Inventiones math. 35, 299–316 (1976)

Inventiones mathematicae

Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale

Pierre Deligne (Bures-sur-Yvette)

A Jean-Pierre Serre en témoignage d'admiration

Sommaire

1. Enoncé du théorème

(1.1) Soient K un corps global (un $\mathbf{A}$-corps au sens de Weil), K' une extension galoisienne finie de K et V une représentation complexe du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K'/K)$. Nous suivrons les conventions de [1] pour définir la fonction L d'Artin correspondante: les facteurs à l'infini sont inclus, et les facteurs locaux non archimédiens sont définis en terme des Frobenius géométriques (inverses des substitutions de Frobenius). Nous normalisons par ailleurs l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classe local de façon à ce qu'il transforme les Frobenius géométriques en uniformisantes (cf. [1] 3.6). Ces questions de signe sont en fait sans importance: nos calculs essentiels se feront modulo 2. La fonction $L(V,s)$ vérifie une équation fonctionelle

(1.1.1) $L(V,s)=\varepsilon(V,s)\,L(V^*,1-s)$,

où $\varepsilon(V,s)$ est le produit d'une constante par un facteur exponentiel, et V^* le dual de V.

Soient f la norme du conducteur d'Artin de V, D la valeur absolue du discriminant de K (resp. q^{2g-2} pour un corps de fonctions) et définissons

(1.1.2) $W(V)=\varepsilon(V,\tfrac{1}{2})$.

On a alors

(1.1.3) $\varepsilon(V,s)=W(V)(f\cdot D^{\dim(V)})^{\frac{1}{2}-s}$,

(1.1.4) $W(V)\cdot W(V^*)=1$.

Si V est isomorphe à V^*, i.e. si le caractère de V est à valeurs réelles, (1.1.4) montre que $W(V)=\pm 1$. Fröhlich et Queyrut [2] ont montré que si V est même orthogonale, i.e. réalisable sur $\mathbf{R}$, alors $W(V)=+1$.

(1.2) Soient K un corps local (= un corps localement compact non discret), K' une extension galoisienne finie de K, contenue dans une clôture séparable $\bar{K}$ de K, V une représentation complexe du groupe de Galois $G=\mathrm{Gal}(K'/K)$, ψ: $K\to\mathbf{C}^*$ un caractère additif non trivial et dx une mesure de Haar sur K. En fait, K' ne joue aucun rôle: nous n'en avons qu'à la représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ déduite de V par inflation; on la note encore V. Je renvoie à [1] §§ 4, 5 pour la définition de $\varepsilon(V,\psi,dx,s)$. Dans [1], on prend plus généralement pour V une représentation du groupe de Weil $W(\bar{K}/K)$ (dont $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ est un complété dans le cas non archimédien, un quotient dans le cas archimédien), on définit $\varepsilon(V,\psi,dx)$, et on pose $\varepsilon(V,\psi,dx,s)=\varepsilon(V\otimes\omega_s,\psi,dx)$, où ω_s est le quasi-caractère $\|x\|^s$ de $K^*=W(\bar{K}/K)^{ab}$. En tant que fonction de s, $\varepsilon(V,\psi,dx,s)$ est le produit d'une constante par un facteur exponentiel.

Si l'on part d'une situation globale comme en 1.1, que K_v parcourt les complétés de K, que V_v est la restriction à un groupe de décomposition en v de la représentation V, que les ψ_v sont les composantes locales d'un caractère de $\mathbf{A}_K/K$ et que $\int_{\mathbf{A}_K/K}\otimes\, dx_v=1$, on a

$$(1.2.1)\quad \varepsilon(V,s)=\prod_v \varepsilon(V_v,\psi_v,dx_v,s).$$

Tant localement que globalement, ε est multiplicatif en V: $\varepsilon(V\oplus V')=\varepsilon(V)\cdot\varepsilon(V')$. Ceci permet de définir ε pour les représentations virtuelles (éléments du groupe de Grothendieck $R(G,\mathbf{C})$ de la catégorie des représentations de G).

Revenons au cas local. Si V est une représentation virtuelle de dimension 0, $\varepsilon(V,\psi,dx,s)$ est indépendant de dx, qui est omis de la notation ([1] 5.3). Si V est de dimension 0 et de déterminant χ: $K^*=W(\bar{K}/K)^{ab}\to\mathbf{C}^*$, alors ([1] 5.4)

$$(1.2.2)\quad \varepsilon(V,\psi(a\,x),s)=\chi(a)\,\varepsilon(V,\psi,s).$$

En particulier, si $\chi=1$, $\varepsilon(V,\psi,s)$ est indépendant de ψ; ψ est alors omis de la notation.

Le *conducteur d'Artin* f de V vaut par définition 1 pour K archimédien. Pour K non archimédien, c'est le nombre noté $q^{a(V)}$ dans [1] (q = nombre d'éléments du corps résiduel). Pour V de dimension 0 et déterminant 1, posons

$$(1.2.3)\quad W(V)=\varepsilon(V,\tfrac{1}{2}).$$

On a alors

$$(1.2.4)\quad \varepsilon(V,s)=W(V)\,f^{\frac{1}{2}-s},$$

$$(1.2.5)\quad W(V)\cdot W(V^*)=1.$$

Si V est isomorphe à sa duale, i.e. si son caractère est réel, (1.2.5) montre que $W(V)=\pm 1$.

Le groupe $R(G,\mathbf{R})$ des représentations réelles virtuelles de G, groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations réelles de G, est un sous-groupe du groupe des représentations virtuelles de G de caractère réel. Les éléments de ce sous-groupe sont dits *réalisables* sur $\mathbf{R}$. Nous nous proposons de calculer $W(V_v)$ lorsque V_v est de dimension 0, de déterminant 1 et réalisable sur $\mathbf{R}$.

(1.3) Soit G un groupe fini. On sait qu'une représentation réelle $\rho: G \to GL(V)$ a une classe de Stiefel-Withney

$$w^*(V) = 1 + w^1(V) + \cdots \in H^*(G, \mathbf{Z}/2) = \prod_i H^i(G, \mathbf{Z}/2).$$

On peut la définir comme suit: la représentation V définit un fibré vectoriel (même un système local) $\mathscr{V}$ sur l'espace classifiant BG du groupe G, et $w^*(V)$ est la classe de Stiefel-Withney de $\mathscr{V}$ dans $H^*(BG, \mathbf{Z}/2) = H^*(G, \mathbf{Z}/2)$. La même construction s'applique aux représentations réelles virtuelles: w^* est l'homomorphisme composé

$$R(G, \mathbf{R}) \to KO(BG) \xrightarrow{w^*} H^*(BG, \mathbf{Z}/2)^\times = H^*(G, \mathbf{Z}/2)^\times.$$

Via l'isomorphisme $H^1(G, \mathbf{Z}/2) = \mathrm{Hom}(G, \{\pm 1\})$, $w^1(V)$ s'identifie au caractère $g \mapsto \det \rho(g)$. Le groupe $H^2(G, \mathbf{Z}/2)$ classifie les extensions centrales de G par le groupe à deux éléments. Si $w^1(V) = 0$, $w^2(V)$ est la classe de l'extension image réciproque par ρ du revêtement double $\mathrm{Spin}(V, Q)$ de $SO(V, Q)$, pour Q une forme quadratique G-invariante définie positive quelconque sur V.

(1.4) Reprenons les notations de 1.2 et soit $\mathrm{cl}(w^2(V))$ l'image de la classe $w^2(V) \in H^2(G, \mathbf{Z}/2)$ par l'application composée

$$(1.4.1) \quad H^2(G, \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\text{infl}} H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{(1)} H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \bar{K}^*) \xrightarrow{\text{inv}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

où (1) se déduit de $n \mapsto (-1)^n$: $\mathbf{Z}/2 \to \bar{K}^*$, et où inv est donné par la théorie du corps de classe local. Pour K complexe ou de caractéristique 2, $\mathrm{cl}\, w^2(V) = 0$. Dans les autres cas, (1.4.1) identifie $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$ à $\{0, \frac{1}{2}\} \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Notre résultat principal est le suivant:

(1.5) **Théorème.** *Si V est une représentation réelle virtuelle de dimension* 0 *et de déterminant* 1, *on a* $W(V) = \exp(2\pi i\, \mathrm{cl}(w^2(V)))$.

En caractéristique 2, $W(V)$ vaut donc 1. En caractéristique $\neq 2$, $W(V) = 1$ ou -1 selon que $w^2(V)$ est ou n'est pas trivial dans $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$.

(1.6) De ce théorème, on peut déduire celui de Queyrut et Fröhlich:

(a) Pour V une représentation réelle virtuelle de dimension 0 et de déterminant 1 d'un corps global K de caractéristique $\neq 2$, les $\mathrm{cl}(w^2(V_v))$ sont les invariants locaux de $w^2(V) \in H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$, et la loi de réciprocité assure que leur somme dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est nulle, donc le produit des $W(V_v)$ égal à un. En égale caractéristique 2, les $W(V_v)$ sont tous 1.

(b) Pour V de dimension un, définie par un caractère d'ordre deux (resp. triviale), la fonction L correspondante est quotient de deux fonctions ζ (resp. une fonction ζ), et on utilise le fait que, pour une fonction ζ, la constante globale est $+1$.

(c) On conclut en notant que toute représentation réelle virtuelle est somme de représentations des types (a) et (b).

(1.7) Nous prouverons aussi les variantes de ces résultats obtenues en remplaçant les groupes de Galois par des groupes de Weil (§ 5).

2. Lemmes sur les représentations réelles des groupes finis

(2.1) **Proposition.** *Soient G un groupe fini, H un sous-groupe, V une représentation réelle virtuelle de H et* Tr: $H^2(H, \mathbf{Z}/2) \to H^2(G, \mathbf{Z}/2)$ *le morphisme trace (corestriction). Si V est de dimension divisible par* 4 *et de déterminant* 1 ($w^1(V)=0$), *on a* $w^1(\mathrm{Ind}_H^G(V))=0$ *et* $w^2(\mathrm{Ind}_H^G(V))=\mathrm{Tr}\, w^2(V)$.

Traduisons cet énoncé en termes topologiques. Soient B_G un espace classifiant de G, E_G le revêtement universel de B_G (le G-espace principal homogène universel) et posons $B_H = E_G/H$. C'est un espace classifiant pour H. On note f la projection $f: B_H \to B_G$. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} R(H,\mathbf{R}) & \longrightarrow & KO(B_H) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ R(G,\mathbf{R}) & \longrightarrow & KO(B_G) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H^*(BH,\mathbf{Z}/2) & = & H^*(H,\mathbf{Z}/2) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{tr}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H^*(BG,\mathbf{Z}/2) & = & H^*(G,\mathbf{Z}/2) \end{array}$$

sont commutatifs (la définition des morphismes f_* est rappelée ci-dessous), de sorte que 2.1 résulte de la

(2.2) **Proposition.** *Soit $f: X \to Y$ un revêtement fini d'espaces topologiques. Pour $v \in KO(X)$, de dimension divisible par* 4, *et de première classe de Stiefel-Whitney nulle, on a $w^1(f_* v)=0$ et*

$$w^2(f_* v) = f_*(w^2(v)).$$

Rappelons la définition des morphismes f_*.

(a) *En K-théorie:* f_* se déduit de l'opération qui à un fibré vectoriel $\mathscr{V}$ sur X associe le fibré vectoriel $f_*\mathscr{V}$ sur Y dont la fibre en $y \in Y$ est la somme directe $\bigoplus_{f(x)=y} \mathscr{V}_x$.

(b) *En cohomologie.* f_* est le composé de l'isomorphisme $H^*(X, \mathbf{Z}/2) = H^*(Y, f_* \mathbf{Z}/2)$ et du morphisme déduit par fonctorialité du morphisme trace: $\mathrm{Tr}_f: f_* \mathbf{Z}/2_X \to \mathbf{Z}/2_Y$: «somme des valeurs sur les feuillets».

On se ramène à supposer que f a un nombre constant k de feuillets et que v est défini par un fibré vectoriel orthogonal $\mathscr{V}$ de dimension constante n. Soit P' le $O(n)$-torseur correspondant et $[P']$ sa classe dans $H^1(X, O(n))$. Les descriptions 1.3 de w^1 et w^2 ont l'analogue suivant.

(a) $w^1 \in H^1(X, \mathbf{Z}/2)$ est l'image de $[P']$ par

$$\det: H^1(X, O(n)) \to H^1(X, \{\pm 1\}) = H^1(X, \mathbf{Z}/2).$$

Si $w^1 = 0$, P' se relève en un $SO(n)$-torseur P, de classe $[P]$.

(b) La suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/2 \to \mathrm{Spin}(n) \to SO(n) \to 0$$

induit $\partial\colon H^1(X, SO(n)) \to H^2(X, \mathbf{Z}/2)$ et, si $w^1=0$, $w^2=\partial[P]$.

La construction $\mathscr{V} \mapsto f_* \mathscr{V}$ permet d'associer à un $O(n)$-torseur sur X un $O(n\,k)$-torseur sur Y. Elle se factorise ainsi; les isomorphismes locaux du fibré vectoriel orthogonal constant $(\mathbf{R}^n)^k$ avec $f_* \mathscr{V}$, qui en chaque point y transforment chacun des k facteurs de $(\mathbf{R}^n)^k$ en l'un des facteurs de la décomposition $(f_* \mathscr{V})_y = \bigoplus_{f(x)=y} \mathscr{V}_x$, s'identifient aux sections locales d'un torseur sous le produit semi-direct $O(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k$ de $O(n)^k$ par le groupe symétrique sur k lettres. Le $O(n\,k)$-torseur cherché se déduit de ce dernier et du morphisme $O(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k \hookrightarrow O(n\,k)$.

Si $w^1(\mathscr{V})=0$, le groupe structural de $f_* \mathscr{V}$ peut être réduit à $SO(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k$. Si n est pair, ce groupe est contenu dans $SO(n\,k)$, et $w^1(f_* \mathscr{V})=0$.

Supposons le groupe structural de $\mathscr{V}$ réduit à $SO(n)$, d'où un $SO(n)$-torseur P et un $SO(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k$-torseur Q sur Y, de classe $[Q]$. Considérons la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{Z}/2)^k \to \mathrm{Spin}(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k \to SO(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k \to 0.$$

Le quotient $SO(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k$ agit sur $(\mathbf{Z}/2)^k$ via $\mathfrak{S}_k$, et le système local $((\mathbf{Z}/2)^k)^Q$ sur Y s'identifie à $f_* \mathbf{Z}/2$. Via l'isomorphisme $H^*(X, \mathbf{Z}/2) \cong H^*(Y, f_* \mathbf{Z}/2)$, la classe $w^2(\mathscr{V}) = \partial[P]$ s'identifie à $\partial[Q] \in H^2(Y, ((\mathbf{Z}/2)^k)^Q)$, ainsi que le montre un calcul de cocycles.

La proposition résulte alors de l'existence, pour n divisible par 4, d'une flèche médiane rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathbf{Z}/2)^k \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma"'] & \mathrm{Spin}(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k \arrow[r] \arrow[d] & SO(n)^k \ltimes \mathfrak{S}_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r] & \mathrm{Spin}(n\,k) \arrow[r] & SO(n\,k) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

où $\sum$ est l'homomorphisme somme des coordonnées.

Pour construire (2.2.1), il suffit de construire un relèvement

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_k \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & SO(n\,k) \\
& \mathrm{Spin}(n\,k). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

L'obstruction à le construire est définie pour n pair, et dans $H^2(\mathfrak{S}_k, \mathbf{Z}/2)$.

Elle est additive en n, car le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, "a+b"] & \mathrm{Spin}(n'\,k) \times \mathrm{Spin}(n''\,k) \arrow[r] \arrow[d] & SO(n'\,k) \times SO(n''\,k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r] & \mathrm{Spin}((n'+n'')\,k) \arrow[r] & SO((n'+n'')\,k) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Elle est donc nulle pour n divisible par 4.

(2.3) **Lemma.** *Les représentations réelles virtuelles de dimension* 0 *et de déterminant* 1 *d'un groupe fini G forment un idéal de $R(G, \mathbf{R})$. Cet idéal est stable par inflation, restriction et induction.*

Qu'elles forment un idéal résulte de ce que dim: $R(G, \mathbf{R}) \to \mathbf{Z}$ est un homomorphisme, que $\det(V+W) = \det(V) \cdot \det(W)$ et que

$$\det(V \otimes W) = \det(V)^{\dim(W)} \cdot \det(W)^{\dim(V)}.$$

La stabilité par inflation et restriction est triviale, tandis que la stabilité par induction résulte de 2.2 (1e assertion).

Une lemme analogue vaut pour les représentations complexes. Il se prouve de même ([1] 1.2).

(2.4) Soient D_n le groupe diédral produit semi-direct de $\mathbf{Z}/2$ par $\mathbf{Z}/n$ et $\chi: \mathbf{Z}/n \to \mathbf{C}^*$ un caractère. La représentation $\mathrm{Ind}(\chi)$ est réalisable sur $\mathbf{R}$: elle se réalise dans l'espace vectoriel réel $\mathbf{C}$, sur lequel $\mathbf{Z}/n$ agit par χ et $\mathbf{Z}/2$ par conjugaison complexe. Son déterminant est indépendant de χ. La représentation virtuelle

$$r(\chi) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{Z}/n}^{D_n}([\chi] - [1])$$

est donc réalisable sur $\mathbf{R}$, de dimension 0 et de déterminant trivial.

(2.5) **Proposition.** *Soit G un groupe fini. Toute représentation réelle virtuelle de dimension* 0 *et de déterminant trivial de G est somme*

(a) *de la réellifiée d'une représentation complexe virtuelle de dimension* 0, *et*

(b) *d'une combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire de représentations induites de représentations $r(\chi)$ de quotients diédraux de sous-groupes de G.*

Rappelons que la «réellifiée» d'une représentation complexe V d'un groupe G est la représentation de G sur le même espace V, vu comme espace vectoriel réel par restriction des scalaires de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$.

(2.6) **Lemme.** *Soit G un groupe fini ayant un sous-groupe nilpotent G' d'indice* 1 *ou* 2. *Toute représentation réelle virtuelle de G est somme*

(a) *de la réellifieé d'une représentation complexe virtuelle de G,*

(b) *d'une combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire de représentations induites de représentations $r(\chi)$,*

(c) *d'une combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire de représentations réelles de dimension un.*

Déduisons la proposition du lemme.

Le théorème d'induction de Brauer (tel que généralisé par Witt, J. Crelle, **190** (1952); voir par exemple Curtis-Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Intersc. Publ., N.Y. 1962) assure que la représentation 1 de G est combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire $\sum n_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\rho_i)$ de représentations induites de représentations réelles de sous-groupes H_i de G, chacun produit semi-direct d'un p-groupe P par un groupe cyclique C, P n'agissant sur C que par ± 1. Le lemme 2.3, et l'identité

$$V = V \otimes 1 = V \otimes \sum n_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\rho_i) = \sum n_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(V \otimes \rho_i)$$

nous ramènent au cas où G lui-même est un tel produit semi-direct, donc du type considéré en 2.6. Pour V virtuelle de dimension 0 et de déterminant 1, considérons la décomposition 2.6

$$V = A + B + C = (A - \dim A \cdot 1) + B + (C + \dim A \cdot 1).$$

La représentation $(A - \dim A \cdot 1)$ est du type (a) de la proposition et B du type (b). Puisque V, $(A - \dim A \cdot 1)$ et B sont de dimension 0 et déterminant 1, $(C + \dim A \cdot 1)$ a les mêmes propriétés; ceci nous ramène à prouver la proposition pour $(C + \dim A \cdot 1)$, donc pour une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de représentations réelles de dimension 1. Soit donc V du type

$$V = \sum_1^k [\varepsilon_i] - \sum_1^l [\eta_i]$$

avec ε_i et η_i des caractères d'ordre divisant 2, $k = l$ (dimension 0) et $\prod \varepsilon_i = \prod \eta_i$ (déterminant 1).

On a

$$\begin{aligned}\sum_1^k [\varepsilon_i] &= k \cdot 1 + \sum_1^k ([\varepsilon_i] - 1)\\ &= k \cdot 1 - \sum_1^k ([\varepsilon_i] - 1) \otimes ([\prod_{j<i} \varepsilon_j] - 1) + \sum_1^k ([\varepsilon_i] - 1) \otimes [\prod_{j<i} \varepsilon_j]\\ &= k \cdot 1 + ([\prod \varepsilon_i] - 1) - \sum_1^k ([\varepsilon_i] - 1)([\prod_{j<i} \varepsilon_j] - 1).\end{aligned}$$

On en déduit pour V une expression du type

$$V = \sum \pm ([\alpha_i \beta_i] - [\alpha_i] - [\beta_i] + 1),$$

où les α_i et β_i sont d'ordre divisant 2. Les termes de cette somme sont nuls si $\alpha_i = 1$ ou $\beta_i = 1$, du type (a) si $\alpha_i = \beta_i$, et du type (b) pour un groupe diédral $D_4 = (\mathbf{Z}/2)^2$ sinon.

(2.7) **Lemme.** *Le lemme* 2.6 *est vrai pour une représentation de dimension* 2.

Une telle représentation est en effet soit

(a) réellifieé d'une représentation complexe de dimension un

(b) diédrale, donc somme d'une représentation virtuelle $r(\chi)$ et de $[\varepsilon] + 1$, pour ε un caractère d'ordre deux.

(2.8) **Lemme.** *Le lemme* 2.6 *est vrai pour une représentation de G induite d'une représentation réelle de dimension un d'un sous-groupe de G.*

On procède par récurrence sur l'indice du sous-groupe H.

Soit $H' = G' \cap H$. Si H est d'indice $\leqq 2$, on applique le lemme 2.7. Sinon, il existe un sous-groupe J de G', appartenant à la série centrale ascendante, tel que $K = H'J/H'$ soit abélien non trivial. Soient l un nombre premier divisant l'ordre de K et K_l le noyau de la multiplication par l. Le groupe H/H' agit sur K et K_l.

Puisque H/H' est d'ordre $\leqq 2$, toutes ses représentations irréductibles (sur $\mathbf{Q}$, ou mod l) sont de dimension un, et il existe dans le $\mathbf{F}_l$-espace vectoriel K_l une droite stable par H/H'. Soit I' son image réciproque dans $H'J$. Le groupe H normalise I', de sorte que $I=I'H$ est un sous-groupe. On a $I'=G'\cap I$, et $H'\subset I'\subset G'$, avec I'/H' cyclique d'ordre l.

Soit $\varepsilon\colon H\to\{\pm 1\}$ le caractère de la représentation considérée de H. La formule de transitivité $\operatorname{Ind}_H^G(\varepsilon)=\operatorname{Ind}_I^G\operatorname{Ind}_H^I(\varepsilon)$ et l'hypothèse de récurrence appliquée à I nous ramènent à voir que la représentation $\operatorname{Ind}_H^I(\varepsilon)$ de I vérifie le lemme 2.6. Si $l=2$, cette représentation est de dimension deux et on applique le lemme 2.7. Si $l\neq 2$, la nilpotence de G' assure que I' normalise $\varepsilon|H'$: sinon, G' aurait un sous-quotient extension non centrale d'un groupe d'ordre l par un groupe de type $(2,\dots,2)$, et un tel groupe n'est pas nilpotent.

Calculons la restriction de $\operatorname{Ind}_H^I(\varepsilon)$ à I'. C'est $\operatorname{Ind}_{H'}^{I'}(\varepsilon)$, déduit de $\operatorname{Ind}_{H'/\mathrm{Ker}(\varepsilon)}^{I'/\mathrm{Ker}(\varepsilon)}(\varepsilon)$ par inflation. Le groupe $I'/\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est produit d'un groupe cyclique d'ordre l par $H'/\mathrm{Ker}(\varepsilon)$, d'ordre $\leqq 2$. La représentation de I', en tant que représentation complexe, est donc somme de caractères complexes distincts, et I/I' agit sur l'ensemble de ces caractères par l'identité, ou par $\chi\mapsto\chi^{-1}$ (selon son action sur I'/H'). Groupant ensemble χ et χ^{-1}, on trouve que la représentation $\operatorname{Ind}_H^I(\varepsilon)$ de I est somme de représentations (réelles) de dimension $\leqq 2$, et on applique le lemme 2.7.

(2.9) Prouvons le lemme 2.6. On procède par récurrence sur l'ordre de G.

On peut supposer, et on suppose, que

(1) V est une représentation irréductible (sur $\mathbf{R}$);

(2) V est même absolument irréductible (sans quoi V est de type (a));

(3) V est fidèle (sans quoi on applique l'hypothèse de récurrence à un quotient de G);

(4) V n'est pas induite par une représentation réelle d'un sous-groupe propre de G (sans quoi on applique l'hypothèse de récurrence à ce sous-groupe, et le lemme 2.8);

(5) G n'a pas de sous-groupe abélien d'indice $\leqq 2$ (sans quoi, par (2), on a $\dim(V)\leqq 2$ et on applique le lemme 2.7).

Soit B un sous-groupe abélien normal de G contenu dans G' et maximal pour ces propriétés. Si le caractère complexe χ de B figure dans la restriction de V à B, on sait que V est induite d'une représentation réelle du sous-groupe H de G qui stabilise $\{\chi,\bar\chi\}$. Par (1) et (4), $H=G$, et seuls χ et $\bar\chi$ figurant dans $V|B$. Soit G'' le stabilisateur de χ. On a $B\subset G'\cap G''$, et B est central dans G''.

Cas 1. $B\neq G'\cap G''$. Par (3), B est central dans le groupe nilpotent $G'\cap G''$. Le groupe $G/G'\cap G''$ est du type $(\mathbf{Z}/2)^r$ (avec $r=0,1$ ou 2); toutes ses représentations irreductibles (sur $\mathbf{Q}$, ou mod l) sont de dimension un. L'argument du début de la preuve du lemme 2.8 s'applique donc encore, et montre l'existence d'un sous-groupe B' de $G'\cap G''$, normal dans G, avec B'/B cyclique. Ce groupe B' est abélien, et ceci contredit la maximalité de B.

Cas 2. $B=G'\cap G''$. Alors, B est d'indice $\leqq 2$ dans G'', qui est donc abélien. Ceci contredit (5).

3. Preuve de 1.5

(3.1) Reprenons les notations de 1.2 et 1.4. Pour V de dimension 0 et de déterminant 1, le nombre $W(V)=\operatorname{sgn}(\varepsilon(V))$ est invariant par induction, et multiplicatif en V. D'après 2.1 et la théorie du corps de classe local (savoir, la formule $\operatorname{inv}\operatorname{Tr}=\operatorname{inv}$), cl $w^2(V)$ est de même invariant par induction et additif en V. La proposition 2.5 nous ramène donc à prouver le théorème dans les deux cas suivants.

Cas 1. V est la réellifiée d'une représentation complexe virtuelle W de dimension zéro.

Soit $\chi\colon K^*\to\mathbf{C}^*$ le déterminant de W. Quel que soit ψ, on a $\varepsilon(V)=\varepsilon(W,\psi)\cdot\varepsilon(\overline{W},\psi)$; et $\varepsilon(\overline{W},\psi)=\chi(-1)\cdot\varepsilon(\overline{W},\psi(-x))=\chi(-1)\,\overline{\varepsilon(W,\psi)}$ (1.2.2), d'où $W(V)=\chi(-1)$.

En particulier, $W(V)=1$ pour K de caractéristique deux, comme il se doit. Supposons maintenant K de caractéristique $\neq 2$. La classe $w^2(V)$ est la réduction mod 2 de la première classe de Chern $c^1(W)$. La classe $c^1(W)\in H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K),\mathbf{Z})$ est (au signe près) l'image de $\chi\in H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K),\mathbf{C}^*)$ par le morphisme ∂ de la suite exacte longue déduite de la suite exacte exponentielle

$$0\to\mathbf{Z}\xrightarrow{2\pi i}\mathbf{C}\xrightarrow{\exp}\mathbf{C}^*\to 0.$$

La classe $w^2(V)$ se déduit donc de même de χ et de la suite

$$0\to\mathbf{Z}/2\to\mathbf{C}^*\xrightarrow{z^2}\mathbf{C}^*\to 0.$$

Elle est nulle si et seulement χ a une racine carrée, i.e. puisque -1 est l'unique élément d'ordre 2 de $\hat{K}^*=\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)^{ab}$, si et seulement si $\chi(-1)=1$. Ceci vérifie le théorème.

Cas 2. V se déduit par inflation d'une représentation $r(\chi)$ d'un quotient diédral de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$.

Pour K archimédien, on a nécessairement $V=0$. On peut donc supposer, et on suppose, K non archimédien.

Soit G un groupe fini extension de $\mathbf{Z}/2$ par $\mathbf{Z}/n$. Si $u\in G$ n'est pas dans le sous-groupe $\mathbf{Z}/n$, l'image de u par le transfert: $G^{ab}\to\mathbf{Z}/n$ est u^2. Le groupe G est donc diédral si et seulement si le transfert est trivial.

Rappelons aussi que pour L une extension de K, le transfert $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)^{ab}\to\operatorname{Gal}(\bar{K}/L)^{ab}$ correspond à l'inclusion $K^*\to L^*$. La situation du cas 2 peut dès lors se décrire ainsi: on part d'une extension quadratique séparable L/K, et d'un caractère $\chi\colon L^*\to\mathbf{C}^*$ trivial sur K^*. La représentation $\operatorname{Ind}\chi$ de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ est alors réalisable sur $\mathbf{R}$, diédrale, et $V=\operatorname{Ind}([\chi]-1)$.

(3.2) **Théorème** (Fröhlich et Queyrut [2]). *Pour V comme ci-dessus, et Δ un élément non nul de L tel que $\operatorname{Tr}_{L/K}(\Delta)=0$ (Δ est bien défini à multiplication près par un élément de K^*), on a*

$$W(V)=\chi(\Delta).$$

Soient ψ un caractère additif non trivial de K, $\psi_L=\psi\circ\operatorname{Tr}_{L/K}$ et dx une mesure Haar sur L. On a

$$\begin{aligned}\varepsilon(V,s)&=\varepsilon(\operatorname{Ind}([\chi]-1),\psi,s)=\varepsilon([\chi]-1,\psi_L,s)\\&=\varepsilon(\chi,\psi_L,dx,s)\cdot\varepsilon(1,\psi_L,dx,s)^{-1}.\end{aligned}$$

Définissons la transformation de Fourier sur les fonctions de Schwartz-Bruhat sur L par

$$\hat{f}(y) = \int f(x)\, \psi_L(x\,y)\, dx.$$

Les facteurs ε sont définis par l'équation fonctionnelle de Tate

$$\frac{\int \hat{f}(x)\, \|x\|^{1-s}\, \chi^{-1}(x)\, d^*x}{L(\chi^{-1}, 1-s)} = \varepsilon(\chi, \psi, dx, s) \frac{\int f(x)\, \|x\|^s\, \chi(x)\, d^*x}{L(\chi, s)} \tag{3.2.1}$$

(on prend la même mesure de Haar d^*x sur L^* dans les deux membres). Les deux membres de cette formule sont en général définis par prolongement analytique en s. Toutefois, si $f(0) = \hat{f}(0) = 0$, les intégrales se réduisent à une somme finie. Soit $x \mapsto \bar{x}$ le K-automorphisme non trivial de L. On a $\chi^{-1}(x) = \chi(\bar{x})$, de sorte que $L(\chi, s) = L(\chi^{-1}, s)$. Faisant $s = \frac{1}{2}$ dans (3.2.1), on trouve que, pour $f(0) = \hat{f}(0) = 0$,

$$\int \hat{f}(x)\, \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi^{-1}(x)\, d^*x = \varepsilon(\chi, \psi, dx, \tfrac{1}{2}) \int f(x)\, \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x)\, d^*x.$$

On a

$$\int f(x)\, \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x)\, d^*x = \int_{L^*/K^*} \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x) (d^*x/d^*a) \int_{K^*} f(a\,x)\, da$$

où da est une mesure de Haar sur K et où $d^*a = \dfrac{da}{\|a\|_K}$ (noter que $\|a\|_L = \|a\|_K^2$). De même,

$$\begin{aligned}\int \hat{f}(x)\, \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi^{-1}(x)\, d^*x &= \int_{L^*/K^*} \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi^{-1}(x) (d^*x/d^*a) \int_K \hat{f}(a\,x)\, da \\ &= \int_{L^*/K^*} \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x) (d^*x/d^*a) \int_K \hat{f}(a\,\bar{x})\, da.\end{aligned}$$

Pour c une constante dépendant de ψ, dx, da et de Δ, on a

$$\int_K \hat{f}(a\,\bar{x})\, da = c \int f(a\,x\,\Delta)\, da,$$

de sorte que, posant $c_1 = c \cdot \|\Delta\|^{-\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}\int \hat{f}(x)\, \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi^{-1}(a)\, d^*x &= \int_{L^*/K^*} \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x) (d^*x/d^*a)\, c \cdot \int_K f(a\,x\,\Delta)\, da \\ &= c \cdot \|\Delta\|^{-\frac{1}{2}}\, \chi(\Delta) \int_{L^*/K^*} \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x) (d^*x/d^*a) \int_K f(a\,x)\, da \\ &= c_1\, \chi(\Delta) \int f(x)\, \|x\|^{\frac{1}{2}}\, \chi(x)\, d^*x.\end{aligned}$$

Pour des choix convenables de f, on peut faire en sorte que les intégrales soient non nulles. Dès lors

$$\varepsilon(\chi, \psi, dx, \tfrac{1}{2}) = c_1\, \chi(\Delta)$$

et

$$W(V) = \varepsilon(V, \tfrac{1}{2}) = \chi(\Delta).$$

(3.3) Reprenons le cas 2 de la preuve du théorème. Pour K de caractéristique 2, on a $\Delta \in K^*$ et le théorème 3.2 montre que $W(V) = 1$, comme il se doit.

Supposons maintenant K de caractéristique $\neq 2$.

Le groupe $O(2)$ est produit semi-direct de $\{e, s\}$ (s une réflexion) par $SO(2)$. Soit $\tilde{O}(2)$ le produit semi-direct de $\{e, s\}$ par le revêtement double de $SO(2)$. Pour $\rho\colon G \to O(2)$ une représentation du groupe fini G, l'obstruction à relever ρ à $\tilde{O}(2)$ (la classe de l'extension centrale de G par $\mathbf{Z}/2$ image réciproque par ρ de $\tilde{O}(2)$) est de la forme $\alpha w_1^2 + w_2$, avec $\alpha = 0$ ou 1. En fait, $\alpha = 0$ comme on le voit en testant sur $G = \{e, s\}$.

Posons $w^1 = w^1(\operatorname{Ind}\chi) = w^1(\operatorname{Ind} 1)$ et $w^2 = w^2(\operatorname{Ind}\chi)$. On a

$$w^* \operatorname{Ind}([\chi] - 1) = (w^* \operatorname{Ind}(\chi))(w^* \operatorname{Ind} 1)^{-1}$$
$$= (1 + w^1 + w^2 + \cdots)(1 - w^1 + (w^1)^2 - \cdots) = 1 + w^2 + \cdots.$$

La classe $w^2 \operatorname{Ind}([\chi] - 1) \in H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$ est donc nulle si et seulement si la représentation

$$\operatorname{Ind}\chi\colon \operatorname{Gal}(\bar{K}/K) \to O(2)$$

se relève à $\tilde{O}(2)$. Ceci signifie que $\chi\colon L^* \to \mathbf{C}^*$ a une racine carrée triviale sur F^*, soit encore que $\chi(\Delta) = 1$, Δ étant l'unique élément d'ordre 2 de L^*/K^*. Ceci conclut la preuve du théorème.

4. Groupes de Weil et loi de réciprocité de Hasse

(4.1) Soient K un corps local et $\bar{K}$ une clôture séparable de K. Pour la définition du groupe de Weil (absolu) $W(\bar{K}/K)$, je renvoie à [1] 2.2. Pour K non archimédien, c'est un sous-groupe de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$, extension de $\mathbf{Z}$ par l'inertie. Sa cohomologie à valeur dans un module discret M est définie par

$$H^i(W(\bar{K}/K), M) = \varinjlim_{U} H^i(W(\bar{K}/K)/U, M^U)$$

(U sous-groupe ouvert du groupe d'inertie, distingué dans $W(\bar{K}/K)$). Pour K archimédien, $W(\bar{K}/K)$ est un groupe de Lie, extension de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ par $\bar{K}^*$; sa cohomologie est celle de l'espace classifiant $BW(\bar{K}/K)$.

Soient n un entier premier à l'exposant caractéristique de K et μ_n le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité de $\bar{K}$. C'est un $W(\bar{K}/K)$-module.

(4.2) **Construction.** *On construit un isomorphisme* inv: $H^2(W_{\bar{K}/K}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n$.

(4.2.1) **Lemme.** Pour K non archimédien, et M un $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$-module discret de torsion, on a $H^i(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), M) \xrightarrow{\sim} H^i(W(\bar{K}/K), M)$.

Soit I le groupe d'inertie. La flèche 4.2.1 est l'aboutissement d'un morphisme de suites spectrales

$$E_2^{pq} = H^p(\hat{\mathbf{Z}}, H^q(I, M)) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), M),$$

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbf{Z}, H^q(I, M)) \Rightarrow H^{p+q}(W(\bar{K}/K), M)$$

et on utilise que $\mathbf{Z}$ et $\hat{\mathbf{Z}}$ ont même cohomologie à valeur dans un module discret de torsion (sur lequel $\hat{\mathbf{Z}}$ agit continûment).

Pour K non archimédien, on a donc

$$H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n).$$

On utilise alors la suite exacte de Kummer $0 \to \mu_n \to \bar{K}^* \to \bar{K}^* \to 0$ et le théorème 90 pour identifier ce H^2 au noyau de la multiplication par n dans $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \bar{K}^*) = \mathrm{Br}(K) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Vu l'état de la littérature, ceci définit 4.2 au signe près. Le signe sera discuté en 4.7. Au § suivant, nous n'utiliserons de toute façon que le cas où $n=2$.

Pour K archimédien, soit $\mathbf{Z}(1) = 2\pi i \mathbf{Z} \subset \bar{K}$. Nous prouverons que $H^3(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1)) = 0$, et construirons un isomorphisme

(4.2.2) $\quad \mathrm{inv}\colon H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}.$

La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{Z}(1) \xrightarrow{n} \mathbf{Z}(1) \xrightarrow{\exp\left(\frac{x}{n}\right)} \mu_n \to 0$$

nous fournira l'isomorphisme cherché

$$\mathrm{inv}\colon H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/n \xrightarrow[x/n]{\sim} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n.$$

Pour K complexe, on a $\bar{K} = K$, et $H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1))$ classifie les extensions de K^* par $\mathbf{Z}(1)$, i.e. les homomorphismes de $\pi_1(\bar{K}^*)$ dans $\mathbf{Z}(1)$. C'est le groupe $\mathbf{Z}$, engendré par la classe de l'extension

(4.2.3) $\quad 0 \to \mathbf{Z}(1) \to \bar{K} \xrightarrow{\exp} \bar{K}^* \to 0.$

La cohomologie de $W(\bar{K}/K)$ est celle de l'espace projectif complexe infini: les H^i successifs, à valeurs dans $\mathbf{Z}(1)$, sont

$$\mathbf{Z}(1), 0, \mathbf{Z}, 0, \mathbf{Z}(1), \ldots .$$

Pour K réel, utilisons la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbf{Z}/2, H^q(\bar{K}^*, \mathbf{Z}(1))) \Rightarrow H^{p+q}(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1)).$$

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\
\mathbf{Z} & \mathbf{Z} & 0 & \mathbf{Z}/2 & 0 & \mathbf{Z}/2 \ \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\
\mathbf{Z}(1) & 0 & \mathbf{Z}/2 & 0 & \mathbf{Z}/2 & 0 \ \ldots \\
H^q(\bar{K}^*, \mathbf{Z}(1)) & H^0 H^q & H^1 H^q & H^2 H^q & H^3 H^q & H^4 H^q.
\end{array}$$

On a $E_2 = E_3$, car $E_2^{pq} = 0$ pour q pair.

(4.2.4) **Lemme.** *L'homomorphisme $H^2(W(\bar{K}/K) \to H^2(\bar{K}^*, \mathbf{Z}(1))$. n'est pas surjectif.*

Il faut voir que l'extension 4.2.3 n'est pas la restriction à $\bar{K}^*$ d'une extension E de $W(\bar{K}/K)$ par $\mathbf{Z}(1)$. Le groupe $W(\bar{K}/K)$ est engendré par $\bar{K}^*$ et F, avec les relations $F^2 = -1$, $F z F^{-1} = \bar{z}$. Si E existait, on pourrait relever F en $\tilde{F}$ dans E. On aurait $\tilde{F} z \tilde{F}^{-1} = \bar{z}$ $(z \in \bar{K})$, et $\tilde{F}^2 \equiv \pi i \pmod{\mathbf{Z}(1)}$. Dès lors, $\tilde{F}^2$ ne commuterait pas à F, ce qui est absurde.

Vu le lemme, $d_3\colon E^{0,2} \to E^{3,0}$ est non nul, et les premiers H^i sont

$H^0 = 0.$

$H^1 = \mathbf{Z}/2$ (égal à $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1))$).

$H^2 = \mathbf{Z}$, et $H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1)) \hookrightarrow H^2(\bar{K}^*, \mathbf{Z}(1))$ comme sous-groupe d'indice deux, l'inclusion s'identifiant à $n \mapsto 2n$.

$H^3 = 0$.

(4.3) *Remarque.* On peut montrer que la cohomologie est périodique de période 4. Nous n'utiliserons pas ce fait.

(4.4) *Remarque.* Pour K' une extension finie de K dans $\bar{K}$, et $\alpha \in H^2(W(\bar{K}/K'), \mu_n)$, on a $\operatorname{inv} \operatorname{Tr} \alpha = \operatorname{inv} \alpha$. Cela résulte de l'énoncé analogue pour $\operatorname{Br}(K)$ si K est non archimédien, et de la même formule pour $\alpha \in H^2(W(\bar{K}/K'), \mathbf{Z}(1))$ si K est archimédien. Celle-ci résulte des formule $\operatorname{tr} \operatorname{res} \beta = 2\beta$ et $\operatorname{inv} \operatorname{res} \beta = 2 \operatorname{inv} \beta$ pour $\beta \in H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}(1))$, K réel et K' complexe.

(4.5) *Exemple.* Soit $\chi\colon K^* \to \mathbf{C}^*$ un quasi-caractère. La classe $\partial\chi$ de l'extension de K^* par $\mathbf{Z}$ image réciproque par χ de l'extension

(4.5.1) $\quad 0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^* \to 0$

est un élément de $H^2(K^*, \mathbf{Z})$. Pour α une racine de l'unité dans K, d'ordre divisant n, son image par $\mathbf{Z} \to \mu_n\colon m \to \alpha^m$ induit

$$(\chi, \alpha) \in H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n).$$

(4.6) **Proposition.** *On a* $\exp(2\pi i \operatorname{inv}(\chi, \alpha)) = \chi(\alpha)$.

Le cas archimédien se vérifie par un calcul direct. Pour K non archimédien, les deux membres ne changent pas si on multiplie χ par un caractère non ramifié. Ceci permet de supposer χ d'ordre fini. Il se prolonge alors en

$$\chi\colon \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)^{ab} \to \mathbf{C}^*,$$

qui définit $[\chi] \in H^1(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{C}^*)$, dont l'image $\partial\chi \in H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z})$ par l'homomorphisme de connexion ∂ associé à (4.5.1) est la classe de l'extension de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ par $\mathbf{Z}$ image réciproque de (4.5.1) par χ. Son image par $\mathbf{Z} \to \mu_n$, $m \mapsto \alpha^m$, est le cup-produit $\partial\chi \cup \alpha \in H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), \mu_n)$. Sa restriction à $W(\bar{K}/K)$ est (χ, α) et $\operatorname{inv}(\chi, \alpha)$ est l'invariant du cup-produit $\partial\chi \cup \alpha \in H^2(\operatorname{Gal}(\bar{K}/K), \bar{K}^*)$. Cette fois, la formule

$$\operatorname{inv}(\partial\chi \cup \alpha) = \chi(\alpha)$$

vaut pour tout $\alpha \in K^*$: c'est la définition de l'isomorphisme de réciprocité.

(4.7) *Signes.* Puisque nous avons déja indiqué notre normalisation (= choix du signe) de l'isomorphisme de réciprocité, la validité de 4.6 fixe notre normalisation de inv pour K nonarchimédien.

(4.8) Soit K un corps global. Pour L une extension galoisienne finie de K, Weil a défini le groupe de Weil $W_{L/K}$, extension de $\operatorname{Gal}(L/K)$ par le groupe des classes d'idèles $C(L)$ de L. C'est une limite projective de groupes de Lie; sa cohomologie est par définition la limite inductive des cohomologies de leurs classifiants. Soit $\bar{K}$ une clôture séparable de K et M un $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$-module discret. Nous poserons

$$H^*(W(\bar{K}/K), M) = \varinjlim_{L \subset \bar{K}} H^*(W_{L/K}, M^{\operatorname{Gal}(\bar{K}/L)}).$$

Soit n premier à l'exposant caractéristique de K, et $\alpha \in H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n)$. La restriction de α à $H^2(\bar{K}_v/K_v), \mu_n)$ est nulle pour presque toutes les places v de K (car elle se factorise par un $H^2(\mathbf{Z}, \mu_n)=0$).

Les applications inv de 4.2 fournissent donc une application

$$\text{inv}: H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n) \to \bigoplus_v (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n$$

(4.9) **Théorème.** *La suite*

$$0 \to H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n) \xrightarrow{\text{inv}} \bigoplus_v (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n \xrightarrow{\Sigma} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n \to 0$$

est exacte.

Soit $\chi: C(K) \to \mathbf{C}^*$ un quasi-caractère. La classe $\partial\chi$ de l'extension de $C(K)$ par $\mathbf{Z}$ image réciproque par χ de l'extension

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^* \to 0$$

est un élément de $H^2(C(K), \mathbf{Z})$. Pour α une racine de l'unité dans K, d'ordre divisant n, son image par $\mathbf{Z} \to \mu_n$: $m \mapsto \alpha^m$ induit

$$(\chi, \alpha) \in H^2(C(K), \mu_n).$$

(4.9.1) **Lemme.** *On a* $\sum_v \text{inv}_v(\chi, \alpha) = 0$.

De par 4.5, c'est une traduction de $\prod \chi_v(\alpha_v) = 1$.

(4.9.2) **Lemme.** *Il existe* $c \in H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n)$, *d'invariants locaux donnés aux places à l'infini (voire en un ensemble fini quelconque de places), et vérifiant* $\sum_v \text{inv}_v(c) = 0$.

Si $\mu_n \subset K$, on peut prendre c du type (χ, α). Sinon, on considère une extension finie K'/K telle que K' contienne μ_n, et c du type $\text{Tr}_{K'/K}(\chi, \alpha)$; que la loi de réciprocité soit verifiée résulte de 4.4 et 4.9.1.

(4.9.3) **Lemme.** *Soit* $c \in H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n)$. *Si* $\text{inv}_v(c) = 0$ *pour v complexe, et est d'ordre divisant deux pour v réel, alors c provient de* $\tilde{c} \in H^2(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mu_n)$.

Pour K de caractéristique $\neq 0$, on passe d'un groupe de Weil à un groupe de Galois en remplaçant un quotient $\mathbf{Z}$ par $\hat{\mathbf{Z}}$, et il suffit de raisonner comme en 4.2.1. Supposons maintenant que K soit un corps de nombres. Il existe une extension galoisienne totalement imaginaire finie L de K, contenant μ_n si on le désire, telle que c soit défini par une extension de $W_{L/K}$ par μ_n. Il existe même un conducteur $\mathfrak{m}$ tel que c provienne d'une extension E', par μ_n, du quotient ${}_{\mathfrak{m}}W_{L/K}$ de $W_{L/K}$, extension de $\text{Gal}(L/K)$ par $C_{\mathfrak{m}}(L)$. La composante neutre de $C_{\mathfrak{m}}(L)$ est le quotient $L^*_{\mathbf{R}}/U_{\mathfrak{m}}$ de $(L \otimes \mathbf{R})^*$ par le groupe des unités congrues à 1 mod $\mathfrak{m}$. L'hypothèse assure que l'extension induite par E' de $L^*_{\mathbf{R}}$ par μ_n est triviale. L'extension de $L^*_{\mathbf{R}}/U_{\mathfrak{m}}$ par μ_n provient donc de ϕ: $U_{\mathfrak{m}} \to \mu_n$. D'après un théorème de Chevalley (*deux théorèmes d'arithmétique*, J. Math. Soc. Jap. **3** (1951) p. 36–44), $\text{Ker}(\phi)$ est un sous-groupe de congruence: pour un conducteur $\mathfrak{m}' \geqq \mathfrak{m}$ convenable, c est défini par une extension E de ${}_{\mathfrak{m}'}W_{L/K}$ par μ_n, triviale sur la composante connexe de ${}_{\mathfrak{m}'}W_{L/K}$. L'extension E provient donc du groupe de Galois $\pi_0({}_{\mathfrak{m}'}W_{L/K})$; ceci prouve 4.9.3.

Posons

$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{n,v}$ = le sous-groupe de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre n pour v non archimédien, $(n,2)$ pour v réel, 1 pour v complexe,

et

$$A = \Big(\bigoplus_v (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n\Big)\Big/\Big(\bigoplus_v (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{n,v}\Big).$$

On conclut la preuve de 4.9 en contemplant le diagramme suivant, où l'exactitude de la dernière ligne est la loi de réciprocité de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & A \arrow[r, equal] & A \arrow[u] & & \\
 & H^2(W(\bar{K}/K), \mu_n) \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{inv}"] & \bigoplus_v (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n \arrow[u] \arrow[r, "\Sigma"] & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mu_n) \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{inv}"] & \bigoplus_v (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{n,v} \arrow[u] \arrow[r, "\Sigma"] & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_n \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0. \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

5. Représentations orthogonales de groupes de Weil

(5.1) Plutôt que de considérer des représentations réelles de groupes de Galois, il est plus général et plus naturel de considérer des représentations complexes orthogonales de groupes de Weil.

Soient K un corps local, $\bar{K}$ une clôture séparable de K, V un espace vectoriel complexe muni d'une forme quadratique non dégénérée Q et ρ: $W(\bar{K}/K) \to O(V, Q)$ une représentation continue orthogonale de $W(\bar{K}/K)$. Les classes de Stiefel-Whitney $w^i \in H^i(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$ sont encore définies. L'espace des formes quadratiques non dégénérées sur V invariantes par $W(\bar{K}/K)$ étant connexe, elles ne dépendent que de la représentation linéaire sous-jacente à ρ. La classe de Stiefel-Whitney totale a les propriétés d'additivité suivantes:

(5.1.1) Si V est la somme directe orthogonale de sous-représentations V' et V'', alors $w^*(V) = w^*(V') \cdot w^*(V'')$.

(5.1.2) Si W est un sous-espace totalement isotrope invariant de V, alors

$$w^*(V) = w^*(W \oplus V/W^\perp) \cdot w^*(W^\perp/W).$$

La forme quadratique Q donnée sur V induit une dualité entre W et $V/W^\perp$ – d'où une forme quadratique sur $W \oplus V/W^\perp$ – tandis que $Q | W^\perp$ a pour noyau W – d'où une forme quadratique sur $W/W^\perp$. Ceci donne son sens à 5.1.2. Pour prouver la formule, il suffit de prouver l'énoncé analogue pour un fibré vectoriel complexe orthogonal $\mathscr{V}$ sur un espace topologique paracompact, et pour $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$

totalement isotrope. Ici, $\mathscr{V}$ est isomorphe à $(\mathscr{W} \oplus \mathscr{V}/\mathscr{W}^\perp) \oplus (\mathscr{W}^\perp/\mathscr{W})$, et on applique l'analogue de 5.1.1.

Soit $RO(W(\bar{K}/K), \mathbf{C})$ le groupe de Grothendieck des représentations complexes semi-simples orthogonales de $W(\bar{K}/K)$, pour la somme directe orthogonale. C'est un sous-groupe de $R(W(\bar{K}/K), \mathbf{C})$, groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations complexes semi-simples de $W(\bar{K}/K)$. La propriété (5.1.1) permet de définir la classe de Stiefel-Whitney totale d'un élément de $RO(W(\bar{K}/K), \mathbf{C})$ *(une représentation orthogonale virtuelle)*.

Si V est une représentation orthogonale de $W(\bar{K}/K)$, sa semi-simplifiée V' l'est encore, et on vérifie à l'aide de (5.1.2) que $w^*(V) = w^*(V')$. Ceci justifie la restriction ci-dessus aux représentations semi-simples.

La *classe* $\mathrm{cl}(x)$ de $x \in H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$ est 0 pour K de caractéristique 2, et l'invariant de son image dans $H^2(W(\bar{K}/K), \mu_2)$ sinon ($\mathbf{Z}/2$ et μ_2 étant canoniquement isomorphes). Pour K non complexe, on a $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\sim} H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2)$ et cette définition est compatible à 1.4. Pour K non de caractéristique 2, archimédien ou non, cl est un isomorphisme $\mathrm{cl}: H^2(W(\bar{K}/K), \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_2$.

Pour V une représentation virtuelle complexe de $W(\bar{K}/K)$, de dimension 0, déterminant 1 et isomorphe à sa duale, on définit comme en 1.2 un nombre $W(V) = \pm 1$. On a encore:

(5.2) **Proposition.** *Soit V une représentation orthogonale virtuelle de dimension* 0 *et déterminant* 1. *On a* $W(V) = \exp(2\pi i \,\mathrm{cl}(w^2(V)))$.

Pour V de la forme $W \oplus W^*$ (W représentation virtuelle de dimension 0 et déterminant χ) on procède comme en 3.1, cas 1, en utilisant les formules

$$w^2(V) = c^1(W) \bmod 2$$

et

$$\varepsilon(W, \psi) \cdot \varepsilon(W^*(1), \psi(-x)) = 1.$$

Ceci suffit à démontrer 5.2 pour K complexe. Pour K réel, il faut encore traiter le cas diédral d'une représentation $r(\chi)$, pour χ un caractère de $\bar{K}^*$ trivial sur K^*. Le théorème 3.2 reste valable, avec la même démonstration [cette fois, pour f et $\hat{f}$ C^∞ à décroissance rapide et ayant un zéro de grande multiplicité en 0, les intégrales convergent dans une large bande] et on reprend la preuve 3.3.

Pour K non archimédien, on vérifie à l'aide de ([1] 4.10) que toute représentation orthogonale semi-simple V de $W(\bar{K}/K)$ est somme d'une représentation de la forme $W \oplus W^*$, et d'une représentation qui se factorise par un quotient fini de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Pour V virtuelle de dimension 0, on en déduit une décomposition similaire avec W de dimension 0, et la proposition résulte donc du théorème 1.5.

(5.3) **Corollaire.** *Soient K un corps global, L une extension finie de K, et V une représentation orthogonale du groupe de Weil $W_{L/K}$. La constante $W(V)$ de l'équation fonctionnelle de la fonction L correspondante, définie comme en* (1.1.2) *vaut* $+1$.

On procède comme en 1.6, utilisant cette fois 5.2 et la loi de réciprocité 4.9 (pour $n = 2$).

(5.4) *Variante l-adique.* Soit K un corps local *non archimédien* et V une représentation complexe virtuelle de $W(\bar{K}/K)$, de dimension 0, de déterminant trivial, et isomorphe à sa duale. La définition de $\varepsilon(V)=\varepsilon(V,0)$ est purement algébrique, i.e. indépendante de la topologie de $\mathbf{C}$. Si le conducteur de V n'est pas un carré, il n'en pas de même pour $W(V)=\varepsilon(V)\cdot f^{-\frac{1}{2}}$. Toutefois, si V est orthogonale, Serre a prouvé [3] que l'exposant du conducteur est pair; dans ce cas, $W(V)$ a donc un sens purement algébrique. Il en va de même pour $w^2(V)$. Par transport de structure, on en déduit que la formule (à laquelle on vient de donner un sens)

$$\text{(2.3.1)} \quad W(V)=(-1)^{2\,\mathrm{cl}(w^2(V))}$$

vaut pour V une représentation orthogonale virtuelle de $W(\bar{K}/K)$, de dimension 0 et de déterminant trivial, sur un corps algébriquement clos quelconque k de caractéristique 0. L'hypothèse «algébriquement clos» n'est pas nécessaire, comme on le voit en remplaçant k par sa clôture algébrique.

(5.5) Soit (V,ρ) une représentation l-adique continue de $W(\bar{K}/K)$, et fixons ψ et dx. Suivant [1] 8.4.2 on lui associe une «représentation» (ρ', N') de $'W(\bar{K}/K)$, consistant en

(a) une représentation ρ' de $W(\bar{K}/K)$ sur V, continue pour la topologie discrète de V;

(b) un endomorphisme nilpotent N de V, tel que

$$\rho'(w)\,N\,\rho'(w)^{-1}=q^{v'(w)}\,N.$$

Si ρ respecte une forme quadratique Q, ρ' aussi, et $N\in\mathrm{Lie}(O(Q))$.

La constante $\varepsilon(V,\psi,dx,t)$ (où t est moralement q^{-s}), définie par [1] 8.12 est le produit de $\varepsilon(\rho',\psi,dx,t)$ par

$$\det(-F\,t,\, V^{\rho'(I)}/\mathrm{Ker}(N)^{\rho'(I)}).$$

Ce monôme ne dépend que de $V^{\rho'(I)}$, sur lequel agissent F et N (avec $FNF^{-1}=q^{-1}N$). Le lemme ci-dessous montre que si V est orthogonale, il est de degré pair, et vaut 1 en $t=q^{-\frac{1}{2}}$.

Pour V une représentation l-adique orthogonale virtuelle de degré 0 et de déterminant un, le conducteur de V est donc encore d'exposant pair, et on peut définir $W(V)$ comme précédemment. De plus $W(V)=W(V^{ss})$, où V^{ss} est la semi-simplifiée de V. On peut utiliser ce résultat pour calculer le second membre de (1.2.1), pour V une représentation l-adique orthogonale du groupe de Weil d'un corps global; la méthode de [2] § 9 permet de calculer le premier membre, et on trouve que l'identité (1.2.1) est encore vraie dans ce cas.

(5.6) **Lemme.** *Soient k un corps, $q\in k^*$, V un espace vectoriel sur k, Q une forme quadratique non dégénérée sur V, $F\in O(V,Q)$ et $N\in\mathrm{Lie}(O(Q))$. On suppose que $FNF^{-1}=q^{-1}N$. Alors,* $\dim(V/\mathrm{Ker}\,N)$ *est un entier pair $2m$, et*

$$\det(-F\,t,\, V/\mathrm{Ker}\,N)=q^m\,t^{2m}.$$

Soit B la forme bilinéaire associée à Q. Par hypothèse, la forme $\langle x,y\rangle=B(Nx,y)$ est alternée, et $\langle Fx,Fy\rangle=q\langle x,y\rangle$. Le noyau de la forme $\langle x,y\rangle$ est $\mathrm{Ker}\,N$ et F induit une similitude symplectique de multiplicateur q de $V/\mathrm{Ker}\,N$. Le lemme en résulte.

Bibliographie

1. Deligne, P.: Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions *L*. In: Modular functions of one variable II, Lecture Notes in Mathematics 349, pp. 501–597, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
2. Fröhlich, A., Queyrut, J.: On the functional equation of the Artin *L*-function for characters of real representations. Inventiones math. **20**, 125–138 (1973)
3. Serre, J-P.: Conducteurs d'Artin des caractères réels. Inventiones math. **14**, 173–183 (1971)

Reçu le 20 septembre 1975

Pierre Deligne
I.H.E.S.
35, Route de Chartres
F-91440 Bures-sur-Yvette/France