Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

340

Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

AMS Subject Classifications (1970): Primary: 14D05, 14F20
Secondary: 14C99, 14G10, 14M10

ISBN 3-540-06433-8 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-06433-8 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1967-1969

GROUPES DE MONODROMIE EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE

(SGA 7 II)

par P.Deligne et N.Katz

INTRODUCTION

La première partie de ce séminaire, dirigée par A. Grothendieck, a paru dans ces mêmes Lecture Notes in Mathematics sous le n° 288. De cette première partie, nous n'aurons à faire usage que des résultats des exposés I et VI (spécialement les §§ 5, 6).

Les résultats clef de cette seconde partie sont la formule de Picard-Lefschetz de l'exposé XV et la théorie des pinceaux de Lefschetz de l'exposé XVIII.

Soit X_t une famille de variétés algébriques dépendant d'un paramètre t. La formule de Picard-Lefschetz décrit le comportement de la cohomologie de X_t au voisinage d'une valeur t_o du paramètre pour laquelle X_t acquiert un point singulier quadratique ordinaire: elle fournit la différence entre les cohomologies de X_t et X_{t_o} et décrit la monodromie locale quand t tourne autour de t_o. Dans le cadre transcendant, elle est due à Lefschetz [2] et a une signification géométrique simple (XIV 3.2). Pour l'établir en toute caractéristique, il nous a fallu monter une lourde machinerie (XII, XIII, XIV), dont les grandes lignes sont données dans les introductions des exposés XIII et XIV.

Lorsqu'on prend pour famille X_t un pinceau assez général de sections hyperplanes d'une variété projective non singulière X, la formule de Picard-Lefschetz, et d'autres idées géométriques, fournissent de précieuses relations entre la cohomologie de X et celles de ses sections hyperplanes X_t. Ces relations ne prennent toute leur force que lorsque X vérifie le théorème de Lefschetz vache (LV) (XVIII 5.2.2). Cette condition est automatique en caractéristique 0. En dimension ≥ 3, la seule démonstration connue repose sur la théorie de Hodge des intégrales harmoniques (la démonstration de Lefschetz du point crucial [2] 13. pg. 25 est fausse); il serait extrêmement intéressant d'en avoir une autre, susceptible de se généraliser en caractéristique p.

Les principales applications sont les suivantes.

a) Dans l'exposé XVI, nous démontrons en égale caractéristique p une formule analogue à celle donnée par Milnor [3] pour le nombre de cycles évanescents en les points critiques isolés d'une application $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.

b) Dans l'exposé XIX, nous utilisons des méthodes de Lefschetz ([2] p. 106) pour démontrer notamment, en toute caractéristique, que si S est une surface générique dans $\mathbb{P}^3$ de degré $\neq 2, 3$ toute courbe tracée sur S est l'intersection complète de S avec une autre surface de $\mathbb{P}^3$.

c) Dans l'exposé XX, par des méthodes transposées de méthodes de Griffiths [1] , nous prouvons l'existence, en toute caractéristique, de cycles algébriques homologiquement équivalents à zéro dont aucun multiple n'est algébriquement équivalent à zéro.

Signalons encore que la méthode des pinceaux de Lefschetz a récemment permis de prouver par récurrence sur la dimension le résultat suivant (voir [4]). Si la variété projective non singulière X sur $\mathbb{F}_p$ se relève en caractéristique 0 (avec sa polarisation) et que $p \neq 2$, le polynôme caractéristique de Frobenius agissant sur $H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est dans $\mathbb{Z}[t]$ et indépendant de ℓ $(\ell \neq p)$.

Les exposés XXII et XXI sont préliminaires à XX (et à XIX en caractéristique 2). Dans XXII, nous étudions la réduction $\bmod p$ de la fonction ζ d'une variété algébrique sur $\mathbb{F}_p$ (par une méthode où la théorie de Dwork joue un rôle essentiel), et les propriétés d'intégrabilité de polynômes caractéristiques de Frobenius agissant sur des H^i . Dans XXI, nous minorons le niveau de la cohomologie d'intersections complètes génériques.

Je suggère au lecteur désireux de se faire une première image géométrique de la théorie de lire tout d'abord I, XIV 3.2, XIX § 4 et l'introduction de XIII.

Le Leitfaden qui suit explique en gros la dépendance logique des divers exposés entre eux.

[1] P.A. GRIFFITHS On the periods of certain integrals III, Ann. of Math.

[2] S. LEFSCHETZ L'analysis situs et la géométrie algébrique, Paris 1924, Gauthier-Villars, reproduit dans Selected Papers (Chelsea).

[3] J. MILNOR Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies 61, Princeton 1968.

[4] J.L. VERDIER (d'après P. DELIGNE) Cohomologie ℓ-adique, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

Bures-sur-Yvette, le 8 novembre 1972

P. DELIGNE

Table des Matières