FORMULE DES TRACES ET FONCTORIALITÉ: LE DÉBUT D'UN PROGRAMME

EDWARD FRENKEL, ROBERT LANGLANDS ET NGÔ BẢO CHÂU

Dédié à Paulo Ribenboim à l'occasion de ses 80 ans.

Table des matières

Introduction

L'un de nous, Langlands, encouragé par les travaux d'un deuxième, Ngô, sur le lemme fondamental dont l'absence d'une démonstration pendant plus de deux décennies entravait à maints égards tout progrès sérieux de la théorie analytique des formes automorphes, avait esquissé un programme pour établir la fonctorialité, l'un des deux objectifs principaux de cette théorie. Le troisième, Frenkel, a observé que quelques idées et formules extraites de la forme géométrique de la correspondance (parfois dite réciprocité ou correspondance de Langlands) prévue entre formes automorphes et représentations galoisiennes appuient fortement la stratégie envisagée. Ce sont là les trois points de départ de cet article.

Le lemme fondamental est maintenant acquis grâce aux résultats de [N] et par conséquent la formule des traces stable à portée de main. Quoique conscients des obstacles qui restent et de leur difficulté et sans être encore en état de les surmonter, nous entreprenons dans cet article et ceux qui le suivront la première étape du programme esquissé dans [L3] qui a pour but d'établir les liens envisagés entre les formes automorphes et la géométrie algébrique, diophantienne ou non. Nous sommes conscients que la première étape, pour ne pas parler de celles qui suivent, n'est pas tenue pour réaliste par la plupart (presque tous) des arithméticiens et même des spécialistes de la théorie des formes automorphes. Nous espérons néanmoins qu'ils lisent attentivement, avec un esprit ouvert, cet article et ceux qui le suivront.

Quoique dans ce premier article nous n'envisageons que la théorie sur les corps de nombres et les corps de fonctions de dimension un sur un corps fini, nous voulons dans la suite traiter, non pas d'une façon uniforme mais d'une façon parallèle, la

Appeared in Ann. Sci. Math. Québec 34, No 2, (2010), 199–243.

théorie pour les courbes algébriques sur le corps des nombres complexes, mais il y a toujours des points obscurs qu'il reste à éclaircir.

Nous pouvons expliquer en quelques mots le contenu de cet article. Dans la première section nous résumons brièvement les idées de [L2] mais en utilisant, en plus les dérivées logarithmiques des fonctions L automorphes ces fonctions elles-mêmes. Nous observons que cette façon d'aborder la fonctorialité a des relents de la théorie classique des corps de classes. Dans la deuxième section, qui est la seule dans laquelle le corps F est restreint à un corps de fonctions, nous vérifions un lemme géométrique qui se justifie en anticipant la correspondance entre formes automorphes pour le corps F de fonctions sur une courbe sur $\mathbf{F}_q$ et représentations ℓ-adiques de $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$. Ensuite, après avoir rappelé et reformulé la formule des traces stable dans la troisième section, nous introduisons dans la quatrième ce que nous appelons l'adélisation de la formule des traces.

Dans la formule des traces interviennent des mesures. Dans le passé ces mesures ont rendu difficile l'utilisation efficace de la formule car elles introduisent des facteurs qui empêchent l'exploitation de la méthode de Poisson, à peu près la seule méthode qui semble prometteuse. Il y a pourtant une observation importante : avec des hypothèses tout à fait anodines, la partie la plus intéressante de la forme stabilisée de la formule, à savoir la somme sur les éléments réguliers, est à peu près une somme sur un espace vectoriel V de dimension finie sur F d'une fonction sur $V \otimes \mathbf{A}_F$ dont le comportement permet l'application de la formule de Poisson pour la paire $V \subset V \otimes \mathbf{A}_F$. Il nous faut utiliser cependant des travaux antérieurs de Kottwitz sur les facteurs donnés par les mesures, car ses formules permettent de conclure que ces facteurs sont constants, ce qui est à notre avis un miracle. Le lecteur est invité à se pencher sur les renvois aux travaux de Kottwitz et sur ce que nous en déduisons et d'y réfléchir. Nous soulignons que ces facteurs ne se simplifient que pour la formule stable.

Nous ajoutons que pour utiliser la formule de Poisson il nous faudra tronquer l'espace $V \otimes \mathbf{A}_F$ et à cette fin nous avons emprunté une idée de Jayce Getz, une idée qu'il utilise lui-même dans un autre contexte mais toujours dans le cadre de la formule des traces. Nous lui sommes reconnaissants de nous l'avoir expliquée.

Il est impossible de souligner toute l'importance de cette possibilité de traiter les problèmes analytiques que pose la formule des traces. Jusqu'à présent personne ne s'en est aperçu. Nous n'abordons pas cependant dans cet article l'analyse des sommes de Poisson, mais nous vérifions dans la dernière section que le premier terme, $\widehat{\theta}(0)$, de la somme discrète sur F de la transformée $\widehat{\theta}$ qui y apparaît est la contribution dominante, celle des représentations automorphes de dimension un. C'est un très bon signe. Nous ajoutons cependant que cette contribution, bien que dominante, n'est guère la plus importante.

L'un de nous est particulièrement content que cet article apparaisse dans un numéro dédié à Paulo Ribenboim, car c'est à la suite d'une demande de sa part que les premiers balbutiements de l'endoscopie ont été rédigés et ont paru dans le *Journal canadien de mathématiques.*

1. Pôles des fonctions L et fonctorialité

Pour les définitions de base des fonctions L rattachées aux représentations automorphes nous renvoyons au livre *Automorphic forms, representations and L-functions* [BC]. Il y a d'excellentes introductions plus récentes à la théorie des représentations automorphes, telles que [AEK], qui toutefois ne traitent pas les fonctions L. Le lecteur aura besoin en lisant cet article de quelque compréhension de la formule des traces stable et des applications prévues, donc des formes automorphes au-delà de l'endoscopie. À certains égards et malgré les contributions héroïques et fondamentales de Arthur, la formule des traces stable n'existe toujours que sous une forme rudimentaire [A3, A4, K2, L1]. Nous voulons expliquer dans cet article et ceux qui le suivent ce que peuvent être ses objectifs et comment avec son aide on peut espérer de les réaliser. Nous n'avançons qu'à tâtons mais pour orienter le lecteur nous commençons avec une description du fond.

Les fonctions L sont des produits (pris sur toute les places v finies et infinies)

$$L(s, \pi, \rho) = \prod_v L(s, \pi_v, \rho)$$

rattachés à des formes automorphes ou plutôt à des L-paquets de formes automorphes d'un groupe G et à une représentation ρ de son L-groupe.

Arthur ([A1]) a proposé une classification des formes automorphes qui ne sera réalisé qu'à partir de la fonctorialité, qui elle-même ne peut sans doute être établie qu'en même temps que la classification. Pour comprendre notre stratégie il faut comprendre au moins quels seront les éléments d'une telle classification. Pour l'établir en général, on s'attend à utiliser la formule des traces et des récurrences. Nous verrons dans les prochaines pages comment tenir compte des conséquences de cette classification en maniant cette formule.

On s'attend à pouvoir rattacher à une représentation automorphe $\pi = \pi_G$ plusieurs objets dont d'abord un homomorphisme $\phi = \phi_\pi$ de $\mathrm{SL}(2)$ dans ${}^LG$, ensuite pour presque toute place v une classe de conjugaison $\{A_G(\pi_v)\} = \{A(\pi_v)\}$ dans le centralisateur connexe ${}^\lambda G_{\phi,v}$ de $\phi\big(\mathrm{SL}(2)\big)$ dans ${}^LG_v$ et même pour toute place v un homomorphisme du groupe de Weil local dans ${}^\lambda G_{\phi,v}$. On s'attend même à pouvoir construire un groupe de Galois automorphe et un homomorphisme ξ de ce dernier dans le centralisateur global ${}^\lambda G_\phi$ qui engendre les classes locales $\{A(\pi_v)\}$. Il s'agit d'un projet mais d'un projet qui est censé mener à sa propre réalisation.

En fait ce groupe de Galois serait inutilement gros et guindé. Plus utiles seraient les groupes ${}^\lambda H_\pi$ définis par les clôtures de l'image de l'application hypothétique ξ pour la topologie de Zariski. Ils sont plus primordiaux que les homomorphismes ξ et on s'attend, le cas échéant, à pouvoir définir un groupe de Galois automorphe après avoir déterminé les ${}^\lambda H_\pi$. Le problème de la détermination de ${}^\lambda H_\pi$ fut entamé dans [L2]. On cherche même un groupe réductif H sur F, un homomorphisme surjectif

$$\psi : {}^LH \to {}^\lambda H \subset {}^\lambda G_\phi$$

à noyau central, et une représentation π_H telle que

$$\{A(\pi_v)\} = \Big\{\psi\big(A(\pi_{H,v})\big)\Big\}$$

pour presque tout v. Selon la classification proposée par Arthur, il y a une classe particulière de représentations, celles, dites de type Ramanujan, qui satisfont à la conclusion de la conjecture de Ramanujan. On veut que π_H soit de type Ramanujan, c'est-à-dire que les classes $\{A(\pi_{H,v})\}$ soient unitaires. Le problème abordé dans [L2] fut la construction, dans le cadre de la formule des traces, des données ϕ, H, π_H et ψ à partir de π. Nous remarquons en passant qu'on ne s'attend pas à ce que ces données soient uniques. Il y aura des questions de multiplicité liées à ces constructions qui ont été abordées d'une façon concrète par Song Wang [WS].

On s'attend à pouvoir démontrer deux choses en utilisant une récurrence convenable avec la formule des traces stable et en se fondant sur le principe de fonctorialité : d'une part, que les classes $\{A(\pi_{H,v})\}$ sont unitaires de sorte que les valeurs propres de $\rho_H\bigl(A(\pi_{H,v})\bigr)$ sont de valeur absolue 1 pour toute représentation ρ_H de ${}^LH$ et d'autre part, que les fonctions $L(s,\pi_H,\rho_H)$ sont holomorphes pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ avec au plus un nombre fini de pôles sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ et aucun zéro sur cette droite critique. (Si le corps F est un corps de fonctions sur un corps fini à q éléments, on compte les pôles modulo $2\pi i/\ln q$.) Observons que l'influence d'un nombre fini de places dans le produit eulérien est très faible de sorte que le comportement décrit est au fond celui des fonctions L partielles

$$L_S(s,\pi,\rho) = \prod_{v\notin S} L(s,\pi_v,\rho). \tag{1.1}$$

La représentation ρ et l'homomorphisme $\phi\times\psi$ définissent une représentation du produit $\mathrm{SL}(2)\times {}^LH$, laquelle se décompose en somme directe,

$$\bigoplus_j \sigma_j \otimes \rho_H^j, \tag{1.2}$$

où chaque σ_j est irréductible. Supposons que la représentation σ_j de $\mathrm{SL}(2)$ soit de dimension m_j+1 et par conséquent son poids maximal $\mu_j : (1,-1)\to m_j$. La fonction L se décompose en un produit, à savoir

$$L_S(s,\pi,\rho) = \prod_j \prod_i L_S(s+i,\pi_H,\rho_H^j) \tag{1.3}$$

où

$$i \in \left\{\frac{m_j}{2}, \frac{m_j}{2}-1,\ldots,-\frac{m_j}{2}\right\}.$$

Évidemment le comportement de ces fonctions dépend fortement des entiers m_j. Pour $m_j = 0$ la droite critique est $s = 1$, la bande critique est $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$, et son centre $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Pour $m_j > 0$, les singularités commencent plus tôt pour s décroissant. Si toutefois $m_j > 0$, alors $\dim H < \dim G$ de sorte que nous pouvons supposer par récurrence, soit sur $\dim G$, soit sur $\dim\rho$ que nous comprenons le comportement des fonctions $L_S(s,\pi_H,\rho_H^j)$ et que nous avons démontré les hypothèses de Arthur pour H, en particulier l'hypothèse de Ramanujan. Nous rappelons que cette dernière hypothèse équivaut à l'hypothèse que, pour les représentations telles que ϕ est trivial, $L(s,\pi,\rho)$ se prolonge jusqu'à la droite $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Pour être plus précis, de la formule des traces on déduit d'abord une formule pour les sommes

$$\sum_\pi \prod_{v\in S} \mathrm{tr}\bigl(\pi_v(f_v)\bigr) L_S(s,\pi,\rho). \tag{1.4}$$

Les fonctions f_v, lisses et à support compact, sont à peu près arbitraires et nous permettent d'isoler à la fin de l'argument les représentations π, ou au moins leurs classes stables, les séparant les unes des autres. En plus il est implicite dans de telles expressions que la somme se fait sur les π non ramifiés en dehors de S. Puisque l'on connaît les sous-groupes ${}^LH$ et les ϕ tels que l'image de ϕ commute avec ${}^LH$, nous saurons par récurrence déduire de la formule des traces pour les groupes H une formule pour les contributions à (1.4) qui proviennent d'un H qui n'est pas G lui-même. Il faudra toutefois tenir compte de la possibilité qu'une seule π provient de plusieurs H, par exemple de H_1 et H_2 tels que ${}^LH_1 \subset {}^LH_2$. Des exemples suggèrent aussi que π puisse provenir de deux sous-groupes isomorphes mais non conjugués, un phénomène que semble être lié à l'existence de multiplicités plus grandes que 1 [WS]. On attend des éclaircissements au fur et à mesure que les recherches progressent. Tout π qui apparaît dans la différence sera alors hypothétiquement de type Ramanujan de sorte que la différence est censée être une fonction de s holomorphe dans le domaine $\operatorname{Re} s > 1$ et le problème principal sera de le montrer et d'en déduire la conjecture de Ramanujan. Évidemment ce problème ne sera guère facile. Nous l'abordons d'un côté facile dans la partie §5. Le résultat n'est pas dépourvu d'intérêt ! Il est évident qu'une démonstration de la fonctorialité en général est implicite dans ces propos.

Il est préférable d'écarter les H différents de G en deux étapes. On soustrait d'abord les contributions des paires (ϕ, ψ) telles que ϕ n'est pas trivial. Pour elles les pôles des fonctions (1.3) apparaissent pour $\operatorname{Re} s$ plus grand de sorte que les comparaisons, qui se font dans des petits intervalles juste à la droite des pôles, puissent se faire successivement et indépendamment. L'objectif est d'en tenir compte à tour de rôle en passant de droite à gauche. À la fin on aura isolé les π pour lesquels ϕ est censé être trivial et démontré que la fonctorialité prédite par l'hypothèse de Arthur est au moins vraie pour ϕ non trivial. Les représentations π pour lesquelles ϕ est trivial sont celles pour lesquelles il faut démontrer la conjecture de Ramanujan, donc pour lesquelles il est nécessaire de démontrer que pour tout ρ la fonction $L(s, \pi, \rho)$ se prolonge à la région $\operatorname{Re} s > 1$.

De toute façon nous aurons une somme semblable à (1.4) sauf que dans la somme n'apparaîtront que les représentations π qui sont censées être de type Ramanujan. Donc de cette façon nous aurons isolé les représentations de G de type Ramanujan. Il faudra ensuite, pour un ρ donné, isoler celles dont la fonction $L(s, \pi, \rho)$ a un pôle d'un ordre donné en $s = 1$, ou en n'importe quel autre point donné sur la droite critique $\operatorname{Re} s = 1$. Pour isoler une représentation donnée il faudra profiter du choix arbitraire des fonctions f_v dans (1.4) de l'ensemble S.

Nous pouvons, à partir de la formule des traces, exprimer des sommes de $\operatorname{tr}\bigl(\pi(f)\bigr)$ sur toutes les représentations automorphes π pour des fonctions $f = \prod_v f_v$ à peu près arbitraires. Au début ([L2]) il semblait préférable de mettre dans (1.4) non pas les fonctions L de (1.1) qui sont des produits mais leurs dérivées logarithmiques, car pour ces dérivées les résidus sont additifs. Cela mène à des sommes semblables à la somme

$$\sum_{p \leqslant X} \ln p,$$

rencontrée dans la démonstration du théorème des nombres premiers. Nous les appellerons des sommes arithmétiques. Bien que nous passerons plus tard aux sommes géométriques (1.4), nous commençons avec les sommes arithmétiques.

Si π est non ramifié en dehors de S, la dérivée logarithmique de (1.3) prise avec un signe négatif est égale à

$$(1.5) \qquad -\frac{L_S'(s, \pi, \rho)}{L_S(s, \pi, \rho)} = -\sum_{v \notin S} \frac{L_v'(s, \pi, \rho)}{L_v(s, \pi, \rho)} = \sum_{v \notin S} \ln \mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v \sum_n \frac{\operatorname{tr} \rho^n \bigl(A(\pi_v)\bigr)}{\mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v^{ns}}.$$

Si l'on avait la preuve de la conjecture de Ramanujan en main, on pourrait écrire (1.5) comme une somme,

$$\sum_{v} \ln \mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v \frac{\operatorname{tr} \rho\big(A(\pi_v)\big)}{\mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v^s} + \sum_{v \notin S} O\left(\frac{1}{\mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v^2}\right). \tag{1.6}$$

Cependant ce résultat n'est pas disponible dès notre point de départ. C'est un objectif.

Comme déjà expliqué, on ne s'attend pas à calculer (1.5) pour une seule représentation π. Ce que la formule des traces stable donne est

$$\sum_{v \notin S} \ln \mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v \sum_{n} \left\{ \sum_{\pi^{\mathrm{st}}} m(\pi^{\mathrm{st}}) \prod_{v \in S} \operatorname{tr} \pi_v^{\mathrm{st}}(f_v) \frac{\operatorname{tr} \rho^n\big(A(\pi_v)\big)}{\mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v^{ns}} \right\}, \tag{1.7}$$

ou

$$\sum_{v \notin S} \ln \mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v \left\{ \sum_{\pi^{\mathrm{st}}} m(\pi^{\mathrm{st}}) \prod_{v \in S} \operatorname{tr} \pi_v^{\mathrm{st}}(f_v) \frac{\operatorname{tr} \rho\big(A(\pi_v)\big)}{\mathrm{N}\, \mathfrak{p}_v^{s}} \right\}, \tag{1.8}$$

car on peut trouver dans l'algèbre de Hecke en la place v une fonction K_v^n telle que

$$\operatorname{tr} \rho^n\big(A(\pi_v)\big) = \operatorname{tr} \pi_v(K_v^n).$$

Les fonctions f_v sur $G(F_v)$ sont lisses et à support compact mais arbitraires à part ces deux conditions. Cela nous permet de séparer à certaines fins les représentations qui interviennent, ou plutôt les L-paquets, notés π^{st}, car ce sont eux qui interviennent dans la formule des traces stable. La multiplicité $m(\pi^{\mathrm{st}})$ est une multiplicité stable, une notion dont la définition générale et précise ne sera sans doute donnée qu'au fur et à mesure de la création d'une formule des traces stable. Pour le moment, elle n'a pas été donnée que dans des cas particuliers ; voir par exemple [LL]. Dans tous les cas, elle sera un nombre possiblement fractionnaire. Rappelons que la fonction $L_S(s, \pi, \rho)$ ne dépend que du L-paquet qui contient π. Elle est donc par définition stable.

La formule des traces exprime (1.7) comme une somme sur des classes de conjugaison (stables) et la difficulté sera l'analyse de l'égalité qu'elle donne. À nos fins il est mieux de prendre d'abord une représentation ρ irréductible et non triviale du groupe ${}^L G = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$, l'extension galoisienne étant suffisamment grande. Par exemple, pour $G = \{1\}$, ρ est n'importe quelle représentation complexe, irréductible et de dimension finie du groupe du Galois. En ce moment, il ne semble pas que la question des zéros des fonctions $L(s, \pi, \rho)$ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$ doive nous préoccuper. Ils sont censés ne pas exister. Nous avons déjà constaté que les contributions à (1.7) ou (1.8) des représentations π pour lesquelles le paramètre ϕ n'est pas trivial puissent se traiter par récurrence, la dimension du centralisateur de ϕ étant plus petite que la dimension de ${}^L G$. On obtiendra à la fin une formule dans laquelle toutes les représentations automorphes qui interviennent sont de type Ramanujan, de façon qu'en principe les sommes analogiques à (1.7) ou (1.8) formées à partir de leurs fonctions L n'auront pas de pôle aux points s où $\operatorname{Re} s = 1$. On obtient l'ordre du pôle en multipliant l'une ou l'autre des deux expressions par $s - 1$ et en faisant $s \searrow 1$. Il y a aussi d'autres façons analytiques d'extraire l'ordre du pôle de (1.7) ou (1.8) qui puissent s'avérer plus utiles, mais ce qui importe ici, c'est que ces informations sont recelées dans ces deux expressions.

Si π est de type Ramanujan on s'attend, et pour de très bonnes raisons, à ce que l'ordre $\mu(\pi) = \mu(\pi^{\mathrm{st}})$ du pôle de la dérivée logarithmique de $L(s, \pi, \rho)$ en $s = 1$ soit la multiplicité de la représentation triviale dans la restriction de ρ à ${}^\lambda H_\pi$, de sorte que la somme

$$\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu(\pi) m(\pi^{\mathrm{st}}) \prod_{v \in S} \operatorname{tr} \pi_v^{\mathrm{st}}(f_v) \tag{1.9}$$

sur des représentations de type Ramanujan se retrouve dans la formule des traces et peut en principe en être extraite. Si ρ est irréductible et non trivial, cette multiplicité sera nulle sauf pour quelques π tels que ${}^\lambda H_\pi \neq {}^L G$. Par conséquent, elle sera nulle pour la plupart des π. Les autres π proviennent des groupes ${}^\lambda H_\pi$, donc des groupes H qui seront tous de dimension plus petite que celle de G et donc en principe bien compris, mais seulement une fois la fonctorialité établie. En utilisant la formule des traces pour ceux-ci et la restriction ρ_H de ρ à ${}^L H \to {}^L G$, nous pouvons, de nouveau en principe, calculer (1.9) comme une somme sur H. Si la multiplicité de la représentation triviale dans ρ_H est $\mu(\rho_H)$, la somme (1.9) doit être égale à

$$\sum_H \mu(\rho_H) \sum_{\pi_H^{\mathrm{st}}} m(\pi_H^{\mathrm{st}}) \prod_{v \in S} \operatorname{tr} \pi_v^{\mathrm{st}}(f_v). \tag{1.10}$$

Cette somme est renfermée dans la formule des traces pour les groupes H rattachés aux groupes ${}^\lambda H$ quoiqu'il faudra tenir compte des ennuis qui accompagnent les chaînes d'inclusion ${}^L G \supset {}^\lambda H \supset \cdots$

Ce que nous venons de décrire serait une confirmation de la fonctorialité en utilisant la formule des traces stable, mais ce n'est pas cela que nous avons proposé. Nous proposons plutôt de vérifier la fonctorialité par les mêmes arguments. Cela ne s'avère pas facile, car l'analyse des sommes sur des classes de conjugaison qui interviennent dans la formule des traces ne l'est point ([L2]). Une autre possibilité est suggérée par le lemme de la prochaine section. Quoique les logarithmes ont l'avantage formel important que les multiplicités $\mu(\pi)$ y apparaissent linéairement et sans s'encombrer de facteurs inutiles, traiter les fonctions L elles-mêmes semble plus facile du point de vue analytique. En plus des difficultés analytiques elles-mêmes, dans le cadre d'une égalité entre la somme (1.9) et la somme (1.10) est cachée une difficulté même très grave, à savoir la fonctorialité pour les plongements ${}^\lambda H \to {}^L G$. Ici intervient en plus une difficulté mineure, que nous discuterons lorsque l'occasion se présentera. Le groupe ${}^\lambda H$ plongé dans ${}^L G$ n'est pas lui-même dual à un groupe H. Il est l'image d'un groupe ${}^L H$ par rapport à une application admissible surjective. Cela n'a aucune importance, mais il faut l'expliquer. La difficulté clé est que la stratégie que nous proposons exige que nous démontrions, en principe en utilisant encore la formule des traces, la fonctorialité pour l'application ${}^L H \to {}^L G$. Jusqu'à présent nous ne savons pas comment le faire. Nous abordons le problème à pas comptés. Expliquons la stratégie.

Définissons l'opérateur de Hecke $K_v^{\rho,(n)}$ de sorte que

$$\operatorname{tr}\Big(\pi_v(K_v^{\rho,(n)})\Big) = \operatorname{tr} \rho^{(n)}\big(A(\pi_v)\big), \tag{1.11}$$

$\rho^{(n)}$ étant le produit symétrique de ρ de degré n. Posons

$$\mathbf{L}_v(s, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} q_v^{-ns} K_v^{\rho,(n)}.$$

Bien que les sommes et produits que nous allons introduire par la suite convergent pour $\operatorname{Re} s$ suffisamment grand, il y a certains avantages à les traiter comme des séries formelles en $t = q^{-s}$, où $\mathrm{N}\,\mathfrak{p}_v = q_v = q^{\deg v}$ ou, pour le cas des corps de nombres, comme des séries de Dirichlet formelles. Évidemment

$$\operatorname{tr}\Big(\pi_v\big(\mathbf{L}_v(s,\rho)\big)\Big) = \begin{cases} L_v(s,\pi_v,\rho) & \text{si } \pi_v \text{ est non ramifié,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.12}$$

Notre but dans cet article et ceux qui le suivront est d'entamer une discussion des conséquences possibles d'une formule des traces stable. Nous sommes prêts à escamoter quelques questions de base, qui pour les problèmes avec lesquels nous commençons ne posent pas de difficulté. Dans une théorie systématique on dit qu'une représentation π_v irréductible de $G(F_v)$ est non ramifiée si le groupe G_v est quasi-déployé sur F_v et déployé sur une extension non ramifiée et s'il y a un vecteur non nul stabilisé par un sous-groupe hyperspécial donné. On dit qu'un paquet π_v^{st} est non ramifié si chacun de ses éléments est non ramifié pour un choix convenable de ce sous-groupe hyperspécial. À partir du groupe G sur F, ou plutôt à partir d'une famille d'équations qui le définit, on obtient des groupes non seulement sur chaque F_v mais aussi sur les anneaux $\mathcal{O}_v$, au moins pour presque toute place finie v. Les sous-groupes $G(\mathcal{O}_v)$ sont hyperspéciaux presque partout. Nous exigeons en choisissant S que ceci est le cas en dehors de S. Si l'on choisit une autre famille d'équations alors les sous-groupes $G(\mathcal{O}_v)$ ainsi obtenus sont les mêmes presque partout. Ces choix faits l'équation (1.11) sera valable en dehors de S mais pour un seul élément du paquet des π_v qui y interviennent. Cet élément et l'algèbre de Hecke sont fixés par le choix de $G(\mathcal{O}_v)$. Pour les autres éléments du paquet, $\operatorname{tr}\Big(\pi_v(K_v^{(n)})\Big) = 0$. Donc les formes précises de (1.11) et de (1.12) sont

$$\operatorname{tr}\Big(\pi_v^{\mathrm{st}}(K_v^{(n)})\Big) = \operatorname{tr}\rho^{(n)}\big(A(\pi_v)\big)$$

et

$$\operatorname{tr}\Big(\pi_v^{\mathrm{st}}\big(\mathbf{L}_v(s,\rho)\big)\Big) = L_v(s,\pi_v,\rho).$$

La factorisation

$$L_S(s,\pi,\rho)\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\big(\pi_v^{\mathrm{st}}(f_v)\big) = \prod_{v\notin S}\operatorname{tr}\Big(\pi_v\big(\mathbf{L}_v(s,\rho)\big)\Big)\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\big(\pi_v^{\mathrm{st}}(f_v)\big).$$

implique que la somme

$$\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} m(\pi^{\mathrm{st}})L_S(s,\pi,\rho)\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\big(\pi_v^{\mathrm{st}}(f_v)\big) \tag{1.13}$$

est donnée par la formule des traces stable pour la fonction

$$f = \bigotimes_{v\notin S}\mathbf{L}_v(s,\rho)\otimes\bigotimes_{v\in S} f_v. \tag{1.14}$$

Il y a dans ces formules un mélange d'additif et de multiplicatif. Néanmoins on peut espérer pouvoir écarter encore et de la même façon par récurrence les contributions des représentations qui ne sont pas de type Ramanujan. La somme qui restera sera égale à la différence entre une somme donnée par la formule des traces pour le groupe G de départ et pour des groupes reliés à des plongements non triviaux de $\mathrm{SL}(2)$ dans ${}^LG$. Dans la cinquième section nous abordons le cas le plus simple, celui du plongement principal de $\mathrm{SL}(2)$ dans ${}^LG$ et nous montrons comment déceler dans la formule des traces stable pour G les représentations rattachées à celui-ci. Dans cet article, nous n'irons pas plus loin et nous sommes plus convaincus par l'élégance et la simplicité des principes nouveaux que par nos résultats. Nous espérons revenir dans un très proche avenir à ces questions, donc de dégager dans la formule des traces les contributions des autres représentations qui ne sont pas de type Ramanujan, donc rattachées à des ϕ qui ne sont ni triviaux ni principaux.

Cela étant fait, on arrivera à partir de la formule des traces stable à une expression, mettons $\Xi(s)$, pour une somme comme (1.13) mais dans laquelle seules les représentations de type Ramanujan interviennent, au moins en principe. Pour celles-ci, les fonctions $L_S(s,\pi,\rho)$ ne devraient avoir ni pôle ni zéro dans le domaine $\operatorname{Re} s > 1$ et l'on espère pouvoir tirer cette conclusion de cette expression. De toute façon, les représentations π^{st} qui contribuent à cette expression seront de types différents, à savoir celles qui proviennent des sous-groupes ${}^{\lambda}H$ tels que la restriction de ρ à ${}^{\lambda}H$ ne contient pas de représentation triviale et les autres. Pour un ρ donné ces premières n'ont pas d'influence sur le pôle de $\Xi(s)$ en $s=1$ et nous pouvons les jeter au rancart.

Les classes qui proviennent par transfert d'un groupe H tel que la composition de ρ avec l'homomorphisme ${}^{\lambda}H \to {}^{L}G$ contient la représentation triviale sont les seules qui contribuent à cette partie principale. Ces groupes H sont de dimension plus petite que celle de G, et, par conséquent, en principe compris. On peut donc, à partir de la formule des traces stable pour ceux-ci, calculer leur contribution à la partie principale de $\Xi(s)$ en $s=1$. En sommant ces parties principales sur tous les H et en comparant cette somme à la partie principale de $\Xi(s)$, on devrait trouver une égalité qui confirmerait encore une fois la fonctorialité, ou mieux mènerait à sa démonstration en général. Nous abordons ces calculs dans la cinquième section d'une façon modeste mais le vrai travail reste à faire.

Il y a une difficulté au cœur de cette stratégie que n'est pas encore tout à fait résolue mais qui ne nous semble pas grave. Nous utilisons les fonctions L et non pas leurs dérivées logarithmiques. Donc si π_H n'est pas l'image par fonctorialité d'une représentation d'un groupe H' de dimension plus petite que celle de H et si la restriction de ρ à ${}^{\lambda}H$ est la somme de m fois la représentation triviale et d'une représentation τ qui ne contient pas la représentation triviale, alors en principe

$$L_S(s,\pi,\rho) = \zeta_F^m(s) L_S(s,\pi,\tau),$$

où le deuxième facteur n'a ni de zéro ni de pôle en $s=1$. Il a néanmoins une influence sur la partie principale en $s=1$. Par contre, la formule des traces stable est une somme (!) sur les classes stables des π qui ne mêle pas multiplicativement les fonctions L rattachées aux classes π^{st} différentes.

La grosse difficulté sera l'analyse du comportement asymptotique de la somme (1.13) mais avec tous les termes enlevés pour lesquels ϕ est non trivial. Nous ne l'avons pas encore entamée, mais les sections 3, 4 et 5 sont préparatoires à cette fin.

2. Le cas des corps de fonctions

L'opérateur $\prod_{v\notin S} \mathbf{L}_v(s,\rho)$ admet une interprétation fort agréable dans le cas où le corps global F est celui des fonctions rationnelles d'une courbe X géométriquement connexe définie sur un corps fini $\kappa = \mathbf{F}_q$. L'ensemble fini S est dans ce cas un sous-schéma fermé d'une courbe projective lisse X sur κ. Soit U son complément.

En développant le produit infini $\prod_{v\notin S}\mathbf{L}_v$ puis en regroupant les termes ayant le facteur q^{-ds} pour chaque entier naturel d, on a l'identité de séries formelles

$$\prod_{v\notin S}\mathbf{L}_v(s,\rho)=\sum_{d\in\mathbf{N}}q^{-ds}\sum_{\sum_i d_iv_i\in U_d(\kappa)}\prod_i K_{v_i}^{\rho,(d_i)} \tag{2.1}$$

où U_d désigne la d-ième puissance symétrique de U et où la deuxième sommation est étendue sur l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d de U. Les opérateurs

$$\mathbf{K}_{\rho,d}=\sum_{\sum_i d_iv_i\in U_d(\kappa)}\prod_i K_{v_i}^{\rho,(d_i)} \tag{2.2}$$

admettent une interprétation géométrique.

Au lieu du groupe G défini sur F, on se donne un X-schéma en groupes lisse de fibres connexes ayant G comme fibre générique et dont la restriction à l'ouvert U est réductif, même quasi-déployé et déployé sur un recouvrement étale et fini. Il est commode d'utiliser la même lettre G pour désigner ce schéma en groupes réductifs. Nous ne faisons en effet que répéter dans un langage géométrique nos conditions sur l'ensemble S. Soit $\mathcal{O}_x$ le complété formel de $\mathcal{O}_X$ en le point x. En une place $x\notin U$, la donnée de ce schéma en groupes fixe un sous-groupe compact $G(\mathcal{O}_x)$ de $G(F_v)$ qui n'est pas nécessairement maximal. Le choix de ce schéma en groupes est essentiellement équivalent au choix d'un sous-groupe compact ouvert $G(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ du groupe adélique $G(\mathbf{A})$. L'espace des doubles classes

$$G(F)\backslash G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$$

peut s'interpréter en termes de G-torseurs au-dessus de X. Le champ Bun_G classifiant des G-torseurs sur X est un champ algébrique d'Artin localement de type fini.[1] L'ensemble de ses k-points est une réunion disjointe des espaces des doubles classes

$$\mathrm{Bun}_G(\kappa)=\bigsqcup_{\xi\in\ker^1(F,G)}G_\xi(F)\backslash G_\xi(\mathbf{A})/G_\xi(\mathcal{O}_{\mathbf{A}}) \tag{2.3}$$

pour une collection de formes G_ξ de G, les indices ξ parcourant le sous-ensemble $\ker^1(F,G)$ des classes $\xi\in\mathrm{H}^1(F,G)$ localement triviales pour la topologie étale, la forme G_ξ étant construite à partir de la torsion intérieure associée à ξ.

Les opérateurs de Hecke sont incarnés par certains faisceaux pervers ℓ-adiques sur le champ des modifications. On note Hecke le champ de modules des quadruplets (x,E,E',ϕ) où x est un point de X, où E et E' sont des G-torseurs sur X et où ϕ est un isomorphisme entre les restrictions de E et E' à $X-\{x\}$. Autrement dit, ϕ est une modification de E en le point x dont le résultat est E'. Il est raisonnable de se restreindre, au moins au début, aux lieux de modification $\{x\}\subset U$. La fibre de

[1]Pour plusieurs raisons un fondement des faisceaux ℓ-adiques sur le champ de modules des G-torseurs nous manque. D'une part, il manquait une théorie adéquate des faisceaux ℓ-adiques sur un champ algébrique d'Artin. Cette théorie a été heureusement établie par Laszlo et Olsson ([LO1, LO2]). D'autre part, les spécialistes de la théorie dite de Langlands géométrique se sont intéressés à la construction des formes cuspidales particulières. À leurs fins un fondement n'était pas strictement nécessaire. Puisque nous nous intéressons à la formule des traces, donc à toutes les formes automorphes simultanément, un fondement adéquat nous est indispensable. Nous espérons le mettre en place dans un article postérieur. Pour le moment deux références possibles sont [LMB] et le projet `https://www.math.upenn.edu/~kresch/teaching/stacks.html`. [`https://web.archive.org/web/20090726030238/https://www.math.upenn.edu/~kresch/teaching/stacks.html`, `https://mathoverflow.net/a/68609`] Pour le champ Bun_G lui-même on peut consulter un article de Jochen Heinloth [H].

Hecke au-dessus d'un couple (x, E) est alors une Grassmannienne affine. C'est un ind-schéma muni d'une action de $G(\mathcal{O}_x)$. Pour toute représentation de dimension finie du groupe dual $\rho : {}^LG \to \mathrm{GL}(V)$, on dispose d'un complexe $\mathcal{A}_\rho$ sur Hecke_U tel que la restriction de $\mathcal{A}_\rho$ à la fibre de Hecke au-dessus d'un point $x \in U$ et d'un G-torseur E fixé est le faisceau pervers sur la Grassmannienne affine qui correspond à ρ par l'équivalence de Satake géométrique ([MV1, MV2]). Le support de ce faisceau est donc de dimension finie quoique la fibre elle-même est de dimension infinie. Ces faisceaux pervers $\mathcal{K}_\rho$ s'organisent en un complexe au-dessus de Hecke. Ce complexe est un faisceau pervers après un bon décalage. L'opérateur sur $D^b(\mathrm{Bun}_G)$

$$\mathcal{F} \mapsto \mathbf{K}_\rho(\mathcal{F}) = \mathrm{pr}_{2,!}(\mathrm{pr}_1^* \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}_\rho) \tag{2.4}$$

est l'interprétation de $\mathbf{K}_{\rho,1}$ de la formule (2.2) dans le cadre des faisceaux. Ici, pr_1 et pr_2 sont les projections de (x, E, E', ϕ) sur la composante E et E' respectivement.

Grâce à (2.3) et à la trace de Frobenius sur les fibres

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{tr}\Big(\mathrm{Fr}, H^{(i)}(\mathcal{F}_x)\Big)$$

qui permet le passage, décrit par le dictionnaire de Grothendieck, d'un complexe de faisceaux à une fonction, la théorie classique des formes automorphes se transforme en une théorie géométrique, sauf que le corps des nombres complexes est remplacé par la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$ ([Lm2]). Rappelons que l'opérateur de Hecke habituel admet l'interprétation géométrique

$$\mathcal{F} \mapsto \mathrm{Hecke}_\rho(\mathcal{F}) = \mathrm{pr}_{\mathrm{Bun}_G \times U,!}(\mathrm{pr}_1^* \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}_\rho)$$

où $\mathrm{pr}_{\mathrm{Bun}_G \times U}$ est la projection $(x, E, E', \phi) \mapsto (E', x)$. Ainsi l'opérateur (2.4) consiste à intégrer $\mathrm{Hecke}_\rho(\mathcal{F})$ le long de U.

Pour que le paramètre de Arthur

$$\sigma = \phi \times \psi : \mathrm{SL}_2 \times W_F \to {}^LG \tag{2.5}$$

définisse un faisceau ℓ-adique il faut interpréter le groupe ${}^LG$ comme un groupe défini sur la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ du corps $\mathbf{Q}_\ell$ et W_F comme un sous-groupe du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$, le sous-groupe des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ est une puissance de $\mathbf{F}$. On rattache d'abord à σ et ρ une gradation de l'espace de ρ, définie par l'action du tore diagonal de SL_2, donc par l'action des valeurs propres $\{m_j, m_j - 2, \dots, -m_j\}$ de $\sigma_j(1, -1)$, où σ_j est donné dans (1.2) et ensuite un système local gradué, donc une représentation ψ' du groupe W_F compatible avec la gradation. Elle est donnée par

$$\psi' : w \to \phi\begin{pmatrix} q^{n/2} & 0 \\ 0 & q^{-n/2} \end{pmatrix}\psi(w),$$

où l'image de w dans $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$ est $\mathbf{F}^n$. Nous soulignons que nous supposons que $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ est plongé dans $\mathbf{C}$ pour que $q^{n/2}$ puisse s'interpréter comme un élément de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Il y a donc une ambiguïté curieuse quoique familière de signe.

Le faisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau propre pour les opérateurs de Hecke ayant comme valeur propre le paramètre d'Arthur (2.5) s'il existe un isomorphisme[2]

$$\mathrm{Hecke}_\rho(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{L}_\rho(\sigma)$$

[2]Le lecteur plus à son aise avec la théorie classique est encouragé de s'arrêter sur l'équation (2.4) et se convaincre qu'elle implique la définition classique de Hecke pour les fonctions rattachées aux faisceaux et que la relation qui suit implique que la fonction rattachée au faisceau par la

où $\mathcal{L}_\rho(\sigma)$ est le système local gradué obtenu en composant $\rho\circ\sigma : W_F\times \mathrm{SL}_2\to {}^L G$ puis en restreignant à W_F. En particulier, si la restriction de σ à SL_2 est triviale, $L_\rho(\sigma)$ est concentré en degré zéro. De plus, on veut une compatibilité avec le produit tensoriel de représentations de ${}^L G$. Si F est un faisceau propre pour les opérateurs de Hecke ayant comme valeur propre le paramètre d'Arthur, on a

$$\mathbf{K}_\rho(F)\simeq F\otimes \mathrm{H}^*_c\big(U,\mathcal{L}_\rho(\sigma)\big).$$

Pour tout $d\in\mathbf{N}$, le champ de modification Hecke_d au-dessus de la puissance symétrique U_d classifie les quadruplets (D,E,E',ϕ) où $D\in U_d$ est un diviseur effectif de degré d dans U, où E et E' sont des G-torseurs sur X et où ϕ est un isomorphisme entre les restrictions de E et E' à $X-D$. Au-dessus d'un G-torseur fixe $E\in\mathrm{Bun}_G$ et d'un diviseur effectif fixe $D=\sum_{i=1}^r d_i x_i$ de support réduit $x_1+\cdots+x_r$ de longueur r, Hecke_d s'identifie au produit de r copies de la Grassmannienne affine. Chacune correspond à un point x_i. Au-dessus de Hecke_d, on peut construire un complexe $\mathcal{K}_{\rho,d}$ tel qu'au-dessus d'un diviseur $\sum d_i x_i$ se trouve $\bigotimes_{i=1}^r \mathcal{K}^{\rho,(d_i)}_{x_i}$ où $\mathcal{K}^{\rho,(d_i)}_{x_i}$ est le faisceau pervers sur la Grassmannienne affine correspondant à la d_i-ième puissance symétrique de ρ. L'existence de ce faisceau pervers ne va pas de soi mais sera expliquée dans un prochain article [FN]. Notons que dans le cas où $G=\mathrm{GL}_n$ et ρ est la représentation standard, il a été construit par Laumon dans [Lm1] et la construction générale n'en est pas très différente. L'opérateur sur $D^b(\mathrm{Bun}_G)$

$$F\mapsto \mathbf{K}_{\rho,d}(F)=\mathrm{pr}_{2,!}(\mathrm{pr}_1^* F\otimes\mathcal{K}_{\rho,d})$$

est l'interprétation de $\mathbf{K}_{\rho,d}$ de la formule (2.2) dans le cadre des faisceaux. Ici, pr_1 et pr_2 sont les projections de (D,E,E',ϕ) sur la composante E et E' respectivement.

Lemme 2.6. *Si F est un faisceau propre pour les opérateurs de Hecke ayant comme valeur propre le paramètre d'Arthur σ, on a*

$$\mathbf{K}_{\rho,d}(F)=F\otimes S^d\,\mathrm{H}^*_c\big(U,\mathcal{L}_\rho(\sigma)\big). \tag{2.7}$$

Démonstration. Puisque ce lemme n'est donné qu'à titre d'arrière-fond de notre stratégie, nous nous contentons ici d'un argument fonctionnel et reportons la démonstration de l'égalité (2.7) de faisceaux à l'article [FN].

On note f la fonction sur $G(F)\backslash G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_\mathbf{A})$ qui correspond au faisceau F selon le dictionnaire de Grothendieck. Par définition, $\mathbf{K}_{\rho,d}(f)$ est la somme sur les diviseurs effectifs D de degré d dans U

$$\sum_{D\in U_d(\mathbf{F}_q)} K_{D,\rho}(f)$$

où l'opérateur $K_{D,\rho}$ attaché à un diviseur $D=\sum d_i x_i$ est le produit $\prod_i K^{\rho,(d_i)}_{x_i}$ dont le transformé de Satake est la fonction trace de la représentation de ${}^L G$ sur la d_i-ième puissance symétrique $\rho^{(d_i)}$.

Puisque F est un faisceau propre pour les opérateurs de Hecke avec valeur propre σ, f est une fonction propre pour chacun des opérateurs $K_{D,\rho}$ avec valeur propre

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{Fr}_q,\bigotimes_{i=1}^s S^{d_i}\mathcal{L}_\rho(\sigma)_{x_i}\right).$$

trace satisfait, grâce à l'isomorphisme de [MV1, MV2], à celle connue depuis Hecke, sauf que les coefficients appartiennent à un corps différent.

La formule des traces de Grothendieck-Lefschetz implique alors

$$\sum_{D\in U_d(\mathbf{F}_q)} \mathrm{tr}\left(\sigma_D, \bigotimes_{i=1}^{s} S^{d_i}\mathcal{L}_\rho(\sigma)_{x_i}\right) = \mathrm{tr}\Big(\mathrm{Fr}_q, \mathrm{H}_c^*\big(U_d \otimes_\kappa \overline{\kappa}, S^d\mathcal{L}_\rho(\sigma)_{x_i}\big)\Big)$$

qui est le reflet du lemme sur les fonctions. □

Dans le cas où $L_\rho(\sigma)$ est concentré en degré zéro, le complexe $\mathrm{H}_c^*\big(U \otimes_\kappa \overline{\kappa}, \mathcal{L}_\rho(\sigma)\big)$ est concentré en degré 0, 1 et 2 et en les seuls degrés 1 et 2 si U est affine. Si $\mathcal{L}_\rho(\sigma)$ n'a ni sous-faisceaux ni quotients constants, alors $\mathrm{H}_c^*\big(U \otimes_\kappa \overline{\kappa}, \mathcal{L}_\rho(\sigma)\big)$ est concentré en degré 1. La puissance symétrique $S^d\,\mathrm{H}_c^*\big(U, \mathcal{L}_\rho(\sigma)\big)$ est calculée par la formule suivante

$$\bigoplus_{d_0+d_1+d_2=d} S^{d_0}\,\mathrm{H}_c^0 \otimes \bigwedge^{d_1} \mathrm{H}_c^1 \otimes S^{d_2}\,\mathrm{H}_c^2[-d_1 - 2d_2]$$

où l'on a omis les parenthèses évidentes $\big(U \otimes_\kappa \overline{\kappa}, \mathcal{L}_\rho(\sigma)\big)$ suivant H_c^*. Au niveau des fonctions le décalage du degré n'est guère qu'une formalité. Si $\mathcal{L}_\rho(\sigma)$ n'a ni sous-faisceaux ni de quotients constants, $S^d\,\mathrm{H}_c^*\big(U, \mathcal{L}_\rho(\sigma)\big) = 0$ pour d plus grand que $\dim \mathrm{H}_c^1\big(U \otimes_\kappa \overline{\kappa}, \mathcal{L}_\rho(\sigma)\big)$. Cette dimension peut être calculée en fonction de la ramification sauvage de $\mathcal{L}_\rho(\sigma)$ par la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich [R].

3. Hypothèses, mesures et la formule des traces stable

3.1. **Hypothèses.** Soit G un groupe réductif sur un corps global F qui est ou bien une extension finie de $\mathbf{Q}$ ou bien le corps des fonctions rationnelles d'une courbe X sur un corps fini κ à q éléments. Notons $\mathbf{A}_F$ l'anneau des adèles de F.

La théorie des représentations automorphes se répartit en trois parties différentes : l'endoscopie et les paquets L qui ramènent tout à la formule des traces stable sur des groupes quasi-déployés ; la comparaison des représentations automorphes sur un groupe G et celles sur sa forme intérieure quasi-déployée, donc la démonstration de théorèmes dont celui dit parfois le théorème de Jacquet-Langlands est le plus simple, bien que lui appartient aussi à la théorie de l'endoscopie ; la fonctorialité pour les groupes quasi-déployés. Maintenant que le lemme fondamental est acquis, nous pouvons nous attendre à des progrès rapides avec les problèmes des deux premières parties ([A4]). Notre objectif principal dans cet article et ceux qui le suivront est d'entamer, si Dieu le permet, l'étude de la fonctorialité, qui sera de loin la partie la plus difficile. Nous supposerons donc que G, et par conséquent aussi son groupe dérivé G_{der}, est quasi-déployé.[3]

L'usage des z-extensions, notion qui a été formalisée dans [K1], permettra de se ramener au cas où le groupe dérivé est simplement connexe. Une z-extension d'un groupe G est, en particulier, une extension $G' \to G$ telle que le groupe dérivé G'_{der} est simplement connexe et telle que les homomorphismes $G'(F) \to G(F)$ et $G'(\mathbf{A}_F) \to G(\mathbf{A})$ sont surjectifs. Dans un sens, la théorie des formes automorphes

[3]Un rapporteur a été troublé par notre tendance de louvoyer dans l'utilisation de cette hypothèse. La raison est simple. Du point de vue d'une théorie ultime de la formule des traces stable, la formule pour un groupe G arbitraire, quasi-déployé ou non, mais, mettons, avec G_{der} simplement connexe, peut être traitée comme une formule pour G mais en utilisant comme un de ses groupes endoscopiques sa forme quasi-déployé G_{qd} ou comme une théorie pour G_{qd} en utilisant la transformée endoscopique $f^{G_{\mathrm{qd}}}$ de la fonction f^G sur G. Notre hypothèse est donc au fond inutile, mais elle rend parfois les explications plus simples.

sur G est contenue dans la théorie pour G'. Nous supposons donc dans cet article que le groupe dérivé G_{der} de G est simplement connexe. Le cas d'un corps global de caractéristique positive n'est pas traité dans [K1]. Faute de temps nous ne le traitons dans cet article que d'une façon lacunaire.

Soit Z la composante neutre du centre de G. Il y a une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A \longrightarrow Z \times G_{\mathrm{der}} \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}\ , \qquad A = G_{\mathrm{der}} \cap Z. \tag{3.1}$$

Nous décrirons plus tard la structure des points sur F dans ce que nous appellerons la base de Steinberg-Hitchin mais qui ne signifie que l'ensemble des classes de conjugaison stables. Le nom de Hitchin y est rattaché parce que nos réflexions ont été influencées par la théorie pour les algèbres de Lie, mais les éléments essentiels de la classification des classes stables dont nous avons besoin sont antérieurs à cette théorie. Ils se trouvent dans les articles de Steinberg et Kottwitz, quoique ni l'un ni l'autre n'a insisté sur les paramètres linéaires. Il est possible de décrire la classification dans un cadre plus familier si le groupe fini A est étale. Si la caractéristique de F est zéro, c'est toujours le cas. Si l'ordre de A est premier à la caractéristique c'est aussi le cas, mais il n'en est pas toujours ainsi. Le cas le plus simple où cette difficulté ennuyeuse se présente est le groupe $G = \mathrm{GL}(2)$ sur un corps de caractéristique 2. Le groupe A est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(1)$ défini par $z^2 = 1$. Pour simplifier la tâche de rédaction nous supposons que A est étale sur F. Cependant, pour créer une théorie complète il faudra enlever cette condition.

Nous ne pouvons utiliser la formule des traces effectivement que si le spectre automorphe contient une partie discrète. Ce n'est pas le cas si le centre de G contient un F-tore déployé. Dans ce cas le quotient $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ a un volume infini. Il faudra alors ou bien remplacer $G(\mathbf{A}_F)$ par un groupe plus petit comme le fait Arthur ou bien remplacer $G(F)$ par un groupe plus grand. En fin de compte, la différence entre les deux choix est petite. Nous préférons toutefois remplacer $G(F)$ par un groupe plus grand, ce qui nous semble la solution la plus élégante.

Notons Z_{sp} le plus grand F-tore déployé dans Z et Z'_{sp} le plus grand quotient de G qui est un F-tore déployé. L'homomorphisme $Z_{\mathrm{sp}} \to Z'_{\mathrm{sp}}$ qui s'en déduit est alors une isogénie dont on notera Z''_{sp} le noyau. Notons s_G le rang de Z_{sp} et de Z'_{sp}. Choisissons un sous-groupe

$$\mathbf{Z}^{s_G} \subset Z_{\mathrm{sp}}(\mathbf{A}_F)$$

tel que le quotient $\mathbf{Z}^{s_G} Z_{\mathrm{sp}}(F)\backslash Z_{\mathrm{sp}}(\mathbf{A}_F)$ est compact. L'intersection des deux groupes $\mathbf{Z}^{s_G}$ et Z''_{sp} est nécessairement triviale de sorte que $\mathbf{Z}^{s_G} \to Z'_{\mathrm{sp}}(\mathbf{A}_F)$ est un plongement de $\mathbf{Z}^{s_G}$ dans $Z'_{\mathrm{sp}}(\mathbf{A}_F)$. Pour tout sous-groupe H de G, nous allons noter

$$H^+(F) = \mathbf{Z}^{s_G} H(F).$$

En particulier, on a $G^+(F) = \mathbf{Z}^{s_G} G(F)$. Le quotient

$$\mathbf{Z}^{s_G} Z(F)\backslash Z(\mathbf{A}_F) = Z^+(F)\backslash Z(\mathbf{A}_F)$$

est un groupe compact.

Le caractère central d'une représentation automorphe irréductible π définit un caractère ϖ de $Z(F)\backslash Z^+(F) = \mathbf{Z}^{s_G}$. Il existe un caractère ϖ' de $Z'_{\mathrm{sp}}(F)\backslash Z'_{\mathrm{sp}}(\mathbf{A}_F)$ dont la restriction à $\mathbf{Z}^{s_G}$ est ϖ. En remplaçant π par $\pi \otimes {\varpi'}^{-1}$, on obtient une représentation automorphe dont le caractère central est trivial sur $Z^+(F)$. On peut donc se restreindre aux représentations automorphes ayant cette propriété et ne considérer que le quotient

$$G^+(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$$

qui a un volume fini pour la mesure invariante sur $G(\mathbf{A}_F)$.

3.2. **Mesures.** Il est bien connu comment associer une mesure à une forme volume sur une variété différentiable réelle. On peut faire de même pour une variété sur un corps local non-archimédien du moment qu'on a choisi une mesure sur celui-ci qui joue le rôle de la mesure de Lebesgue sur le corps des nombres réels. Il en est de même des adèles. Ces mesures peuvent se définir d'une façon canonique qu'il est très important pour nous de comprendre mais qui est mal expliquée même dans les références les plus souvent citées ([W1, W2]). Puisqu'il nous sera vraiment important d'avoir une référence précise et aussi brève que possible nous reprenons les définitions ici. On va donc commencer par fixer des mesures compatibles sur l'anneau des adèles $\mathbf{A}_F$ et sur les corps locaux F_v pour toutes les places v de F.

Une mesure invariante de Haar sur le groupe localement compact $\mathbf{A}_F$ est bien définie à une constante près. Comme le quotient de $\mathbf{A}_F$ par le groupe discret F est un groupe compact, on peut normaliser la mesure d'une seule façon telle que le quotient $F\backslash\mathbf{A}_F$ ait la mesure un. C'est cette mesure invariante dx sur $\mathbf{A}_F$ qu'on va choisir pour le reste de l'article, mais il est préférable de ne pas la définir directement par la condition que la mesure du quotient soit 1 mais à partir de mesures dx_v sur les corps locaux F_v, avec v une place de F, elles-mêmes définies à partir d'un caractère additif continu global. C'est cette suite de définitions et sa logique qui est mal expliquée dans [W2] et qui mène à des difficultés sur le plan mnémonique et, en fin de compte, sur le plan logique, lorsque l'on arrive à la formule des traces sur les groupes réductifs. On commence avec un caractère global χ, qui donne à chaque place v un caractère χ_v. À partir de χ_v on définit une mesure dx_v. Si $|F|$ est l'ensemble de toutes ces places alors $dx = \bigotimes_{v\in|F|} dx_v$ sera la mesure sur $\mathbf{A}_F$.

Considérons l'ensemble des caractères continus $\chi : \mathbf{A}_F \to \mathbf{C}^\times$ tels que $\chi(b) = 1$ pour tout $b \in F$ et $\chi(bb') = 1$ pour tout $b \in F$ si et seulement si $b' \in F$. C'est un espace principal homogène sous le groupe $F^\times$. Il est embêtant que l'existence d'un tel caractère est vérifiée autrement pour les corps de fonctions que pour les corps de nombres et même peut-être troublant pour ceux qui sont épris de la pierre de Rosette. Dans les deux cas n'importe quel caractère χ est défini par ses composantes locales, $\chi(a) = \prod_v \chi_v(a_v)$.

Si F est le corps des fonctions rationnelles sur une courbe X projective et lisse sur le corps fini κ à q éléments, on choisit une forme différentielle méromorphe non nulle ω sur X. On a alors un caractère $\mathbf{A}_F \to \kappa$ défini par

$$x \mapsto \operatorname{Res}(x\omega) = \sum_v \operatorname{tr}_{\mathbf{F}_v/\kappa}\Big(\operatorname*{Res}_v(x\omega)\Big)$$

qui est trivial si $x = b \in F$. On en déduit un caractère $\chi : \mathbf{A}_F \to \mathbf{C}^\times$ défini par

$$x \mapsto \exp\bigg(\frac{2i\pi}{p}\operatorname{tr}_{\kappa/\mathbf{F}_p}\big(\operatorname{Res}(x\omega)\big)\bigg). \tag{3.2}$$

Si $F = \mathbf{Q}$ et $x \in \mathbf{A}_F$, on pose

$$\chi_0(x) = \prod_v \chi_v(x_v),$$

où $\chi_\infty(x_\infty) = \exp(-2\pi i x_\infty)$ et $\chi_p(x_p) = \exp(2\pi i x')$ si $x' \in \mathbf{Q}$ est un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de p et tel que $|x' - x_p|_p \leqslant 1$. Enfin, pour n'importe quelle extension finie F de $\mathbf{Q}$, on pose

$$\chi(x) = \chi_0\Big(\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(x)\Big). \tag{3.3}$$

Ayant fixé un caractère χ de $\mathbf{A}_F$, on a pour toute place v un caractère $\chi = \chi_v$ de F_v. Il existe alors une unique mesure de Haar $dx = dx_v$ sur F_v qui est autoduale par rapport à la transformation de Fourier

$$\widehat{f}(y) = \int f(x)\chi(xy)\,dx,$$

c'est-à-dire une mesure par rapport à laquelle on a $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$. Si v est non-archimédien et

$$\mathfrak{d}_v^{-1} = \mathfrak{d}_v^{-1}(\chi) = \left\{\, x \;\middle|\; \chi(xy) = 1 \ \forall y \in \mathcal{O}_v \,\right\}$$

alors la mesure autoduale assigne la mesure $\mathrm{N}\,\mathfrak{d}_v^{-1/2}$ à $\mathcal{O}_v$. L'idéal $\mathfrak{d}_v$ est lié à la différente locale mais il n'est pas égal à cette différente ; il est rattaché au caractère. À cause de lui il n'y a pas des calculs locaux canoniques. L'idéal $\mathfrak{d}_v$ est toutefois égal à $\mathcal{O}_v$ presque partout. Donc il y a des formules canoniques presque partout. Des calculs habituels montrent qu'à une place réelle la mesure autoduale rattachée au caractère $\chi(x) = \exp(2\pi i y x)$ est $|y|^{1/2}\,dx$; à une place complexe la mesure rattachée à $\chi(z) = \exp\big(2\pi i\,\mathrm{Re}(\overline{w}z)\big)$ est $|w|\,dx\,dy$, où $z = x + iy$, $w = u + iv$, $|w| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Ayant fixé le caractère global χ, nous avons fixé en même temps les mesures autoduales locales dx_v aussi bien que la mesure globale $dx = \prod_v dx_v$ sur $\mathbf{A}_F$ qui sera aussi autoduale. Cette dernière mesure est indépendante du choix de χ en vertu de la formule du produit $\prod_v |b|_v = 1$ pour tout $b \in F^\times$. Puisque le groupe dual à $F\backslash\mathbf{A}_F$ est F il suit facilement de la théorie générale de la transformée de Fourier pour les groupes compacts que

$$\mathrm{meas}(F\backslash\mathbf{A}_F) = 1 \tag{3.4}$$

et que

$$\sum_{b\in F} \widehat{f}(-b) = \sum_{b \in F} f(b).$$

C'est là la formule de Poisson qui donne l'équation fonctionnelle des fonctions L rattachées à F.

Soit X une variété algébrique lisse de dimension n sur F. La donnée d'une n-forme différentielle partout non nulle ω sur X définit une mesure $|\omega|$ sur l'espace topologique $X(\mathbf{A}_F)$. Pour tout point $x \in X(F_v)$, il existe un voisinage analytique de x dans $X(F_v)$ isomorphe à un polydisque ouvert de coordonnées $a_1, \ldots, a_n$. Sur ce polydisque la n-forme ω s'écrit $\omega = f\,da_1 \wedge \cdots \wedge da_n$ où f est une fonction analytique inversible sur le polydisque. La mesure $|f|\,da_1 \cdots da_n$, transférée au voisinage de x, est en fait indépendante du choix des coordonnées locales. Cette mesure ne dépendant que de la n-forme ω, on la note $|\omega|_v$. Si on se donne en plus un modèle lisse $\mathcal{X}$ de X sur $\mathcal{O}_v$ et si on suppose que la n-forme ω s'étend en une n-forme invariante partout non nulle sur le schéma $\mathcal{X}$, on a la formule

$$\int_{X(F_v)} 1_{\mathcal{X}(\mathcal{O}_v)}|\omega|_v = q_v^{-n}\,\mathrm{N}\,\mathfrak{d}_v^{-n/2}\big|\mathcal{X}(\kappa_v)\big| \tag{3.5}$$

où κ_v est le corps résiduel de $\mathcal{O}_v$, q_v est son cardinal, $\big|\mathcal{X}(\kappa_v)\big|$ désigne le nombre de κ_v-points de $\mathcal{X}$ et finalement $1_{\mathcal{X}(\mathcal{O}_v)}$ désigne la fonction caractéristique du compact $\mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$. Le cas le plus simple de ces principes est évidemment le cas d'une forme invariante sur un espace vectoriel de dimension finie.

Soit G un groupe algébrique.[4] La donnée d'une n-forme invariante sur G est équivalente à la donnée d'un vecteur ω non nul dans le F-espace vectoriel $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ de dimension un où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G. La n-forme invariante ω associée est alors non nulle partout sur F_v et presque partout sur $\mathcal{O}_v$. Pour toute place v, elle définit une mesure invariante $|\omega|_v$ sur $G(F_v)$. Il n'est en général pas possible de prendre la mesure $\bigotimes_{v\in|F|}|\omega|_v$ sur le groupe adélique car la formule (3.5) implique que le produit infini $\prod_v \mu_v$ est en général divergent, où μ_v désigne la mesure du sous-groupe compact $G(\mathcal{O}_v)$

$$\mu_v = \int_{G(F_v)} 1_{G(\mathcal{O}_v)}|\omega|_v = \int_{G(\mathcal{O}_v)} |\omega_v|.$$

En particulier, si G est le groupe multiplicatif défini sur le corps des nombres rationnels $\mathbf{Q}$, pour tout nombre premier p, la mesure locale $\mu_p = 1 - p^{-1}$ est la valeur en 1 de l'inverse du facteur en p de la fonction zêta de Riemann.

La nécessité de modifier les mesures locales avant de prendre le produit pour arriver à une mesure bien définie exige l'utilisation de plusieurs mesures locales. Bien qu'elle ne soit pas absolument nécessaire, quelques auteurs introduisent non pas seulement la mesure produit globale mais une renormalisation de cette mesure. Dans cet article nous utilisons une notation qui distingue toutes ces mesures, en ajoutant des notations plus simples pour celles, qui au nombre de deux ou trois, seront utilisées dans des articles à suivre. Posons d'abord $d_{\mathrm{geom}}g_v = |\omega|_v$. Elle est la mesure donnée directement par la forme ω. Elle dépend évidemment de cette forme. Soit σ_G la représentation du module galoisien des caractères $G \to \mathbf{G}_m$ définis sur la clôture algébrique $\overline{F}$. Ils sont aussi définis sur la clôture séparable. La fonction L d'Artin rattachée à la représentation sur σ_G admet un développement en produit eulérien

$$L(s,\sigma_G) = \prod_v L_v(s,\sigma_G)$$

sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$. La mesure locale normalisée sur $G(F_v)$ est définie par

$$dg_v = d_{\mathrm{norm}}g_v = L_v(1,\sigma_G)\, d_{\mathrm{geom}}g_v. \tag{3.6}$$

Une fois les définitions de base bien comprises, nous n'utiliserons pour cette dernière que la notation dg_v sans indice inférieur supplémentaire parce qu'elle est la mesure locale principale.

---

[4]Bien que ces définitions préliminaires sont valables pour tout groupe, nous supposons dès le début qu'il est réductif. Il ne faut pas qu'il soit quasi-déployé mais arrivés à la formule des traces stable, nous posons cette condition supplémentaire. Rappelons que la théorie de la formule stable, donc de l'endoscopie, ramène l'étude des formes automorphes sur un groupe réductif arbitraire à la théorie pour les groupes quasi-déployés. Cependant, nous ne supposons pas qu'ils se déploient sur une extension non ramifiée de F.

Il est très répandu parmi les géomètres d'éviter la ramification ou de ne traiter que la ramification modérée. D'un point de vue géométrique il y a certainement des avantages en ne considérant que la théorie des opérateurs de Hecke et en évitant maints problèmes de l'analyse harmonique non invariante, ou de la ramification qui est si répandue dans l'arithmétique. Ces problèmes éclairent toutefois maintes questions de structure qui nous seront importantes lorsque nous examinerons la formule des traces.

La mesure produit

$$dg = d_{\mathrm{prod}}g = \bigotimes_{v\in|F|} dg_v \tag{3.7}$$

ne dépend pas de ω à cause de la formule $\prod_{v\in|F|}|c|_v = 1$ valable pour tout $c \in F^\times$. Cette mesure produit est bien définie d'après Ono (voir l'appendice 2 de [O3]). Si f est une fonction de la forme $f = \bigotimes_{v\in|F|} f_v$ avec f_v lisse à support compact et égale à la fonction caractéristique de $G(\mathcal{O}_v)$ presque partout, le produit infini

$$\prod_{v\in|F|}\int_{G(F_v)} f_v\, dg_v$$

est absolument convergent.

On ajoute souvent une renormalisation supplémentaire globale, mais nous préférons ne pas le faire. Néanmoins nous l'expliquons. Le rang de la partie triviale du module galoisien σ_G est égal au rang s_G de Z_{sp}, la fonction $L(s,\sigma_G)$ a un pôle d'ordre s_G en $s=1$. Si

$$\rho_G = \lim_{s\searrow 1}(s-1)^{s_G}L(s,\sigma_G), \tag{3.8}$$

alors

$$d\widetilde{g} = \rho_G^{-1} d_{\mathrm{prod}}g \tag{3.9}$$

est la mesure doublement renormalisée, mais nous ne l'utiliserons pas souvent. Nous introduisons pourtant les deux mesures, la mesure produit, « $\mathrm{meas}_{\mathrm{prod}}$ », définie par $d_{\mathrm{prod}}g$, les mesures locales étant renormalisées et simplement « meas » pour la mesure doublement renormalisée, non pas parce qu'elle est plus importante mais parce qu'elle est plus répandue. Cela pourrait entraîner dans cet article l'utilisation fréquente du premier symbole qui est moins commode, mais en fait nous l'éviterons. L'avantage principal de la mesure produit est qu'elle est plus facile à manier dans le cadre adélique, traditionnel pour l'analyse harmonique sur G et que nous introduisons aussi sur la base de Steinberg-Hitchin.

Nous avons choisi le sous-groupe discret $G^+(F)$ afin que le quotient

$$G^+(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$$

soit de mesure finie. Sa mesure

$$\mathrm{meas}\big(G^+(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)\big),$$

qui apparaît dans la formule des traces, se calcule facilement à partir de la mesure de Tamagawa $\tau(G)$ telle que définie et calculée dans l'article de Ono ([O3]). Introduisons la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G_2 \longrightarrow \{1\}$$

où G_1 est connexe et G_2 est un tore déployé du rang s_G. L'image réciproque de $G_2(\mathbf{A}_F)$ dans $G(\mathbf{A}_F)$ est le groupe G_A^1 de [O3]. La mesure

$$\mathrm{meas}\big(G^+(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)\big),$$

calculée par rapport à la mesure normalisée globale est le produit des mesures de $G(F)\backslash G_A^1$ et du quotient de $G_A^1\backslash G_A$ par l'image de $G^+(F)$, un groupe discret. Ce quotient Q est compact, isomorphe à $\mathbf{Z}_{s_G}\backslash\mathbf{R}_{s_G}$ dans le cas d'un corps de nombres et isomorphe à un groupe fini dans le cas d'un corps de fonctions. Ces mesures sont calculées selon les définitions de [O3]. Donc

$$\operatorname{meas}\big(G^+(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)\big) = \tau(G)\int_Q dt. \tag{3.10}$$

Ce dernier facteur anodin $m_G = \int_Q dt$ dépend du choix de $G^+(F)$, donc de $\mathbf{Z}^{s_G}$. Le facteur $\tau(G)$ est le nombre de Tamagawa.[5]

Si le groupe G est un tore T, alors grâce à (3.5) les facteurs du produit infini

$$\prod_v \int_{T(F_v)} f_v|\omega_v| \tag{3.11}$$

sont égaux presque partout à $1/L_v(1,\sigma_T)$. Si T est anisotrope, c'est-à-dire si $s_T = 0$, alors le théorème de Dirichlet et ses généralisations impliquent que le produit

$$\prod_v \frac{1}{L_v(1,\sigma_T)} \tag{3.12}$$

converge conditionnellement si on prend les v dans l'ordre qui correspond à la taille de q_v, $q_v = |\mathbf{F}_v|$, et le produit dans (3.12) est égal à $1/\rho_G$. Donc (3.11) donne un résultat qui ne diffère de $\int f\, d\widetilde{g}$ que du produit d'un nombre fini de facteurs locaux.

3.3. **La base de la fibration de Steinberg-Hitchin.** Dans cet article nous ne traiterons que la partie elliptique régulière de la formule des traces, qui sera utilisée pour une fonction $f = \prod_v f_v$, les f_v étant lisses et à support compact. Pour l'utiliser il nous faudra une description convenable des classes de conjugaison semi-simples stables, donc de ce que nous appelons la base de la fibration de Steinberg-Hitchin. Nous commencerons avec le cas d'un groupe semi-simple simplement connexe et déployé, pour passer ensuite à un groupe semi-simple et simplement connexe quasi-déployé, lui-même suivi par les groupes semi-simples et simplement connexes arbitraires, et enfin au cas le plus général que nous traitons, celui d'une z-extension, pour laquelle, nous le rappelons, le groupe dérivé est simplement connexe. Nous soulignons toutefois que stabilisation signifie implicitement un passage à un groupe quasi-déployé !

La partie principale de la formule des traces est une somme sur les classes de conjugaison elliptiques et régulières ; la partie principale de la formule des traces stable une somme sur les classes stables, elliptiques et régulières. Leurs descriptions pour un tore et pour un groupe semi-simple, simplement connexe sont différentes, mais dans le cas général il faut mêler les deux, car G est construit à partir de G_{der} et du centre Z. À part quelques complications cohomologiques qui restent à décrire, les classes de conjugaisons semi-simples dans $G(F)$, mettons stables, sont des produits d'un élément de $Z(F)$ et d'une classe de $G_{\mathrm{der}}(F)$. L'analyse harmonique, locale ou globale, sur G revient en fin de compte à l'analyse harmonique sur ces deux facteurs. Il s'avère que les classes stables dans $G_{\mathrm{der}}(F)$ sont rattachées aux points d'un espace vectoriel de dimension finie sur F et cela permet de traiter la somme qui apparaît dans la formule des traces d'une tout autre façon que celles utilisées antérieurement.

Pour les lecteurs avec une formation géométrique nous anticipons nos conclusions pour qu'ils soient bien conscients des problèmes analytiques que pose la formule des traces et auxquels la structure additive que nous décrivons offre peut-être

[5]Nous laisserons au lecteur le soin d'expliquer pour un corps de fonctions la signification géométrique de $\mathbf{Z}^{s_G}$ aussi bien que la signification de m_G.

une solution et pour qu'ils ne soient pas trop entravés par leurs connaissances géométriques. Nous leur rappelons surtout que le corps F peut être aussi bien un corps de nombres algébriques qu'un corps de fonctions !

La conclusion sera que la partie elliptique de la formule des traces stable sera une somme sur $\eta \in \mathfrak{h}$, où l'ensemble $\mathfrak{h}$ reste à décrire, de sommes sur l'ensemble (3.15), lequel sera introduit plus tard. Si nous divisons par $\big|A(F)\big|$, nous pouvons même faire la somme sur $\mathfrak{B}_\eta(F) \times Z_\eta(F)$. Quoique la somme sur η n'est pas finie, pour une fonction $f = \prod_v f_v$ donnée, il n'y a qu'un nombre fini de η pour lesquels la contribution n'est pas 0. Il suffit donc de traiter la contribution d'un seul $\mathfrak{B}_\eta(F) \times Z_\eta(F)$. Il y a une action simplement transitive du groupe $Z(F)$ sur $Z_\eta(F)$. La somme sur $Z_\eta(F)$ est donc une somme sur $Z(F)$ et par conséquent peut être traitée par la formule de Poisson pour la paire $Z(F) \subset Z(\mathbf{A}_F)$ ou plutôt pour $Z^+(F) \subset Z(\mathbf{A}_F)$. Ce qui est nouveau ici et qui n'est pas apparu auparavant, c'est — à peu près — que $\mathfrak{B}_\eta(F)$ est un espace vectoriel et que, pour un $z \in Z_\eta(F)$ donné, la somme sur $\mathfrak{B}_\eta(F)$ est une somme de Poisson des valeurs aux points de $\mathfrak{B}_\eta(F)$ d'une fonction adélique dont le comportement est assez bon pour que la formule de Poisson puisse être utilisée. L'expression « à peu près » se rapporte aux conséquences des lemmes (4.1) et (4.2). Pour utiliser la formule de Poisson une troncature est nécessaire, car sinon on ne serait pas en état de vérifier que la somme duale qui apparaît dans cette formule converge. Pour cela il faut des majorations qui ne sont disponibles que localement et même alors pas encore disponibles sauf dans quelques cas particuliers qui seront donnés dans [L4]. Les problèmes ne se posent qu'après la troncature permis par le lemme de Getz, qui est introduit dans cet article surtout pour pouvoir formuler la proposition 5.6, mais qui à des objectifs plus ambitieux.

Après avoir expliqué toutes les définitions, nous donnerons l'exemple simple de GL(2) pour bien mettre en évidence la partie de la formule des traces que nous nous proposons utiliser dans la formule de Poisson.

Soit T un tore de G supposé déployé et, pour le moment, semi-simple et simplement connexe. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines simples de T par rapport à un ordre choisi de façon arbitraire. Rattachés à ces racines simples sont les poids fondamentaux $\mu_1, \dots, \mu_r$ définis par $\mu_i(\widehat{\alpha}_j) = \delta_{i,j}$. Soit $\rho_i = \rho_{\mu_i}$ la représentation de poids maximal μ_i et soit $b_i(t) = \operatorname{tr} \rho_i(t)$. Les b_i sont algébriquement indépendants sur F et le quotient de T par le groupe de Weyl est l'espace affine $\operatorname{Spec} F[b_1, \dots, b_r]$. Ce quotient est la base de Steinberg-Hitchin $\mathfrak{A}$ dans lequel $b_1, \dots, b_r$ seront nos coordonnées préférées. Par contre sur T nos coordonnées seront $\gamma_i = t^{\lambda_i}$, où

$$\lambda_i = \sum_j a_{i,j} \mu_j, \qquad \text{avec} \qquad \det(a_{i,j}) = \pm 1. \tag{3.13}$$

Le choix précis de la matrice d'entiers $(a_{i,j})$ est sans importance. Dans ce cas la base $\mathfrak{A}$ est aussi sa partie linéaire que nous notons $\mathfrak{B}$. Lorsque $G \neq G_{\mathrm{der}}$ cela n'est plus le cas.

Le groupe fini des automorphismes du graphe de Dynkin se relève à un groupe d'automorphismes, dont chacun est défini sur F, du groupe semi-simple, simplement connexe et déployé G. Un groupe quasi-déployé mais simplement connexe et semi-simple se définit à partir d'un cocycle à valeurs dans ce groupe d'automorphismes, donc d'un homomorphisme $\sigma \to \varphi(\sigma)$ du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}^{\mathrm{sep}}/F) = \mathrm{Gal}_F$ dans le groupe d'automorphismes du graphe de Dynkin. Ce dernier groupe agit aussi sur T, un sous-groupe de Cartan déployé, et sur G, les actions étant définies sur F.

Il y aura donc une action à droite de Gal_F sur l'ensemble des représentations fondamentales $\rho_1, \ldots, \rho_r$,

$$\sigma : \rho_i \mapsto \rho_{i^\sigma}, \qquad \rho_{i^\sigma}(g) = \rho_i\big(\varphi(\sigma)(g)\big),$$

et par conséquent sur leurs caractères $b_1, \ldots, b_r$. Observons que

$$\rho_{(i^\tau)^\sigma}(g) = \rho_{i^\tau}\big(\varphi(\sigma)(g)\big) = \rho_i\big(\varphi(\tau)\varphi(\sigma)(g)\big) = \rho_i\big(\varphi(\tau\sigma)(g)\big) = \rho_{i^{\tau\sigma}}(g).$$

Soit provisoirement G_φ le groupe quasi-déployé défini par le cocycle $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$. L'action du groupe de Galois sur $G_\varphi(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, qui comme ensemble n'est que $G(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, est

$$\sigma_\varphi : g \to \varphi(\sigma)\big(\sigma(g)\big) = \sigma\big(\varphi(\sigma)(g)\big),$$

$\sigma(g)$ étant défini par rapport à G.

Si $\{h_\sigma\}$ est, par rapport à cette action, n'importe quel cocycle à valeurs dans le centre de $G_\varphi(\overline{F}^{\mathrm{sep}}) = G(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, alors $\rho_i(h_\sigma) \in \overline{F}^{\mathrm{sep}}$ est un scalaire $\epsilon_i(\sigma)$. En plus, $\sigma\big(\epsilon_{i^\sigma}(\tau)\big)\epsilon_i(\sigma) = \epsilon_i(\sigma\tau)$, car

$$\sigma\big(\rho_{i^\sigma}(h_\tau)\big)\rho_i(h_\sigma) = \rho_{i^\sigma}\big(\sigma(h_\tau)\big)\rho_i(h_\sigma) = \rho_i\Big(\varphi(\sigma)\big(\sigma(h_\tau)\big)h_\sigma\Big) = \rho_i(h_{\sigma\tau}).$$

Par conséquent nous pouvons tordre l'espace linéaire sur F à coordonnées $b_1, \ldots, b_r$ en utilisant le cocycle

$$\sigma : (b_1, \ldots, b_r) \to (b_1', \ldots, b_r') \qquad \text{avec} \qquad b_i' = \epsilon_i(\sigma) b_{i^\sigma}. \tag{3.14}$$

En particulier, en prenant pour $\{h_\sigma\}$ le cocycle trivial, nous obtenons une forme tordue de la base de Steinberg-Hitchin pour le groupe semi-simple, simplement connexe et déployé qui est la base de Steinberg-Hitchin pour toute forme intérieure du groupe quasi-déployé G_φ rattaché à l'homomorphisme φ, en particulier, pour G_φ lui-même. Cette base est toujours un espace vectoriel sur F.

Nous passons maintenant au cas général où le groupe dérivé G_{der} de G est simplement connexe. Pour éviter des problèmes d'inséparabilité, nous avons supposé que la caractéristique de F est première à l'ordre $|A|$ du groupe A de (3.1). Nous escamotons donc encore une fois une petite difficulté.

Selon la Proposition 2.2 de [BT] tout élément g de $G(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, donc en particulier de $G(F)$, est un produit $g = g_1 g_2$, $g_1 \in G_{\mathrm{der}}(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, $g_2 \in Z(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$. Si $g \in G(F)$, alors pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}_F$, on a $\sigma(g_1)^{-1}g_1 \in A(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$ et il est égal à $\sigma(g_2)g_2^{-1}$. Puisque g_1 n'est donné qu'à partir d'un élément de $A(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, seulement l'image $\eta(g)$ du cocycle $\big\{\sigma(g_1)^{-1}g_1\big\}$ dans $H^1(F, A)$ est définie. Soit $\mathfrak{h}$ le sous-ensemble des $H^1(F, A)$ obtenu de cette façon.

Nous voulons décrire l'ensemble des points F-rationnels sur la base $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_G$ de Steinberg-Hitchin de G comme la réunion sur $\eta \in \mathfrak{h}$, ou même sur $H^1(F, A)$, des points rationnels sur un ensemble qui est un quotient, à savoir,

$$\big\{\mathfrak{B}_\eta(F) \times Z_\eta(F)\big\}/A(F) \tag{3.15}$$

où $\mathfrak{B}_\eta$ est un espace linéaire, une forme tordue de l'espace linéaire sous-jacent à la base de Steinberg-Hitchin de G_{der} sur laquelle $A(F)$ comme sous-groupe du centre de $G_{\mathrm{der}}(F)$ agit et où Z_η est le torseur sur Z défini par η sur lequel $A(F)$ agit comme sous-groupe de $Z(F)$. À cette fin, choisissons et fixons pour chaque $\eta \in \mathfrak{h}$ un cocycle $h = \{h_\sigma\}$ qui le représente. Si η ou h ne devient pas trivial dans $H^1(F, Z)$, alors $Z_\eta(F)$ est vide. Par contre, s'il devient trivial, alors $Z_\eta(F)$ peut être identifié avec l'ensemble des g_2 possibles pour ce h donné. L'ensemble de tout $z \in Z(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$

tel que $\{\sigma(z)z^{-1}\} = \{h_\sigma\}$ sont les points d'un torseur Z_η. C'est l'ensemble de tous les g_2 possibles pour cet h.

Supposons que

$$\sigma(g_1)^{-1}g_1 = h_\sigma \tag{3.16}$$

pour tout σ et soient $b_1(g_1), \ldots, b_r(g_1)$ les coordonnées linéaires de l'image $\beta(g_1)$ de g_1 dans la base de Steinberg-Hitchin $\mathfrak{A}_{\mathrm{der}}$ de G_{der}. Nous avons remarqué que cette base est, pour n'importe quelle forme tordue intérieure d'un groupe quasi-déployé semi-simple et simplement connexe, égale comme variété sur F à la base de Steinberg-Hitchin du groupe quasi-déployé dont nous avons décrit la structure. En particulier, elle est un espace linéaire, une forme tordue de la base du groupe déployé. Nous tordons ce dernier espace linéaire de dimension r sur F par le cocycle rattaché à $\{h_\sigma\}$ comme dans l'équation (3.14). Vérifions que la condition (3.16) est équivalente à la condition que $\beta(g_1)$ soit rationnel dans l'espace tordu. Nous soulignons que l'espace linéaire fondamental est alors la base de Steinberg-Hitchin du groupe quasi-déployé !

Selon (3.14) la condition de rationalité $b'_i = b_i$ pour tout i, devient

$$b'_i\big(\beta(g_1)\big) = b'_i(g_1) = \epsilon_i(\sigma)\sigma\big(b_{i^\sigma}(g_1)\big).$$

On a $\beta\big(\sigma(g_1)\big) = \sigma\big(\beta(g_1)\big)$. Plus précisément, puisque la base de Steinberg-Hitchin de G_{der} est la forme tordue déjà décrite de la base de Steinberg-Hitchin du groupe semi-simple, simplement connexe déployé dont G_{der} lui-même est une forme tordue, on a

$$b_i\big(\sigma(g_1)\big) = \sigma\big(b_{i^\sigma}(g_1)\big).$$

C'est-à-dire, l'action de Gal_F sur la base est donnée par (3.14), le cocycle $\{\epsilon_i(\sigma)\}$ étant trivial, donc

$$\sigma : (b_i) \mapsto \big(\sigma(b_{i^\sigma})\big).$$

Bien que l'action du groupe de Galois sur la base de Steinberg-Hitchin, ou plutôt sur l'espace linéaire y rattaché par les coordonnées b_i, soit celle sur la base de Steinberg-Hitchin du groupe déployé, l'action sur $G_{\mathrm{der}}(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$ est celle déduite de l'action sur $G(\overline{F}^{\mathrm{sep}})$, et non pas celle déduite de l'action sur un groupe déployé ou quasi-déployé.

Nous avouons que traîner toutes ces définitions dans le bagage de l'article est fastidieux, mais la structure linéaire de la base de Steinberg-Hitchin d'un groupe semi-simple et simplement connexe est à nos fins un des éléments fondamentaux de la formule des traces.

En traitant la classe des groupes réductifs décrite dans la section 3.1, il faut introduire le cocycle $\{\epsilon_i(\sigma)\}$ de (3.16) et la forme tordue de la base de Steinberg-Hitchin du groupe déployé semi-simple, simplement connexe y rattachée par (3.14). Nous affirmons que par rapport à cette forme l'image $\beta(g_1)$ est définie sur F, donc que

$$b_i\big(\beta(g_1)\big) = b_i(g_1) = \epsilon_i(\sigma)\sigma\big(b_{i^\sigma}(g_1)\big).$$

En effet,

$$\sigma\big(b_{i^\sigma}(g_1)\big) = b_i\big(\sigma(g_1)\big) = b_i(h_\sigma^{-1}g_1) = \epsilon_i^{-1}(\sigma)b_i(g_1).$$

Nous ne pourrons pas éviter les ennuis qui proviennent du tore déployé dans le centre de G. Alors les classes de conjugaison à traiter seront non pas les classes de $G(F)$ mais les classes de $G'(F)$. Puisque toute telle classe contient le produit zt d'un élément de $\widetilde{Z}$ et d'un élément de $G(F)$, la description de (3.15) reste *grosso* *modo* exacte. Il faut simplement remplacer Z_η par le groupe discret $Z_\eta^+ = \mathbf{Z}^{s_G} Z_\eta$, car si $z't' = g^{-1}ztg$, avec t', t et g dans $G(F)$ et z, z' dans $\mathbf{Z}^{s_G}$, alors $z^{-1}z' \in \mathbf{Z}^{s_G} \cap G(F) = \{1\}$.

Nous notons $\mathfrak{A}(F)$ l'ensemble des points sur F sur la base de Steinberg-Hitchin de G, avec une notation semblable pour F_v ou pour $\mathbf{A}_F$. Soit $\mathbf{c}(g)$ l'image dans $\mathfrak{A}$ d'un élément $g \in G$. Selon ce que nous venons de vérifier, il est une réunion sur η de $\mathfrak{B}_\eta(F) \times Z_\eta^+(F)$ quotienté par $A(F)$. L'ensemble Z_η est un torseur sur F et donc un espace homogène principal sur $Z^+(F)$ qui se plonge dans $Z(\mathbf{A}_F)$. D'autre part, $\mathfrak{B}_\eta(F)$ est un espace vectoriel de dimension finie que se plonge dans $\mathfrak{B}_\eta(\mathbf{A}_F)$, un module libre de rang fini sur $\mathbf{A}_F$. La technique qui vient à l'esprit pour exploiter la formule des traces est alors d'utiliser la formule de Poisson pour $Z^+(F) \subset Z(\mathbf{A}_F)$ et pour $\mathfrak{B}_\eta(F) \subset \mathfrak{B}_\eta(\mathbf{A}_F)$. Nous choisissons les mesures globales et locales pour Z et $\mathfrak{B}_\eta$ comme dans la section 3.2.

Toutes ces explications faites, il est évident que le cas de base est le cas d'un groupe semi-simple, simplement connexe et dans les dernières sections de cet article nous nous bornerons à ce cas. Il serait néanmoins utile d'ajouter quelques précisions pour le groupe GL(2). La base de Steinberg-Hitchin est de dimension deux et l'application $\mathbf{c}$ est donnée par $t \to (b, a)$ où $X^2 - bX + a$ est le polynôme caractéristique de t. Le paramètre η est un choix a_0 de a modulo l'ensemble des carrés c^2 de $F^\times$, donc un choix du cocycle $\sigma \to \sigma(\sqrt{a_0})/\sqrt{a_0}$. On écrit alors $a = c^2 a_0$, $b = d\sqrt{a_0}$, de sorte que $d = b/\sqrt{a_0}$ est un point à coordonnées dans F dans un espace principal homogène sur le groupe additif. La dualité de Poisson additive sera utilisée pour la somme sur b, ou sur d. Cette description est valable même sur un corps de caractéristique 2, mais alors la topologie convenable sur F n'est pas la topologie étale. Ce sont là des questions pour une autre occasion.

3.4. **Les éléments elliptiques réguliers dans la formule stable des traces.** Pour cette partie de l'article, les travaux de Kottwitz et de Ono inclus dans la bibliographie sont essentiels.[6] Les notes [L1] pourraient aussi être utiles. Nous supposons toujours que le groupe G_{der} est quasi-déployé et simplement connexe.

Rappelons que pour arriver à la partie elliptique régulière de la formule stable, nous commençons avec la somme

$$\sum_\gamma \mathrm{meas}_{\mathrm{prod}}\Big(T_\gamma^+(F)\backslash T_\gamma(\mathbf{A}_F)\Big) \int_{T_\gamma(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\, d\overline{g}. \tag{3.17}$$

La mesure du premier terme est donnée par $d_{\mathrm{prod}}t$. Celle du second terme, $d\overline{g}$, est la mesure quotient

$$\frac{d_{\mathrm{prod}}g}{d_{\mathrm{prod}}t} = \prod_v d\overline{g}_v \qquad \text{avec} \qquad \overline{g}_v = \frac{L(1,\sigma_G)}{L(1,\sigma_T)} \frac{d_{\mathrm{geom}}g_v}{d_{\mathrm{geom}}t_v}.$$

La vérification formelle de la formule (3.17) est facile. Le noyau de notre opérateur est

$$\sum_{\gamma\in T^+(F)} f(g^{-1}\gamma h).$$

[6]Puisque nous voulons en principe traiter non seulement le cas où F est un corps de nombres mais aussi le cas où F est un corps de fonctions, ces références ne sont pas adéquates. Nous avons néanmoins décidé de ne pas nous en occuper pour le moment.

La trace s'obtient formellement de l'intégrale

$$\int_{G^+(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\, dg,$$

qui est égale formellement à une somme sur les classes de conjugaison $\{\gamma\}$ dans $G^+(F)$ de

$$\int_{G^+_\gamma(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\, dg. \tag{3.18}$$

En fait cette somme n'a pas en général de sens. Néanmoins dans la vraie formule des traces (voir par exemple [A3]) la somme des expressions sur l'ensemble des classes de conjugaison elliptiques et régulières dans $G^+(F)$ apparaît. C'est cette somme qui nous intéresse dans cet article, car toute recherche sur la formule des traces commence avec l'étude de la contribution des classes elliptiques régulières. Si γ est elliptique régulier, alors son centralisateur est un tore, donc connexe.[7]

Puisqu'il s'agit de la formule des traces stable nous travaillons non pas avec des classes de conjugaison mais avec des classes de conjugaison stable. Selon (3.15) les paramètres de ces classes sont les points dans la base de Steinberg-Hitchin $\mathfrak{B}_\eta(F)$. Si G n'est pas son propre groupe dérivé, la présence de $\mathbf{Z}^{m_{\mathrm{sp}}}$ et de $Z_\eta(F)$ rendent les formules plus compliquées. C'est pour cela que nous avons supposé que $G = G_{\mathrm{der}}$, mais pour nous rappeler de temps en temps que ce n'est pas le cas le plus général, nous utilisons parfois une notation qui tient compte du cas général. Ce qui est important c'est que $\mathfrak{B}_\eta$ est un espace vectoriel sur F.

Examinons les termes (3.18) en ajoutant une somme sur $\mathbf{Z}^{s_G}$ pour que nous n'oublions pas que ce sont les classes de conjugaison dans $G^+(F)$ qui comptent et non pas celles dans $G(F)$, donc considérons

$$\sum_{z\in\mathbf{Z}^{s_G}} \int_{G^+_\gamma(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}z\gamma g)\, dg. \tag{3.19}$$

Le groupe G_γ, parfois dénoté T_γ, est le centralisateur de l'élément régulier semi-simple γ. Dans [L1] la partie régulière elliptique de la formule des traces est convertie en un somme sur les groupes endoscopiques de la formule des traces stables. Nous ne nous intéressons ici qu'à la contribution de G lui-même, qui est toujours, nous le rappelons, tel que G_{der} soit simplement connexe, et en ce moment, pour simplifier les choses, égal à G_{der}. Nous expliquons brièvement sa forme en citant [K2] autant que possible, car là les notations et les explications sont plus faciles à comprendre que celles de [L1].

D'abord l'intégrale

$$\int_{G^+_\gamma(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}z\gamma g)\, d_{\mathrm{prod}}g$$

de (3.19) est écrite sous la forme,

$$\mathrm{meas}_{\mathrm{prod}}\Big(T^+_\gamma(F)\backslash T_\gamma(\mathbf{A}_F)\Big)\int_{T(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\, d_{\mathrm{prod}}\overline{g}. \tag{3.20}$$

Ayant fait cette modification presque formelle, on prend d'abord la somme de (3.19) non pas sur toutes les classes régulières $\{\gamma\}$ de $G(F)$ comme dans (3.17) mais sur

[7]Pour le moment nous ne donnons pas de référence. Il faudra aussi trouver une démonstration en caractéristique positive du théorème 4.4 de Kottwitz ([K1]).

tous les γ qui sont conjugués dans $G(\mathbf{A}_F)$ à un γ donné. Cela donne un facteur, noté dans [K2] par

$$\Big|\ker\big[\mathfrak{E}(T/F) \to \mathfrak{E}(T/\mathbf{A}_F)\big]\Big|, \qquad \text{où} \qquad T = T_\gamma.$$

Mais ensuite pour arriver à une somme sur des groupes endoscopiques, on introduit un développement par rapport aux caractères d'un groupe $\mathfrak{K}(T/F)$. Cela mène au moins lorsqu'on ne considère que la contribution du groupe endoscopique G lui-même, donc la partie stable, au coefficient

$$\iota(F,T,G) = \frac{\Big|\ker\big[\mathfrak{E}(T/F) \to \mathfrak{E}(T/\mathfrak{A}_F)\big]\Big|}{\mathfrak{K}(T/F)}, \tag{3.21}$$

de [K2], la notation étant tout à fait pareille à celle de [L1]. Il est vérifié dans [K2], Lemma 8.3.2, rédigé avant les démonstrations complètes de la conjecture de Weil ([K3]) sur les nombres de Tamagawa et de celle de Kneser sur le principe de Hasse, que

$$\iota(F,T,G) = \frac{\tau(G)}{\tau(T)}. \tag{3.22}$$

Introduire le facteur (3.21) et passer à la formule des traces stables a pour conséquence que la somme sur γ de (3.17) est remplacée par la somme sur les classes stables elliptiques régulières, donc effectivement par une somme sur les éléments elliptiques réguliers de la base de Steinberg-Hitchin. Pour les sous-groupes de Cartan elliptiques $m_T = m_G$ et, grâce à (3.10) le facteur de (3.20)

$$\mathrm{meas}_{\mathrm{prod}}\Big(T_\gamma^+(F)\backslash T_\gamma(\mathbf{A}_F)\Big) = m_T\rho_T\tau(T) = m_G\rho_T\tau(T)$$

multiplié par (3.22) est égal à

$$m_G\tau(G)\rho_T = m_G\rho_G\tau(G)\frac{\rho_T}{\rho_G}. \tag{3.23}$$

Ce qui reste est

$$\int_{T(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\, d_{\mathrm{prod}}\overline{g} = \prod_v \int_{T(F_v)\backslash G(F_v)} f_v(g^{-1}\gamma g)\, d\overline{g}_v.$$

Nous introduisons la notation

$$\int_{T(F_v)\backslash G(F_v)} f_v(g^{-1}\gamma g)\, d\overline{g}_v = \mathrm{Orb}(\gamma, f_v),$$

Prenant la somme de ces dernières sur des représentants des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ, nous obtenons les intégrales orbitales stables $\mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v)$, γ_{st} dénotant la classe stable de γ. Dans la formule des traces ce sont les produits

$$\prod_v \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v) \tag{3.24}$$

qui interviennent. Avec une notation précise mais balourde on mettrait l'indice « st » deux fois en l'ajoutant à « Orb ».

Le facteur $m_G\rho_G\tau(G)$ ne dépend pas de T. Donc pour le moment nous le mettons au rancart. Dans lui sont cachés des résultats cohomologiques et de mesures dont nous n'aurons plus de besoin explicite. La représentation σ_G est une sous-représentation de σ_T. Soit $\sigma_{T/G}$ le quotient. Pour T elliptique ce quotient ne contient pas la représentation triviale et

$$\frac{\rho_T}{\rho_G} = L(1, \sigma_{T/G}) = \lim_{s \searrow 1} L(s, \sigma_{T/G}).$$

C'est le produit

$$L(s, \sigma_{T/G}) \prod_v \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v), \qquad s > 1, \tag{3.25}$$

qui nous intéressera dans la partie suivante. Ce produit est défini pour toute classe de conjugaison stable dans $T(F)$ même si elle n'est pas elliptique. Toutefois, lorsque $s \mapsto 1$, la limite n'existe pas si la classe n'est pas elliptique. Puisque nous n'utiliserons jamais une seule formule des traces mais toujours des sommes de plusieurs avec des signes différents il est tout à fait légitime d'ajouter une partie qui devient infinie lorsqu'on passe à la limite dans une des formules, pourvu que cette partie apparaisse avec un signe opposé dans une autre. Nous aurons des exemples non pas dans cet article mais dans la suite de celui-ci.

3.5. **Intégration le long des classes de conjugaison stable.** Il existe un ouvert dense $\mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}$ de $\mathfrak{A}$ tel que pour tout $g \in G$ d'image $a \in \mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}$, le centralisateur de g est un tore. Pour tout élément $a \in \mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}(F_v)$, l'ensemble des F_v-points de G au-dessus de a, non vide d'après Kottwitz [K1], forme une classe de conjugaison stable. L'ensemble $\mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}(F_v)$ est l'ensemble des classes de conjugaison stable semi-simples et fortement régulières.

Notre objectif dans cette section est d'exprimer l'intégrale

$$\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\, dg_v$$

en intégrant d'abord le long des fibres de $\mathbf{c} : G \to \mathfrak{A}$, puis en intégrant sur $\mathfrak{A}(F_v)$. Nous aurons besoin de la formule qui en résulte dans la dernière partie de l'article. Il s'agit d'abord de fixer des mesures de façon compatible. Choisissons des mesures en suivant les définitions de la section 3.2. En particulier, on fixe une forme volume ω_G sur G et une forme volume $\omega_{\mathfrak{A}}$ sur $\mathfrak{A}$ définies sur F. Avec le choix du caractère additif, on en déduit des mesures $|\omega_G|_v$ sur $G(F_v)$ et $|\omega_{\mathfrak{A}}|_v$. On a aussi des mesures normalisées $dg_v = L_v(1, \sigma_G)|\omega_G|_v$ et $db_v = L_v(1, \sigma_Z)|\omega_{\mathfrak{A}}|_v$, les facteurs de normalisation $L_v(1, \sigma_G) = L_v(1, \sigma_Z)$ étant les mêmes.

La première observation est qu'il est possible de se restreindre à $\mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}(F_v)$ et à $G^{\mathrm{rs}}(F_v)$ où G^{rs} est l'image réciproque de $\mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}$.

Lemme 3.26. *Soit f_v une fonction lisse à support compact sur $G(F_v)$, dg une mesure invariante sur $G(F_v)$. Notons avec les mêmes notations les restrictions à $G^{\mathrm{rs}}(F_v)$. Alors, l'intégrale*

$$\int_{G^{\mathrm{rs}}(F_v)} f_v(g_v)\, dg_v$$

est absolument convergente et égale à $\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\, dg_v$.

Ceci découle du fait général que l'ensemble des F_v-points d'un sous-schéma fermé strict a une mesure nulle.[8]

[8] Nous aurions préféré ajouter une référence ou des références. La démonstration de ce lemme doit être bien plus simple que la démonstration générale pour un « sous-schéma fermé strict ». Il est parfois nécessaire mais néanmoins dangereux d'utiliser des résultats dont on ne comprend pas

Soit $\gamma \in G^{\mathrm{rs}}(F^{\mathrm{sep}})$ d'image $a \in \mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}(F^{\mathrm{sep}})$ et soit $T = G_\gamma$ son centralisateur. On a une suite exacte d'espaces tangents

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tan}_\gamma\bigl(\mathbf{c}^{-1}(a)\bigr) \longrightarrow \operatorname{Tan}_\gamma G \longrightarrow \operatorname{Tan}_b(\mathfrak{A}) \longrightarrow 0$$

qui induit une égalité

$$\bigwedge^d \mathfrak{g} = \bigwedge^n \operatorname{Tan}_a(\mathfrak{A}) \otimes \bigwedge^{d-n} \operatorname{Tan}_\gamma\Bigl(\mathbf{c}^{-1}(a)\Bigr) \tag{3.27}$$

où $d = \dim(G)$, $n = \dim(\mathfrak{A})$. Ainsi le choix d'une d-forme invariante ω_G sur G et une n-forme partout non nulle $\omega_{\mathfrak{A}}$ sur $\mathfrak{A}$ induit une $(d-n)$-forme $\omega_a = \omega_G \otimes \omega_{\mathfrak{A}}^{-1}$ sur la fibre $\mathbf{c}^{-1}(a)$, non nulle et G-invariante.

Cette fibre, ou plutôt l'ensemble des points sur la fibre à coefficients dans F_v, se présente de deux façons. C'est d'abord une réunion finie d'espaces $T(F_v)\backslash G(F_v)$ donnés par $\{g^{-1}\gamma' g\}$ où γ' parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable rattachée à γ, et deuxièmement l'image inverse de a par rapport à $\mathbf{c}$. La mesure traditionnelle dans sa première forme est donnée comme dans la formule (3.17) par le quotient de mesures locales normalisées $d\overline{g}_v = dg_v/dt_v$. Par contre, sur l'image inverse de a, il y a soit localement soit globalement la forme ω_a et les mesures $|\omega_a|_v$ rattachées à elle. Ces deux mesures ne sont pas les mêmes. Nous avons préféré utiliser la deuxième, qui est plus géométrique, dans la démonstration de la proposition 5.6. Mais c'est la première qui est traditionnelle et aussi plus utile dans l'analyse harmonique, donc dans la théorie des intégrales orbitales, créée par Harish-Chandra mais avec des contributions importantes de Shalika et, dans le cadre de l'endoscopie, de Shelstad. Puisque nous aurons besoin de cette théorie par la suite, il nous faudra comprendre la relation entre les deux mesures, qui est assez simple.

Puisque les deux mesures sont invariantes par rapport au centre Z, il suffit de traiter le cas que $G = G_{\mathrm{der}}$, qui est selon nos hypothèses simplement connexe. Soit $r = r_{\mathrm{der}}$ le rang de G_{der} et soient $\xi_1, \dots, \xi_r$ les poids dominants des représentations ρ_i de la section 3.3. Soit $\omega_T = d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_r$ et soit $\omega_{T\backslash G}$ une forme complémentaire invariante à droite. Elle définit alors les mesures $d\overline{g}_v$. On pose $\omega_G = \omega_T \wedge \omega_{T\backslash G}$. Nous choisissons pour $\omega_{\mathfrak{A}}$, qui est sous notre hypothèse une forme sur $\mathfrak{B}$, à savoir

$$\omega_{\mathfrak{A}} = \omega_{\mathfrak{B}} = db_1 \wedge \cdots \wedge db_r, \tag{3.28}$$

les b_i étant par abus de notation des fonctions sur T et sur $\mathfrak{B}$.

L'application $T = G_x \to \mathfrak{A}$ est étale au-dessus de $\mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}$. L'image inverse de $\omega_{\mathfrak{A}}$ est évidemment $db_1 \wedge \cdots \wedge db_r$. Fixons un ordre sur les caractères de G_x.

Proposition 3.29. *Si on choisit un ordre sur les racines et si on pose*

$$\Delta(t) = \pm t^{-\rho} \prod_{\xi > 0} \bigl(\xi(t) - 1\bigr),$$

alors

$$\omega_{\mathfrak{A}} = db_1 \wedge \cdots \wedge db_r = \pm\Delta(t)\, d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_r = \pm\Delta(t)\omega_T.$$

Le signe dans cette équation n'a aucune importance. Le carré de $\Delta(t)$ est

$$D(t) = \prod_{\xi} \bigl(\xi(t) - 1\bigr),$$

---

la démonstration et nous ne voulons pas encourager cette habitude. Malheureusement, faute de temps, nous avons accepté de bâcler dans cet article plusieurs points de moindre importance.

ce qui est une fonction invariante et par conséquent une fonction sur $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Nous écrivons aussi $D(a)$. La fonction $\Delta(a)$ n'est définie qu'à signe près mais nous utilisons les normes $\left|\Delta(a)\right|_v$ qui sont bien définies.

Avant de démontrer la proposition, calculons ω_a. À cette fin il faut fixer ω_G et $\omega_{\mathfrak{A}}$. Cela fixe des mesures locales d'une façon arbitraire, ce qui n'est pas grave, car il n'y a aucun effet global. Les mesures $\omega_{\mathfrak{A}}$ et ω_T sont données. L'application $(\gamma, g) \to g^{-1}\gamma g$ de $T \times T\backslash G$ dans G donne l'application $\mathrm{Tan} \times \mathrm{Tan}_{T\backslash G}$. Soient, avec une notation dont l'interprétation est évidente,

$$\omega_{T\backslash G} = \bigwedge_\xi d\xi, \qquad \omega_G = \omega_T \wedge \omega_{T\backslash G},$$

où ξ parcourt les racines de G. Alors l'application $t \times \overline{g} \mapsto g^{-1}tg = t(t^{-1}g^{-1}tg)$ de $T \times T\backslash G$ vers G est étale sur $T^{\mathrm{rs}} \times T\backslash G$ et l'image de $\omega_T \wedge \omega_{T\backslash G}$ est

$$\left\{\prod_\xi \big(\xi(t) - 1\big)\right\}\omega_T \wedge \omega_{T\backslash G} = \Delta^2(t)\omega_T \wedge \omega_{T\backslash G} = \Delta^2(t)\omega_G.$$

La proposition donne par conséquent

$$\omega_a = \pm\Delta(t)\omega_{T\backslash G}. \tag{3.30}$$

De cette équation découle la relation

$$\int_{\mathbf{c}^{-1}(a)} f_v(g)|\omega_a|_v = \left|\Delta(t)\right|_v L_v(1, \sigma_{T/G}) \,\mathrm{Orb}(t_{\mathrm{st}}, f_v), \tag{3.31}$$

où $\mathbf{c}(t) = a$. L'intégrale à gauche a des avantages du point de vue géométrique, mais c'est l'expression à droite qu'on emploie traditionnellement dans l'analyse harmonique locale. L'équation (3.31) est valable si les mesures sont choisies de la façon expliquée, ce que nous supposons par la suite. Donc à gauche, la mesure est la mesure géométrique, tandis qu'à droite la mesure est la mesure normalisée locale. On se perd facilement entre les deux ! Les spécialistes de l'analyse harmonique non abélienne sont habitués à l'expression de droite ; les géomètres à celle de gauche. L'égalité reste valable pour un groupe G avec G_{der} simplement connexe. Nous posons

$$\theta_v(a; s) = L_v(s, \sigma_{T/G})\left|\Delta(t)\right|_v \mathrm{Orb}(t_{\mathrm{st}}, f_v), \qquad s \geqslant 1, \quad \mathbf{c}(t) = a, \tag{3.32}$$

en observant que pour $t = \gamma \in T(F)$ régulier, l'expression (3.25) est égale à

$$\theta(a; s) = \prod_v \theta_v(a; s), \qquad \gamma \mapsto a,$$

car $\prod_v \left|\Delta(\gamma)\right| = 1$. Si γ n'est pas régulier elle est 0.

Observons que le comportement local de $\theta_v(a; s)$, et par conséquent le comportement global de sa transformée de Fourier, dont l'étude sera commencée dans [L4], est fortement influencé par les facteurs $L_v(s, \sigma_{T/G})$, car la valeur de ces fonctions dépend de la classe de T, qui à son tour dépend de a.

Nous nous permettons une démonstration de la proposition sur le corps de nombres complexes. La proposition sur un corps arbitraire s'en déduit facilement. Que le signe dans la proposition 3.29 soit arbitraire et clair. Il dépend du choix de l'ordre sur les racines. Il est aussi évident que Δ est une somme à coefficients entiers de caractères t^λ de T car chaque a_i l'est. Ces entiers sont indépendants du corps F. Il suffit donc de vérifier la formule sur $\mathbf{C}$. Alors $\Delta(t)$ est évidemment une fonction de t alternante. Si s est une réflexion du groupe de Weyl alors $\Delta\big(s(t)\big) = -\Delta(t)$, car les a_i sont des fonctions symétriques et le déterminant de s, comme application linéaire de l'espace des caractères, est égal à -1. Il en résulte que $\Delta(t)$ s'annule sur les variétés $t^\alpha = 1$ dans T. On a par conséquent

$$\Delta(t) = \pm Q(t) t^{-\rho} \prod_{\alpha>0} (1 - t^\alpha), \tag{3.33}$$

où $Q(t)$ est une combinaison linéaire des fonctions t^λ, λ un caractère de T. En plus, si s est la réflexion rattachée à une racine simple β, alors

$$s\left(\prod_{\alpha>0,\,\alpha\neq\beta} (1 - t^\alpha)\right) = \prod_{\alpha>0,\,\alpha\neq\beta} (1 - t^\alpha),$$

et

$$s(t^\beta) = t^{-\beta}, \quad s(t^{-\rho}) = t^{\beta-\rho},$$

de sorte que $Q(t)$ est une fonction invariante sous le groupe de Weyl. Donc

$$Q(t) = \sum_{\lambda\geqslant 0} a_\lambda S_\lambda(t), \tag{3.34}$$

où S_λ est simplement la somme sur tous les conjugués λ' de λ de $t^{\lambda'}$. Prenons le plus grand λ pour lequel $a_\lambda \neq 0$. Alors le poids le plus grand à droite de (3.33) est $\lambda + \rho$. Puisque chaque b_i est une somme semblable à (3.34), mais dans laquelle le poids le plus grand pour lequel $a_\lambda \neq 0$ est le poids fondamental μ_i.

Puisque le corps de base est devenu aux fins de cette démonstration le corps des complexes, nous avons un mélange de notations additives et multiplicatives, à savoir $\xi_i = e^{\mu_i(z)}$, où $z = \sum_i z_i \widehat{\alpha}_i$ est dans l'algèbre de Lie de T. Alors

$$d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_r \exp\bigl(\rho(z)\bigr)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_r,$$

tandis que

$$db_i = \exp\bigl(\mu_i(z)\bigr)\, dz_i + \cdots,$$

où les termes qui manquent sont tous de la forme $\exp\bigl(\mu(z)\bigr)$, $\mu < \mu_i$. Il résulte alors que le terme $\exp\bigl(\lambda(z)\bigr)$ dans $\Delta(t)$ avec λ maximal est $\lambda = \sum_i \mu_i = \rho$. Par conséquent $Q(t)$ est une constante et cette constante est 1.

Dans une exposition plus systématique il faudrait donner une démonstration valable pour tout corps de base F. Nous ne sommes pas aussi ambitieux à ce stade-ci.

4. Adélisation de la formule des traces

Les fonctions $\theta_v(a;s)$ de la formule (3.32) sont des fonctions sur $\mathfrak{A}_v$ à support compact. Il est bien connu qu'elles sont bornées mais pas nécessairement lisses. Nous offrons comme références, celles que nous utiliserons dans des articles à suivre : pour les groupes sur **R** et **C** le livre [V] de Varadarajan ; pour les corps p-adiques l'article [Sh] de Shalika ; pour les groupes sur les corps locaux de caractéristique positive, nous n'avons pas de référence. En plus des questions locales, le comportement du produit

$$\theta(a;s) = \prod_v \theta_v(a_v;s), \qquad a = \prod_v a_v,$$

n'est pas évident même pour $s = 1$ et f_v égal à la fonction caractéristique de $G(\mathcal{O}_v)$. En particulier, la transformée de Fourier locale, $\widehat{\theta}_v(a; s)$, n'est pas à support compact et la convergence de l'intégrale qui définit la transformée de Fourier globale

$$\widehat{\theta}(a; s) = \prod_v \widehat{\theta}_v(a; s)$$

n'est pas acquise. Puisque nous proposons d'utiliser la formule de Poisson, le comportement de θ_v et de θ exige une étude plus poussée. Nous la commençons dans cet article et pour le groupe $\mathrm{SL}(2)$ on la poursuivra dans un prochain article bref. Nous espérons revenir à la question générale assez tôt.

La formule de Poisson dans sa forme habituelle adélique est une application de l'analyse harmonique à la paire autoduale $F \subset \mathbf{A}$. Le mauvais comportement de la fonction suggère l'utilisation d'une forme tronquée, et plus précisément dans une forme suggérée par une observation de Jayce Getz, au cours de ses recherches qu'il poursuit et dans lesquelles il a rencontré une difficulté semblable.

Lemme 4.1. *Soit T un tore sur le corps global F. Soit $\mathfrak{X}$ le groupe des caractères rationnels de T, un groupe pourvu d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$. Supposons que $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathfrak{X}$ et que Λ soit invariant par rapport à $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$. Supposons enfin que S soit un ensemble fini de places de F qui contient toutes les places infinies et que, pour chaque $v \in S$, un sous-ensemble compact $U_v \subset T(F_v)$ soit donné. Alors il existe un sous-ensemble fini $S' \supset S$ tel que si $t \in T(F^{\mathrm{sep}})$, $t \in U_v$ pour tout $v \in S$, et $\bigl|\lambda(t)\bigr|_v = 1$ pour tout $v \notin S$ et tout $\lambda \in \Lambda$, alors*

$$\prod_{j=1}^{n} \bigl(1 - \lambda_j(t)\bigr) = 0$$

ou

$$\bigl|1 - \lambda_j(t)\bigr|_v = 1$$

pour tout j et tout $v \notin S'$.

Quoique le lemme est important, sa démonstration est facile. Il y a certainement un nombre positif A tel que $1/A \leqslant \bigl|\lambda(t)\bigr|_v \leqslant A$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $v \in S$. En plus $|1 - \lambda_j|_v \leqslant 1$ pour $v \notin S$. Considérons $\alpha = \prod_j \bigl(1 - \lambda_j(t)\bigr)$. Il appartient à F. Pour $v \notin S$, $|\alpha|_v \leqslant 1$, et pour $v \in S$, $|\alpha|_v \leqslant A^n$. Il n'y a qu'un nombre fini de places en dehors de S telles que F_v contient un élément de valeur absolue positive mais plus grande ou égale à A^{-n}, donc telles que $q_v \leqslant A^n$. Soit S' leur réunion avec S. L'ensemble S' satisfait aux conditions du lemme et ne dépend que de S, A et n. Il est évident que l'ensemble S' devient de plus en plus grand, et à une allure inquiétante, lorsque S croît ou les ensembles U_v, $v \in S$, grandissent.

Le lemme 4.1 permet une nouvelle formulation de la formule des traces qui nous sera importante. Nous commençons avec une observation élémentaire sur la formule de Poisson adélique. Soit S' un ensemble fini de places de F qui contient toutes les places infinies. Fixons un caractère global χ de $\mathbf{A}_F$ avec la propriété habituelle : l'ensemble des $b \in \mathbf{A}_F$ tels que $\chi(ba) = 1$ pour tout $a \in F$ est F. Nous supposons que S' soit suffisamment grand pour que la mesure auto-duale sur F_v, $v \notin S'$, donne à $\mathcal{O}_v$ la mesure 1. Donc l'ensemble des $x \in F_v$ tels que $\chi_v(x) = 1$ est $\mathcal{O}_v$. Soit $\mathbf{A}_F^{S'}$ le sous-ensemble des $a \in \mathbf{A}_F$ tels que $a_v \in \mathcal{O}_v$ pour $v \notin S'$. Soient

$$\mathcal{O}^{S'} = \prod_{v \notin S'} \mathcal{O}_v, \quad \mathbf{A}_{S'} = \prod_{v \in S'} F_v \quad \text{et} \quad F_{S'} = F \cap \mathbf{A}_F^{S'}.$$

Nous identifions $F_{S'}$ avec son image dans $\mathbf{A}_{S'}$.

Lemme 4.2. *Si S' est suffisamment grand alors $\mathcal{O}_v$ est auto-dual par rapport à χ_v pour $v \notin S'$ et*

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A}_F^{S'} + F. \tag{4.3}$$

En plus $F_{S'} \subset \mathbf{A}_{S'}$ est auto-dual par rapport à la restriction de $\chi^{S'}$ à $\mathbf{A}_{S'}$ et la mesure produit sur $\mathbf{A}_{S'}$ donne $\operatorname{meas}(F_{S'}\backslash \mathbf{A}_{S'}) = 1$.

Il est évident que ce lemme implique un lemme semblable pour n'importe quel espace vectoriel de dimension finie sur F. Nous l'utiliserons dans cette forme plus générale.

Nous disons que S' est suffisamment grand s'il contient un sous-ensemble fini convenable que nous allons construire. Pour simplifier la notation nous dénotons ce sous-ensemble S'. Il est évident que l'équation (4.3) est la clé car elle implique que

$$\mathbf{A}_F = F + \mathcal{O}^{S'} + \mathbf{A}_{S'}.$$

Un caractère de $\mathbf{A}_{S'}$ trivial sur $F_{S'}$ s'étend d'une façon unique à un caractère de $\mathcal{O}^{S'} + \mathbf{A}_{S'}$ trivial sur $\mathcal{O}^{S'} + F_{S'}$ et ensuite à un caractère de $\mathbf{A}_F$ trivial sur F. Il suffit donc de démontrer le lemme pour un seul S'. Il sera alors valable pour tout ensemble plus grand.

Le corps F est une extension finie et séparable d'un corps F^0, soit le corps des nombres rationnels, soit le corps de fonctions sur la droite projective $\mathbf{P}^1$ sur un corps fini. Nous pouvons choisir pour S' l'ensemble des places au-dessus d'un ensemble S'_0 de places de F^0. Nous choisissons cet ensemble tel qu'il existe une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ de F/F^0 pour laquelle le déterminant $\det(\operatorname{tr} \alpha_i\alpha_j)$ soit de valeur absolue 1 pour tout v en dehors de S_0 et pour laquelle chaque $\alpha_i \in F_{S'}$. Il est alors évident que

$$F_{S'} = \left\{ \sum_i a_i\alpha_i \;\middle|\; a_i \in F^0_{S'_0} \right\}, \qquad \mathbf{A}_F^{S'} = \left\{ \sum_i a_i\alpha_i \;\middle|\; a_i \in \mathbf{A}_{F^0}^{S'_0} \right\}.$$

Il suffit par conséquent de démontrer le lemme pour $F = F^0$. Pour $F = \mathbf{Q}$, il est évident que le lemme est valable si $S' = \{\infty\}$. Pour le corps de fonctions de $\mathbf{P}^1$, on peut prendre pour S' une seule place, n'importe laquelle.

La partie principale de la formule des traces est une somme sur les classes de conjugaison elliptiques et régulières. Nous avons observé qu'il y a un facteur commun à tout terme de la somme, le facteur $m_G\rho_G\tau(G)$ qui est égal à 1 si G est semi-simple et simplement connexe. Pour simplifier les formules nous n'incluons pas ce facteur par la suite. En effet, puisque le but principal de cet article est d'introduire la somme donnée par la formule des traces comme une somme de Poisson, il est convenable de ne considérer désormais que les groupes semi-simples et simplement connexes. En général on a une somme sur $\eta \in \mathfrak{h}$, sur $\mathfrak{B}_\eta(F)$ et sur $Z_\eta(F)$. C'est la somme sur $\mathfrak{B}_\eta(F)$ qui pose des difficultés et pour laquelle on utilise la dualité de Poisson. Les paramètres $z \in Z_\eta(F)$ et η ne sont à toutes fins utiles que des indices. Il est donc préférable de les écarter en supposant que $G = G_{\mathrm{der}}$ est semi-simple et simplement connexe.

Grâce au lemme 4.1, pour une fonction $f = \prod f_v$, où les f_v sont lisses et à support compact, le produit

$$\prod_v \operatorname{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v)$$

est 0 sauf pour un nombre fini de classes de conjugaison stables et régulières. Dans cet article comme il arrive souvent avec la formule des traces, les classes singulières sont mises à part pour être traitées plus tard lorsque les grandes lignes de l'argument sont plus claires. Elles ne le sont pas encore. Donc

$$\sum_{\gamma} L(1,\sigma_{T/G})\prod_v \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v) = \lim_{s\searrow 1}\sum L(s,\sigma_{T/G})\prod_v \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v).$$

Puisque $\big|\Delta(\gamma)\big| = \prod_v \big|\Delta(\gamma)\big|_v = 1$ pour les classes semi-simples et régulières, cette expression est égale à

$$\lim_{s\searrow 1}\sum \theta\big(\mathbf{c}(\gamma_{\mathrm{st}}); s\big). \tag{4.4}$$

Dans la somme, $a = \mathbf{c}(\gamma_{\mathrm{st}})$ ne parcourt encore qu'un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{B}(F)$, l'indice η étant omis maintenant qu'il n'y en a qu'un seul. Ce qui manque, ce sont les γ_{st} qui ne sont pas elliptiques.

Choisissons un ensemble S' qui satisfait aux conditions des lemmes 4.1 et 4.2. Nous supposons aussi que, en dehors de S', le groupe G est quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée et que f_v est la fonction caractéristique d'un sous-groupe hyperspécial. Les conditions du deuxième de ces lemmes sont indépendantes des fonctions f_v utilisées dans la formule ; celles du premier dépendent du support de ces fonctions. Lorsque nous commençons l'analyse des sommes de Poisson il faudra en tenir compte. Dans cet article ces fonctions seront fixées aussi bien que S', mais il est certain que le fait que S' dépende des fonctions f_v rendra ultérieurement l'analyse plus difficile.

Nous avons choisi S' tel que si $v \notin S'$ et si l'intégrale orbitale $\mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v) \neq 0$ alors $\big|\Delta(\gamma)\big|_v = 1$. Nous rappelons quelques formules des articles [O1, O2, O3]. Soit κ_v le corps résiduel par rapport à v. D'abord pour un tore T avec bonne réduction en une place v où $\mathfrak{d}_v = \mathcal{O}_v$, le côté droit de la formule (3.5) est égal à

$$q_v^{-\dim T}\big|T(\kappa_v)\big| = L(1,\sigma_T)^{-1}, \tag{4.5}$$

cette égalité étant la formule (1.2.6) de [O1]. Nous vérifions en plus que sous nos hypothèses sur γ, c'est-à-dire,

(i) $\big|\lambda(\gamma)\big|_v = 1$ pour tout caractère λ du sous-groupe de Cartan T et
(ii) $\big|1-\alpha(\gamma)\big|_v = 1$ pour toute racine α, on a

$$\mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v) = q_v^{-\dim G_{\mathrm{der}}}\big|G_{\mathrm{der}}(\kappa_v)\big|. \tag{4.6}$$

Cette équation résulte de deux conséquences des hypothèses (i) et (ii) sur γ :

(a) l'élément γ lui-même n'est contenu que dans un seul sous-groupe hyperspécial ;
(b) la classe de conjugaison stable de γ a une intersection non vide avec tout sous-groupe hyperspécial K de G_{der}.

Ceci est une conséquence des propriétés des immeubles rattachés à $G(F_v)$. Malheureusement, mais certainement faute d'efforts, en dépit de l'usage presque universel des immeubles, nous n'avons pas trouvé de références qui donnent exactement ce que nous cherchons. Nous continuons néanmoins. Supposons que la fonction f_v soit la fonction caractéristique du sous-groupe K et que K soit hyperspécial. Soit x le point de l'immeuble de Bruhat-Tits qui définit K. En remplaçant γ par un élément auquel il est stablement conjugué, nous pouvons supposer qu'il est contenu dans K. Si γ' est stablement conjugué à γ alors $\gamma' = g^{-1}\gamma g$, $G \in G(F^{\mathrm{sep}})$. Si γ' fixe K ou

x, alors il résulte de la première des trois conséquences, mais pour une extension finie de F, que g fixe x, mais le cocycle $\sigma \to g^{\sigma-1}$ prend alors ses valeurs dans $K = G(\mathcal{O}_v)$. Il résulte du théorème de Lang qu'il est trivial et que γ' et γ sont conjugués dans K. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v) &= \frac{1}{L_v(1,\sigma_{T/G})} \frac{\mathrm{meas}_{\mathrm{geom}} K_v}{\mathrm{meas}_{\mathrm{geom}}(K_v \cap T)} \\ &= q_v^{-\dim G_{\mathrm{der}}} \big|G_{\mathrm{der}}(\kappa_v)\big|.\end{aligned}$$

Rappelons ([O3]) que le produit

$$\Pi_{S'} = \prod_{v \notin S'} q_v^{-\dim G_{\mathrm{der}}} \big|G_{\mathrm{der}}(\kappa_v)\big|$$

converge. Il est évidemment indépendant de T. Nous posons

$$\Pi_{S'}(\gamma_{\mathrm{st}}, s) = L_{S'}(s, \sigma_{T/G})\Pi_{S'}.$$

Considérons la formule des traces, ou plutôt sa partie elliptique, qui est devenue après nos transformations la formule (4.4), pour une fonction $f = \prod f_v$ donnée et choisissons l'ensemble S' suffisamment grand. Il résulte du choix de S' que $\big|\Delta_v(\gamma)\big| = 1$ pour $v \notin S'$ de sorte que

$$\theta(\gamma_{\mathrm{st}}; s) = L_{S'}(s, \sigma_{T/G})\Pi_{S'} \prod_{v \in S'} \theta_v(\gamma_{\mathrm{st}}; s). \tag{4.7}$$

Nous avons introduit la troncature de Getz pour éviter une seule difficulté : nous ne savons pas vérifier que le comportement de la transformée de Fourier de $\theta(a; s)$, $s > 1$, permet l'application de la dualité de Poisson. Une telle possibilité est peu probable. L'équation (4.7) soulève une autre difficulté car le facteur $L(s, \sigma_{T/G})$ fait apparaître dans (4.7) le facteur $L_{S'}(s, \sigma_{T/G})$ qui dépend de γ par l'intermédiaire de T. Puisque pour un f donné il n'y a qu'un nombre fini de γ nous pouvons, en choisissant S' suffisamment grand, le choisir tel que le facteur $L_{S'}(s, \sigma_{T/G})$ est sur un intervalle ouvert $(1, 1+\epsilon)$ aussi proche de 1 que désiré et cela sans modifier le dernier facteur de (4.7). Le deuxième facteur change d'une façon uniforme, donc indépendamment de γ, et il s'approche de 1 lorsque S grandit. Puisque l'ensemble des γ qui apparaissent dans (3.25) ne change pas lorsqu'on fait grandir S', nous pouvons remplacer la somme des termes (3.17) par la somme sur le même ensemble des γ de

$$\Pi_{S'} \prod_{v \in S'} \theta_v(\gamma_{\mathrm{st}}; 1) = \Pi_{S'} \lim_{s \searrow 1} \prod_{v \in S'} \theta_v(\gamma_{\mathrm{st}}; s). \tag{4.8}$$

Si on tient compte du fait que $\Pi_{S'}$ s'approche de 1 nous pouvons aussi et pour les mêmes raisons le supprimer.[9]

[9]Nous offrons à ce stade-ci une explication brève de notre usage du mot *adélisation*. Les espaces vectoriels V sur le corps F et leur produit tensoriel $\mathbf{A}_F \otimes V$ interviennent dans la théorie analytique des nombres pour étudier, en utilisant la formule de Poisson, les sommes $\sum_{v \in V} \varphi(v)$, $\varphi = \prod_v \varphi_v$ et leur comportement asymptotique. Cette formule est un des seuls outils disponibles. Nous voulons l'utiliser pour $\theta(a; s)$. Cela nous est interdit car les fonctions θ_v ne sont pas lisses. Il apparaît par contre que leur comportement est assez bon pour que leur utilisation soit permise non pas dans le cas des produits infinis restreints des corps locaux mais dans le cas des produits tronqués. Malheureusement nous ne sommes pas en état de tout expliquer en quelques pages. Pour être francs, nous n'avons guère nous-mêmes entamé l'étude des problèmes qui ressortent de ces questions ([L4]).

Nous avons escamoté toutefois une petite difficulté. C'est que le produit infini qui définit $L_{S'}(s, \sigma_{T/G})$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle. Ce qui converge uniformément est le produit extérieur dans

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\prod_{n<q_v\leqslant n+1} L_v(s,\sigma_{T/G})\right\}.$$

Il s'agit d'une forme du théorème dit de Chebotarev dont une forme se trouve dans [IK]. Nous n'avons pas cherché d'autre référence. Il y en a beaucoup. Nous supposons par conséquent que S' est toujours un ensemble défini comme $\{\, v \mid q_v \leqslant n \,\}$, ce qui ne l'empêche pas d'être suffisamment grand.

Pour étudier la somme des termes de (4.8) qui apparaît dans la formule des traces, mais avec $\Pi_{S'}$ supprimé, donc

$$\sum \prod_{v\in S'} \theta_v(\gamma_{\mathrm{st}}; s) \tag{4.9}$$

nous pouvons utiliser la dualité de Poisson pour la paire $F_{S'} \subset \mathbf{A}_{S'}$. En effet, selon le lemme 4.1 et le choix de S', $\mathbf{c}(\gamma_{st})$ est entier en dehors de S' si $\theta_v(\gamma_{\mathrm{st}}; 1) \neq 0$ pour tout $v \in S'$. Par conséquent, la somme (4.9) s'écrit

$$\sum_{b\in\mathfrak{B}_{S'}} \prod_{v\in S'} \theta_v(b; s), \tag{4.10}$$

où $\mathfrak{B}_{S'}$ est défini comme $\operatorname{Spec} F_{S'}[b_1, \dots, b_r]$.

Notre affirmation que nous pouvons utiliser la dualité de Poisson est optimiste et, en plus, pas encore tout à fait correcte. D'abord les fonctions $\theta_v(b; s)$ ne sont pas lisses. Elles sont singulières sur la sous-variété $D(b) = 0$. Il est toutefois probable qu'elles sont suffisamment lisses, donc que leurs singularités sont assez modérées, pour que la somme de Poisson duale

$$\sum_{b\in\mathfrak{B}_{S'}} \prod_{v\in S'} \widehat{\theta}_v(b; s) \tag{4.11}$$

converge absolument et soit égale à la somme de Poisson pour la fonction $\prod_{S'} \theta_v(b; s)$. L'un de nous espère vérifier ceci pour SL(2) dans un prochain article ([L4]). Il n'y a pas de raison de croire que le résultat sera tellement difficile même pour un groupe arbitraire. Les fondements de la théorie nécessaire se trouvent en toute probabilité dans [Sh, V].

Il sera utile par la suite d'avoir des notations plus précises,

$$\theta_{S'}(b; s) = \prod_{v\in S'} \theta_v(b; s), \quad \widehat{\theta}_{S'}(b; s) = \prod_{v\in S'} \widehat{\theta}_v(b; s). \tag{4.12}$$

Une deuxième difficulté est que nous avons écarté dès le début les b qui ne définissent pas un tore elliptique. Nous pouvons les ajouter à (4.10). Mais alors il faut ensuite les soustraire, car ceux-ci posent des problèmes de convergence. En particulier pour eux la fonction $L_{S'}(s, \sigma_{T/G})$ converge vers l'infini lorsque S' devient de plus en plus grand et $s \searrow 1$. On peut toutefois supposer que ces divers infinis se compenseront. Par exemple pour le groupe SL(2), il est naturel en examinant le comportement des sommes telles que (1.4) de soustraire la contribution des représentations qui sont les transferts de représentations des groupes diédraux et d'y ajouter même le tore déployé, ce qui rend le processus d'addition et de soustraction plus naturel. Il reste néanmoins un casse-tête. Comment dans la formule ainsi obtenue s'annulent mutuellement les deux infinis ? On revient à cette question dans [L4].

Pour le faire il faudra introduire la notion de transfert stable $f = f^G \mapsto f^H$ et des facteurs de transfert. À la fin on étudiera non pas les sommes de Poisson pour la seule fonction θ ou $\widehat{\theta}$ mais pour des différences $\theta - \varphi$ et $\widehat{\theta} - \widehat{\varphi}$, où φ est défini à partir des transferts f^H. Même sans φ nous pouvons examiner le terme $\widehat{\theta}(0; s)$ qui reste fini lorsque $s \to 1$ même si on ajoute les termes rattachés aux tores non-elliptiques. Nous verrons, mais non pas dans cet article, que la contribution de $\widehat{\varphi}(0; s)$ sera 0.

Avant de commencer rappelons la suite de modifications. Nous introduisons le paramètre $s > 1$, qu'il faut faire converger vers 1. Ensuite nous introduisons l'ensemble S' suffisamment grand et nous passons à la somme tronquée. Pour cette somme tronquée nous utilisons la dualité de Poisson. Mais alors le terme

$$\widehat{\theta}_{S'}(0) = \lim_{s \to 1} \widehat{\theta}_{S'}(0; s)$$

dans la somme duale dépend de S'. Pour obtenir une valeur indépendante de S', il faut passer à la limite double[10]

$$\widehat{\theta}(0) = \lim_{\substack{S' \to \infty \\ s \searrow 1}} \widehat{\theta}_{S'}(0; s), \tag{4.13}$$

dans laquelle S' devient de plus en plus grand de la façon prescrite. C'est cette valeur limite dont il est question dans la dernière section de cet article. Il faudra passer à cette limite double non pas seulement pour le terme principal mais aussi pour la somme $\sum_{b \neq 0} \widehat{\theta}_{S'}(b; s)$ qui reste. Pour elle il faudra traiter non pas ce terme lui-même mais la différence

$$\sum_{b \neq 0} \widehat{\theta}_{S'}(b; s) - \sum_{b \neq 0} \widehat{\phi}_{S'}(b; s).$$

On n'entreprendra l'étude des termes $\widehat{\phi}_{S'}(0; s)$ que dans un prochain article.

5. Le terme dominant

À présent l'évidence la plus persuasive de la promesse de notre stratégie est qu'elle permet d'isoler la contribution dominante pour G semi-simple et simplement connexe ; en effet pour n'importe quel groupe qui satisfait à nos conditions, mais il n'y a que des questions formelles qui distinguent le cas $G = G_{\mathrm{der}}$ du cas général. Il s'avère que ce terme dominant est donné par $\widehat{\theta}(0)$.

Nous supposons que $G = G_{\mathrm{der}}$. En plus G est quasi-déployé presque partout, même partout. Par conséquent le sous-groupe dérivé $G_{\mathrm{der}}(F_v)$ est $G_{\mathrm{der}}(F_v)$ lui-même (Nous n'avons pas cherché la meilleure référence, mais [St2] est une possibilité). Il en résulte que la seule représentation automorphe de dimension 1 de $G_{\mathrm{der}}(\mathbf{A}_F)$ est la représentation triviale π_0. Selon la formule (1.3), le terme dominant pour une représentation ρ de ${}^LG$ et pour la fonction f de (1.14) est alors

$$\prod_i \zeta_S(s+i) \prod_{v \in S} \operatorname{tr} \pi_v(f_v) \tag{5.1}$$

[10]Un rapporteur a été troublé par cette limite double. Avec raison. En effet l'ordre des limites est indifférent. Ces limites, en particulier, la limite $s \searrow$ sont discutées avec plus de soin dans [L4]

où la variable s est comme dans la section 1. Les entiers i sont ceux donnés par le plongement ϕ de SL(2) dans ${}^LG$ rattaché à l'élément unipotent principal. Les i sont la moitié des poids de

$$z \to \rho \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right).$$

L'expression (5.1) est égale à $\mathrm{tr}\big(\pi_0(f)\big)$, donc à

$$\int_{G(\mathbf{A}_F)} f(g)\,dg = \prod_v \int_{G(F_v)} f_v(g_v)\,dg_v.$$

La prochaine formule découle de la formule (3.31),

$$\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\,dg_v = \int_{\mathfrak{A}(F_v)} \theta_v(b_v;1)\,db_v, \tag{5.2}$$

ou plus généralement de

$$\int_{G(F_v)} \frac{L_v(s,\sigma_{T/G})}{L_v(1,\sigma_{T/G})} f_v(g_v)\,dg_v = \int \theta_v(b_v;s)\,db_v = \widehat{\theta}_v(0;s). \tag{5.3}$$

Nous soulignons que la fonction dans cette intégrale dépend de b_v ou de g_v par l'intermédiaire de $T = T_{g_v}$, le centralisateur de l'élément régulier g_v. Il est convenable de l'écrire comme

$$f_v(g_v;s) = \frac{L_v(s,\sigma_{T/G})}{L_v(1,\sigma_{T/G})} f_v(g_v).$$

Observons que le quotient $L(s,\sigma_{T/G})/L(1,\sigma_{T/G})$ est borné pour $1 \leqslant s \leqslant 1+\epsilon$ car il est le produit de facteurs $(1-\alpha/q_v)/(1-\alpha/q_v^s)$ où $|\alpha| = 1$ où les α appartiennent à un ensemble fini de racines de l'unité. Le seul cas même un peu délicat est $\alpha = 1$ mais alors $1 - 1/q_v \leqslant 1 - 1/q_v^s$ pour $s \geqslant 1$.

Le lemme suivant est équivalent à la formule (4.6) mais dans une forme qui plaît plus aux géomètres.

Lemme 5.4. *Soit $v \in |F|$ une place où G a une réduction réductive. Le morphisme $\mathbf{c} : G \to \mathfrak{A}$ s'étend alors à $\mathcal{O}_v$. Supposons que les formes volumes ω_G et $\omega_{\mathfrak{A}}$ s'étendent en des formes partout non nulles sur leur $\mathcal{O}_v$-modèle. Soit f_v la fonction caractéristique du compact $G(\mathcal{O}_v)$. Pour tout $b_v \in \mathfrak{A}^{\mathrm{rs}}(\mathcal{O}_v)$, on a alors*

$$\theta_v(b_v;1) = q_v^{-\dim(G)+\dim(T)} \frac{|G(k_v)|}{|T(k_v)|} = L_v(1,\sigma_{T/G}) \frac{G_{\mathrm{der}}(\kappa_v)}{q_v^{\dim(G_{\mathrm{der}})}}. \tag{5.5}$$

Ici T est le centralisateur d'une section $g_v \in G^{\mathrm{rs}}(\mathcal{O}_v)$ au-dessus de b_v et un tore défini sur $\mathcal{O}_v$.

Le résultat qu'il s'agit de démontrer est le suivant.

Proposition 5.6. *On a l'égalité*

$$\lim_{\substack{S' \to \infty \\ s \searrow 1}} \widehat{\theta}_{S'}(0,s) = \int_{G(\mathbf{A})} f(g)\,dg.$$

Le produit infini

$$\prod_v \int_{G(F_v)} f(g_v)\,dg_v$$

converge. En plus, pour un v donné

$$\lim_{s\to 1}\widehat{\theta}_v(0;s)=\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\,dg_v.$$

Il s'agit donc de montrer que pour un S'' donné fini

$$\lim_{\substack{S'\to\infty\\ s\searrow 1}}\left\{\prod_{S'-S''}\widehat{\theta}_v(0;s)-\prod_{S'-S''}\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\,dg_v\right\}=0.$$

On choisit naturellement S'' de sorte que tous les ennuis possibles sont écartés.

Il s'agit de deux produits, dont le deuxième vaut

$$\prod_{S'-S''}\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\,dg_v=\prod_{S'-S''}\frac{\bigl|G_{\mathrm{der}}(\kappa_v)\bigr|}{q_v^{\dim G_{\mathrm{der}}}}=\prod_{S'-S''}\Bigl(1+O(q_v^{-2})\Bigr)$$

de sorte qu'il converge absolument. Rappelons que nous avons supposé que $G=G_{\mathrm{der}}$. Pour terminer la démonstration il ne faut qu'une majoration semblable

$$\widehat{\theta}_v(0;s)=1+O(q_v^{-3/2}) \tag{5.7}$$

des facteurs dans le premier produit.

Nous avons constaté que les fonctions $f_v(g_v;s)$ sont uniformément majorées et portées par les compacts $G(\mathcal{O}_v)$. Toutefois, elles sont assez compliquées et deviennent très irrégulières lorsqu'on s'approche du diviseur donné par le carré D de la fonction Δ. Puisque cette fonction est invariante, elle est aussi une fonction, que nous appelons le *discriminant*, sur la base de Steinberg-Hitchin. Pour le groupe $\mathrm{SL}(2)$, si le polynôme caractéristique est X^2-bX+1 et les valeurs propres α et α^{-1}, alors $D=(\alpha^2-1)(\alpha^{-2}-1)=4-b^2$ est un diviseur sur la ligne droite à deux points simples, au moins si la caractéristique n'est pas égale à 2 ! Nous escamotons ce cas dans cet article.

La démonstration de (5.7) est fondée sur les observations suivantes. D'abord, sur l'ouvert compact $G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ (l'indice « tvl » veut dire transversal) de $G(\mathcal{O}_v)$ des éléments g_v ayant une réduction $\overline{g}_v$ régulière mais pas nécessairement semi-simple et dont le discriminant $D(g_v)$ a une valuation plus petite ou égale à 1, la valeur $f_v(g_v;s)$ ne dépend que de $\overline{g}_v$. Deuxièmement, cette valeur s'exprime facilement à l'aide d'un faisceau ℓ-adique sur le groupe G sur le corps κ_v. Enfin, le complément de cet ouvert dans $G(\mathcal{O}_v)$ est de mesure trop petite pour nuire à la majoration (5.7).

Quoique les géomètres n'en ressentiront pas le besoin, pour faciliter la compréhension de l'argument par les spécialistes de la formule des traces ou des formes automorphes, nous rappelons au fur et à mesure les propriétés que nous utilisons, en nous plaçant dans le cadre du groupe $\mathrm{SL}(2)$ et en les exprimant d'une façon concrète. Par exemple, pour $\mathrm{SL}(2)$ l'ouvert $G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ est défini par la condition qu'une valeur propre α satisfait à $|1-\alpha^2|_v\geqslant q_v^{-1/2}$. Donc, si la caractéristique résiduelle n'est pas 2, les α qui sont exclus, ou plutôt pour lesquels un argument plus délicat est exigé, sont ceux pour lesquels $|1\mp\alpha|_v$ égale 1 ou $q_v^{-1/2}$. Comme en général, pour $\mathrm{SL}(2)$ *transversal* veut dire que les valeurs propres de g dans $\mathfrak{g}_g\backslash\mathfrak{g}$ assument des valeurs suffisamment distantes de 1. Cependant pour le cas général, la définition précise est plus compliquée.

Lemme 5.8. *Le complémentaire de $G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ dans $G(\mathcal{O}_v)$ est de mesure $O(q_v^{-2})$.*

Démonstration. Soit G^{sing} le fermé de Zariski de G complémentaire de l'ouvert G^{reg} des éléments réguliers, semi-simple ou pas. D'après Steinberg ([St1]) on sait que G^{sing} est un fermé de codimension trois. Par exemple, pour $G = \mathrm{SL}(2)$ il est $\{\pm I\}$.

La fonction discriminant D définit un diviseur réduit $\operatorname{div} D$ sur T/W, donc sur la base de Steinberg-Hitchin $\mathfrak{A}$. Notons $\operatorname{div} D^{\mathrm{sing}}$ le sous-schéma fermé de $\operatorname{div} D$ où le discriminant s'annule avec un ordre au moins égal à deux, donc où sa différentielle est nulle. Ce fermé est généralement de codimension deux, donc vide si $G = \mathrm{SL}(2)$, mais il y a des exceptions. Sauf pour ces exceptions, son image réciproque dans G^{reg} est de codimension au moins deux puisque le morphisme $\mathbf{c} : G^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{A}$ est lisse. Puisque G^{sing} est de codimension trois, la réunion de $\mathbf{c}^{-1}(\operatorname{div} D^{\mathrm{sing}}) \cup G^{\mathrm{sing}}$ est un sous-schéma fermé de codimension au moins deux de G.

Le cas exceptionnel le plus simple est le groupe $\mathrm{SL}(2)$ lorsque la caractéristique est 2 et $D = b^2$ car alors $\operatorname{div} D^{\mathrm{sing}}$ contient le point $b = 0$. Pour éviter ce genre de problème il suffit d'exiger que la caractéristique soit plus grande que 2. L'argument qui suit est alors valable. Nous soulignons cependant que la théorie recherchée est censée être valable sans exception. Malheureusement pour le moment nous n'avons pas de démonstration complète, mais nous avons déjà mis de côté pour une autre occasion quelques cas de petite caractéristique.

Pour tout $\overline{g}_v \in G(\kappa_v)$, l'ensemble des éléments $g_v \in G(\mathcal{O}_v)$ de réduction $\overline{g}_v$ est de mesure $q^{-\dim(G)}$. Par conséquent, sous nos hypothèses, l'ensemble des $g_v \in G(\mathcal{O}_v)$ ayant une réduction dans $\mathbf{c}^{-1}(\operatorname{div} D^{\mathrm{sing}}) \cup G^{\mathrm{sing}}$ est de mesure $O(q_v^{-2})$ lorsque q_v tend vers l'infini.

Notons G' l'ouvert complémentaire de $\mathbf{c}^{-1}(\operatorname{div} D^{\mathrm{sing}}) \cup G^{\mathrm{sing}}$ dans G. Soit g_v dans $G(\mathcal{O}_v)$ de réduction $\overline{g}_v \in G'(\kappa_v)$. Si $\overline{g}_v \notin \mathbf{c}^{-1}(\operatorname{div} D - \operatorname{div} D^{\mathrm{sing}})$, le discriminant de $\overline{g}_v$ a la valuation nulle et g_v appartient à G^{tvl}. Si $\overline{g}_v \in \mathbf{c}^{-1}(\operatorname{div} D - \operatorname{div} D^{\mathrm{sing}})$, la différentielle de D induit une forme linéaire non nulle sur l'espace tangent de $\overline{g}_v$. Il s'ensuit que la fraction d'éléments à réduction $\overline{g}_v$ que l'on obtient en déformant un g_v donné est $1/q_v$ de sorte que l'ensemble des $g_v \in G^{\mathrm{reg}}(\mathcal{O}_v) - G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ ayant la réduction $\overline{g}_v$ est de mesure $q_v^{-\dim(G)-1}$. En plus, les points de G annulés par le discriminant forment un diviseur de G. Puisque le diviseur $\mathbf{c}^{-1}(\operatorname{div} D - \operatorname{div} D^{\mathrm{sing}})$ est de codimension un, le complémentaire de $G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ dans $G'(\kappa_v)$ a aussi une mesure $O(q_v^{-2})$ lorsque q_v tend vers l'infini. Le lemme s'en déduit. □

Observons que par définition G^{tvl} est contenu dans $G^{\mathrm{rs}}(F_v)$, donc dans l'image réciproque $\mathbf{c}^{-1}(\mathfrak{A}^{\mathrm{rs}})(F_v)$. Considérons $\pi : \widetilde{G} \to G$, la résolution simultanée de Grothendieck-Springer dont la restriction à G^{rs} est un morphisme fini $\pi^{\mathrm{rs}} : \widetilde{G}^{\mathrm{rs}} \to G^{\mathrm{rs}}$. Rattachés à un point de $\widetilde{G}^{\mathrm{rs}}$ il y a un tore maximal et un sous-groupe de Borel qui le contient. Il y a évidemment une identification canonique de l'ensemble des sous-groupes de Borel qui contient un tore maximal donné avec le groupe de Weyl. L'image directe $\pi^{\mathrm{rs}}_*\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ est donc un faisceau ℓ-adique muni d'une action de W. Nous pouvons introduire le faisceau

$$\left(\pi^{\mathrm{rs}}_*\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes X^*(T)\right)^W, \tag{5.9}$$

mais nous avons besoin d'un objet plus délicat.

Il faut utiliser des résultats de l'article [N] démontrés sous l'hypothèse que la caractéristique résiduelle ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl, une hypothèse que nous admettons pour les fins de cet article lacunaire. L'application de g sur la partie semi-simple de sa décomposition comme produit d'un élément semi-simple et d'un élément unipotent, donne une application $G \to T/W$. Il y a aussi une application $\widetilde{G} \to T$. Elles donnent

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & T/W \end{array}$$

Ce diagramme donne par restriction un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G}^{\mathrm{reg}} & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{\mathrm{reg}} & \longrightarrow & T/W \end{array}$$

L'argument est le suivant. Le morphisme $G^{\mathrm{reg}} \to T/W$ est lisse et après changement de base le morphisme $G^{\mathrm{reg}} \times_{T/W} T \to T$ est aussi lisse. Par conséquent, le produit fibré est aussi lisse et donc normal. On a un morphisme $\widetilde{G}^{\mathrm{reg}}$ vers le produit fibré qui est d'une part fini, car on sait que $\widetilde{G}^{\mathrm{reg}} \to G^{\mathrm{reg}}$ est fini, mais aussi birationnel car le diagramme est clairement cartésien au-dessus de G^{rs}. La normalité implique maintenant que le morphisme

$$\widetilde{G}^{\mathrm{reg}} \to G^{\mathrm{reg}} \times_{T/W} T$$

est un isomorphisme. Il en résulte que le groupe W agit sur $\widetilde{G}^{\mathrm{reg}}$; cette action ne s'étend pas sur $\widetilde{G}$.

Il est alors permis d'introduire le faisceau

$$\mathcal{L} = \left(\pi_*^{\mathrm{reg}} \overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes X^*(T)\right)^W .$$

La restriction (5.9) de $\mathcal{L}$ à l'ouvert G^{rs} est un système local dont la monodromie est donnée par le revêtement étale galoisien géométriquement $\widetilde{G}^{\mathrm{rs}} \to G^{\mathrm{rs}}$ et l'action de W habituelle sur $X^*(T) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On a supposé G semi-simple. Par conséquent la représentation de W sur $X^*(T)$ ne contient pas de représentation triviale et $\mathcal{L}$ n'admet pas un faisceau constant comme sous-quotient.

Puisque G est simplement connexe, les centralisateurs des éléments réguliers semi-simples sont connexes et la restriction du schéma des centralisateurs I sur G à l'ouvert G^{rs} est un tore $I \times_G G^{\mathrm{rs}}$. Les caractères de ce tore forment un système local sur G^{rs} qui après le changement de coefficients à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, est isomorphe à $\mathcal{L}$. Nous n'avons pas trouvé de références pour cette affirmation mais l'analogue dans le cas de l'algèbre de Lie a été démontré par Donagi et Gaisgory dans [DG]. La proposition 2.4.7 de [N] est aussi une référence commode. La démonstration dans le cas d'un groupe simplement connexe est tout à fait semblable à celle pour l'algèbre de Lie.

Si $g_v : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \to G$ est un trait transversal au diviseur discriminant, l'image réciproque de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ dans $\widetilde{G}$ est une réunion de traits, autrement dit, un revêtement fini et normal de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$. L'argument justifiant cette affirmation peut être trouvé dans la démonstration de 4.7.3 de [N]. Le lemme suivant, qui décrit la fibre de $\mathcal{L}_{\overline{g}_v}$ à la réduction $\overline{g}_v$ de g_v, s'en déduit.

Lemme 5.10. *Soit $g_v \in G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$. Notons $X^*(T_{g_v})$ le module des caractères du tore T_{g_v}. Il est défini sur une extension algébrique finie de F_v et muni d'une action continue du groupe de Galois de F_v. La partie $\left(X^*(T_{g_v}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_\ell\right)^{I_v}$ invariante sous* *le groupe d'inertie est alors isomorphe à la fibre $\mathcal{L}_{\overline{g}_v}$ comme $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espaces vectoriel munis d'une action de Frobenius.*

Grâce à ce lemme nous pouvons introduire au lieu de la fonction $f_v(g_v, s)$ la fonction $f'_v(g_v, s)$ supportée par $G^{\mathrm{reg}}(\mathcal{O}_v)$ qui associe à $g_v \in G^{\mathrm{reg}}(\mathcal{O}_v)$ la valeur

$$\begin{aligned} f'_v(g_v, s) &= 1 - \mathrm{tr}(\mathrm{Fr}_v, \mathcal{L}_{\overline{g}_v})q_v^{-1} + \mathrm{tr}(\mathrm{Fr}_v, \mathcal{L}_{\overline{g}_v})q_v^{-s} \\ &= 1 - \mathrm{tr}(\mathrm{Fr}_v, \mathcal{L}_{\overline{g}_v})(q_v^{-1} - q_v^{-s}). \end{aligned}$$

Il suffit de comparer l'intégrale des deux fonctions sur l'ouvert $G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ car l'intégrale de l'une ou de l'autre sur son complément est $O(q_v^{-2})$. Sur $G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)$ leur différence est aussi majorée par q_v^{-2}.

Pour démontrer la proposition 5.6, nous observons d'abord que

$$\int_{G^{\mathrm{tvl}}(\mathcal{O}_v)} dg_v = \int_{G(\mathcal{O}_v)} dg_v + O(q_v^{-2}) = q_v^{-\dim G}\big|G(\kappa_v)\big| + O(q_v^{-2})$$

et que

$$q_v^{-\dim G}\big|G(\kappa_v)\big| = 1 + O(q_v^{-2}). \tag{5.11}$$

Cette dernière égalité se trouve dans les articles d'Ono sur les nombres de Tamagawa.

Puisque la codimension de G^{reg} est 3, pour terminer la démonstration de la proposition 5.6, il suffit de vérifier la majoration,

$$q_v^{-\dim G} \sum_{\overline{g}_v \in G^{\mathrm{reg}}(\kappa_v)} \mathrm{tr}(\mathrm{Fr}_v, \mathcal{L}_{\overline{g}_v}) = O(q_v^{-1/2}). \tag{5.12}$$

C'est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 5.13. *Lorsque $q_v \to \infty$, on a la majoration*

$$\sum_{\overline{g}_v \in G^{\mathrm{reg}}(\kappa_v)} \mathrm{tr}(\mathrm{Fr}_v, \mathcal{L}_{\overline{g}_v}) = O(q_v^{\dim(G)-1/2}).$$

D'après la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz pour le faisceau $\mathcal{L}$ sur le schéma G^{reg} restreint à Spec_{κ_v}, l'expression ci-dessus est égale à

$$\sum_{i=0}^{2\dim(G)} (-1)^i \,\mathrm{tr}\Big(\mathrm{Fr}, \mathrm{H}_c^i(G^{\mathrm{reg}} \otimes_{\mathcal{O}_v} \overline{\kappa}_v, \mathcal{L})\Big).$$

Notons que les dimensions de ces groupes de cohomologie sont indépendantes de la place v à l'exception d'un nombre fini d'entre elles. D'après le théorème principal de [D], les valeurs absolues des valeurs propres de Frobenius sur $\mathrm{H}_c^i(G^{\mathrm{reg}} \otimes_{\mathcal{O}_v} \overline{\kappa}_v, \mathcal{L})$ sont majorées par $q_v^{i/2}$. Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{H}_c^{2\dim(G)}(G^{\mathrm{reg}}, \mathcal{L}) = 0$. Mais cela résulte du fait que $\mathcal{L}$ n'admet pas de système local trivial comme sous-quotient.

Pour le groupe SL(2) et une caractéristique résiduelle impaire la démonstration de la proposition 5.6 peut se faire d'une façon élémentaire. Il y a trois types de tore sur F_v, déployé, non ramifié et ramifié. Leurs contributions à l'intégrale de la fonction constante 1 sont de la forme

$$a_1 + a_2 q_v^{-1} + O(q_v^{-2}), \quad b_1 + b_2 q_v^{-1} + O(q_v^{-2}) \quad \text{et} \quad c_2 q_v^{-1} + O(q_v^{-2}).$$

On vérifie à la main que $a_1 + b_1 = 1$ et $a_2 + b_2 + c_2 = 0$. Leurs contributions au coefficient de $q_v^{-1} - q_v^{-s}$ sont respectivement de la forme a_3, b_3 et 0. On vérifie, encore à la main, que $a_3 + b_3 = O(q_v^{-1})$. C'est ce deuxième calcul qui exige un traitement bien plus raffiné — la formule de Grothendieck-Lefschetz — dans le cas général.

Remerciements. La recherche de Edward Frenkel a été subventionnée par DARPA (subvention no. HR0011-09-1-0015) et Fondation Sciences mathématiques de Paris. Ngô Bảo Châu a reçu le support de Simonyi Foundation et de NSF via la subvention DMS-1000356.

Références

[A1] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures* Astérisque, 171–172 (1989) pp. 13–71.

[A2] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: global motivation*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 1–75, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[A3] J. Arthur, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[A4] J. Arthur, *The Endoscopic Classification of Representations: Orthogonal and Symplectic Groups*, AMS Colloquium Publications, à paraître dans American Mathematical Society Colloquium Publications. [Colloquium Publications, American Mathematical Society, 2013, vol. 61.]

[AEK] J. Arthur, D. Elwood et R. Kottwitz ed., *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Proceedings of the Clay Mathematics Institute 2003 Summer School held in Toronto, ON, June 2–27, 2003, Clay Mathematics Proceedings, **4**, American Mathematical Society, Providence, RI, Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2005.

[BC] A. Borel et B. Casselman ed., *Automorphic forms, representations, and L-functions*, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society (Twenty-fifth Summer Research Institute) held at Oregon State University, Corvallis, Ore., July 11–August 5, 1977, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **XXXIII**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. [doi:10.1090/pspum/033.2.]

[BT] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. de l'IHES, 27 (1965) pp. 55–150.

[D] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Pub. Math. de l'IHES 52 (1980) pp. 137–252.

[DG] R. Y. Donagi et D. Gaitsgory, *The gerbe of Higgs bundles*, Transformation groups, vol. 7 (2002) pp. 109–154.

[FN] E. Frenkel et B. C. Ngô, *Geometrization of trace formulas*, prépublication disponible à `https://arxiv.org/abs/1004.5323`. [Bull. Math. Sci. (2011) 1:129–199.]

[H] Jochen Heinloth, *Uniformization of $\mathcal{G}$-bundles*, Math. Ann. **347** (2010), no. 3, 499–528.

[IK] Henryk Iwaniec et Emmanuel Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **53**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, xii+615 pp.

[K1] R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. 49 (1982) pp. 785–806.

[K2] R. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984) pp. 611–650.

[K3] R. Kottwitz, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. (2) **127** (1988) pp. 629–646.

[LL] J.-P. Labesse et R. Langlands, *L-indistinguishability for* SL(2), J. Can. de Math. **31** (1979), no. 4, pp. 726–785. [doi:10.4153/CJM-1979-070-3.]

[L1] R. P. Langlands, *Les débuts d'une formule des traces stable*, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, **13**, Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1983, v+188 pp.

[L2] R. P. Langlands, *Beyond endoscopy*, Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 611–697, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004. [doi:10.56021/9780801878602.]

[L3] R. P. Langlands, *Reflexions on receiving the Shaw prize*, disponible à `https://publications.ias.edu/rpl/bibliography`. [pp. 297–308 in *On certain L-functions*, edited by J. Arthur et al., Clay Math. Proc. **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. MR 2012d:22001 Zbl 1242.22001.]

[L4] R. P. Langlands, *Singularités et transferts*, en préparation. [Ann. Math. Québec (2013) 37:173–253. doi :10.1007/s40316-013-0008-5.]

[Lm1] G. Laumon, *Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, pp. 309–359.

[Lm2] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 65 (1987), pp. 131–210.

[LMB] G. Laumon et L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3**, Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **39**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, xii+208 pp.

[LO1] Yves Laszlo et Martin Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks. I. Finite coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 107 (2008), 109–168.

[LO2] Yves Laszlo et Martin Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks. II. Adic coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 107 (2008), 169–210.

[MV1] I. Mirković et K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 1, 95–143.

[MV2] I. Mirković et K. Vilonen, *Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands duality*, Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 1, 13–24.

[N] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 111 (2010), 1–169.

[O1] T. Ono, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math., **74** (1961) pp. 101–139.

[O2] T. Ono, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math., **78** (1963), no. 2, pp. 47–73.

[O3] T. Ono, *On the relative theory of Tamagawa numbers*, Ann. of Math., **82** (1965), no. 2, pp. 88–111.

[R] M. Raynaud, *Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes*, Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 286, 129–147. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Sh] Joseph Shalika, *A theorem on semi-simple $\mathfrak{p}$-adic groups*, Ann. of Math. (2) **95** (1972) 226–242.

[St1] Robert Steinberg, *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Pub. Sci. de l'IHES 25 (1965) pp. 49–80.

[St2] Robert Steinberg, *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups (after A. Borel and J. Tits)*, Séminaire Bourbaki, 25ème année (1972/1973), Exp. No. 435, pp. 307–326, Lecture Notes in Math., Vol. 383, Springer, Berlin, 1974.

[V] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 576. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, v+521 pp.

[WS] Wang Song, *Dimension Data, Local Conjugacy and Global Conjugacy in Reductive Groups*, prépublication disponible à `https://www.mcm.ac.cn/people/ws.aspx`. [`https://arxiv.org/abs/0707.0144`]

[W1] A. Weil, *Adeles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, **23**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982, iii+126 pp.

[W2] A. Weil, *Basic number theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, xviii+315 pp.

Compiled on May 1, 2026.