Invent. math. 76, 129–143 (1983)

Inventiones mathematicae

Intégration sur un cycle évanescent

P. Deligne

Institut des Hautes Etudes Scientifiques 35, route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Introduction

Soient k un corps commutatif et f une série formelle en deux indéterminées x et y sur k:

$$f=\sum a_{n,m} x^n y^m.$$

Soit $I(f)$ la série formelle en une indéterminée t

$$I(f)=\sum a_{n,n} t^n.$$

Nous nous proposons de prouver le résultat suivant:

Théorème. *Si f représente une fonction algébrique de x et y, et si k est de caractéristique $p \neq 0$, $I(f)$ représente une fonction algébrique de t.*

Pour g une série formelle en N indéterminées

$$g=\sum a_{\mathbf{n}} \mathbf{x}^{\mathbf{n}},$$

on définit de même

$$I_N(g)=\sum a_{n\cdot\mathbf{1}} t^n,$$

et on a encore:

Corollaire. *Si g est algébrique sur le corps $k(x_1, \ldots, x_N)$, et si k est de caractéristique $p>0$, $I_N(g)$ est algébrique sur $k(t)$.*

Sous l'hypothèse plus forte $g \in k(x_1, \ldots, x_N)$, ce résultat est dû à H. Furstenberg [1]. Voir aussi 3.10. Notre but premier était de donner une explication géométrique au résultat de Furstenberg.

Supposons tout d'abord que $k=\mathbf{C}$ et que la série formelle f soit convergente. La série $I(f)$ est alors convergente, et admet la représentation intégrale suivante

$$I(f)(t)=\frac{1}{2\pi i} \oint_{xy=t} f(x,y) \frac{dx \wedge dy}{dt}. \tag{1}$$

Expliquons le sens du membre de droite:

a) Soit π: $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ l'application $(x,y) \mapsto xy$. L'expression $(dx \wedge dy)/dt$ est une forme différentielle holomorphe relative sur $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$, relative à la projection π, i.e. une famille de formes différentielles holomorphes sur les fibres, dépendant holomorphiquement de t. En $\{(0,0)\}$, c'est encore une section du faisceau dualisant relatif ω, défini dans le formalisme de dualité de A. Grothendieck par $R\pi^! \mathcal{O} = \omega$ [1]. En terme de la coordonnée y sur $\pi^{-1}(t)$, on a $(dx \wedge dy)/dt = (d(t/y) \wedge dy)/dt = \left(\frac{dt}{y} \wedge dy\right) \Big/ dt = \frac{dy}{y}$.

b) Supposons f convergente dans le polydisque B de rayons R. Pour $|t|$ assez petit ($|t| < R^2$), l'intersection de B et de $\pi^{-1}(t)$ se projette isomorphiquement dans le plan des y sur la couronne $\frac{|t|}{R} < |y| < R$. Soit r tel que $\frac{|t|}{R} < r < R$. L'intégrale $\oint\limits_{xy=t}$ est prise sur le cycle $|y| = r$, $|x| = |t|/r$, $xy = t$, qui se projette isomorphiquement sur la circonférence $|y| = r$, orientée positivement; elle ne dépend pas du choix de r.

Ces explications montrent que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{xy=t} f(x,y) \frac{dx \wedge dy}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(t/y, y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum a_{n,m} t^n y^{m-n} \frac{dy}{y}.$$

Pour en déduire (1), on échange sommation et intégration, et on applique la formule des résidus: seuls subsistent les termes où $m = n$.

Le cycle d'intégration est le cycle évanescent (au sens de Lefschetz) pour π, près de $(0,0)$. Si on prend $r = |t|^{1/2}$, on le voit effectivement disparaître pour $|t| \to 0$. Ceci explique le titre de l'article.

Dans la définition de $I(f)$, les indéterminées x et y jouent un rôle symétrique. Dans (1), un ordre entre x et y détermine deux choix de signes, qui s'annihilent: dans la forme différentielle relative, et dans l'orientation du cycle évanescent.

La formule (1) suggère que l'opération I a un sens intrinsèque dans le cadre suivant: on part d'un morphisme de schémas formels π: $X \to S$ sur k, avec X isomorphe à $\operatorname{Spf} k[[x,y]]$, S isomorphe à $\operatorname{Spf} k[[t]]$, et π ayant une singularité quadratique non-dégénérée. On suppose que les deux branches de $\pi^{-1}(0)$ sont définies sur k, et on choisit un ordre entre elles. En d'autres termes, on suppose qu'il existe des systèmes de coordonnées formelles x, y sur X et t sur S dans lesquelles π soit $(x,y) \mapsto xy$; on prendra toujours ces systèmes de coordonnées de telle sorte que la première branche de $\pi^{-1}(0)$: $xy = 0$ soit la branche $x = 0$. Soient $\Omega^1_{X/k}$ les différentielles de Kähler, définies en tenant compte de la topologie: si $X = \operatorname{Spf}(A)$, avec A isomorphe à $k[[x,y]]$ muni de la topologie (x,y)-adique, $\Omega^1_{X/k}$ correspond au A-module $\operatorname{lim\,proj} \Omega^1_{(A/J)/k}$ (limite projective sur les idéaux ouverts). De même pour S. En coordonnées, $\Omega^1_{X/k}$ est le $\mathcal{O}_X$-module libre de base dx, dy et $\Omega^1_{S/k}$ est le $\mathcal{O}_S$-module libre de base dt. Pour M un module libre de rang n, posons $\det M = \overset{n}{\Lambda} M$. Pour L libre de rang 1, notons L^{-1} son dual. Posons $\omega_{X/k} = \det \Omega^1_{X/k}$, $\omega_{S/k} = \Omega^1_{S/k}$ et soit $\omega_{X/S}$ le faisceau dualisant relatif

$$\omega_{X/S} = \pi^! \mathcal{O}_S[1] = \omega_{X/k} \otimes \pi^* \omega_{S/k}^{-1}.$$

En coordonnées, c'est le $\mathcal{O}_X$-module libre de base $dx \wedge dy/dt$. On interprétera I comme un morphisme

$$\pi_* \omega_{X/S} \to \mathcal{O}_S,$$

i.e., pour $S = \mathrm{Spf}(V)$, comme un morphisme V-linéaire

$$H^0(X, \omega_{X/S}) \to V.$$

Le paragraphe 1 fournit cette interprétation: on y prouve, pour k quelconque, une formule qui est un analogue algébrique de (1). Le signe d'intégration, qui apparaît dans (1), y est remplacé par le morphisme trace local de Grothendieck. Précisons. Soit t une uniformisante de S (par exemple t pour $S = \mathrm{Spf}(k[\![t]\!])$). Nous noterons par n en indice une réduction modulo t^n. On omettra l'indice quand il n'y a pas risque de confusion. Par exemple, on notera encore π: $X_n \to S_n$ le morphisme π_n déduit de π par réduction modulo t^n. On notera ω l'image inverse $(\omega_{X/S})_n$ de $\omega_{X/S}$ sur X_n. C'est le faisceau dualisant relatif ω_{X_n/S_n} de Grothendieck. Soit A_n l'anneau local complet dont X_n est le spectre formel (en coordonnées: $k[\![x, y]\!]/((xy)^n)$). Il nous sera commode de travailler non pas avec le schéma formel X_n, mais avec le schéma ordinaire $X'_n := \mathrm{Spec}\, A_n$. La différence est byzantine: tant X_n que X'_n sont une façon géométrique de parler de A_n. Soit O le point fermé de X'_n (en coordonnées: $x = y = 0$). Le morphisme trace local de Grothendieck est un morphisme

$$\mathrm{Tr}\colon\ H^1_{\{O\}}(X'_n, \omega) \to H^0(S_n, \mathcal{O}).$$

On a $H^1_{\{O\}}(X'_n, \omega) = \lim\mathrm{ind}\, \mathrm{Ext}^1_{A_n}(A_n/I, \omega)$, (limite inductive sur les idéaux ouverts I de A_n). C'est pour écrire cette limite inductive comme un groupe de cohomologie à support qu'il nous a fallu introduire X'_n.

Le rôle du cycle d'intégration (le cycle évanescent) sera joué par un élément $v_n \in H^1_{\{O\}}(X'_n, \mathcal{O})$. En coordonnées, cet élément est dans l'image de $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(A_n/(x+y)^{2n-1}, A_n)$. Prendre garde que l'exposant de $(x+y)$ requis croît avec n.

Au paragraphe 2, on considère un schéma en courbes Y propre et plat sur S, dont X se déduit par complétion en un point, et on relie les v_n à un élément de $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}_S Y$. Au paragraphe 3 on globalise X et S, et on prouve le théorème, et le corollaire.

Notations. On écrira en indice les changements de base. Par exemple, pour X et T des S-schémas, $X_T := X \times_S T$. La réduction modulo t^n est notée avec un indice n.

Pour notre propos, les conventions de signes utilisées sont sans importance. Pour que les résultats intermédiaires énoncés soient vrais – et pas seulement au signe près – il faut toutefois les choisir. Notre choix est explicité dans l'appendice.

1. Analogue algébrique de (1)

1.1. Gardons les notations de l'introduction, et soient x, y et t des coordonnées sur X et S, du type déjà considéré.

L'inclusion de X'_1 dans X'_n est un homéomorphisme, puisque X'_1 est défini dans X'_n par un idéal nilpotent. Le complément de l'origine $\{O\}$ dans X'_n a donc deux composantes connexes, correspondant aux deux branches $x=0$ et $y=0$ de X'_1. Soit u_n la section du faisceau structurel de $X_n-\{O\}$ qui vaut 1 sur la première branche et 0 sur la seconde. Dans le langage des anneaux: l'homomorphisme

$$A_n = k[\![x,y]\!]/((xy)^n) \to k[\![x,y]\!]/(x^n) \times k[\![x,y]\!]/(y^n)$$

induit un isomorphisme

$$A_n((x+y)^{-1}) \xrightarrow{\sim} (k[\![x]\!]/(x^n))((y)) \times (k[\![y]\!]/(y^n))((x)),$$

et $u_n \in A_n((x+y)^{-1})$ a pour image $(1,0)$. On peut expliciter:

$$u_n = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-i}{i} y^{2n-1-i} x^i\right] \Big/ (x+y)^{2n-1}. \tag{1.1.1}$$

On définit v_n comme étant l'image de u_n par le morphisme cobord naturel

$$H^0(X'_n-\{O\},\mathcal{O}) \to H^1_{\{O\}}(X'_n,\mathcal{O}).$$

La suite exacte longue des $\mathrm{Ext}^i(*,A_n)$, appliquée à la suite exacte courte

$$0 \to ((x+y)^N) \to A_n \to A_n/((x+y)^N) \to 0$$

donne lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & (x+y)^{-N} A_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{A_n}(A_n/((x+y)^N), A_n) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^0(X'_n,\mathcal{O}) \arrow[r] & H^0(X'_n-\{O\},\mathcal{O}) \arrow[r] & H^1_{\{O\}}(X'_n,\mathcal{O}).
\end{tikzcd}$$

Pour $N=2n-1$, ce diagramme et (1.1.1) montrent que v_n est dans l'image de $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(A_n/((x+y)^{2n-1}), A_n)$.

1.2. Proposition. *Soit f dans $k[\![x,y]\!]$. Quel que soit n, on a*

$$\mathrm{Tr}(f\,dx \wedge dy/dt \cdot v_n) \equiv -I(f) \pmod{t^n}. \tag{1.2.1}$$

Dans (1.2.1), Tr est le morphisme trace local de Grothendieck. Il est appliqué à l'élément de $H^1_{\{O\}}(X'_n,\omega)$ produit de $f\,dx \wedge dy/dt$ dans $H^0(X'_n,\omega)$ et de v_n dans $H^1_{\{O\}}(X'_n,\mathcal{O})$. Nous prouverons (1.2.1) sous l'hypothèse que k est infini. On se ramène à ce cas par une extension des scalaires.

Notons $I'(f)$ le membre de gauche de (1.2.1). On a $I'(f) \in k[\![t]\!]/(t^n)$. Si J est un idéal ouvert de A_n, assez petit pour que v_n soit dans l'image de $\mathrm{Ext}^1(A_n/J, A_n)$ (par exemple $J=((x+y)^{2n-1})$) et que $f \in J$, on a $fv=0$ et *a fortiori* $I'(f)=0$: l'application $k[\![t]\!]/(t^n)$ linéaire I': $A_n \to k[\![t]\!]/(t^n)$: $f \mapsto I'(f)$ est continue.

Pour $\lambda, \mu \in k$, soit $\sigma(\lambda, \mu)$ l'automorphisme $(x,y) \mapsto (\lambda x, \mu y)$, $t \mapsto \lambda \mu t$ de (X, S, π). Il respecte $dx \wedge dy/dt$ et v_n. Par transport de structure, on a donc

$$I'(\sigma(\lambda,\mu)^* f) = \sigma(\lambda,\mu)^* f. \tag{1.2.2}$$

Posons $h_{n,m}(t) = I'(x^n y^m)$. Faisant dans (1.2.2) $\mu = \lambda^{-1}$, on trouve que $h_{n,m}(t) = \lambda^{n-m} h_{n,m}(t)$: on a $h_{n,m} = 0$ pour $n \neq m$. Par continuité et $k[\![t]\!]$-linéarité de I', on a alors pour $f = \sum a_{nm} x^n y^m$

$$I'(f) = I'(\sum a_{nm} x^n y^m) = I'(\sum a_{nn} x^n y^n) = I'(\pi^* I(f)) = I(f) \cdot I'(1).$$

Faisant dans (1.2.2) $\mu = 1$ et $f = 1$, on trouve $h_{00}(\lambda t) = h_{00}(t)$, de sorte que $I'(1) = h_{00}(t)$ est une constante c, et que $I'(f) = c I(f)$. Cette constante est indépendante de n. Pour prouver que $c = -1$, on peut donc supposer, et on supposera, que $n = 1$.

Le schéma $X'_1 = \operatorname{Spec} k[\![x,y]\!]/(xy)$ est la réunion de deux arcs de courbe formels non singuliers se coupant transversalement, paramétrés le premier par y, le second par x. Les sections de ω sur X'_1 sont les systèmes de formes différentielles α et β sur ces arcs, avec un pôle simple en O, et $\operatorname{Res} \alpha + \operatorname{Res} \beta = 0$. Les sections de ω sur $X'_1 - \{O\}$ sont les systèmes de formes α et β avec un pôle d'ordre quelconque en O, et le morphisme composé

$$H^0(X'_1 - \{O\}, \omega) \longrightarrow H^1_{\{O\}}(X'_1, \omega) \xrightarrow{tr} k$$

est l'opposé de $(\alpha, \beta) \mapsto \operatorname{Res} \alpha + \operatorname{Res} \beta$. Avec ces notations, $dx \wedge dy/dt$ correspond à $\left(\frac{dy}{y}, \frac{-dx}{x}\right)$, et $(dx \wedge dy/dt) u_1 = \left(\frac{dy}{y}, 0\right)$, de somme des résidus 1. Ceci prouve (1.2.1).

2. Relation avec Pic

2.1. Soient $S = \operatorname{Spec} k[\![t]\!]$, s le point fermé de S, η le point générique, $\pi \colon Y \to S$ un morphisme propre et plat purement de dimension relative 1 et O un point rationnel de $Y_s := \pi^{-1}(s)$. On suppose que si X est complété de Y en O, le morphisme induit par π de X vers S est du type considéré au paragraphe 1. Ceci signifie: Y est régulier en O, O est un point de non-lissité isolé de π, π présente en O une singularité quadratique non-dégénérée et les deux branches de Y_s en O sont définies sur k. On suppose choisi un ordre entre ces branches.

Il nous sera commode de supposer en outre Y régulier et connexe. Faisons le changement de base $\eta \to S$ et soit Y_η la courbe sur $k((t))$ fibre générale de $\pi \colon Y \to S$.

2.2. **Lemme.** *La courbe Y_η est absolument irréductible et génériquement lisse sur $k((t))$.*

La courbe Y_s est connexe (car Y est propre sur S et connexe) et a un point rationnel, donc est absolument connexe. Elle est lisse près de O (O exclus), donc a sur une extension séparable k' de k des points de lissité rationnels. Sur $S'=\operatorname{Spec} k'[[t]]$, $Y'=Y\times_S S'$ a donc une section. Le schéma Y' est connexe, car Y'_s est connexe, et régulier, car étale sur Y. Il est donc irréductible et Y'_η est irréductible, donc connexe. Ayant un point rationnel, il est absolument connexe. Ceci montre que Y_η est absolument connexe. Etant régulier, il est absolument irréductible. L'ouvert de lissité de Y_η, non vide par hypothèse, est nécessairement dense.

2.3. *Interlude.* Soient C une courbe complète réduite et génériquement lisse (i.e. C absolument réduite) sur un corps K et D un diviseur (de Cartier) sur C. Nous aurons à utiliser l'interprétation géométrique ci-dessous de $H^1(C,\mathcal{O}(-D))$. Supposons pour simplifier C connexe et $D\neq\emptyset$. Ce cas nous suffira. Soit $\operatorname{Pic}(C;D)$ la jacobienne généralisée qui paramétrise les faisceaux inversibles sur C, trivialisés sur D. Plus précisément, on définit $\operatorname{Pic}(C;D)$ comme étant le K-schéma qui représente le foncteur sur les K-schémas

$$T\mapsto(\text{l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles sur } C_T \text{ trivialisés sur } D_T)$$

(on a posé $C_T=C\times_{\operatorname{Spec}K}T$ et de même pour D). C'est un K-schéma lisse. Notons $\mathcal{O}(1 \text{ sur } D)^*$ le faisceau des sections de $\mathcal{O}^*$ de restriction 1 à D. On a

$$\operatorname{Pic}(C;D)(T)=H^1(C_T,\mathcal{O}(1 \text{ sur } D_T)^*).$$

Prenant pour T le spectre des nombres duaux sur K, on obtient

$$\operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(C;D)=H^1(C,\mathcal{O}(-D)). \tag{2.3.1}$$

Soit ω le faisceau dualisant sur C ($\Omega^1_{C/K}$ pour C lisse). Nous aurons à utiliser la dualité de Serre entre $H^0(C,\omega(D))$ et $H^1(C,\mathcal{O}(-D))$. Elle admet l'interprétation géométrique suivante (qui ne nous servira pas). Supposons tout d'abord C lisse. Quels que soient T et la section $u\colon T\to C_T$ de C_T/T, l'image de u est alors un diviseur de Cartier sur C_T. Le faisceau inversible $\mathcal{O}(u(T))$ est canoniquement trivialisé sur le complément du $u(T)$. En particulier, si u est une section de $(C-D)_T$, il est trivialisé sur D_T. Cette construction définit un morphisme

$$j\colon C-D\to\operatorname{Pic}(C;D)\colon u\mapsto \text{classe de } \mathcal{O}(u(T)). \tag{2.3.2}$$

L'image inverse par j fournit un morphisme de l'espace vectoriel des formes différentielles invariantes sur $\operatorname{Pic}(C;D)$ - le dual de l'algèbre de Lie - dans $H^0(C-D,\omega)$. Il donne la dualité de Serre, i.e. le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(C;D))^\vee \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, equal, "(2.3.1)"] & H^0(C-D,\omega) \\
H^1(C,\mathcal{O}(-D))^\vee \arrow[r, "\sim", "(\text{Serre})"'] & H^0(C,\omega(D)). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Pour C seulement supposée absolument réduite, d'ouvert de lissité U les mêmes arguments fournissent j: $U-D\to \mathrm{Pic}(C;D)$. On a encore (2.3.2), avec $H^0(C-D,\omega)$ remplacé par $H^0(U-D,\omega)=H^0(U-D,\Omega^1)$.

2.4. Soit Z un diviseur de Cartier relatif sur Y, i.e. un diviseur dont aucune composante n'est contenue dans Y_s. On suppose que $O\notin Z$. La discussion 2.3 sera appliquée à $K=k((t))$, $C=Y_\eta$ et $D=Z_\eta$.

Soit $\mathrm{Pic}(Y;Z)^0$ le S-schéma en groupes qui paramétrise les faisceaux inversibles sur Y Z-trivialisés dont la restriction à chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique est de degré 0. Pour l'existence de Pic, voir [2] 8.2. C'est un schéma en groupes lisse sur S, à fibres connexes. Sa fibre spéciale $\mathrm{Pic}(Y;Z)^0_s$ est la composante neutre du schéma en groupes $\mathrm{Pic}(Y_s;Z_s)$ qui classifie les faisceaux inversibles sur Y_s, Z_s-trivialisés.

Soit Y_s' la courbe déduite de Y_s par normalisation en O: on dispose de h: $Y_s'\to Y_s$, $h^{-1}(O)$ se compose de deux points O_1 et O_2 correspondant aux deux branches de Y_s en O et Y_s se déduit de Y_s' par identification de O_1 et O_2. En particulier, le morphisme h induit un isomorphisme de $Y_s'-\{O_1,O_2\}$ avec $Y_s-\{O\}$. Par abus de notation, nous noterons encore Z_s l'image inverse de Z_s dans Y_s'. Le foncteur h^* indentifie faisceaux inversibles $\mathscr{L}$ sur Y_s et faisceaux inversibles $\mathscr{L}'$ sur Y_s', munis d'un isomorphisme σ: $\mathscr{L}'_{O_1}\xrightarrow{\sim}\mathscr{L}'_{O_2}$ entre les fibres en O_1 et O_2. Une trivialisation de $\mathscr{L}$ sur Z_s correspond à une de $\mathscr{L}'$. En particulier, pour $\lambda\in k^*$, on obtient un faisceau inversible $\mathscr{L}_\lambda$ sur Y_s trivialisé sur Z_s en prenant $\mathscr{L}'_\lambda=\mathcal{O}$ et pour σ: $k\to k$ la multiplication par λ. La même construction peut être répétée après un changement de base $T\to s$ (cf. cidessous), d'où un morphisme de k-schémas en groupes

(2.4.1) $$w_1\colon \mathbf{G}_m\to \mathrm{Pic}(Y_s,Z_s),\qquad \lambda\mapsto\mathscr{L}_\lambda.$$

Voici une construction analogue, modulo t^n. Soit Y_n la réduction de Y mod t^n, et q: $Y_n'\to Y_n$ coincidant avec Y_n en dehors de O et qui, au voisinage de O, est obtenue comme suit: prenant «voisinage» au sens étale, on peut trouver des coordonnées locales x,y dans lesquelles Y_n s'écrit $(xy)^n=0$. On prend Y_n' somme disjointe de $x^n=0$ et de $y^n=0$. Prendre garde que pour $n>1$, Y_n' n'est pas plat sur $k[[t]]/(t^n)$. Un calcul local montre que $\mathcal{O}_{Y_n}$ s'injecte dans $q_*\mathcal{O}_{Y_n'}$. Ceci reste vrai après tout changement de base plat $T\to \mathrm{Spec}\,k[[t]]/(t^n)$. Définissons $Q_{n,T}$ par la suite exacte

(2.4.2) $$0\to\mathcal{O}_{Y_{n,T}}\to q_*\mathcal{O}_{Y'_{n,T}}\to Q_{n,T}\to 0.$$

C'est un faisceau de support l'image inverse O_T de O dans $Y_{n,T}$. Notant $\pi^\bullet$ une image inverse au sens des faisceaux par π: $Y_{n,T}\to T$, on dispose d'un morphisme de faisceaux

(2.4.3) $$\delta\colon (\pi^\bullet\mathcal{O}_T)|_{O_T}\to Q_{n,T}$$

qui (localement près de O, pour la topologie étale) envoie u sur l'image $q_*\mathcal{O}_{Y'_{n,T}}/\mathcal{O}_{Y_{n,T}}$ de la section de $\mathcal{O}_{Y'_{n,T}}$ valant u sur la première branche et 0 sur la seconde.

Passant au multiplicatif, on définit de même $Q^*_{n,T}$ par la suite exacte

(2.4.4) $$0 \to \mathcal{O}^*_{Y_{n,T}} \to q_* \mathcal{O}^*_{Y'_{n,T}} \to Q^*_{n,T} \to 0,$$

et

(2.4.5) $$\delta^*: (\pi^{\cdot} \mathcal{O}^*_T)|_{O_T} \to Q^*_{n,T}$$

($\delta^*(u)$ image de «u sur la première branche, 1 sur la seconde»).

Prenant le cobord $H^0 \to H^1$ dans la suite exacte longue de cohomologie à support dans O_T déduite de (2.4.2) (resp. (2.4.4)), on déduit de (2.4.3) (resp. (2.4.5)) des morphismes respectifs

(2.4.6) $$H^0(T, \mathcal{O}_T) \to H^1_{O_T}(Y_{n,T}, \mathcal{O}) \to H^1(Y_{n,T}, \mathcal{O}(-Z_{n,T}))$$

(2.4.7) $$H^0(T, \mathcal{O}^*_T) \to H^1_{O_T}(Y_{n,T}, \mathcal{O}^*) \to H^1(Y_{n,T}, \mathcal{O}(1 \text{ sur } Z_{n,T})^*).$$

Le morphisme de foncteurs en T (2.4.7) fournit un morphisme de $k[[t]]/(t^n)$-schémas de $\mathbf{G}_m$ dans la réduction $\bmod t^n$ de $\mathrm{Pic}_Z(Y)^0$:

(2.4.8) $$w_n: \mathbf{G}_m \to \mathrm{Pic}(Y, Z)^0_n.$$

Pour $m \leqq n$, w_n a pour réduction $\bmod t^m$ le morphisme w_m, et pour $n=1$, on retrouve (2.4.1), D'après (SGA3 IX 3.6), il existe un et un seul morphisme (2.4.8) qui relève à $k[[t]]/(t^n)$ le k-morphisme (2.4.1). Nous utiliserons qu'il admet la description (2.4.7).

On ne peut pas passer à la limite sur n pour déduire des w_n un morphisme de schémas en groupes de $\mathbf{G}_m$ dans $\mathrm{Pic}(Y; Z)^0$. Toutefois:

(a) pour H un schéma fini sur $k[[t]]$ et P quelconque, il revient au même de donner un morphisme $H \to P$ ou de donner un système cohérent de morphismes $H_n \to P_n$ entre les réductions $\bmod t^n$.

(b) pour V et W deux $k[[t]]$-modules libres, il revient au même de donner une application linéaire Γ: $V \to W$, ou de donner un système cohérent d'applications linéaires $V \otimes k[[t]]/(t^n) \to W \otimes k[[t]]/(t^n)$.

Pour tout entier m, on peut appliquer (a) au sous-schéma μ_m de $\mathbf{G}_m$ noyau de $x \mapsto x^m$: $\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$: par passage à la limite sur n, on déduit des w_n un morphisme

(2.4.9) $$w: \mu_m \to \mathrm{Pic}(Y, Z)^0.$$

On peut appliquer (b) après passage aux algèbres de Lie: on obtient

(2.4.10) $$dw: \mathrm{Lie}\, \mathbf{G}_m \to \mathrm{Lie}\, \mathrm{Pic}(Y; Z)^0.$$

On a $\mathrm{Lie}\, \mathbf{G}_m = \mathcal{O}$, le module libre de rang un trivial, et les arguments 2.3 donnent encore un isomorphisme canonique $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Pic}(Y; Z)^0 = H^1(Y, \mathcal{O}(-Z))$. La donnée de dw équivaut donc à celle de l'image

(2.4.11) $$dw(1) \in H^1(Y, \mathcal{O}(-Z)).$$

Soient $\omega_{Y/S} = \pi^! \mathcal{O}_S[1]$ le faisceau dualisant relatif et φ une section de $\omega_{Y/S}(Z)$. Choisissons sur X, le complété de Y en O, un système de coordonnées formelles x, y dans lesquelles π soit $(x,y)\mapsto xy$, et où la première branche de X_1 soit $x=0$. Dans ce système de coordonnées, φ s'écrit sur X

$$\varphi = f(x,y)\, dx \wedge dy/dt.$$

La restriction de φ_η à Y_η appartient au $k((t))$-espace vectoriel $H^0(Y_\eta, \omega(Z_\eta))$, en dualité de Serre avec $H^1(Y_\eta, \mathcal{O}(-Z_\eta))$. Notre but dans ce paragraphe est la

2.5. Proposition. *Avec les notations précédentes, on a*

$$I(f) = -\langle dw(1), \varphi\rangle. \tag{2.5.1}$$

Sur S tout entier, on dispose encore d'un accouplement entre $\operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(Y;Z)^0 = H^1(Y, \mathcal{O}(-Z))$ et $H^0(Y, \omega(Z))$. Sous les hypothèses faites, ces $k[\![t]\!]$-modules sont d'ailleurs libres, et l'accouplement une dualité parfaite. Le membre de droite de (2.5.1) est donc dans $k[\![t]\!]$ (et non seulement dans $k((t))$). Sa réduction modulo t^n est $\langle dw_n(1), \varphi\rangle$. Nous vérifierons (2.5.1) modulo t^n pour chaque n.

Soient X_n et Y_n les réductions de X et Y modulo t^n. Le morphisme trace local: $H^1_{\{0\}}(X_n, \omega) \to k[\![t]\!]/(t^n)$ et le morphisme trace global: $H^1(Y_n, \omega) \to k[\![t]\!]/(t^n)$ (donnant la dualité de Serre) sont reliés par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1_{\{0\}}(X_n, \omega) \arrow[d] & H^1_{\{0\}}(Y_n, \omega) \arrow[l] \arrow[r] & H^1(Y_n, \omega) \arrow[d] \\ k[\![t]\!]/(t^n) \arrow[rr, equal] & & k[\![t]\!]/(t^n). \end{tikzcd}$$

Cette compatibilité ramène 2.5.1 au lemme

2.6. Lemme. *Le morphisme*

$$H^1_{\{0\}}(X_n, \mathcal{O}) \xleftarrow{\sim} H^1_{\{0\}}(Y_n, \mathcal{O}(-Z_n)) \longrightarrow H^1(Y_n, \mathcal{O}(-Z_n))$$

envoie v_n sur $dw_n(1)$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'image de v_n est aussi l'image de 1 par (2.4.6). Le lemme résulte alors de la description de d en terme des nombres duaux $D = (k[\![t]\!]/(t^n))[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ sur $k[\![t]\!]/(t^n)$ et de la suite exacte naturelle de morphismes

$$((2.4.6) \text{ sur } k[\![t]\!]/(t^n)) \to ((2.4.7) \text{ sur } D) \to ((2.4.7) \text{ sur } k[\![t]\!]/(t^n)).$$

3. Preuve du théorème

3.1. Soient S_0 une courbe lisse sur k (un schéma lisse purement de dimension 1), s un point rationnel de S_0 et S le complété de S_0 en s. Soient $\pi\colon Y_0 \to S_0$ propre et plat, purement de dimension relative 1, Y l'image inverse de Y_0 sur S et $O \in Y_s$. On note encore π le morphisme de Y dans S déduit de $\pi\colon Y_0 \to S_0$ et on suppose que $(\pi\colon Y \to S, O)$ est du type considéré au §2. On utilisera pour $(\pi\colon Y \to S, O)$ les notations du paragraphe 2.

Supposons enfin, pour simplifier, Y_0 régulier et π à fibres géométriques connexes. Soit $\omega := \omega_{Y_0/S_0}$ le faisceau dualisant relatif. Là où Y_0 est lisse sur S_0, c'est $\Omega^1_{Y_0/S_0}$. On note encore ω son image inverse sur Y, ou sur le complété X de Y en O. On choisit comme précédemment des coordonnées formelles sur X et S.

Soit φ une section rationnelle de ω sur Y_0, régulière en O. Sur X, on peut écrire $\varphi = f(x,y)\,dx \wedge dy/dt$. Notre résultat principal est la

3.2. Proposition. *Si k est de caractéristique $p>0$, $I(f)$ est algébrique sur le corps $k(S_0) \subset k((t))$ des fonctions rationnelles sur S_0.*

Quitte à remplacer φ par son produit avec une fonction rationnelle sur S_0 s'annulant suffisamment en s, et à remplacer S_0 par un ouvert de Zariski contenant s, on peut supposer et on suppose que pour Z_0 un diviseur de Cartier relatif convenable sur Y_0, ne contenant pas O, φ est une section de ω sur $Y_0 - Z_0$.

Soit $\operatorname{Pic}(Y_0; Z_0)^0$ le schéma en groupe sur S_0 qui paramétrise les faisceaux inversibles sur Y_0, Z_0-trivialisés, de degré 0 sur chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique (si nécessaire pour appliquer [2], rétrécir S_0 davantage). On interprète φ comme correspondant à une section φ' du dual du fibré $\operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(Y_0; Z_0) = R^1\pi_*\mathcal{O}(-Z_0)$ sur S_0 (dualité de Serre; on a l'interprétation géométrique (2.3) $\varphi = j^*\varphi'$).

Après le changement de base de S_0 à S, on dispose de dw: $\mathcal{O} \to \operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(Y_0, Z_0)^0_S = \operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(Y; Z)^0$ (2.4.10) et la proposition résulte de 2.5 et du

3.3. Lemme-clef. *Si $p>0$, dw est algébrique sur S_0.*

En caractéristique $p>0$, l'inclusion $\mu_p \subset \mathbf{G}_m$ induit un isomorphisme sur les algèbres de Lie:

$$\operatorname{Lie}(\mu_p) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie}(\mathbf{G}_m).$$

Par réduction $\bmod t^n$, on vérifie que dw est la différentielle du morphisme (2.4.9) w: $\mu_p \to \operatorname{Pic}_Z(Y)^0$. Il ne reste qu'à utiliser la rigidité de μ_p: pour tout schéma en groupes commutatif plat P sur S_0, $\operatorname{Hom}(\mu_p, P)$ est représenté par un schéma *étale* sur S_0. Faisons $P = \operatorname{Pic}(Y_0; Z_0)$, et soit $\tilde{S}_0$ le S_0-schéma obtenu. Par définition, on dispose sur $\tilde{S}_0$ d'un morphisme universel

$$\text{un}: \mu_p \to \operatorname{Pic}(Y_0; Z_0)_{\tilde{S}_0}. \tag{3.3.1}$$

En particulier, le morphisme 2.4.9 est l'image inverse de 3.3.1 par un S_0-morphisme b:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "b"] \arrow[dr] & & \tilde{S}_0 \arrow[dl] \\ & S_0 & \end{tikzcd}$$

De même, dw est l'image inverse par b du morphisme de $\mathcal{O}$ dans $\operatorname{Lie}\operatorname{Pic}(Y_0; Z_0)_{\tilde{S}_0}$ déduit par passage aux algèbres de Lie de l'homomorphisme (3.3.1), et, $\tilde{S}_0$ étant quasi-fini sur S_0, ceci établit son algébricité.

3.4. Notons $k\{x_1,\dots,x_N\}$ l'hensélisé de l'anneau local de l'espace affine $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_N]$ en 0. Le complété de cet anneau local est $k[\![x_1,\dots,x_N]\!]$ et il résulte de [3] XI §3 cor. 1 que pour que $g\in k[\![x_1,\dots,x_N]\!]$ soit algébrique sur le corps $k(x_1,\dots,x_N)$, il faut et il suffit que g soit dans $k\{x_1,\dots,x_N\}$.

3.5. *Preuve du théorème.* D'après 3.4, que f soit algébrique signifie qu'il existe une surface Y_0', munie d'un point rationnel O, un morphisme étale h envoyant O sur 0 de Y_0' dans le plan A^2 (coordonnées x, y) et une section $\tilde{f}$ de $\mathcal{O}$ sur Y_0' de développement en série de puissances f en O. Soient S_0' la droite A^1 (coordonnée t) et π' le morphisme composé

$$\pi' : Y_0' \xrightarrow{h} A^2 \xrightarrow{xy} S_0'.$$

Sur Y_0', soit φ la section $\tilde{f}\cdot h^*(dx\wedge dy/dt)$ du faisceau dualisant relatif. Compactifiant Y_0' et résolvant les singularités introduites, on obtient

$$\begin{tikzcd} Y_0' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & Y_0 \arrow[d, "\pi''"] \\ S_0' \arrow[r, equal] & S_0'. \end{tikzcd}$$

avec π'' propre et plat et Y_0 régulier. Sur Y_0, φ apparaît comme une section rationnelle du faisceau dualisant relatif. Pour que π soit à fibres géométriques connexes, on remplace S_0' par l'espace S_0 de la factorisation de Stein $Y_0 \xrightarrow{\pi} S_0 \longrightarrow S_0'$ de π''. Il ne reste qu'à appliquer 3.2 à φ.

3.6. *Preuve du corollaire.* On procède par récurrence sur N. Le cas $N=0$ est laissé au lecteur, le cas $N=1$ est trivial, le cas $N=2$ est le théorème et on suppose $N\geqq 3$. Pour g dans $k[\![x_1,\dots,x_N]\!]$, posons

$$g=\sum g_{nm}x_{N-1}^n x_N^m$$

avec $g_{nm}\in k[\![x_1,\dots,x_{N-2}]\!]$, et

$$I(g)=\sum g_{nn}x_{N-1}^n.$$

On a

$$I_N(g)=I_{N-1}I(g). \tag{3.6.1}$$

Si g est algébrique: $g\in k\{x_1,\dots,x_N\}$ (3.4), les g_{nm} sont algébriques: $g_{nm}\in k\{x_1,\dots,x_{N-2}\}$. Soit k' le corps des fractions de $k\{x_1,\dots,x_{N-2}\}$, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k[\![x_1,\dots,x_N]\!] \arrow[d, "I"] & \supset k\{x_1,\dots,x_{N-2}\}[\![x_{N-1},x_N]\!] \arrow[d, "I"] & \subset k'[\![x_{N-1},x_N]\!] \arrow[d, "I"] \\ k[\![x_1,\dots,x_{N-1}]\!] & \supset k\{x_1,\dots,x_{N-2}\}[\![x_{N-1}]\!] & \subset k'[\![x_{N-1}]\!] \end{tikzcd}$$

(en première ligne, des $k[x_1,\dots,x_N]$-algèbres, en seconde, des $k[x_1,\dots,x_{N-1}]$-algèbres). Appliquons le théorème à l'image g' de g, supposé algébrique, dans $k'[\![x_{N-1},x_N]\!]$. Puisque k' est algébrique sur le corps des fractions de

$k[x_1,\ldots,x_{N-2}]$, $I(g')$, algébrique sur $k'(x_{N-1})$, vérifie une équation non triviale $\sum a_i I(g')^i=0$ à coefficients $a_i\in k[x_1,\ldots,x_{N-1}]$. La même équation est vérifiée par $I(g)$, d'où l'algébricité de $I(g)$: $I(g)\in k\{x_1,\ldots,x_{N-1}\}$. On conclut par (3.6.1) et l'hypothèse de récurrence.

3.7. On peut extraire de la preuve du théorème une estimation sur le degré d de l'équation qui exprime que $I(f)$ est algébrique sur $k(t)$. Avec les notations de 3.5 et 3.1, supposons que S_0 est de degré σ sur S_0', que Y_η est de genre g et que Z_η à z' points géométriques. Posons $z=\sup(0,z'-1)$. Le genre est ici le genre de la normalisée de la courbe $Y_{\bar\eta}$ déduite de Y_η par extension des scalaires à une clôture algébrique $k(\bar\eta)$ de $k(\eta)$: le premier nombre de Betti l-adique de $Y_{\bar\eta}-Z_{\bar\eta}$ est $2g+z$. On a

(3.7.1)
$$d\leqq\sigma\cdot p^{g+z}.$$

Le degré de $I(f)$ sur $k(S_0)$ est $\leqq p^{g+z}$ (et même $\leqq\sup((p^g-1)p^z,z'!)$).

Si f est une série formelle algébrique à coefficients entiers et qu'on définit σ, g et z en terme de $f\in\mathbf{Q}[\![x,y]\!]$, on en déduit que le degré d_p de la réduction $\bmod p$ de $I(f)$ vérifie pour presque tout p

(3.7.2)
$$d_p\leqq\sigma\cdot p^{g+z}.$$

On peut aussi obtenir des informations $\bmod p^m$: utilisant que sur une base où $p^m=0$, on a $\mathrm{Lie}(\mu_{p^m})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_m)$, on trouve que *pour presque tout* p la réduction de $I(f)$ $\bmod p^m$ vérifie une équation à coefficients dans $\mathbf{Z}/(p^m)[t]$ non tous divisibles par p de degré $\leqq\sigma\cdot p^{m(g+z)}$.

3.8. Je ne sais pas obtenir d'informations $\bmod p^m$ pour *tout* p. Si on essaye dans la preuve du théorème de remplacer k par un anneau commutatif A où $p^m=0$, une difficulté apparaît: celle de construire Y_0/S_0 pas trop mauvais (par exemple plat) non seulement près de O, mais partout.

3.9. La démonstration 3.6 du corollaire ne me satisfait pas. Il serait plus intéressant de traiter directement le cas de n variables, en s'inspirant de l'analogue suivant de la formule intégrale (1): sur $\mathbf{C}$, pour g convergente, on a

(1')
$$I(g)(t)=\int_{Z(t)} g\cdot dz_1\ldots dz_n/dt,$$

l'intégrale étant prise sur un cycle

$$Z(t)=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1\ldots x_n=t,\ |x_1|=r_1,\ldots,|x_m|=r_n\}$$

avec $\Pi r_i=|t|$.

J'espère qu'une démonstration directe fournirait dans le cas des séries formelles algébriques à coefficients entiers, une estimation $d_p\leqq O(p^B)$ pour le degré de la réduction de $I(g)$ modulo p sur $\mathbf{F}_p(t)$.

Donner les outils requis pour une démonstration directe serait un test pour une théorie p-adique des cycles évanescents.

3.10. La démonstration de Furstenberg du corollaire (pour g rationnel) montre que si $g\in k[\![x_1,\ldots,x_N]\!]$ est l'une des composante d'un vecteur colonne h

d'éléments de $k[\![x_1, \ldots, x_N]\!]$ qui vérifie un système d'équations $h = Ah^p$ pour A une matrice carrée à coefficients polynomiaux, alors $I(g)$ a la même propriété, donc est algébrique. Ce type d'équation est réminiscent des F-cristaux en cohomologie cristalline.

Parallèlement, $T_p \operatorname{Pic}$ est un avatar du H^1 p-adique. Ceci me fait espérer que la démonstration de Furstenberg et celle donnée ici sont moins éloignées l'une de l'autre qu'il n'y paraît.

Appendice

Signes

Le traitement dans la littérature des questions de signes dans le formalisme de dualité des faisceaux algébriques cohérents m'a semblé confus. Le texte de Hartshorne, *Residues and Duality* (Lect. Notes 20), souffre des défauts suivants:

(a) la convention qui définit les complexes $\operatorname{Hom}^{\bullet}(K, L)$ (I 6 p. 63, 64) et $K \otimes L$ (II 4 p. 93) n'est pas la convention usuelle; contrairement à ce qui est affirmé p. 64, $\operatorname{Hom}^{\bullet}$ ne commute pas (identiquement) aux foncteurs de translation (cf. SGA4 XVII 0.3); de même pour $\otimes$, dont l'associativité requiert la définition d'un isomorphisme canonique, qui n'est pas donnée. Du fait que dans la définition de $f^!$ pour $f\colon X \to Y$ lisse purement de dimension relative n apparaît le produit tensoriel avec $\Omega^n_{X/Y}[n]$, cette lacune importe.

(b) Pour autant que je puisse néanmoins comprendre la convention proposée, la définition III 4.3 du morphisme trace, basée sur la convention qui dans III 3.4 définit γ, me semble incompatible à III 10.5 TRA 1).

Les conventions exposées ci-dessous sont je crois cohérentes. J'y utilise la convention de signe usuelle pour $\otimes$ (SGA 4 XVII 1.1). Je ne me suis pas limité à la dimension 1, qui suffirait aux besoins de l'article.

(a) Pour $f\colon X \to S$ plat d'intersection complète relative, purement de dimension relative n, le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/S}$ est lié au complexe dualisant relatif $K_{X/S} := Rf^! \mathcal{O}_S$ par

$$K_{X/S} = \omega_{X/S}[n]. \tag{S.1}$$

C'est un faisceau inversible. Pour X lisse sur S, on a $\omega_{X/S} = \Omega^n_{X/S}$. Si, comme suggéré dans mon appendice au livre de Hartshorne, on définit $Rf^!$ par adjonction, l'égalité $\omega_{X/S} = \Omega^n_{X/S}$ est un isomorphisme canonique, dont la définition pose un problème de signe. Nous adoptons ici le point de vue inverse (cf. la façon dont Hartshorne traite des morphismes lissifiables), où cette égalité est évidente sur la définition de $Rf^!$ et où le problème de signe est dans la définition du morphisme trace (S.5) ci-dessous.

Si X est le produit fibré sur S des $f_i\colon X_i \to S$ ($i \in I$), où chacun des X_i est plat d'intersection complète relative purement de dimension relative n_i avec $n = \sum n_i$, on a

$$K_{X/S} = \boxtimes_i K_{X_i/S} \tag{S.2}$$

(produit tensoriel externe). Par définition, la donnée d'un tel isomorphisme est la donnée, pour chaque ordre total sur I, d'un isomorphisme

$$\omega_{X/S} = \boxtimes_i \omega_{X_i/S}. \tag{S.3}$$

On exige que quand on passe de l'ordre total $<_1$ à l'ordre total $<_2$, l'isomorphisme change par le signe $(-1)^N$, $N = \sum n_i n_j$ (somme sur les (i,j) avec $i <_1 j$ et $i >_2 j$). Pour X_i lisse sur S, on a $\omega_{X_i/S} = \Omega^{n_i}_{X_i/S}$ et (S.3) est donné par le produit extérieur, pris dans l'ordre donné sur I. Il a la propriété de parité voulue.

Pour un morphisme itéré $f = gh\colon X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} S$, $K_{X/S}$ est le $\otimes$ des complexes $K_{X/Y}$ et $h^* K_{Y/S}$ par un isomorphisme qui, appliqué à $X_1 \times_S X_2 \to X_1 \to S$, redonne (S. 3).

(b) Pour $f\colon X\to S$ comme en (a) et propre, le morphisme trace est un morphisme

$$\mathrm{Tr}\colon Rf_*K_{X/S}\to \mathcal{O}_S. \tag{S.4}$$

Le morphisme (S.4) induit un morphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{H}^0 Rf_*K_{X/S}\to\mathcal{O}_S$, i.e. un morphisme

$$\mathrm{Tr}\colon R^n f_*\omega_{X/S}\to\mathcal{O}_S. \tag{S.5}$$

Précisons comment on passe de (S.4) à (S.5). Pour tout complexe K, le complexe $K[d]$ est le complexe de composantes $(K[d])^i=K^{i+d}$ et de différentielle celle de K modifiée par le signe $(-1)^d$. On identifie les $\mathcal{H}^i(K[d])$ aux $\mathcal{H}^{i+d}K$ sans introduire de signe. Le foncteur Rf_* commute au foncteur de translation $[d]$, et (S.5) se déduit de (S.4) par application du foncteur $\mathcal{H}^0$: utiliser l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^0 Rf_*K_{X/S}&=\mathcal{H}^0 Rf_*(\omega_{X/S}[n])=\mathcal{H}^0(Rf_*(\omega_{X/S})[n])\\&=\mathcal{H}^n Rf_*\omega_{X/S}=R^nf_*\omega_{X/S}.\end{aligned}$$

Pour s une section de f, on dispose aussi du morphisme trace local

$$\mathrm{Tr}\colon Rs^!K_{X/S}\to\mathcal{O}_S. \tag{S.6}$$

La définition de (S.4) et celle de (S.6) posent, pour chaque dimension relative n, un problème de signes. Nous imposons la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Rs^!K_{X/S} & \longrightarrow & Rf_*K_{X/S}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{O}_S & = & \mathcal{O}_S \end{array}\quad;$$

ceci relie, en chaque dimension relative, les choix (S.4) et (S.6). Le morphisme en première ligne du diagramme est dérivé du morphisme d'inclusion $s^!\to f_*$ ((sections à support schématique $s(S)$)$\subset$(toutes les sections)). Pour des X_i comme en (a), propres sur S, donc donnant lieu par (S.3) à un isomorphisme

$$Rf_*K_{X/S}=\bigotimes_i Rf_{i*}K_{X_i/S},$$

nous imposons que le morphisme (S.4) pour X/S soit le produit tensoriel des morphismes (S.4) pour les X_i/S. Ceci relie les conventions utilisées en chaque dimension relative et ne laisse subsister qu'une seule ambiguïté de signe. Nous la résolvons en demandant que pour X une courbe lisse sur k algébriquement clos et $x\in X(k)$, le morphisme trace local

$$\mathbf{H}^0_{\{x\}}(X,\Omega^1_X[1])\to k, \tag{S.7}$$

induisant (S.6) pour s l'inclusion de x, soit le suivant. Le complexe $\Omega^1_X[1]$ réduit au faisceau Ω^1_X en degré cohomologique -1 s'envoie quasi-isomorphiquement dans le complexe réduit aux degrés -1 et 0

$$L:=\Omega^1_X(\infty\cdot x)\to\Omega^1_X(\infty\cdot x)/\Omega^1_X.$$

On a

$$\mathbf{H}^0_{\{x\}}(X,\Omega^1_X[1])\xrightarrow{\sim}\mathbf{H}^0_{\{x\}}(X,L)\xleftarrow{\sim}H^0\Gamma_{\{x\}}(X,L)=(\Omega^1_X(\infty\cdot x)/\Omega^1_X)_x$$

(parties polaires, en x, de formes différentielles), et on prend pour morphisme trace local le morphisme résidu Res_x.

Indiquons quelques compatibilités auxquelles donne lieu ce choix de signes. Pour simplifier les notations, nous prendrons pour S le spectre d'un corps k.

(c) Soient X une courbe lisse sur k algébriquement clos et $x\in X(k)$. Appelons encore «trace» le morphisme déduit de (S.7)

$$\mathrm{Tr}\colon H^1_{\{x\}}(X,\Omega^1_X)\to k.$$

Soit L' le complexe réduit aux degrés 0 et 1

$$L':=\Omega^1_X(\infty\cdot x)\to\Omega^1_X(\infty\cdot x)/\Omega^1_X.$$

Il diffère par un signe de $L[-1]$. A cause de ce signe, *Tr* est l'*opposé* du morphisme composé

$$H^1_{\{x\}}(X,\Omega^1_X)\xleftarrow{\sim}H^1\Gamma_{\{x\}}L'=(\text{parties polaires en }x)\xrightarrow{\mathrm{Res}}k.$$

La suite de foncteurs $\Gamma_{\{x\}}(X,\ )\to\Gamma(X,\ )\to\Gamma(X-\{x\},\ )$, qui est exacte courte quand appliquée à un faisceau flasque, fournit un morphisme cobord ∂: $H^0(X-\{x\},\Omega^1)\to H^1_{\{x\}}(X,\Omega^1)$. On a

$$\mathrm{Tr}\circ\partial=-\mathrm{Res}_x.$$

Enfin, pour X complète, le morphisme cobord attaché à la suite exacte courte de faisceaux

$$0\to\Omega^1_X\to(\text{formes différentielles rationnelles})\to(\text{parties polaires})\to 0,$$

composé avec le morphisme trace, est la somme des morphismes résidus en tous les points $x\in X(k)$.

(d) Pour $X=X_1\times X_2$, avec X_i complet localement d'intersection complète purement de dimension n_i, et pour $u_i\in H^{n_i}(X_i,\omega_{X_i})$, soient $n=n_1+n_2$ et $pr_1^*u_1\cup pr_2^*u_2\in H^n(X,\omega_X)$ le cup-produit, rel. à (S.3): $pr_1^*\omega_{X_1}\otimes pr_2^*\omega_{X_2}\xrightarrow{\sim}\omega_X$. La compatibilité exigée des morphismes trace au produit s'écrit

$$\mathrm{Tr}(pr_1^*u_1\cup pr_2^*u_2)=(-1)^{n_1n_2}\,\mathrm{Tr}(u_1)\cdot\mathrm{Tr}(u_2).$$

(e) Pour $k=\mathbf{C}$, et pour la topologie transcendante, on dispose d'un morphisme trace

$$\textstyle\int: H^{2n}(X(\mathbf{C}),\mathbf{C})\to\mathbf{C}.$$

Si Ω^{**} est le complexe de De Rham C^∞, le quasi-isomorphisme $\mathbf{C}\to\Omega^{**}$ fournit un isomorphisme $H^{2n}(X(\mathbf{C}),\mathbf{C})=(2n\text{-formes})/(\text{formes exactes})$, et $\int$ est l'intégration sur $X(\mathbf{C})$, muni de son orientation usuelle. Il nous sera plus commode de regarder $\int$ comme un morphisme $\mathbf{H}^0(X(\mathbf{C}),\mathbf{C}[2n])\to\mathbf{C}$. Ce décalage *pair* dans les degrés ne pose aucun problème de signes. Soit Ω^* le complexe de De Rham holomorphe. Les quasi-isomorphismes et morphismes

$$\mathbf{C}[2n]\xrightarrow{\sim}\Omega^*[2n]\longleftarrow\Omega^n[n]$$

fournissent en cohomologie (pour la topologie transcendante)

$$\varepsilon:\ \mathbf{H}^0(X(\mathbf{C}),\Omega^n[n])\to\mathbf{H}^0(X(\mathbf{C}),\mathbf{C}[2n]).$$

On a $H^0(X(\mathbf{C}),\ \Omega^n[n])=H^0(X,\Omega^n[n])$ (GAGA), et entre les deux morphismes trace la relation

$$\mathrm{Tr}(u)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\varepsilon(u).$$

(f) Soient $\mathbf{P}^n$ l'espace projectif de dimension n, $(T_i)_{0\leq i\leq n}$ un système de coordonnées homogènes, U_i l'ouvert $T_i\neq 0$ et $t_i=T_i/T_0$. On ordonne de façon évidente l'ensemble d'indices $[0,n]$ du recouvrement ouvert (U_i). La section $\frac{dt_1}{t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dt_n}{t_n}$ de Ω^n sur l'intersection $U_{0\ldots n}$ des U_i définit un cocycle de Čech, d'où une classe dans $H^n(\mathbf{P}^n,\Omega^n)$. On a

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{dt_1}{t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dt_n}{t_n}\right)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Bibliographie

1. Furstenberg, H.: Algebraic functions over finite fields. J. of Algebra **7**, 271-277 (1967)
2. Raynaud, M.: Spécialisation du foncteur de Picard. Publ. Math. IHES **38**, 27-76 (1970)
3. Raynaud, M.: Anneaux locaux henséliens. Lecture Notes in Mathematics, vol. 169. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970

Oblatum 30-X-1983