\, \Omega(\log)$$

$$\varphi^* : K \longrightarrow K' \qquad \text{sur } X, \text{ propre.}$$

? U

on a : 1) $R\Gamma(X, K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, K')$ (c'est $H^*(X, \mathbb{C})$)

2) $R\Gamma(X, Gr^i_F K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, Gr^i_F K')$ (c'est $Gr^i_F H^*(X, \mathbb{C})$) puisque, pour F, $E_1 = E_\infty$

[illegible], et on applique ça récurrence au corps $k(\mathbb{A}^1)$

On emploie maintenant la méthode de $4\frac{1}{2}$, finitude. En procédant par récurrence sur dim X et en notant que ce qui est vrai pour $\mathbb{C}$ vaut aussi sur tout corps de car. 0. On trouve que

$$Gr^i_F(K) \longrightarrow Gr^i_F(K')$$

est un quasi-isomorphisme hors d'un # fini de poids ((plutôt, hors d'un gratte ciel)), et que le 3^e sommet du Δ a une cohomologie nulle : c'est partout un quasi-isom. Restreignons nous à U

<u>Conclusion</u> : pour $U/\mathbb{C}$, on a un complexe (K^*, d, F), fonctoriel (à quasi-iso près)

avec
1) $\mathcal{H}\, K^{*an} = \mathbb{C}_U$, $\quad H(U, K^*) \simeq H(U^{an}, K^{*an}) = H(U, \mathbb{C})$
2) pour U propre, la suite spectrale de F dégénère en E_1, et aboutit à la ~~[illegible]~~ filtration de Hodge.

illusoire de U

Bien à toi
P. Deligne