Inventiones math. 15, 237–250 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

Les intersections complètes de niveau de Hodge un

Pierre Deligne (Bures-sur-Yvette)

Introduction

Dans tout cet article, nous désignerons par $n=2m+1$ un entier impair $\geqq 3$ fixe et par $\underline{a}=(a_1, \dots, a_\nu)$ une suite fixe d'entiers >1 tels que les intersections complètes lisses $V_n(\underline{a}) \subset \mathbf{P}^{n+\nu}(\mathbf{C})$ de dimension n et de multidegré $\underline{a}$ soient de *niveau de Hodge* 1. Cette condition signifie que, pour une telle intersection complète X, intersection de ν hypersurfaces de degrés $a_1, \dots, a_\nu$ qui, en les points de X, sont lisses et se coupent transversalement,

a) pour $p+q=n$ et $|q-p|>1$, on a $H^q(X, \Omega_X^p)=0$;

b) $H^m(X, \Omega_X^{m+1}) \neq 0$.

Rappelons que, d'après Lefschetz,

c) $H^*(X, \mathbf{Z})$ est sans torsion;

d) pour k impair, $k \neq n$, on a $H^k(X, \mathbf{Z})=0$;

e) pour $p \leqq n$, $H^{2p}(X, \mathbf{Z})$ est de rang 1, purement de type (p,p); si $\eta \in H^2(X, \mathbf{Z})$ est la classe de cohomologie d'une section hyperplane, alors $H^{2p}(X, \mathbf{Q})=\mathbf{Q}\cdot\eta^p$.

La liste des valeurs possibles de $(n, \underline{a})$ figure dans [10].

La *jacobienne intermédiaire* $J(X)$ de X est par définition le tore complexe

$$J(X)=H^n(X,\mathbf{Z})\backslash H^n(X,\mathbf{C})/H^{m+1,m}(X)$$
$$=H^{m,m+1}/H^n(X,\mathbf{Z}).$$

Le cup produit sur $H^n(X, \mathbf{Z})$ définit une forme de Riemann sur $J(X)$, qui est donc une variété abélienne polarisée de la série principale (=principalement polarisée). On montre que la construction $X \mapsto J(X)$ est «purement algébrique», i.e. indépendante de la topologie de $\mathbf{C}$. En particulier, si X est définie sur un corps $k \subset \mathbf{C}$, alors $J(X)$ est définie sur le même corps k. Dans le cas où $n=1$ (que nous n'excluons par la suite que pour des raisons de commodité), $J(X)$ est la jacobienne de X. Pour les $V_3(3)$, $J(X)$ est la jacobienne de la surface de Fano de X (voir [1]). Pour $n=3$ et X unirationnelle, les méthodes de Manin [8] permettent d'exprimer $J(X)$ à l'aide de jacobiennes. Pour les $V_n(2,2)$, si $(L_t)_{t\in\mathbf{P}^1}$ est un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes, et si C est le revêtement de $\mathbf{P}^1$ de points les sous-espaces linéaires de dimension $\frac{n-1}{2}$ des L_t, alors $J(X)$ est facteur direct à isogénie près de la jacobienne de C. Dans les autres cas, je ne connais pas d'interprétation directe de $J(X)$. D'après Lieberman [7], il résulte de la conjecture de Hodge que $J(X)$ est le quotient de l'ensemble des cycles algébriques sur X, de codimension $\frac{n+1}{2}$ et homologiquement équivalents à zéro, par une relation d'équivalence convenable.

Comme corollaire de la théorie, on obtient (pour n et $\underline{a}$ comme fixés) que les intersections complètes lisses de dimension n et multidegré $\underline{a}$ sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ vérifient la conjecture de Weil. Pour les $V_5(3)$ et les $V_3(4)$, ce résultat est, à ma connaissance, nouveau.

1. Sur C

1.1. Soit X une variété algébrique complexe projective non singulière, connexe et de dimension k. La théorie de dualité des faisceaux algébriques cohérents fournit un isomorphisme (purement algébrique)

$$H^k(X, \Omega_X^k) \simeq \mathbf{C}. \tag{1.1.1}$$

Par ailleurs, la théorie de Hodge (ici GAGA + le lemme de Poincaré) fournit un isomorphisme

$$H^k(X, \Omega_X^k) \simeq H^{2k}(X, \mathbf{C}). \tag{1.1.2}$$

On sait que l'image par (1.1.1) de la cohomologie entière $H^{2k}(X, \mathbf{Z}) \subset H^{2k}(X, \mathbf{C})$ est le réseau $(2\pi i)^{-k}\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$.

Ceci conduit à définir la *structure de Hodge de Tate* $\mathbf{Z}(s)$ comme la structure de Hodge de rang un, purement de type $(-s, -s)$, de réseau entier $\mathbf{Z}(s)_{\mathbf{Z}} = (2\pi i)^s \mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}(s)_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$. Le cup-produit définit un morphisme de structures de Hodge

$$H^k(X, \mathbf{Z}) \otimes H^k(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}(-k). \tag{1.1.3}$$

Les analogues de (1.1.3) en cohomologie l-adique ou de De Rham sont les suivants.

1.2. Rappelons que $\mathbf{Z}/r(1)$ désigne le groupe des racines $r^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On identifie $\mathbf{Z}(1)_{\mathbf{Z}/r} =_{\mathrm{dfn}} \mathbf{Z}(1)_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Z}/r$ à $\mathbf{Z}/r(1)$ par l'application $x \mapsto \exp(x/r)$. Pour tout nombre premier ℓ, on pose

$$\mathbf{Z}_\ell(1) = \varprojlim_r \mathbf{Z}/\ell^r(1) \qquad \text{(morphismes de transition } x \mapsto x^{\ell^{r''-r'}}).$$

L'application exponentielle identifie $\mathbf{Z}(1)_{\mathbf{Z}_\ell}$ à $\mathbf{Z}_\ell(1)$ et $\mathbf{Z}(s)_{\mathbf{Z}_\ell}$ à

$$\mathbf{Z}_\ell(s) =_{\mathrm{dfn}} \mathbf{Z}_\ell(1)^{\otimes s}.$$

Si on tensorise (1.1.3) par $\mathbf{Z}_\ell$, le morphisme

$$H^k(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes H^k(X, \mathbf{Z}_\ell) \to \mathbf{Z}_\ell(-k) \tag{1.2.1}$$

obtenu n'est autre que le cup-produit en cohomologie ℓ-adique. Il a un sens purement algébrique.

1.3. On a

$$H^k(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{H}^k(X, \Omega_X^*) =_{\mathrm{dfn}} H^k_{DR}(X). \tag{1.3.1}$$

Ici et par la suite, nous identifierons toujours $\mathbf{Z}(k)_\mathbf{C} = \mathbf{Z}(k)_\mathbf{Z} \otimes \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}$ par l'isomorphisme «de définition» qui envoie le réseau entier sur $(2\pi i)^k \mathbf{Z}$. Tensorisons (1.1.3) avec $\mathbf{C}$. Le morphisme obtenu

$$H^k_{DR}(X) \otimes H^k_{DR}(X) \to \mathbf{C} \tag{1.3.2}$$

n'est autre que le cup-produit en cohomologie de De Rham. Il un sens purement algébrique.

1.4. Prenons pour X une intersection complète $V_n(\underline{a})$. Tensorisons (1.1.3) par $\mathbf{Z}(2m)$ et multiplions le morphisme obtenu par $(-1)^m$. On obtient

$$\psi\colon\ H^n(X)(m) \otimes H^n(X)(m) \to \mathbf{Z}(-1). \tag{1.4.1}$$

Par hypothèse, la structure de Hodge $H^n(X)(m)$ est de type $(0,1)+(1,0)$. La forme ψ est une polarisation de $H^n(X)(m)$ et, d'après la dualité de Poincaré pour X, la forme alternée $\psi_\mathbf{Z}$ sur le réseau entier $H^n(X)(m)_\mathbf{Z}$ est de discriminant un.

Il existe donc une (unique) variété abélienne polarisée de la série principale $J(X)$, munie d'un isomorphisme de structures de Hodge polarisées

$$\alpha\colon\ H^n(X)(m) \xrightarrow{\sim} H^1(J(X)).$$

On appelle $J(X)$ la *jacobienne intermédiaire* de X.

1.5. Soit S un schéma lisse de type fini sur $\mathbf{C}$ et soit $f\colon X \to S$ un morphisme propre et lisse dont les fibres sont des intersections complètes $V_n(\underline{a})$. Alors, $R^n f_* \mathbf{Z}(m)$ est une variation de structures de Hodge polarisées sur S, de type $(0,1)+(1,0)$ (voir [5] I 2). D'après un théorème de Borel (voir [4] 5.1 et 5.2 pour l'énoncé) elle définit un schéma abélien polarisé de la série principale $u\colon J(X/S) \to S$, muni d'un isomorphisme de variations de structures de Hodge polarisées

$$\alpha\colon\ R^n f_* \mathbf{Z}(m) \xrightarrow{\sim} R^1 u_* \mathbf{Z}.$$

Cette construction exprime que $J(X)$ varie algébriquement avec X; il ne serait pas difficile de l'étendre au cas où S est un schéma sur $\mathbf{C}$ quelconque.

Les analogues en cohomologie ℓ-adique ou de De Rham de la variation de structures de Hodge $R^n f_* \mathbf{Z}(m)$ et de α sont les suivants.

1.6. Par tensorisation avec $\mathbf{Z}_\ell$, α définit un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux

$$\alpha_\ell\colon\ R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell. \tag{1.6.1}$$

Le cup-produit en cohomologie ℓ-adique, multiplié par $(-1)^m$, est un morphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux

$$\psi_\ell\colon\ R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(1) \otimes R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(1) \to \mathbf{Z}_\ell(-1) \tag{1.6.2}$$

et α_ℓ transforme ψ_ℓ en la forme de polarisation

$$_J\psi_\ell\colon\ R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell \otimes R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell \to \mathbf{Z}_\ell(-1). \tag{1.6.3}$$

Les formes (1.6.2) et (1.6.3) ont un sens purement algébrique.

1.7. Le faisceau analytique cohérent localement libre $R f_* \mathbf{Z} \otimes \mathcal{O}$ est sous-jacent au faisceau algébrique cohérent

$$R^n f_* \Omega^*_{X/S} =_{\mathrm{dfn}} H^n_{DR}(X/S).$$

La connection intégrable évidente de $R^n f_* \mathbf{Z} \otimes \mathcal{O}$ s'identifie à la connection de Gauss-Manin de $H^n_{DR}(X/S)$. Par tensorisation avec $\mathcal{O}$, α définit un isomorphisme de faisceaux analytiques

$$\alpha_{DR}\colon\ H^n_{DR}(X/S) \xrightarrow{\sim} H^1_{DR}(J(X/S)/S). \tag{1.7.1}$$

Les connections de Gauss-Manin de $H^n_{DR}(X/S)$ et de $H^1_{DR}(J(X/S)/S)$ sont régulières ([5] I 4 ou [2] II § 7) et α_{DR} est un isomorphisme horizontal. α_{DR} est donc algébrique ([2] II 5.9).

Le cup-produit en cohomologie de De Rham multiplié par $(-1)^m$, est un morphisme horizontal

$$\psi_{DR}\colon\ H^n_{DR}(X/S) \otimes H^n_{DR}(X/S) \to \mathcal{O}_S \tag{1.7.2}$$

et α_{DR} transforme ψ_{DR} en la forme de polarisation

$$_J\psi_{DR}\colon\ H^1_{DR}(J(X/S)/S) \otimes H^1_{DR}(J(X/S)/S) \to \mathcal{O}_S. \tag{1.7.3}$$

1.8. Soit $S_{\mathbf{Z}}$ le sous-schéma du schéma de Hilbert (sur $\mathbf{Z}$) qui paramétrise les intersections complètes lisses de dimension n et multidegré $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^{n+\nu}$. Soit $f\colon X_{\mathbf{Z}} \to S_{\mathbf{Z}}$, la famille «universelle» de $V_n(\underline{a})$ paramétrisée par $S_{\mathbf{Z}}$. Pour tout anneau A, nous désignerons par $f\colon X_A \to S_A$ le morphisme déduit de f par extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à A.

Posons $G = PGL_{n+\nu+1}$. Le schéma en groupe G (sur $\mathbf{Z}$) agit sur $X_{\mathbf{Z}}/S_{\mathbf{Z}}$ via son action sur $\mathbf{P}^{n+\nu}$.

1.9. **Proposition.** *Soit $g\colon Y \to T$ un morphisme propre et lisse dont les fibres géométriques sont des intersections complètes $V_n(\underline{a})$.*

(i) *Localement sur T pour la topologie étale, Y est isomorphe à l'intersection de ν hypersurfaces $H_1 \dots H_\nu$ de degrés $a_1 \dots a_\nu$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}_T^{n+\nu}$ sur T.*

(ii) *En particulier, localement sur T pour la topologie étale, il existe $u\colon T \to S_{\mathbf{Z}}$ et un T-isomorphisme $\iota\colon Y \xrightarrow{\sim} u^*(X_{\mathbf{Z}}/S_{\mathbf{Z}})$.*

(iii) *Si (u', ι') est un autre système comme en* (ii), *alors, localement sur T pour la topologie étale, il existe $a \in G(T)$ tel que $(u', \iota') = a(u, \iota)$.*

(iv) *$S_{\mathbf{Z}}$ est lisse sur* $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$.

Dans ce paragraphe, le seul corollaire de 1.9 que nous n'utiliserons est la lissité de $S_{\mathbf{C}}$. On pourrait même s'en dispenser en remplaçant par la suite $S_{\mathbf{Z}}$ par le schéma $S'_{\mathbf{Z}}$ introduit ci-dessous.

Pour toute fibre géométrique $Y_{\bar t}$ de g, on a $H^1(Y_{\bar t}, \mathcal{O}) = H^2(Y_{\bar t}, \mathcal{O}) = 0$, de sorte que $\underline{\mathrm{Pic}}_T(Y)$ est étale sur T. De plus, $\underline{\mathrm{Pic}}(Y_{\bar t}) \simeq \mathbf{Z}$, engendré par la classe de l'unique faisceau inversible (très) ample $\mathcal{O}(1)$ de degré $\Pi\, a_i$. Localement sur T pour la topologie étale, il existe donc sur Y un faisceau inversible relativement ample de degré $\Pi\, a_i$, soit $\mathcal{O}(1)$. Localement sur T, il est unique. Puisque $H^1(Y_{\bar t}, \mathcal{O}(k)) = 0$ (FAC), $g_*\,\mathcal{O}(k)$ est localement libre de formation compatible aux changements de base ([9] p. 19 ou EGA III); dès lors, $\mathcal{O}(1)$ est très ample et tout choix d'une base de $g_*\,\mathcal{O}(1)$ fournit un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbf{P}_T^{n+\nu} \arrow[dl, "p"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

avec $j^*\,\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$.

Prouvons que $j(Y)$ est une intersection de type (i); (iii) résultera de l'unicité de $\mathcal{O}(1)$. Les morphismes $H^0(\mathbf{P}_{\bar t}^{n+\nu}, \mathcal{O}(k)) \to H^0(Y_{\bar t}, \mathcal{O}(k))$ sont surjectifs, donc aussi $p_*\,\mathcal{O}(k) \to g_*\,\mathcal{O}(k)$ et le noyau de cet épimorphisme de faisceaux localement libres est localement libre; l'assertion en résulte aisément.

Soit $\bar{S}'_{\mathbf{Z}}$ le schéma sur $\mathbf{Z}$ qui paramétrise les ν-uples d'hypersurfaces $H_i \subset \mathbf{P}^{n+\nu}$, avec $\deg(H_i) = a_i$. Soit $S'_{\mathbf{Z}}$ le sous-schéma ouvert de $\bar{S}'_{\mathbf{Z}}$ qui paramétrise les ν-uples (H_i) avec $\bigcap H_i$ lisse de dimension n. Le schéma $S'_{\mathbf{Z}}$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, car ouvert d'un produit d'espaces projectifs. L'application évidente de $S'_{\mathbf{Z}}$ dans $S_{\mathbf{Z}}$ est surjective par (i). Elle est lisse (à l'aide de (i), on vérifie aisément un critère infinitésimal de lissité). Dès lors, $S_{\mathbf{Z}}$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$.

Posons $S = S_{\mathbf{C}}$, $X = X_{\mathbf{C}}$ et soit $f: X \to S$ la famille universelle 1.8.

1.10. **Lemme fondamental.** *Soit a: $A \to S$ un schéma abélien sur S.*

(i) *S'il existe un nombre premier ℓ et un isomorphisme de $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux*

$$v_\ell: R^1 u_* \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R^1 a_* \mathbf{Q}_\ell,$$

ou s'il existe un isomorphisme horizontal

$$v_{DR}: H^1_{DR}(J(X/S)/S) \xrightarrow{\sim} H^1_{DR}(A/S),$$

alors A est isomorphe à $J(X/S)$. L'isomorphisme

$$v': J(X/S) \to A$$

est unique au signe près.

(ii) *Si de plus A est muni d'une polarisation de la série principale, alors v' est compatible aux polarisations. Si v_ℓ* (resp. v_{DR}) *comme en* (i) *est compatible aux formes de polarisation, alors v_ℓ* (resp. v_{DR}) *est induit par v' ou par $-v'$.*

Nous nous appuierons sur le théorème suivant de Lefschetz.

1.11. **Théorème** (Lefschetz). *Soient $s \in S$ et $X_s = f^{-1}(s)$.*

(i) *La représentation de monodromie de $\pi_1(S, s)$ sur $H^n(X_s, \mathbf{Q})$ est absolument irréductible.*

(ii) *Pour tout nombre premier ℓ, la représentation de monodromie de $\pi_1(S, s)$ sur $H^n(X_s, \mathbf{Z}/\ell)$ est absolument irréductible.*

Pour un exposé en cohomologie ℓ-adique de ce théorème, suivant de très près la démonstration de Lefschetz (cf. [6] Ch V, III p. 106), voir SGA 7 bis.

Prouvons 1.10. Considérons les représentations de monodromie

$$\rho_J: \pi_1(S, s) \to GL(H^1(J(X_s), \mathbf{Z})) \simeq GL(H^n(X_s, \mathbf{Z}))$$
$$\rho_A: \pi_1(S, s) \to GL(H^1(A_s, \mathbf{Z})).$$

L'hypothèse de (i) implique que, après extension des scalaires à $\mathbf{Q}_\ell$ ou à $\mathbf{C}$, ces représentations deviennent isomorphes. L'isomorphie de deux représentations est invariante par extension du corps de base, d'où l'existence d'un isomorphisme $\pi_1(S,s)$-équivariant

$$v'' \colon H^1(J(X_s), \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(A_s, \mathbf{Q}).$$

D'après 1.11(i), l'image de $v''^{-1}(H^1(A_s, \mathbf{Z})) \cap H^1(J(X_s), \mathbf{Z})$ dans $H^1(J(X_s), \mathbf{Z}/\ell)$ est tout ou rien. Il en résulte qu'un multiple rationnel de v'' est un isomorphisme

$$v'_{\mathbf{Z}} \colon H^1(J(X_s), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(A_s, \mathbf{Z}).$$

D'après 1.11(i), $v'_{\mathbf{Z}}$ est uniquement déterminé au signe près.

D'après [3] 4.4.11 et 4.4.12, $v'_{\mathbf{Z}}$ provient d'un isomorphisme de schéma abélien

$$v' \colon J(X/S) \to A,$$

qui, comme $v'_{\mathbf{Z}}$, est unique au signe près. Rappelons le principe de la démonstration. On interprète $v'_{\mathbf{Z}}$ comme une section du système local $\underline{\mathrm{Hom}}(R^1 u_* \mathbf{Z}, R^1 a_* \mathbf{Z})$; d'après 1.11(i), c'est l'unique section de ce système local, à un facteur près. On sait par ailleurs ([3] 4.12) que le module de toutes les sections définit en chaque point de s une sous-structure de Hodge de $\mathrm{Hom}(H^1(J(X_s), \mathbf{Z}), H^1(A_s, \mathbf{Z}))$. On en tire que $v'_{\mathbf{Z}}$ est en chaque point de S de type de Hodge $(0,0)$, i.e. un morphisme de structures de Hodge, et l'assertion en résulte.

Prouvons (ii). D'après 1.11(i), toute polarisation ψ' de $J(X/S)$ est un multiple rationnel $b\,{}_J\psi$ de la polarisation donnée. Pour ψ' de la série principale, b est un entier inversible positif, i.e. $\psi' = \psi$, ce qui prouve la première assertion. Quant à la seconde, on a a priori par 1.11(i) $v_\ell = b\, v'_\ell$ avec $b \in \mathbf{Q}_\ell^*$ (resp. $v_{DR} = b'_{DR}$ avec $b \in \mathbf{C}^*$) et la compatibilité aux formes ψ_ℓ ou ψ_{DR} fournit $b^2 = 1$, i.e. $b = \pm 1$.

1.12. D'après 1.11(i), l'isomorphisme α_ℓ est caractérisé au signe près par le fait qu'il transforme ψ_ℓ en ${}_J\psi_\ell$ (1.6). Il serait facile d'adapter (en les simplifiant) les arguments de [4] § 6 pour déduire de là que les intersections complètes $V_n(\underline{a})$ sur les corps finis vérifient les conjectures de Weil. On prouverait de même le résultat peut-être plus général suivant.

1.13. **Théorème.** *Soit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathbf{P}_V^r \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(V) & \end{tikzcd}$$

une variété projective et lisse de dimension $2m+2$ sur un anneau de valuation discrète V d'inégale caractéristique à corps résiduel fini $\mathbf{F}_q$. Soient X_0

et X_K les fibres spéciale et générale de X. Supposons que la «nouvelle» partie de la cohomologie des sections hyperplanes lisses H de X_K soit de niveau $\leqq 1$ au sens suivant.

(∗) *Pour $p+q=2m+1$ et $|q-p|>1$, le conoyau*

$$\operatorname{Coker}(H^q(X_K, \Omega^p_{X_K}) \to H^q(H, \Omega^p_H))$$

est nul.

Alors, pour toute section hyperplane lisse H_0 de X_0, les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius de $\operatorname{Coker}(H^{2m+1}(X_0, \mathbf{Z}_\ell) \to H^{2m+1}(H_0, \mathbf{Z}_\ell))$ *sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $q^{\frac{2m+1}{2}}$. Ces entiers algébriques sont divisibles par q^m.*

2. Sur Q

2.1. Soit ℓ_0 un nombre premier. Pour toute extension K de $\mathbf{Q}$, considérons le problème suivant:

(J, K) Construire un schéma abélien polarisé de la série principale $u: J_K \to S_K$ sur S_K (1.8), muni d'un isomorphisme

$$\alpha_{\ell_0}: R^n f_* \mathbf{Z}_{\ell_0}(m) \xrightarrow{\sim} R^1 u_* \mathbf{Z}_{\ell_0}$$

qui transforme ψ_{ℓ_0}, défini comme en (1.6.2), en la forme de polarisation.

Pour $K=\mathbf{C}$, le problème (J, K) a d'après 1.10 une solution unique à isomorphisme unique près.

2.2. Un principe général veut qu'un problème P défini sur un sous-corps k de $\mathbf{C}$ et ayant sur $\mathbf{C}$ une solution unique à isomorphisme unique près ait une solution (tout aussi unique) sur k. Ici, on trouve qu'il existe un schéma abélien $u: J_{\mathbf{Q}} \to S_{\mathbf{Q}}$ sur $S_{\mathbf{Q}}$, muni d'une polarisation principale ${}_J\psi$ et d'un isomorphisme α_{ℓ_0} comme en (J, K). De plus, le triple $(J_{\mathbf{Q}}, {}_J\psi, \alpha_{\ell_0})$ est unique à isomorphisme unique près.

2.3. Le principe énoncé plus haut se justifie ainsi.

a) Si le problème P est de trouver un nombre a, a ayant quelque propriété géométrique, le principe est évident: k est le corps des invariants de $\operatorname{Aut}(\mathbf{C}/k)$, et une solution a de P sur $\mathbf{C}$, étant unique, est invariante par $\operatorname{Aut}(\mathbf{C}/k)$. «Géométrique» signifie: «invariant par extension des scalaires».

b) Si le problème P est de trouver un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel défini sur k, ayant quelque propriété géométrique, on applique de même Bourbaki, Alg Chap 2 § 8 Th 1 à $\operatorname{Aut}(\mathbf{C}/k)$. Il n'est pas requis que V soit de dimension finie.

c) Si le problème P est de trouver un sous-schéma Y d'un schéma affine W défini sur k, ayant quelques propriétés géométriques, on applique b): l'idéal de Y est un sous-espace vectoriel de l'anneau de coordonnées.

d) Le cas où, dans c), W ne serait pas affine se ramène à c) par recollement.

e) Pout tout entier $b \geqq 3$, soit M_b le schéma sur $S_{\mathbf{Z}[1/b]}$ dont les sections sur tout $S_{\mathbf{Z}[1/b]}$-schéma $t\colon T \to S_{\mathbf{Z}[1/b]}$ classifient les schémas abéliens polarisés de la série principale $a\colon A \to T$ munis d'un isomorphisme $t^* R^n f_* \mathbf{Z}/b(m)_* \simeq R' a_* \mathbf{Z}/b$. (Cet isomorphisme étant compatible aux formes d'intersection.)

Une solution du problème (J, K) s'interprète comme une section sur S_K de $M_{\ell_0^\infty} = \varprojlim_c M_{\ell_0^c}$. On applique d) à cette section, vue comme sous-schéma de $(M_{\ell_0^\infty})_K$.

2.4. *Remarque.* Lorsque le problème P a une solution sur une extension finie de k, le principe énoncé plus haut se démontre par descente galoisienne. On peut souvent se ramener à ce cas en utilisant le principe de l'extension finie EGA IV 9.1.1.

Soit ℓ un nombre premier. Soient K le corps des fonctions de $S_{\mathbf{Q}}$ et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Tout $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau F sur $S_{\mathbf{Q}}$ définit une représentation ℓ-adique de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur la fibre générique géométrique $F_{\bar{K}}$ de F.

2.5. **Lemme.** *Les représentations ℓ-adiques de* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *définies par $R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m)$ et par $R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell$ ont le même caractère.*

Soit U un ouvert de Zariski de $S_{\mathbf{Z}}$ où ℓ et ℓ_0 soient inversibles, contenant $S_{\mathbf{Q}}$, et tel que $J_{\mathbf{Q}}$ soit la restriction à $S_{\mathbf{Q}}$ d'un schéma abélien $u'\colon J' \to U$. Les représentations ℓ-adique 2.5 de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sont alors non ramifiées en dehors de U: elles se factorisent par une représentation de $\pi_1(U, \bar{K})$. De même pour leurs analogues ℓ_0-adiques. Chaque point fermé s de U définit une classe de conjugaison de substitutions de Frobenius $\varphi_s \in \pi_1(U, \bar{K})$. On a

$$(2.5.1) \qquad \mathrm{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell)_{\bar{K}}) = \mathrm{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^1 u_* \mathbf{Z}_{\ell_0})_{\bar{K}}) \in \mathbf{Z}:$$

c'est la trace de l'endomorphisme de Frobenius de J'_s. De même,

$$(2.5.2) \qquad \mathrm{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m))_K) = \mathrm{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^n f_* \mathbf{Z}_{\ell_0}(m))_{\bar{K}}) \in \mathbf{Q}:$$

les deux membres valent (d'après la formule des traces de Lefschetz en cohomologie ℓ-adique)

$$\frac{1}{q^m}\left(\#\mathbf{P}(k(s)) - \#X_s(k(s))\right).$$

Par hypothèse, on a

$$\operatorname{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^1 u_* \mathbf{Z}_{\ell_0})_{\bar{K}}) = \operatorname{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^n f_* \mathbf{Z}_{\ell_0}(m))_{\bar{K}}),$$

d'où, par (2.5.1) et (2.5.2),

$$\operatorname{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^1 u_* \mathbf{Z}_{\ell})_{\bar{K}}) = \operatorname{Tr}(\varphi_s^{-1}, (R^n f_* \mathbf{Z}_{\ell}(m))_{\bar{K}}).$$

On conclut en notant que la trace est une fonction continue sur $\pi_1(U, \bar{K})$ et que d'après le théorème de densité de Čebotarev, les Frobenius φ_s sont denses dans $\pi_1(U, \bar{K})$.

2.6. **Lemme.** *Les représentations de* $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ *sur* $R^n f_* \mathbf{Q}_\ell(m)$ *et sur* $R^n f_* \mathbf{Z}/\ell(m)$ *sont irréductibles.*

En effet, l'image de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ dans $GL(R^n f_* \mathbf{Q}_\ell(m))$ ou $GL(R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m))$ contient celle du groupe fondamental géométrique $\pi_1(S_{\bar{\mathbf{Q}}}, \bar{K})$. Il résulte de 1.11 que l'action de ce dernier est déjà irréductible.

De 2.5 et 2.6 on tire que les représentations ℓ-adiques de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $(R^n f_* \mathbf{Z}_g(m))_{\bar{K}}$ et sur $(R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell)_{\bar{K}}$ sont isomorphes. Tout isomorphisme entre ces représentations provient d'un isomorphisme

$$\alpha'_\ell \colon R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell.$$

D'après 1.11, après extension des scalaires de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{C}$, α'_ℓ devient un multiple ℓ-adique de l'isomorphisme (1.6.1): $\alpha'_\ell = b\,\alpha_\ell$ avec $b \in \mathbf{Z}_\ell^*$. Sur $\mathbf{Q}$, on pose $\alpha_\ell = b^{-1} \alpha'_\ell$.

2.7. Nous avons ainsi obtenu:

a) un schéma abélien polarisé de la série principale $J_{\mathbf{Q}}$ sur $S_{\mathbf{Q}}$;

b) pour tout nombre premier ℓ, un isomorphisme compatible aux formes d'intersection

$$\alpha_\ell \colon R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell;$$

c) un isomorphisme $J_{\mathbf{Q}} \times_{S_{\mathbf{Q}}} S_{\mathbf{C}} \simeq J(X_{\mathbf{C}}/S_{\mathbf{C}})$ qui identifie les isomorphismes précédents aux isomorphismes (1.6.1).

2.8. Pour toute extension K de $\mathbf{Q}$, soit W_K le K-espace vectoriel des morphismes horizontaux

$$\alpha' \colon H^n_{DR}(X_K/S_K) \to H^1_{DR}(J_K/S_K).$$

On a $W_K = W_{\mathbf{Q}} \otimes K$. Pour $K = \mathbf{C}$, W_K est de dimension un, et ses éléments non nuls sont des isomorphismes. On en déduit qu'il existe un isomorphisme

$$\alpha' \colon H^n_{DR}(X_{\mathbf{Q}}/S_{\mathbf{Q}}) \xrightarrow{\sim} H^1_{DR}(J_{\mathbf{Q}}/S_{\mathbf{Q}}).$$

De plus, α' est unique à multiplication près par $\lambda \in \mathbf{Q}^*$. On vérifie sur $\mathbf{C}$ que

a) α' repecte les filtrations de Hodge des deux membres: $\alpha'(F^{n+1}) = F^1$;

b) α' transforme ψ_{DR} en un multiple de ${}_J\psi_{DR}$:

$$\alpha'(\psi_{DR}) = \mu(\alpha')\, {}_J\psi_{DR} \qquad (\mu(\alpha') \in \mathbf{Q}^*).$$

On a $\mu(\lambda\alpha') = \lambda^{-2}\mu(\alpha')$.

2.9. **Proposition.** *Le multiplicateur $\mu(\alpha')$ est positif.*

Ceci se vérifie après extension des scalaires de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{R}$.

2.10. *Conjecture. Le multiplicateur $\mu(\alpha')$ est un carré.*

Cette conjecture équivaut aux suivantes.

(2.10.1) Pour un choix convenable de α', on a $\alpha'(\psi_{DR}) = {}_J\psi_{DR}$.

(2.10.2) Sur $\mathbf{C}$, l'isomorphisme déduit de α' transforme cohomologie rationnelle en cohomologie rationnelle.

(2.10.3) Via 2.7 c), l'isomorphisme α_{DR} (1.7.1) est défini sur $\mathbf{Q}$.

Que cette conjecture résulte tant de la conjecture de Hodge que de la conjecture de Tate est une maigre consolation.

Rappelons que $G = PGL_{n+\nu+1}$ agit sur $X_{\mathbf{Q}}/S_{\mathbf{Q}}$ (1.8).

2.11. **Lemme.** *Il existe une et une seule action de G sur $J_{\mathbf{Q}}/S_{\mathbf{Q}}$, prolongeant l'action de G sur $S_{\mathbf{Q}}$. Pour cette action, les isomorphismes α_ψ* (2.7.b)) *sont équivariants.*

Pour toute extension K de $\mathbf{Q}$, considérons le problème suivant.

(I, K). Soit μ: $G_K \times_K S_K \to S_K$ l'action de G_K sur S_K. Trouver un isomorphisme a: $\mu^* J_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_2^* J_K$ qui définisse une action de G_K sur J_K/S_K.

Puisque G est connexe, les α_ℓ sont automatiquement équivariants. De là, ou de Mumford [9] 6.1 p. 115 résulte que a, s'il existe, est unique. D'après le principe énoncé en 2.2, il suffit donc de montrer que, sur $\mathbf{C}$, a existe. Ceci résulte de ce que, sur $\mathbf{C}$, la jacobienne intermédiaire est bien définie à isomorphisme unique près et de ce que $\mu^*(X_K/S_K)$ est donné comme isomorphe à $\mathrm{pr}_2^*(X_K/S_K)$.

On déduit de 1.9 et 2.11 le théorème suivant.

2.12. **Théorème.** *A isomorphisme unique près, il existe un et un seul foncteur du type suivant J, muni des données additionnelles suivantes.*

a) *Pour T un schéma de caractéristique* 0 *et g: $Y \to T$ un morphisme propre et lisse, de fibres des $V_n(\underline{a})$, u: $J(Y/T) \to T$ est un schéma abélien polarisé de la série principale.*

b) *J est compatible aux changements de base c: $T' \to T$: des isomorphismes $J(c^* Y/T') \simeq c^* J(Y/T)$ sont donnés.*

c) *Des isomorphismes compatibles aux changements de base*

$$\alpha_\ell\colon R^n g_* \mathbf{Z}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} R^1 u_* \mathbf{Z}_\ell$$

sont donnés.

d) *Quand on se restreint aux schémas sur* $\mathbf{C}$ *lisses, le foncteur* $(J, (\alpha_\ell))$ *devient isomorphe au foncteur «jacobienne intermédiaire» construit au* § 1.

3. Sur Z

La théorie, sur $\mathbf{Z}$, est aussi peu satisfaisante qu'en cohomologie de De Rham (2.8 à 2.10).

3.1. **Proposition.** *Il existe un morphisme propre et birationnel* $b\colon \tilde{S} \to S_{\mathbf{Z}}$ *tel que*

a) *b induit un isomorphisme de* $\tilde{S}_{\mathbf{Q}}$ *avec* $S_{\mathbf{Q}}$;

b) *il existe un schéma abélien polarisé de la série principale* $\tilde{J}$ *sur* $\tilde{S}$, *dont la restriction à* $S_{\mathbf{Q}}$ *soit* $J_{\mathbf{Q}}$.

On utilise le lemme suivant.

3.2. **Lemme.** *Soient V un anneau de valuation discrète de corps de fraction K de caractéristique* 0 *et* g: $\mathrm{Spec}(V) \to S_{\mathbf{Z}}$ *un morphisme. Alors, la variété abélienne sur K image réciproque de* $J_{\mathbf{Q}}$ *a bonne réduction.*

Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, X_V l'image réciproque de X sur V, J_K l'image réciproque de J sur $\mathrm{Spec}(K)$, $X_{\bar{K}}$ et $J_{\bar{K}}$ les images réciproques X_V et J_K sur $\bar{K}$.

Soit k un entier $\geqq 3$ inversible sur V. Puisque X_V est lisse sur V, il résulte du théorème de spécialisation en cohomologie ℓ-adique que le $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-module $H^n(X_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/k)(m)$ est non ramifié. D'après 2.7, ce $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-module est isomorphe à $H^1(J_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/k)$, et il reste à appliquer le critère de bonne réduction de Néron-Ogg-Chafarevitch.

Une méthode brève, mais trop compliquée, pour déduire 3.1 de 3.2 est la suivante. Soit k un entier $\geqq 3$ et soit M_k comme en 2.3.e). Alors, $J_{\mathbf{Q}}$ définit une section de M_k sur $S_{\mathbf{Q}}$. Soit $\tilde{S}_k$ l'adhérence de cette section dans M_k. Pour prouver que b: $\tilde{S}_k \to S_{\mathbf{Z}[1/k]}$ est propre, il suffit de tester le critère valuatif de propreté pour les anneaux de valuations discrètes de corps des fractions de caractéristique 0: en effet, $\tilde{S}_{k\mathbf{Q}}$ est dense dans $\tilde{S}_k$. Pour ceux-ci, il suffit d'appliquer 3.2.

On vérifie aisément que, au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/k_1 k_2])$, $\tilde{S}_{k_1}$ coïncide avec $\tilde{S}_{k_2}$. Les $\tilde{S}_k$ se recollent en le $\tilde{S}$ cherché.

3.3. Je conjecture que, dans 3.1, on peut prendre $\tilde{S} = S$. Si tel était le cas, 2.12 resterait vrai sur $\mathbf{Z}$.

On vérifie aisément:

3.4. **Proposition.** *Soit* $a\colon \tilde{J} \to \tilde{S}$ *comme en* 3.1. *Pour chaque nombre premier* ℓ, *l'isomorphisme* α_ℓ (2.7) *se prolonge sur* $\tilde{S}[1/\ell]$ *en*

$$\alpha_\ell\colon\ R^n f_* \mathbf{Z}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} R^1 a_* \mathbf{Z}_\ell.$$

3.5. *La conjecture de Weil pour les* $V_n(\underline{a})$.

A l'aide de 3.4, on peut donner une variante de la démonstration indiquée en 1.12 de la conjecture de Weil pour les $V_n(\underline{a})$.

Soit X une intersection complète lisse de dimension n et de multidegré $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^{n+\nu}(\mathbf{F}_q)$. X correspond à un point $x \in S_{\mathbf{Z}}(\mathbf{F}_q)$.

a) *il existe un point* $\tilde{x} \in \tilde{S}(\mathbf{F}_q)$ *au-dessus de* x.

En effet, on peut relever X en une intersection complète sur les vecteurs de Witt $W(\mathbf{F}_q)$, ce qui relève x en $x' \in S_{\mathbf{Z}}(W(\mathbf{F}_q))$. Le point x' définit un point de $\tilde{S}(W(\mathbf{F}_q) \otimes \mathbf{Q})$, et, puisque b est propre, ce dernier se prolonge en $x' \in \tilde{S}(W(\mathbf{F}_q))$. On déduit $\tilde{x}$ de x'' par réduction.

b) Soit J la variété abélienne sur $\mathbf{F}_q$, fibre de $\tilde{J}$ en $\tilde{x}$. Si $\bar{X}$ et $\bar{J}$ se déduisent de X et J par extension des scalaires de $\mathbf{F}_q$ à une de ses clôtures algébriques $\mathbf{F}_q$, 3.4 fournit un isomorphisme

$$H^n(\bar{X}, \mathbf{Z}_\ell)(m) \simeq H^1(\bar{J}, \mathbf{Z}_\ell).$$

Cet isomorphisme commute aux endomorphismes de Frobenius (géométriques), de sorte que

$$\det(1 - F\,t, H^n(\bar{X}, \mathbf{Z}_\ell)) = \det(1 - q^m F\,t, H^1(\bar{J}, \mathbf{Z}_\ell)). \tag{3.5.1}$$

La conjecture de Weil pour X résulte donc d'un théorème de Weil [11] pour J.

Bibliographie

1. Clemens, C.H., Griffiths, P.A.: The intermediate jacobian of the cubic threefold (à paraître). .
2. Deligne, P.: Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in mathematics **163**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970. Je signale que II 1.23 et II 1.24 de [2] sont faux. La démonstration de 4.1 doit être modifiée. J'envoie un erratum à quiconque me le demande.
3. Deligne, P.: Théorie de Hodge II. Publ. Math. IHES **40** (to appear).
4. Deligne, P.: La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$. Inventiones math. **15**, 206–226 (1972).
5. Griffiths, P.A.: Period of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems. Bull. AMS **76**, 228–296 (1970).
6. Lefschetz, S.: L'analysis situs et la géométrie algébrique. Paris: Gauthier-Villars 1924. Reproduit dans Selected Papers. New York: Chelsea publ. Co. 1971.
7. Lieberman, D.: Higher Picard varieties. Am. J. Math. **90**, 1165–1199 (1968).
8. Manin, Y.: Correspondences, motives and monoidal transformation. Matematičeski Sbornik **77** (119), 475–507.

9. Mumford, D.: Geometric invariant theory. Ergebnisse **34**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
10. Rapoport, M.: Complément à l'article de P. Deligne: «la conjecture de Weil pour les surfaces $K3$». Inventiones math. **15**, 227–236 (1972).
11. Weil, A.: Variétés abéliennes et courbes algébriques. Paris: Hermann 1948.
EGA. Eléments de géométrie algébrique par A. Grothendieck et J. Dieudonné. Publ. Math. IHES.
SGA 7 bis Séminaire de géométrie algébrique 7–2^e partie par P. Deligne et N. Katz. (Diffusé par l'IHES.)

Pierre Deligne
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, Route de Chartres
F-91 Bures-sur-Yvette
France

(Reçu le 26 août 1971)