Об аналитическом виде геометрической теории автоморфных форм[1]

Robert Langlands

Had we but world enough, and time, ...
Andrew Marvell, 1621-1678

Содержание

[1]Запасное заглавие – несчастья и тяжёлые испытания пожилого математика в дебрах дифференцьной геометрии. Хотя я старый, статья стала своего рода Bildungsroman!

I. **Введение.** Геометрическая теория автоморфных форм ввела руссками математиками, на пример Владимиром Дринфельдом, и развитая русско-американской школой,[2] но этой теорией я недоволен. Теперешная арифметическая теория автоморфных форм возникла в шестнадцатых годах двадцатого века из четырёх источика: из возобновления Зигелём исследований девятнадцатого века; из теории Гекке; из теории полей классов; из теории представлениях группы в которой имени Фробениус, Герман Вейль, Хариш-Чандра важны. В этой арифметической теории незаменимая составная часть собственные числа Гекке. Пользовавшись этими числами мы определяем чрезвычайно важные L-функции. Эти числи собственные числи операторов Гекке. Эти операторы определёны в арифметической теории но не в той геометрической теории которая представлена Гайцгори или Френкелём.[3] Трудность та, что в теории русско-американской школой собственные векторы замены собственнами пучками, которых существования трудно, до сих пор невозможно, доказать. Сверх того, в этой теории описание классифицирующего пространства подавлено понятями из теории пучкей, стеков и топологическими вопросами введеннемыми чтобы сотворить теорию классифицирующего пространства которая вполнит по большей части функториальные требованиия Гротендика. Эта теория важна но по моему она не та теория которая нужна для высказывания и доказательства геометрического вида того которое я назвал в арифметической теории функториальностей и взаимностей. Для причин которые я объясню поже, может быть что в геометрической теории лучше сказать двойственность, но функториальность следствие двойственностей. Одна цель арифметической теории доказать функториальность и пользуявшись этой функториальностью построить автоморную группу Галуа, но в геометрической теории эта группа Галуа дана. Нужно однако доказать что данная группа обладает желанными свойствами. То что нужно в основой геометрической теорий, как она вводима в этой статии, общеприятные определения из сферы обществ, пространстов и мер.

Цель этой статья описать то, что кажется мне соответствующий аналог арифметической теории, и доказать это для интересного, даже разительного, но легко доступного случая: группа $GL(2)$ над эллиптической кривой. Но есть две геометрические теории, на поле Галуя[4] или, как в этой статье, над поле комплексных чисел. Я внимательно не рассмотрел ни [G] ни [L], но мне кажется(!) что [L] предлагает для поля функций над конечном поле теорию которая совместимая с Розетским камнём Андрей Вейля[5]. Кроме того, и по-моему очень интересно, согласно [L, Th. 0.1] для такого поля автоморная группа Галуа изоморфна $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. С другой стороны, точно как теорема Пэли-Винер или теория преобразования Фурье для обобщенных функций Шварца не заменают L^2-теорию преобразования Фурье на $\mathbf{R}$ или на $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3, \dots$, по-моему теория предложенная в [G] не заменяет L^2-теорию операторов Гекке. Я думаю что есть такая теория для каждой редуктивной группы на каждой поверхности Римана. Порой я буду касаться обший случай но я серьёзно о нём не размыслил. Цель этой статьи описание теории для группы $GL(2)$ над эллиптической кривой для которых она

[2][G] Доклад Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique, Sém. Bourbaki, Janvier, 2016 написан Денисом Гайцгори удобная ссылка.

[3][F] Lectures on the Langlands program and conformal field theory, Frontiers in number theory, physics, and geometry.

[4][L] V. Lafforgue, Chtoucas et programme de Langlands pour les corps de fonctions (http://arxiv.org/abs/1404.3998)

[5][W] De la métaphysique aux mathématiques, Oeuvres scientifiques, vol. II стр. 408-412.

уже доступнее. Хотя я могу представлять себе общий спектральный вид геометрической теории я не могу представлять себе теорий которая объединяет её с теорией описанной в [G]. Как последное наблюденое, геометрическая теория относится отчасти к комрлексно-дифферентиальной геометрии, но эта статья написана для специалистов по теории автоморфных форм, которам эта геометрическая теория может быть неизвестна. Следовательно, по такой собственной слабости, я включил некоторые элементарные объяснения понятий в [AB]. Эти объяснения часто растянутые отклонения. Сверх того я позволил себе многие отступления, некоторые довольно элементарные, исходя из предположения, что большинство читателей будут иметь как можно меньше опыта с дифференциальной геометрией, так как я.

Концовка несколько резкая, но появление решительного знака в месте, где я меньше всего ожидал его, подтвердил мою уверенность в правильности моего убеждения. Мне больше не нужно было убеждать в этом.

Изложение недостаточно, но тема нова, наше понимание несовершено, и полное объяснение было бы неуместным.

Автоморфная группа Галуа. Так как гпавная цель этой статьи введение в геометрическую теорию и временное построение такого математического предмета, я предпочитаю определять её тотчас. Эта введение такой группы, что она поставляется с предписаниями для превращения от гоморфизма, который от неё к группе ^LG, к собственному сопряженному сечению. Эти сечения определены ниже. Эти предписания могут быть сложными. На пример они пользуются теоремой Атьи-Ботта. В любом случае, мы подверждаем закон взаимность для $GL(2)$ и эллиптической кривой, сначала вычисляя соственные значение операторов Гекке, а затем звязности Янга-Миллса. Не предполагая, что предприятие каким-либо образом имеет значение достижения Дедекинда, но просто как легкомысленное замечание, я предлагаю в качестве другого названия, Was ist und was soll die geometrische Theorie der automorphen Formen? ■[6]

Замечания о слоге и содержаний этой статьи. Она написана для математиков, знакомых с теорией автоморфных форм над числовыми полями но, как и я, с небольшим знанием дифференциальной геометрии, в частности векторных расслоений и связностей. Следовательно значительное пространство посвящено простым или известным понятиям. Некоторого знакомства с ними недостаточна, как я узнавал при изучении [A] и [AB]. Объяснения этих авторов являются краткими и гладкими, но редко точными и редко подробно, по-видимому, потому, что они ожидали от читателя некоторого знакомства с основными понятиями. Я думал, что у меня это было, но сначала оно было недостаточно для точного понимания их выводы или даже их основных утверждения. Поэтому я добавил сюда все дополнительные размышления, которые я нашёл необходимыми или полезными, но только по мере этой необходимости.

Есть простое но полезное замечание. В доводе этой статьи есть три степени: чёткое установление собственных функций и собственных значений операторов Гекке; чёткое установление связностей Янга-Миллса; их сравнение.

Я пришёл к пониманию необходимой основой теорий только в ходе чтения ссылок и написания статьи, таким образом, что это началось с утверждения, для которого доказательство могло быть обеспечено только медленно, когда я пришел к пониманию соответствующей теории. Мое первоначальное понимание доказанной теоремы не содержало ни точного утверждения ни большого знания дифференциально-геометрического

[6] Этот квадрат указывает на конец отступления.

основания. Поэтому было много чего я не мог предвидеть и не был готов. Это привело к избыточности и отступлениям, некоторые элементарные, которые будут обузой для геометра, но, возможно, могут помочь специалистам в областях, относящихся к фундаментальной проблеме этой статьи, а именно взаимности и функториальности в теории автоморфных форм, а не только в одном из её три разновидности, но во всех, хотя эта статья посвящена исключительно геометрической теории.

В конце концов, я не заявил теорему, хотя я мог бы и читатель мог бы заключить соответствующее утверждение. То, что поразительно, - это точное сцепление вычислений собственных сопряженных сеченний Гекке и строения теории Янга-Миллса. Хотя на данный момент я не имею точного воспоминания о вычислениях в классической теории, либо начальные вычисления в Gauss, либо более поздние расчеты в Hasse и я начинают опасаться, что я не изучил их достаточно, мне кажется что существует непризнанная сходство между ними и теми этой статьи. В обоих случаях два, по-видимому, разные объекта связаны третьим чувствительным часовым механизмом. В этой статье это выглядит как последовательность сходств между двумя довольно сложными, но конкретными, вычислений, и в самом конце сравнение может быть завершено только благодаря удивительной детали, которая появляется в обоих, хотя по разным причинам. Скрыть это в утверждении теоремы, которая, наконец, будет только особым случаем, казалась хамским.

Построение статьи просто. К концу раздела §III, разъяснены цели функториальности в геометрическом контексте. Тогда в §IV я напоминаю классическая теория эллиптических кривых, из которой мы черпаем, чтобы сделать наше обсуждение как можно более прочным. Следующие три раздела посвящены введению операторов Гекке и вычислению их собственных функций и собственных значений, но в рамках пространства Гильберта. После этого в §VIII и §IX вспоминается необходимая дифференциальная геометрия, иногда на основном уровне. В §X и §XI дальнейшее обсуждение теории Янга-Миллса приводит к сравнению с ранними расчётами в теории Гекке, а затем лёгко к желанному сравнению. Последний раздел краток. Я позволил себе многие отступления, некоторые довольно элементарные, исходя из предположения, что большинство читателей будут иметь как можно меньше опыта с дифференциальной геометрией, так как я.

Наконец, слово о языке. Когда я записался в университет в Ванкувере в возрасте шестнадцати лет, прибывший из деревни я был посвящен в новый мир не только математики, но также был осведомлен о том, что в мире существует большое количество языков, некоторые из которых в настоящее время необходимы для успешной жизни как математик. Хотя только медленно, я узнал, что они предлагают гораздо больше, чем самую математику. К сожалению, по причинам, которые здесь не нужно подробно описывать, математическая профессия больше не предлагает это окно миру. Тем не менее желание написать статью на русском языке продолжалось. Эта статья была мою последную возможность сделать это.

Размышляя над этой статьей, после того, что она была завершена, и над её стилём, я был озадачен многими отступлениями и их отношением, но тогда причина стала очевидной. Это связано с тем, что основная часть работы посвящена моим усилиям по пониманию понятий, взятых из [A] и небольшой части [AB]. После того, что строение Bun_G и природа связностей Янга-Миллса поняты, моя единственная идея было введение операторов Гекке как операторы в гильбертом пространстве. Это было просто, хотя ново и даже несколько революционым, ибо привязанность математик к пучкам была универсальна. В этой статье нет пучков.

В окончательном заключений я подчеркиваю свое недовольство изложением здесь, но достаточный отчёт требует краткого но полное общее изложение теории Янга-Миллса, а также понимание последних абзацев этой статьи, в которых появляются прямые изображения расслоений и индуцированных представлений, но понимание при общих условиях. В настоящее время это вряд ли доступно. Это задача предлагаемая читателю. ■

II. **Основные понятия общей теории.** В первую очередь нам нужно редуктивная алгебраическая группа G над компактной неособой алгебраической кривой M над $\mathbf{C}$ и её классифирующее пространство Bun_G. Я буду разъяснить общеё предложение, которое я буду доказывать главным образом для группу $G = GL(2)$ над эллиптической кривой M. Этот случай уже поразителен. Я употребляю заключения статьи Атья.[7] Возможно, они достаточны тоже для группы $GL(n)$.

Пусть F поле мероморфных функций над M. Пусть $\mathbf{A}_F$ алгебра аделей поля F и F_x локальное поле в точке $x \in M$. Кольцо $\mathcal{O}_x$ кольцо целых элемент в F_x и $\mathcal{O} = \prod_x \mathcal{O}_x$. Отношение

$$\mathrm{Bun}_G = G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O})$$

известно. Оно доказано в ([F],§3). Я буду её объяснить ниже. Позже, мы будем кратко объяснять как для нас Bun_G топологическое пространство хотя не хаусдорфное пространство и что он носитель локально метрической структуры и меры μ. Для $G = GL(2)$ и M эллиптическая кривая струкура и мера просты.

Операторы Гекке линейные отображения пространства $L^2(\mu)$. Главная тема этой статьи операторы Гекке и их собственные значения. Для каждой точки $x \in M$ есть коммутативная алгебра Гекке $\mathfrak{H}_x$. Эти алгебры коммутативны и попарно коммутативны. Пусть $\Theta \in \mathfrak{H}_x$, тогда эго эрмитово сопряженный оператор $\tilde{\Theta}$ тоже оператор Гекке. Следовательно есть соответственное спектральное разложение пространства $L^2(\mu)$ и цель этой статьи описание собственних значенией и собственних функции. Хотя в этой статье говорится преимущественно о эллиптических кривах я не буду мочь сдержаться от нескольких общих замечанийей. С божьей помощью я вернусь к общой криве позже. Я дам в следующем разделе общее предположение (общие предположения?), которое я докажу позже для эллиптической кривой. Каждый оператор Гекке Θ определится соответствием Θ. Это соответствие подмножество множества $\mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G$. Это соответствие тоже носитель меры которую лучше описывать позже.

III. **Гипотеза.** Хотя мы докажем эти предположения только для кривых рода один и не для высших родов и только для группы $GL(2)$, мне кажется что оно доступно тоже для $GL(n)$ благодаря статье [A]. Вообще есть две степени: (i) $GL(2)$ замено другой группой; (ii) M замено произвольной компактной поверхностей Римана. Я ещё не размыслю серьёзно об этих. Я предложу однако убедительную гипотезу, но чтобы утвердить её для $g > 1$ нужно будет размышлять о сложностях Bun_G. Есть конечно ещё одна степень, разветвленная теория, но об этой я никогда не размышлял.

Известно что алгебра Гекке группы $G = GL(2)$ или произвольной редуктивной группы, потому что в этом разделе речь идёт о этих, изоморфна кольцу представлений

[7][A] Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. vol. 7, 1957

двойственной группы ${}^LG$ и что каждый гомоморфизм этой алгебры в $\mathbf{C}$ дан полупростым классом θ в ${}^LG$. Следовательно собственной функции всех операторов Гекке или лучше собственным значениям соответсвует функция которой значения в точке $x \in M$ полупростый класс $\{\theta(x)\}$. Мы называем это собственным сопряженным сечением или, более кратко, собственным сечением. Структура множества этих сечений неясна. Известно что есть такая же теория для всех M и всех G и мы рассматриваем в этом разделе общий случай.

В теории автоморфных форм понятие функториальностей выражает то, что множество сечений или множество тех сечений которые принадлежают L^2-теории дано гомоморфизмами, или унитарными гомоморфизмами, предположенной автоморфной группы Галуа в ${}^LG$. Кажется, что различие между арифметической и геометрической теорией то, что в геометрической теории можно описывать её просто употребляя обычные понятия. В арифметической теории это не так. В этом разделе я описываю общую гипотезу, которую я доказаю позже, после некоторых подготовок.

Понятие связанное с автоморфной групой Галуа находится в статье Атья и Ботта.[8] Эта статья вместе с уже упомянутой статьей Атья были крупными влияниями на эту статью. Это понятие их группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ ([AB], Th. 6.7). Для кривой которой род главен g эта группа продолжение центрального расширения

$$1 \to \mathbf{Z} \to \Gamma \to \pi_1(M) \to 1, \quad \Gamma_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} \Gamma. \tag{1.a}$$

Группа Γ порождена элементами $A_1, \dots, A_g, B_1 \dots B_g$ и $J = 1 \in \mathbf{Z}$ с одным отношением

$$A_1 B_1 A_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = J, \quad J = 1 \in \mathbf{Z}. \tag{1.b}$$

В следующих разделах, где $g = 1$ установлено что A_1, B_1 петли $(0, 2\omega_1), (0, 2\omega_2)$ в еллиптической кривой M.

Мы интересуемся только с такими представлениями ϕ группы Γ что порядки элементов $\phi(A_i)$, $\phi(B_i)$ и $\phi(J)$ все конечны. Они называются допустими. Нам нужна тоже группа $\tilde{\Gamma} = \mathbf{Z} \times \Gamma$. Можно что порядок элементов $\phi(z \times 1) \in \mathbf{U} \times 1$, $z \in \mathbf{Z}$, $1 \in \Gamma$, бесконечен. Слагаемо $\mathbf{Z}$ не проявляется в [AB], потому что в той статьи класс Черна расслоения дан так чтобы Bun_G становится связанным, то есть связанным компонентом правильного Bun_G. Вложение этого $\mathbf{Z}$ в $\tilde{\Gamma}$ как-то произвольно. Оно связано с выбором расслоения $A = A_0$ в [A, Th. 6] и §IV этой статьи. Сейчас[9]

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = 0 \times J. \tag{1.c}$$

Эту новую группу я называю автоморфной группой Галуя. Более точно автоморфная группа Галуя Γ_{aut} будет произведение $\mathbf{Z}$ с обратным пределом всех конечных групп дробей группы $\tilde{\Gamma}$. В этой группе (на каждом конечном уровне этой группы – это то, что важно) порядки образов элементов $\phi(A_i)$, $\phi(B_i)$ и $\phi(J)$ все конечны. На пример мы

[8] [AB] The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. Royal Soc. Lond., vol. 308, 1983

[9] Полезно замечать что

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \exp(2\pi i/n)$. Это простой пример уравнения (1.c).

сперва строим пересечение Γ_2 всех ядр гомоморизмов группы Γ к группе с порядком который делит 2, тогда пересечения Γ_{36}, Γ_{27000} и так далее. Тогда

$$\Gamma_{\mathrm{aut}} = \varprojlim \mathbf{Z}/n(k)\mathbf{Z} \times \varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}, \tag{1.d}$$

где $n(k) = (k!)^k$. Эта досадная щепетильность нужна потому что связности и собственные сопряженные сечения взаимно связаны но различны. В частности дополнительное $\mathbf{Z}$ нужно потому что Bun_G несвязно. Как мы будем объяснять позже, недаром $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и Γ_{aut} оба определёны как изменение группы Γ. Собственные сопряженные сечения и связности Янга-Миллса тесно связаны. Я замечаю тоже, что в Γ_{aut} уравнение $J = 1$, $1 \in \mathbf{Z}$ заменён

$$J = 1,\ 1 \in \varinjlim_{n} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z},$$

где $z \mapsto nz/m$, $m|n$ в возрастающой последовательности направо.

Пусть ${}^L G_{\mathrm{unit}}$ компактный вид группы ${}^L G$. Я предложу, но только приблизительно потому что это предложение пропускает эндоскопические трудности, что есть биективное отображение множества собственных сопряженных сечений с множеством гомоморфизмов группы Γ_{aut} в ${}^L G_{\mathrm{unit}}$. Цель этой статьи доказать это для группы $GL(2)$ хотя мне кажется что статья [A] позволил бы доказательство для $GL(n)$. Есть однако трудность. Я ещё не знаю как узнавать неприводимое прислоение если размер больше чем две даже для эллиптической кривой. Считателю будет ясно что я понимал статья [AB] и [A] только в то время, как я писал эту статью. Первоначально моё стремление было скромнее но мне кажется сейчас что главные утверждения геометрической теории над $\mathbf{C}$ удивительно просты хотя неочевидны. Я не знаю если нужно или даже полезно читателям [G] или [L] понимать их.

Случай нулевого рода. Если род равен нулю, уравнение (1.b) безмыслено, так что нужно определить Γ_{aut} по-другому. Мне кажется, что нет выбора, кроме предположения, что оно равно $\mathbf{Z}$. Это совместимо с тем, что для рода нуль все расслоения являются прямыми суммами линейных расслоений каждое из которых сам является степенью одиночного линейного расслоения степени нуль. Этот случай явно исключен из обсуждения в [AB]. Всюду в этой статье будет читателью ясно, что было бы лучше написано, как в отношении ясности, так и в точности, если бы я лучше разбирался в теории Янга-Миллса в частности и в дифференциальной геометрии в целом. ■

Есть два важных замечания. Во-первых я отвещу только неразветленную теорию. Во-вторых в арифметической теории существование автоморфной группы Галуа эквивалентно функториальности. Итак в этой теории она очень важна! Тесная связь между теорией алгебрайческих чисел и теорией алгебрайческих кривых над $\mathbf{C}$ была описана Дедекиндом и Вебером в статье [DW][10]. Теопия алгебрайческих кривых над поле Галуа прибавлена Андре Вейлом [W].

Теории двух статьи [A] и [AB] по большей части незнакомы мне и моим читателям. Следовательно я объясню нескольких понятий пространно.

IV. **Теория приведение для эллиптической кривой.** Эта важная теория достигла её окончательного вида над полем алгебрайческих чисел в докладе Бореля и Хариш-Чандра[11] но над риманова поверхностей её ещё нет. В статье [A], Lemma 4 есть начало этой теории для произвольного рода, но для $g = 1$ есть для $GL(2)$ даже для $GL(n)$ в

[10] [DW] R. Dedekind и H, Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, 1880

[11] [BH]

самой статье завершённая теория, которую я объясняю в первую очередь для $GL(2)$, но без доказательств. Эта теория законченное описание Bun_G, то есть описание всех двумерных венторных расслоений. Для того, чтобы доказать её нужна современная теория связок но чтобы описать её я предпочитаю применять теорию Вейерштрасса как она представлена в книге Уиттекера и Ватсона.[12] Это конечно не нужно. Это скорее проба моего знания теорий Атья и Атьи-Ботта и признак моих математических пристрастий! The concepts of [AB] which reflect, of course, the current notions in complex differential geometry, thus of topology and complex analysis, are extremely elegant, but they are abstract and it is easy for the novice to overlook their complexity and their subtlety, as I did frequently on reading their paper. I have found that expressing them concretely was a safeguard against misunderstanding. Итак если $L = 2\mathbf{Z}\omega_1 \oplus 2\mathbf{Z}\omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$. тогда кривая $M = \mathbf{C}/L$. В этой статье $GL(n)$-расслоение такая матричнозначеная мероморфная функция[13] $M(z)$, $z \in \mathbf{C}$, как $M(z+\lambda) = M(z)K_\lambda(z)$ для всех $\lambda \in L$, где матрица K_λ голоморфна.

В теорий Вейерштрасса сигма-функция $\sigma(z)$, $z \in \mathbf{C}$, основна. Вот её свойствы: (i) она голоморфна; (ii) её разложение в степанной рад $\sigma(z) = z + \ldots$; (iii) $\sigma(z+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$, $\sigma(z+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z)$; (iv) $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i/2$; (v) если $\sigma(z) = 0$ тогда $z \in L$.

Пусть $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ нокты в $\mathbf{C}$. Тогда

$$\phi(z) = \frac{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_m)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_n)} \tag{2}$$

мероморфная функция от $z \in \mathbf{C}$. Кроме того

$$\begin{aligned}\phi(z+2\omega_1) &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_1(m-n)(z+\omega_1)}e^{-2\eta_1\{\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j\}} \\ &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_1(m-n)(z+\omega_1)}e^{-2\eta_1\theta} \qquad (2.a)\\ \phi(z+2\omega_2) &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_2(m-n)(z+\omega_2)}e^{-2\eta_2\{\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j\}} \\ &= \phi(z)(-1)^{m-n}e^{2\eta_2(m-n)(z+\omega_2)}e^{-2\eta_2\theta}, \qquad (2.b)\end{aligned}$$

где $\theta = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Функция ϕ периодическия только если $m = n$. Тогда она обычная ϕ функция над $\mathbf{C}$ которое накрывает кривую M. Если $m = n$ и $\theta = 0$ тогда ϕ функция над M. Если σ заменёно функцией $\sigma'(z) = \sigma(z)\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, тогда уравнения (iii) заменёны уравнениями

$$\sigma'(z+2\omega_i) = -e^{2\eta_i + 2\lambda\omega_i}\sigma'(z) = -e^{2\eta_i'}\sigma'(z), \quad \eta_i' = \eta_i + \lambda\omega_i. \tag{2.c}$$

То есть, эти уравнения только нормализация функции σ or, if one prefers σ and σ' determine different but equivalent line bundles. Уравнение (iv) не изменяется. Уравнени (iii) опредалают склеивание. и не меняет расслоения. В области $2x\omega_1 + 2y\omega_2$, $0 \le x, y < 1$

[12][WW] A Course of Modern Analysis, Camb. Univ. Press, 1958

[13]$z = x + iy$ служил координатой в $\mathbf{C}$ и иногда другами целями.

есть у функции σ только один нуль. Это причина уравнения (iv).[14] Вообще ϕ определяет линейное расслоение $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ которого оно самое многозначное сечение. Два расслоения Λ и $\Lambda' = \Lambda(a_1', \ldots, a_{m'}', b_1', \ldots, b_{n'}')$ изоморфны если и только если $m - n = m' - n'$ и

$$a_1 + \cdots + a_m - b_1 - \cdots - b_n = a_1' + \cdots + a_{m'}' - b_1' - \cdots - b_{n'} \bmod 2\pi\omega_1\mathbf{Z} + 2\pi\omega_2\mathbf{Z}.$$

Тогда степень расслоения $n - m$. По-моему это описание линейных расслоения самое ясное но для расслоений больше размерности подобно тем статьи Атья часто нужно пользоваться когомологическами методами. Теоремы и леммы Атья разборчивы, может быть потому что множествы которыми он занимается тоже стеки, хотя ни в статье Атья ни здесь нет стеков. Для него они пространствы и для нас пространствы с локальной метрикой и с мерой. Я хочу прежде всего описать пространство $\mathrm{Bun}_{GL(2)}$ подражая Атья.

Есть над эллиптической кривой два рода двумерных расслоений, разложимые расслоения, $\Phi = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, и расслоения рода Атья, то есть другие. Пусть $\mathfrak{D}(m, n)$ множество $\Phi = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ для которых $\deg \Lambda_1$, то есть степень Λ_1, главна m и степень Λ_2 главна n. Множество расслоений рода Атья объединение

$$\{\cup_{m\in\mathbf{Z}}\mathfrak{A}(m, m)\} \bigcup \{\cup_{m\in\mathbf{Z}}\mathfrak{A}(m + 1, m)\}.$$

Для общих кривих есть разложимые и неразложимые расслоения. В статьи Атья множество этих последних $\mathfrak{E}(r, d)$ где r ранг и d степень. Перед тем как я описываю эти расслоения я замечаю что $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ эквивалентно $\Lambda_1' \oplus \Lambda_2'$ когда и только когда $\{\Lambda_1, \Lambda_2\} = \{\Lambda_1', \Lambda_2'\}$. Следовательно $\mathfrak{D}(m, n)$ двумерное комплексное многообразие. Если $m = n$ есть особая кривая, где $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

В противоположность арифметической теории в геометрической теории приведение точно. То есть фундаментальная область точно описана. В статии Атья (Lemma 3) как первый шаг и как следствие теоремы Римана-Роха для расслоений более высокой размерностей доказано что, для двумерного расслоения над эллиптической кривой есть представитель

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & * \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \deg \Lambda_2 \le 2 + \deg \Lambda_1. \tag{3}$$

Хотя это не нужно Атья предпочитает предполагать что у данного расслоения Θ достаточность сечений, то есть для каждой нокты $x \in M$ отображение $\Gamma(\Theta) \mapsto \Theta_x$ сюръективно, где $\Gamma(\Theta)$ состоит из сечений Θ. Для этого достаточно заменяет расслоение Θ расслоением $\Theta' = \Lambda \otimes \Theta$, где Λ подходящое линейное расслоение. Каждое заключение для Θ' тоже заключение для Θ. Вообще если есть у расслоения любой размерностей достаточность сечений тогда у него есть верхный треугольный представитель. Как вторая Л (Lemma 6′) Атья утверждает (Lemma 6′) что если расслоение Θ неразложимо и

[14] Правильное условие, чтобы делитель $(a_1, \ldots, a_n)$ эквивалентный $(b_1, \ldots, b_n)$, уравнение

$$\theta = a_1 + \ldots a_n - b_1 - \cdots - b_n \in 2\mathbf{Z}\omega_1 + 2\mathbf{Z}\omega_2, \quad k = 1, 2.$$

То есть, если это урапнение в силе есть такая $\lambda \in \mathbf{C}$ что функция $\exp(-\lambda z)\phi(z)$ периодческая по отногению к $2\mathbf{Z}\omega_1 + 2\mathbf{Z}\omega_2$. Для этого, нужно что $-2\lambda\omega_k - 2\eta_k\theta \in 2\pi i\mathbf{Z}$ для $k = 1, 2$. Пусть $\theta = 2\omega_1$. Есть два числа: для $k = 1$, $-2\lambda\omega_1 - 4\eta_1\omega_1$, для $k = 2$, $-2\lambda\omega_2 - 4\eta_2\omega_1$. Если $\lambda = -2\eta_1$ пнрвое число 0 и второе $4(\eta_1\omega_2 - 4\eta_1\omega_2 = 2\pi i$. Если $\theta = 2\omega_2$ довод сходен. Такие рассмотрения излишны но утешительны.

если $\Gamma(\Theta) \neq 0$ тогда у него есть такое махимальное расщепление

$$\Theta \simeq \begin{pmatrix} \Lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \Lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

что $\Lambda_i \geq \Lambda_1 \geq 1$, $\Gamma \operatorname{Hom}(\Lambda_1, \Lambda_i) \neq 0$, $i = 2, \dots, n$ и $\Gamma(\Lambda_1) \neq 0$. В данный момент $n = 2$, но полезно говорить о общем случае. Это опять следствие теоремы Римана-Роха.

Но следующая аргументация Атья трудна и я хочу откладывать, даже пропускать, её и объясняит только выводы, и те которые для нас важны и другие которые нам не нужны. Я пользуюсь старомодными понятиями. Есть в теории Вейерштрасса вторая важная функция, эта функция

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}. \tag{2.d}$$

Она удовлетворяет аддитивнам условиям,

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1, \quad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2. \tag{2.e}$$

У неё есть в фундаментальной области для группы $L \subset \mathbf{C}$ только один полюс и этот в нокте 0. Матрица

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \zeta(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

удовлетворяет мултипликативнам условиям,

$$M(z + 2\omega_i) = M(z) \begin{pmatrix} 1 & 2\eta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно оно определяет $GL(2)$-расслоение Π. Если Λ линенейное расслоение тогда $\Lambda \otimes \Pi$ тоже $GL(2)$-расслоение и $\Lambda \otimes \Pi$ и $\Lambda' \otimes \Pi$ эквивалентны только если Λ и Λ' эквивалентны ([A], Th. 5). Степень $\deg(\Lambda \otimes \Pi)$ равна $2 \deg \Lambda$. Множество таких расслоений с степенью $2m$ множество $\mathfrak{A}(m, m)$. Ещё обще вид определения (4) находится в (A,Th. 5)

$$F_r = \exp(\begin{pmatrix} 0 & \zeta(z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta(z) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}) \tag{6}$$

матрица порядка r. Нужно будеть доказать что F_r неразложимо, но мы ограничиваемся группой $GL(2)$. Расположение полюса можно перевести, умножив слева на

$$\begin{pmatrix} 1 & h(\cdot) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $h(\cdot)$ - мероморфная функция с полюсами в 0 и любой другой точке для которых, конечно, сумма вычетов равна нулю.

Определять множество $\mathfrak{A}(m+1,m)$ в одном смысле труднее потому что канонического выбора нет но в другом смысле лёгкое. Оно состоит из

$$F(d)=\begin{pmatrix}1 & \phi(z)\\ 0 & \sigma^{-1}(z-d)\end{pmatrix},\quad \phi(z)=\frac{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)}, \tag{7}$$

где a_1,a_2,b_1,b_2 фиксированы, $a_1+a_2=b_1+b_2$, $a_1-a_2\neq b_1-b_2$ но d перемено. Значит что как множестбо $A(m,m)\simeq A(m,m+1)\simeq M$. Возможно что это описание кажется несколько произвольно но нужно осматривать [A] чтобы понять что это неизбежно. Попутно я признаваю что понимать [A] мне трудно.[15]

Описывать общие выводы Атья ([A], Th. 6) полезно и в этой статье нам нужно. Он описывает все неразложимые расслоения M размерности или ранга r и степени d. Полезно сначала выбирать данное линейное расслоение $\Lambda_0=\Lambda_{A_0}$ степени один. Это расслоение дано выбранной точкой A_0. Тогда расслоение каждой ступени d определено: если $d=0$ расслоение тривиально; если $d>0$ есть сечение с единственным полюсом и его степени d в точке A_0 но никакого нуля; если $d<0$ нуль заменяется полюсом. С этими выборами, для данного r множества $\mathcal{E}(r,d)$, которые мы введём, все отождествлены.

Пусть сейчас $d=ar+d'$ где $0\leq d'<r$. Если $a=0$ мы перейдём непосредственно к второй стадии. Если $a>0$ тогда

$$N=A^a\otimes N',$$

где неразложимое расслоение N' размерности $r'=r$ и степени d'. Следовательно мы можем перейти к второй стадии и преположить что $d'=d-ar<r'=r$. Если $d'=0$ эта последная стадия, но если $d'>0$

$$N'=\begin{pmatrix}I & *\\ 0 & N''\end{pmatrix},$$

где I единичная матрица ранга $s<r'$. Пусть r'' ранг N''. Тогда r'' меньше чем r' и степень $d''=d'$. Точный вид матрицы $*$ не относится к делу. Важно только то, что M' неразложимо. Тогда ранг $r''=r-s<r$. Начальная раздвоённость снова появляется. Продолжая мы придём к паре $(\tilde{r},\tilde{d}=0)$, $\tilde{N}=F_{\tilde{r}}$. Для расслоений высшего порядка можно заменять (7) матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & \phi(z)\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \phi(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \phi(z)\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \phi(z)\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma^{-1}(z-d)\end{pmatrix} \tag{7'}$$

Множество $\mathrm{Bun}_{GL(r)}$ постройка в которой есть r ступенек между этажими.

Описание Атьей этого превращения различно но очень поучительно. Полезно давать его но с несколими дополнительными подробностями. Пусть $\mathcal{E}(r,d)$ множество неразложимых расслоений размерности r и степени d и пусть h общий наибольший делитель r и d. Атья описывает отображение $\alpha_{r,d}:\mathcal{E}(h,0)\to\mathcal{E}(r,d)$ которое обратно к нашему превращению. То есть, он строит элементы в $\mathcal{E}(r,d)$ тогда как мы разбираем их. Составные части его строения: (i) $\alpha_{r,0}:F_r\to F_r$;(ii) $\alpha_{r,d+r}(E):E\to A\otimes\alpha_{r,d}(E)$; (iii) если

[15]Эти слова были написаны, когда я начал писать эту статью. Они остаются обосноваными, как я заканчиваю её спустя два года, почти трех лет. Я начал думать о геометрической теории в 2011 году. Это тоже утешение, что F_r в [A, Th. 5] просто выражается через знакомую функцию $\zeta(\cdot)$.

$0 < d < r$, тогда

$$(8) \qquad \alpha_{r,d}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & * & \dots & & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \alpha_{r-d,d}(E) & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \end{pmatrix}, \qquad E \in \mathcal{E}(h,0).$$

Это продолжается до того, как $r' = r - nd < d = d' + r'$. Тогда применяем (ii) и продолжаем. Таким образом, для данного r и каждого d, множество $\mathcal{E}(r,d)$ отождествено эллиптической кривой M и все ступени бесконечной лестницы, $-\infty < d < \infty$, почти одинаковы.

Пока мы мало ввели структуру в множество $\mathrm{Bun}_G = G(F)\backslash GL(n, \mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O})$. Есть топология но эта не полезна. Множество в Bun_G открыто если и только если его прообраз в $GL(n, \mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O})$ открыт. Есть тем не менее разложение Bun_G которого отношение к эго топологии по большой части не важно. Именно каждое расслоение прямая сумма неразложимых расслоений размерности $r_1, \dots, r_k$, $r_1 + \dots + r_k = r$. Оказывается что для операторов Гекке множество Bun_G состоит из отдельных множеств $\mathcal{D}(r_1, \dots, r_k)$ согласно неупорядоченному множеству $\{r_1, \dots, r_k\}$, которое определалает сопряженный класс подгрупп Леви. Пусть $\mathcal{E}(r)$ множество неразложимых расслоений размерности r и $\tilde{\mathcal{E}}_k(r)$ симметризированное k-кратное произведение $\mathcal{E}(r)$ с собой. Тогда

$$\mathcal{D}(r_1, \dots, r_k) = \tilde{\mathcal{E}}_{k_1}(s_1) \times \dots \times \tilde{\mathcal{E}}_{k_l}(s_l),$$

$\{r_1, \dots, r_k\}$ состоит из s_1 повторено k_1 раза и так далее. В сущностей $\mathcal{D}(r_1, \dots, r_k)$ произведение множеств

$$(9) \qquad \cup_{d=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(r,d),$$

где r дано и $\mathcal{E}(r,d)$ множество неразложимых расслоений размерности r и степени d. Как топологическое пространство это приблизительно $\mathbf{Z} \times M = \mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}$, где $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$. Это тоже топологическая группа и её группа характеров $\mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Можно полагать что эта тоже параметризает (приблизительно) собственные функции операторов Гекке. Имея это в виду мы перейдем к гипотезе но сперва обнадёживающее замечание. Согласно Теореме 7 в [A] если χ характер группы $\mathcal{E}(1,0)$ тогда χ определалает функцию с значениями в $\mathbf{U}$ над каждом $E(r,d)$ в множестве (9). Если $z \in \mathbf{U}$ тогда вторая функция $\eta_z : N \to z^d$. Итак может быть что есть простое описание, скорее несложные описание, польного множества собственных функций операторов Гекке. Мы будем давать его для $r = 2$.

Для эллиптической кривой $g = 1$ и группа Γ порождана элементами A, B, $ABA^{-1}B^{-1} = 1 \neq 0 \in \mathbf{Z}$. Согласно гипотезе собственные функции операторов Гекке для $GL(n)$ соответсвуют представлениям Γ_{aut} размерности n. Параболические собственные функции соответсвуют неприводимам представлениям. Пусть ρ такое представление. Тогда $\rho(1) = \zeta \in \mathbf{U}$ и

$$\rho(A)\rho(B)\rho(A)^{-1}\rho(B)^{-1} = \zeta I.$$

Так как $\det(\zeta I) = 1$, ζ корень единица. Пусть k его порадок. Сверх этово $\rho(B)$ и $\zeta\rho(B)$ подобные матрицы. Пусть $k|n$ порядок $\rho(B)$. Самый простой пример

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta^{k-1} \end{pmatrix},$$

$\lambda, \mu \in \mathbf{C}^\times$, $\eta^k = 1$. Но в этой статье я рассматриваю только $GL(2)$

В трёх следующих разделах я буду описывать операторы Гекке для группы $GL(2)$. Последный самый важный, самый замечательный но первый и второй содержают необходимую подготовку.

V. **Соответствия Гекке.** Для каждой нокты $x \in M$ есть коммутативная алгебра $\mathfrak{H}_x$ определена соответствием и мерой. Мы начинаемся с группой $GL(2)$ и эллиптической кривой и для этой группы и этой кривой эта мера будет очевидна. Следовательно я откладываю её общее определение надеясь найти позже случай её объяснить. Подходящие понятия находятся в [AB, §9]. Алгебра $\mathfrak{H}_x$ произведена двумя двойним модулям. Один лёгок. Есть конечно очевидная локальная координата z над $M = \mathbf{C}/L$ но чтобы вводить операторы Гекке нужно уточнять нокту $x \in M$ и лучше пользоваться произвольной координатой z_x, $z_x(x) = 0$ потому что x существенный параметр оператора. Для данной нокты есть два основных оператора, то есть два основных смежных класса по модулю $G(\mathcal{O}_x)$:

$$\Delta_1 = G(\mathcal{O}_x) \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(\mathcal{O}_x);\ \Delta_2 = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} G(\mathcal{O}_x)$$

Чтобы определять два соответствующих оператора нужно вводить меру μ на Bun_G или $G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O}_F)$. Общее определение мера трудно но для группы $GL(2)$ будет очевиное выбор, которым мы пользуемся как временным определением. Второй оператор просто

$$\Theta_2 = \Theta_{2,x} : f \to f',\ f'(g) = f(g \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix}),$$

но первой оператор

$$\Theta_1 = \Theta_{1,x} : f \to f',\ f'(g) = \int_{h \in g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x)} f(h)dh. \tag{10}$$

Первый интеграл по нокте и мера такая что мера нокты равна 1. Мы описываем область итегрирования для второго оператора. Эти операторы не эрмитов но если мы прибавляем соправленый оператор Θ_2^* порожденная алгебра коммутативна и эрмитово замкнута.

Мы рассматриваем разные случаи: (a) $g \in \mathfrak{D}(m,n)$, $m - n \geq 2$; (b) $g \in \mathfrak{D}(m,n)$, $m-n = 1$; (c) $g \in \mathfrak{D}(m,n)$, $m-n = 0$; (d) $g \in \mathfrak{A}(m,n)$, $m-n = 1$; (e) $g \in \mathfrak{A}(m,n)$, $m-n = 0$. Важно замечать что комплексная размерность $\dim \mathfrak{D}(m,n) = 2$ и что $\dim \mathfrak{A}(m,n) = 1$. Тогда соотсветственно этим пять возможностям элемент h в (10) находится в
(a) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{D}(m,n+1)$;
(b) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{D}(m,n+1) \cup \mathfrak{A}(m,n+1)$, где $m = n+1$;
(c) $\mathfrak{D}(m+1,n) \cup \mathfrak{A}(m+1,n)$, где $m = n$;

(d) $\mathfrak{D}(m, n+1) \cup \mathfrak{A}(m, n+1)$ где $m = n+1$;
(e) $\mathfrak{D}(m+1, n) \cup \mathfrak{A}(m+1, n)$ где $m = n$.
Случаи $m = n, m = n \pm 1$ подчёркиваены потому что они соответствуют расслоениям рода Атья. Есть другой образ выражать эти заключения. Если носитель функции f в (a) $\mathfrak{D}(m, n)$, $m-n \geq 2$; (b) $\mathfrak{D}(m, n)$, $m-n = 1$; (c) $\mathfrak{D}(m, n)$, $m-n = 0$; (d) $\mathfrak{A}(m, n)$, $m-n = 1$; (e) $\mathfrak{A}(m, n)$, $m-n = 0$ тогда носитель функции f' в (10) находится соответственно в (a) $\mathfrak{D}(m+1, n) \cup \mathfrak{D}(m, n+1)$; (b) $\mathfrak{D}(m+1, n) \cup \mathfrak{D}(m, n+1) \cup \mathfrak{A}(m, m)$; (c) $\mathfrak{D}(m+1, m) \cup \mathfrak{D}(m, m) \cup \mathfrak{A}(m+1, m)$; (d) $\mathfrak{D}(m, m) \cup \mathfrak{A}(m, m)$; (e) $\mathfrak{D}(m+1, m) \cup \mathfrak{A}(m+1, m)$. Это несколько щепетильно но я несколько неуверен.

Я начинаюсь с описанием представителей левых смежных классов в

$$G(\mathcal{O}_x)gG(\mathcal{O}_x), \ \ g = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Они даны умножением g налево матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{C}. \tag{12}$$

Это даст

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_x^{-1}a & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{C}. \tag{13}$$

Нужно напоминать что в этих двух уравнениях $\mathbf{C} \subset \mathcal{O}_x$. Если λ скаляр, то есть $\lambda \in \mathbf{I}_F = \mathbf{A}_F^\times$, и $f_1(g) = f(\lambda g)$, тогда $f_1'(g) = \Theta_1 f_1 = f'(\lambda g)$. Это позволяет несколько упрощений в вычислениях.

Лёгко описать элементы $G(F_x)$ и даже элементы $G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$ но трудно описать элементы $G(\mathbf{A}_F)$ или $G(\mathbf{A}_F/G(\mathcal{O}_F))$ потому что в принципе нужно давать бесконечное множество координат, но можно принимать почти всюду единичную матрицу. Этих координат я не даю.

Если мы начинаемся с $g \in \mathfrak{D}(m, n)$ мы можем брать:

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ m \neq n = 0; \\ &= \begin{pmatrix} z_u/z_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ m = n = 0. \end{aligned}$$

потому что оператор Гекке коммутировает с умножение на линейное расслоение. Мы умножаем g на право с матрицами (13). Если $m \neq 0$ это даст[16]

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

которое принадлежает $\mathfrak{D}(m+1, 0)$, и

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x^{-1} a & z_u^{-m} \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{14'}$$

Все выборы $a \neq 0$ дадут эквивалентные расслоения. Если $a = 0$ расслоение принадлежает $\mathfrak{D}(m, 1)$. Мы выбраем $a = 1$ и переставляем столбцы. Тогда (14') равно

$$z_x^{-1} \begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14''}$$

Если $f \in F$ мы можем умножать налево с

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

чтобы получать

$$z_x^{-1} \begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} + f z_u^m z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Есть три случая: $m \geq 2, m = 1, m = 0$. Мы описали в теории Вейерштрасса все мероморфные функции над M. Если $m \geq 2$ мы можем выбирать такое f что $z_x^{-1} + f z_u^m z_x^{-1} \in \prod_x \mathcal{O}_x$ даже если $u = x$. Следовательно расслоение (15) разложимое расслоение

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} \tag{15'}$$

в $\mathfrak{D}(m, 1)$. Остаётся $m = 1$,

$$\begin{pmatrix} z_u^{-1} z_x^{-1} & z_u^{-1} \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1} z_x^{-1} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

и $m = 0$, которое различно. Если $g_1, g_2 \in G(\mathbf{A}_F)$, $g_1 \sim g_2$ выражает равенство в Bun_G.

Если $m = 1$ пусть $u + x$ и $2v$ линейно эквивалентны. Мы рассматриваем

$$z_v \begin{pmatrix} z_u^{-1} & z_u^{-1} z_x^{-1} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix}. \tag{16'}$$

Нужно знать когда расслоение (16') изоморфно (5). Если $u = x = v$ очевидно что это так. Пусть $u \neq x$ и пусть $\Lambda_1 = (z_v/z_u)$, $\Lambda_2 = (z_v/z_x)$. Тогда $\mathrm{Hom}(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$. Согласно

---

[16]Описание элемента в Bun_G или даже в $G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_F)$ трудно потому что большая часть координат излишна. Кроме того представитель элемента в Bun_G в $G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_F)$ не уникально. Добрая воля и внимание читателя нужны! На пример если $u \neq x$ чем (14) лучше писать

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{y \neq x, u} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

и чем (14')

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1} a & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

[A,Lemma 5] это подразумевает что расслоение $(16')$ разложимо. Можно проверяет это прямо потому что матрица в $(16')$ равно

$$\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_u^{-1} & z_u^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\{\begin{pmatrix}z_u^{-1} & z_u^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\}$$

где первая матрица направо в $GL(2,F)$. Эта маирица в $GL(2,\mathbf{A}_F)$ но вене $\{u,x\}$ она в $G(\mathcal{O}_w)$. Мы осматриваем факторы в u и x отдельно

$$\text{(16.a)}\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_u^{-1} & z_u^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_u^{-1} & z_u^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_u^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1-z_u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}z_u^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{(16.b)}\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}$$

Если $m=0$, мы получаем

$$\text{(17)}\qquad \begin{pmatrix}z_uz_v^{-1}z_x^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}z_uz_v^{-1}z_x^{-1}a & z_uz_v^{-1}\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

Первое расслоение в $\mathfrak{D}(1,0)$. Если $a=0$ второе расслоение тоже в $\mathfrak{D}(1,0)=\mathfrak{D}(0,1)$. Для других, все $a\neq 0$ давают одинаковое расслоение, дано с

$$\text{(17')}\qquad \begin{pmatrix}z_uz_v^{-1}z_x^{-1} & z_uz_v^{-1}\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}z_uz_v^{-1} & z_uz_v^{-1}z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix},$$

потому что

$$\begin{pmatrix}\alpha a & \beta\\ \gamma & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\quad a\in\mathbf{C}^\times.$$

Если $u=v$

$$\begin{pmatrix}z_x^{-1} & 1\\ z_x^{-1} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}.$$

Если $u\neq v$ пусть $v-u\sim x-y$. Есть функция f с нулями в y,v и полюсамы в x,u. Значит $\mathrm{Hom}(\Lambda_1,\Lambda_2)\neq 0$ если $\Lambda_1=(z_u/z_v)$, $\Lambda_2=(1/z_x)$ и можно что $(17')$ неразложимо.

$$\text{(17'')}\qquad \begin{pmatrix}z_uz_v^{-1} & z_uz_v^{-1}z_x^{-1}\\ 0 & z_x^{-1}\end{pmatrix}\sim z_uz_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_x^{-1}\\ 0 & z_y^{-1}\end{pmatrix}.$$

Если $x_1\neq x$, $x_1\neq y$ есть такая функция $f\in F$ что в x_1 поведение $f\sim 1/z_{x_1}$ и в x поведение сходно $f\sim -1/z_x$, что f голоморфна в остальных точках, и что $f(y)=0$, . Мы умножаем налево с матрицой

$$\begin{pmatrix}1 & f\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

чтобы получить

$$\text{(18)}\qquad z_uz_v^{-1}\begin{pmatrix}1 & z_{x_1}^{-1}\\ 0 & z_y^{-1}\end{pmatrix}=z_uz_v^{-1}\Theta_y,\quad x_1\neq y.$$

Матрица Θ вставлена в (4). Другой представитель расслоения

$$\text{(18')}\qquad \Theta\sim\begin{pmatrix}1 & z_w^{-2}\\ 0 & z_w^{-1}\end{pmatrix},\quad w\sim v+y-u\sim x.$$

Эти эквивалентности объяснены в [A]. Я признаваю что моя уверенность в этих вычислениях ограничена. Я не по себе с множеством $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O}_F)$.

В случае (d) мы выбираем представители $(18')$ множествы $\mathfrak{A}(1,0)$ но, переменяя нотацию, w заменено u. Мы умножаем на матрицы (13) и получаем

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_x^{-1}a + z_x^{-1}z_u^{-2} & 1 \\ z_u^{-1}z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}a + z_x^{-1}z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1}z_x^{-1} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Если $u = x$ первое расслоение равно

$$z_x^{-1}\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19'}$$

которое рода $\mathfrak{A}(1,1)$. Если $u \neq x$ мы посматриваем

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_x^{-1} & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & fz_u^{-1} + z_u^{-2} + cz_x^{-1} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}, \tag{19''}$$

где $c \in \mathbf{C}$ и $f \in F$. Мы выбираем такое f, с полюсами только в x и u, что полюс в u устранян и тогда такое c что полюс в x тоже устранян. Тогда можно тоже устранять члены нижного порядка в верхном правом коеффициенте чтобы получить

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix} \tag{19'''}$$

рода $\mathfrak{D}(1,1)$.

Для матрицы второго рода в (19) есть несколько возможностей. Перед тем, как посмотреть их нужно объяснить особенность теории Атья. Она не предлагает чёткий приём чтобы установить, данное расслоение разложимое или нет. Рассматриваем на пример расслоение

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \, d \in \mathbf{I}_F, \, b \in \mathbf{A}_F.$$

Пусть

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, \Theta_2 = \begin{pmatrix} d \end{pmatrix}.$$

Мы предполагаем что $\deg(\Theta_2) > 0$ и что $\Theta \simeq \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ разложимо. Если $\Lambda_i \neq (1,0)^{\mathrm{tr}}$, $i = 1, 2$, тогда $\Lambda_i \to \Theta_2$ сюръективно и $\deg \Lambda_i \geq \deg \Theta_2$. Сдедовательно

$$\deg \Theta_2 = \deg \Lambda_1 + \deg \Lambda_2 \geq 2 \deg \Theta_2$$

и это невозможно. Иначе говоря, или Λ_1 или Λ_2 равно, лучше эквивалентно, $(1,0)^{\mathrm{tr}}$. Пусть $\Lambda_1 = (1,0)^{\mathrm{tr}}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix} = \Theta g, \, g = \prod_{v \in M} g_v \in G(\mathcal{O}_F), \, g_v = \begin{pmatrix} 1 & \beta_v \\ 0 & \delta_v \end{pmatrix}, \, \beta_v \in \mathcal{O}_v, \delta_v \in \mathcal{O}_v^{\times}, \tag{20}$$

и

$$\Lambda_2 = \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_i \in F, i = 1, 2, \tag{21}$$

где Λ линейное расслоение, и $(b + \beta_x d)/\delta_x d = (\phi_1/\phi_2)_x$ мероморфная функция от $x \in M$. Мы пользуемся этим выводом чтобы доказывать неразложимость различных расслоений. Он кажется мне несколько неуклюжим и больше всего неподходящые когда род $g > 1$, но в данную минуту у меня другого способа нет.

Расмотримте матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}a + z_x^{-1}z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1}z_x^{-1} \end{pmatrix} \tag{22}$$

из (19). Если $a = 0$ тогда это расслоение эквивалентно

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-3} \\ 0 & z_x^{-2} \end{pmatrix}, \ b = z_x^{-3}, d = z_x^{-2}, \quad u = x; \tag{23.a}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1}z_x^{-1} \end{pmatrix}, \ b = z_x^{-1}z_u^{-2}, d = z_x^{-1}z_u^{-1}, \quad u \neq x. \tag{23.b}$$

и у $(b + \beta_v d)/\delta_v d$, $v \in M$, есть единственный полус в нокте u. Но такой мероморфной функции нет. Сдедовательно (21) неразложимое.

Если $a \neq 0$ лучше нужно писать (19) точно как

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1}a + z_x^{-1} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Но есть опять у $(b+\beta_v d)/\delta_v d$ единственный полус в нокте u. Следовательно (24) неразложимо. Согласно [A] есть четыре неразложимых прислоения с данным детерминантом четной степеней. Поэтому если x дано четыре u дают данное прислоение.

Случай (e) самый лёгкий. Так как операторы Гекке коммутиповают с тензорным произведением с линейным расслонением, для данного x достаточно рассматривать

$$\begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(0,0). \tag{25}$$

Преобразование этой точки дано двумя родами точок,

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(1,0),$$

и

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1}a + z_x^{-2} & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Но

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x^{-1}a + z_x^{-2} & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_x^{-2} & 1 \\ z_x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-2} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(1,0).$$

Хотя доказательства неудовлетворительны эти выводы убедительны. Объясним!

Сперва мы подведём итоги размышлений. В частности мы узнаем что размерность $\dim(g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x))$ всегда равно 0, хотя это подмножество множества $G(\mathbf{A}_F)/G(\mathcal{O}_F)$ или его образ в Bun_G может содержать больше одного элемента. Следовательно область интегрирования в (9) конечное множество. Вообще, хотя я этого не объясню здесь, мера этого интеграла определёна формой Пфаффа, но для конечного множества это определение так, что мера каждой нокты 1. Значит, мы можем откладывать введение общей теорий этой формы.

Рассмотримте пять случаев (a),…,(e). Для каждого случая мы пользуемся отношениями

$$\Theta_i f_z(g) = f'_z(g), \ f_z(g) = f(zg), \ f'_z(g) = f'(zg), \ f'(g) = \Theta_i f(g), \ i = 1, 2, \ z \in \mathbf{A}_F^\times$$

То есть отображения Θ_i и $f \to f_z$ коммутируют.
(a) Если $m - n \geq 2$ тогда образ матрицы

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & z_v^{-n} \end{pmatrix}$$

состоит из двух точек

$$\begin{pmatrix} z_u^{-m} z_x^{-1} & \\ 0 & z_v^{-n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & z_v^{-n} z_x^{-1} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

(b) Если $m - n = 1$ о состоит из (26) и, согласно с (16′),

$$z_u^{-m} \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(m, m),$$

если дивизор $m \cdot u - n \cdot v$ линейно эквивалентный дивизору x.
(c) Если $m - n = 0$ образ состоит опять из (26) и, но сейчас согласно с (18),

$$z_u z_v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & z_{x_1}^{-1} \\ 0 & z_y^{-1} \end{pmatrix}, \quad v - u \sim x - y.$$

если $u \neq v$ и

$$g = z_v^{-k} \begin{pmatrix} z_u/z_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Theta.$$

Обозначение несколько изменено относительно (18). Я замечаю что $u = v$ не даёт больше чем (26).
(d) В (19) u пробегает M и уместная область определения Θ_1

$$\begin{pmatrix} 1 & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix},$$

и образы, то есть область значений оператора Θ_1 с областью определенности $\mathfrak{A}(1, 0)$, даны (19). От первых элементов множества (19) мы получаем сначала, с $u = x$, точку (19′) в $\mathfrak{A}(1, 1)$. От других u мы получим нокты (19″) в $\mathcal{D}(1, 1)$. С первого взгляда на (19′) кажется, что есть только одна недостающая точка, $u = x$, но $\mathcal{D}(1, 1)$ двумерцо! Вторые элементы множества (19) все неразложимые с детерминантом $z_u^{-1} z_x^{-1}$. Согласно статье [A], есть точне четыре точки в $\mathfrak{A}(1, 1)$ с данным детерминантом. В $\mathfrak{A}(1, 0)$ есть только одна. То есть соответсвие $\mathfrak{A}(1, 0) \to A(1, 1)$, соответсвие рода $4 \to 1$.
(e) Для данного x общий элемент области определенности дан матрицам

$$z_u z_v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(0, 0), \tag{27}$$

то есть как расслоение (27) независимое от x. Преобразование либо

$$z_u z_v^{-1} \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(1, 0) \tag{27′}$$

либо

$$z_u z_v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-2} \\ 0 & z_x^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(1, 0). \tag{27″}$$

Для $A(m, m)$, $m \neq 0$, $z_u z_v^{-1}$ замена z_u^{-m}. Соответсвие $\mathfrak{A}(0, 0) \to \mathfrak{A}(1, 0)$ биективно.

VI. **Операторы Гекке.** Хотя Bun_G как топологическое пространство трудно, даже для $G = GL(2)$ и эллиптической кривой M, оно просто как дифференциально-геометрическое пространство, хоть бы для этой пары. Мы расмотриваем сейчас этот случай. Для его многообразие Пикара $\mathrm{Pic}(M)$ дано произведением двух окружностей с $\mathbf{Z}$. Согласно статью [A] множество Bun_G дано как объединение

$$\mathfrak{D} = \{\cup_{m>n}\mathfrak{D}(m,n)\}\bigcup\{\cup_m \mathfrak{D}(m,m)\},$$

следовательно симметрического произведения $\mathrm{Pic}(M)$ с собой, и

$$\mathfrak{A} = \dots \cup \mathfrak{A}(-1,-1) \cup \mathfrak{A}(-1,0) \cup \mathfrak{A}(0,0) \cup \mathfrak{A}(1,0) \cup \mathfrak{A}(1,1) \cup \mathfrak{A}(2,1) \dots$$

Обозначение несколько произвольным. Поздно мы будем вводить меру на это пространство; она будет по существу фактор-мера меры Хаара, итак мера Лебега μ. Операторы Гекке будут алгебра коммутирующих ограниченных операторов на $L^2(\mu)$ замкнута относительно эрмитого-сопряженных операторов.

Я подчёркиваю что $\dim \mathfrak{A} = 1$ хотя $\dim \mathfrak{D} = 2$, что $L^2(\mu) = L^2(\mu, \mathfrak{D}) \oplus L^2(\mu, \mathfrak{A})$ и что непрерывные функции с компактном носителем плотны в $L^2(\mu)$. Удивительно, даже сначала тревожно, что эти два пространства инвариантны при операторах Гекке. Пусть я объясняю. Это очевидно для $\Theta_{2,x}$. Оператор $\Theta_{1,x}$ представляется как

$$\begin{pmatrix} DD & DA \\ AD & AA \end{pmatrix}.$$

Нужно доказать что $DA = 0$, $AD = 0$, то есть что они нуль как операторы от $L^2(\mathfrak{A})$ в $L^2(\mathfrak{D})$ соответственно $L^2(\mathfrak{D})$ в $L^2(\mathfrak{A})$. Эти два уравнения выражают то, что я называю преобладанием диагональых клеток. Возможно, что принцип которого они пример вообще правилен. Если так он главный вывод этой статьи.

Согласно (10), для $\Theta_{1,x}$ нужно осмотреть сначало:
(i) для данного $g \in \mathfrak{D}(m,n)$ множество $g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x) \cap \mathfrak{A}$;
и тогда
(ii) для данного $g \in \mathfrak{A}(m,n)$ множество $g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x) \cap \mathfrak{D}$.
Эти пересечения определяет или ограничивают носитель f' в (10). То есть они дают носитель, может быть не самой маленький, функции (10) в том или другом множествею. Ядро оператора $\Delta_{1,x}$ род матрицы строки или столбцы которой параметрированы множеством $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{A}$. Следовательно это ядро состоит из четырёх блоков, диагональных блоков $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}), (\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ и недиагональных блоков $(\mathfrak{D},\mathfrak{A}), (\mathfrak{A},\mathfrak{D})$. Мы интересуемся сейчас недиагональными блоками.

В первом случае, для которого соответствие $\mathfrak{D} \to A$ носит $\mathfrak{D}$ к $\mathfrak{A}$ и переносит функции с $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{D}$ множество уместных элементов в блоке пусто если $m - n \neq 0, \pm 1$. Если $m = 1$, $n = 0$, это по существу (16') если $u = x$. Более точно множество состоит из

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 & z_x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Λ произвольно линейное расслоение. То есть если f непрерывно с носителю в $\mathfrak{A}(n,n)$, функция f' в (9) как функция на $\mathfrak{D}$ понесёна

$$\{\Lambda \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \Lambda \text{ линейное расслоение}\}.$$

Но такая функция как функция в $L^2(\mathrm{Bun}_G)$ нуль-функция потому что это множество одномерное как комплексное многообразие а $\mathfrak{D}$ двумерное. Общий случай $m = n + 1$ тот же самый. Однако этот довод неудовлетворителен. Блок AD равен 0 по двум причинам: (i) нет естественного средства ограничения L^2-функтции на пространсво более нижной размерности; (ii) операторы Гекке эрмитовы. Следовательно указом! Но это даёт правильные заключения и убедителъую теорию. Оно тоже существенный довод в следующих замечаниях.

Если $m = n$ мы предполагаем что $m = n = 0$, тогда класс расслоения $(17'')$ определёно точкой y, потому что $v - u \sim x - y$ и x дано. То есть образ множества $\mathfrak{A}(0,0)$ и вообще образ $\mathfrak{A}(m,m)$ в $\mathfrak{D}$ одномерен. Следовательно $DA = 0$.

В втором случае обязательно что $m - n = 0, \pm 1$. Если $m = 1, n = 0$, пересечение $g\Delta_1/G(\mathcal{O}_x) \cap \mathfrak{D}$ данно $(19''')$ с произвольному $u \in X$. То есть размерность пересечения равна 1. Следовательно оно не может носить нетривиальную L^2-функцию. Если $m = n = 0$ тот же самый вывод следствие уравнения $(27')$.

Возможно что эта самостоятельность $L^2(\mu, \mathfrak{D})$ и $L^2(\mu, \mathfrak{A})$ то, что отличает L^2-теорию от пучковой теории в [G].

VII. **Собственные значени и собственные функции операторов Гекке.** До того что мы осматриваем спектр операторов Гекке мы возвращаемся лестнице $\mathcal{E}(r,d)$, $d = -\infty, \dots, \infty$ для $r = 2$. Мы не осмотрим общего r. И особый случай и общий случай расмотрены в [A]. Для $r = 2$, лестница

$$\dots, \mathfrak{A}(-1,-1), \mathfrak{A}(0,-1), \mathfrak{A}(0,0), \mathfrak{A}(1,0), \mathfrak{A}(1,1), \mathfrak{A}(2,1), \dots \tag{28}$$

Если Λ линейное расслоние степени 1 тогда $\Theta \mapsto \Lambda \otimes \Theta$ такой изоморфизм что

$$\mathfrak{A}(j,j) \mapsto \mathfrak{A}(j+1,j+1)$$

и

$$\mathfrak{A}(j,j-1) \mapsto \mathfrak{A}(j+1,j),$$

но оператор Гекке Θ_1 такой, что

$$\mathfrak{A}(j,j) \mapsto \mathfrak{A}(j+1,j), \quad \mathfrak{A}(j,j-1) \mapsto \mathfrak{A}(j,j).$$

Я начинаю с исправлением или лучше с точнее видом теоремы [A,Th. 6] и следующих теорем, то есть $\deg A = 1$, где A линейное расслоение этой теоремы. Пусть $\mathrm{Pic}_n(M)$ множество линейных расслоений степени n. Я предпочитаю выражать [A, Lemma 16, Th. 5,6,7], выше всего Th. 6, сдедующим образом. Есть такое биективное отображение $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathrm{Pic}(M)$, что:

(i) если Λ_1 линейное расслоение и $\Theta \leftrightarrow \Lambda$ тогда $\Lambda_1 \cdot \Theta \leftrightarrow \Lambda_1 \cdot \Lambda$;

(ii) расслоение F_2 в Th. 5, или в определение (6), соответствует тривиальному расслоению;

(iii) если Θ дано с (7) и $\Lambda = (\sigma^{-1})$ тогда $\Theta \leftrightarrow \Lambda$.

Следовательно мы можем отождестить $\mathfrak{A}$ с $\mathrm{Pic}(M)$, но это отождествление искусственное, и $\mathfrak{D}$ с симмитрисеским произвидением $\mathrm{Pic}(M)$ с собой. Кроме того, каждое неупорядоченная пара (χ_1, χ_2) унитарных характеров группы $\mathrm{Pic}(M)$ определяет функцию,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \to \chi_1(\alpha)\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta) \quad \alpha, \beta \in \mathrm{Pic}(M) \tag{29}$$

над $\mathfrak{D}$. Мы докажем что эти функции дают все собственные функции ореаторов Гекке, в смысле этой теории, с носителём $\mathfrak{D}$ и что собственный класс функций (29) в точке x

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{-1}(x) & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1}(x) \end{pmatrix} \tag{30}$$

для всех x в M. Достаточно доказать, что все эти функции собственные функции, потому что очевидно что они дают спектральное разложение. Я напоминаю что собственная функция определяет для каждой точкой x полупростый, даже унитарный, собственный класс в $GL(2, \mathbf{C})$, именно детерминант с Θ_2, но это очевидно, и след с Θ_1.

Мы утверждаем это сперва для $\mathfrak{D}$, откладывающие рассмотрение множеста $\mathfrak{A}$. Есть опять два существенных случая:

$$g = \begin{pmatrix} z_u^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ m \neq n = 0; \quad g = \begin{pmatrix} z_u/z_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ m = n = 0.$$

Я замечаю, что z_u^{-m} и z_u/z_v изображают дивизоры $m \cdot u$ и $v - u$. Из (14) и (14″) мы заключаем что если $m \neq 0, \pm 1$ функция помножена на $\chi_1(z_x^{-1}) + \chi_2(z_x^{-1})$ в точке g, то есть

$$\chi_1(\alpha)\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta) \tag{30.a}$$

заменено суммой[17]

$$\chi_1(\alpha)\chi_1(z_x^{-1})\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_2(z_x^{-1})\chi_1(\beta) + \chi_1(\alpha)\chi_2(\beta)\chi_2(z_x^{-1}) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta)\chi_2(z_x^{-1}),$$

которая равна произведению

$$\{\chi_1(\alpha)\chi_2(\beta) + \chi_2(\alpha)\chi_1(\beta)\}\{\chi_1(z_x^{-1}) + \chi_2(z_x^{-1})\}$$

Если $m = 1$ такой же вывод следует из уравний (14) и (16.a) с (16.b), скорее из (25). Для $m = 0$ довод тот же. Очевидно, что функции (30.a) давают польное множество собственных функций над $\mathfrak{D}$.

Мы рассматриваем теперь $\mathfrak{A}$. Комбинатарный анализ этого случая несколько сложен. Собственная функция определает собственный сопряженный класс, итак для каждой точки в M нужно вводить два собственное число. Для $\mathfrak{D}$ мы пользовались двумя самостоятельними характерами но для $\mathfrak{A}$ двух правдиво самостоятельних характеров нет.

Пусть $\mathfrak{L}$ множество линейных расслоений и $\mathfrak{L}_m$ те которых степень равна m. Тогда, согласно [A], $\mathfrak{A}(m, m) = \{\Lambda \otimes F_2\}$ и $\mathfrak{A}(m+1, m)$ множество $\{\Lambda \otimes F(d)\}$, где $\Lambda \in \mathfrak{L}_m$, где $F(d)$ одна из матриц (7), дана но кроме этого произвольна. К тому же $\Lambda_1 \otimes F(d) \sim \Lambda_2 \otimes F(d)$ когда и только когда $\Lambda_1^2 \sim \Lambda_2^2$. Лучше объяснять следствя тотчас.

Лемма 1. Соответствие $\Delta_1 : \mathfrak{A}(j, j) \to \mathfrak{A}(j+1, j)$ четыре-однозначено но соответствие $\Delta_1 : \mathfrak{A}(j, j-1) \to \mathfrak{A}(j, j)$ одно-четырезначено.

Это следствие трёх обстоятельств: (i) Δ_1 коммутирует с умножением на линейное расслоение; (ii) над $A(j, j)$ детерминант четыре-однозначен; (iii) над $A(j, j+1)$ детерминант взаимно однозначен. Первое утверждение очевидно и другие доказываны в [A, Th. 7]. Например, если в матрицу

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_u^{-2} \\ 0 & z_u^{-1} \end{pmatrix}$$

[17] К сожалению обозначение плохо, $\chi(z_x^{-1}) = \chi^{-1}(x)$. Я надеюсь что это приемлемо! Выбор сделан в (30).

класс второго фактора не изменяется если он заменян

$$\Lambda\begin{pmatrix}1 & z_u^{-2}\\ 0 & z_u^{-1}\end{pmatrix}, \quad \Lambda^2\sim 1,$$

но класс второго фактора в $(19')$ изменяется если Λ нетривиально. Самый лучший приём чтобы параметризовать элементы в $\mathfrak{A}$ следующый:
(i) сперва, один параметр степень его детерминанта; (ii) если эта степень нечётный детерминант этот сам второй параметр; (iii) если степень чётный этот элемент равен ΛF_2, где F_2 дано в (6), и его второй параметр Λ. Следовательно параметр дан степенём и линейым расслоением, которых первый излишен.

Первый оператор Гекке Θ_1 повышает степень на один. Детерминант умножен на $\Lambda=(z_x^{-1})$. Соответсвенно лемме, над $\mathfrak{A}(m,m+1)$ отображение которое дано соответствием Гекке $1:4$ а над $\mathfrak{A}(m,m)$ оно $4:1$.

Данной характер χ группы $\mathrm{Pic}(M)$ определяет функцию f'_χ над множестве

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}=\cup_{m=-\infty}^{m=\infty}\mathfrak{A}(m,m)=\{\Lambda\otimes F_2\,||\,\Lambda\in\mathrm{Pic}(M), \tag{31}$$

именно, $f'_\chi\,:\,\Lambda\otimes F_2\mapsto\chi(\Lambda)$. Если χ тривиальный над $\{\Lambda\in\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}\,|\,\Lambda^2=1\}$ тогда есть такое $\tilde\chi$ что $\chi(\Lambda)=\tilde\chi(\Lambda^2)$. Пусть функции f'_χ такое расширение f_χ до $\mathfrak{A}$, что $f'_\chi(\Lambda)=\tilde\chi(\det\Lambda))$. Если χ не так, тогда f'_χ равен нулю над $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, дополнение множества $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$ в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}=\cup_{m=-\infty}^{m=\infty}\mathfrak{A}(m,m+1). \tag{31.a}$$

Эти функции составляют полное множество собственных функций операторов Гекке с носителём в $\mathfrak{A}$. Точнее, пространство функций над $\mathfrak{A}$ состоит из четырёх подпространств. Первое $\mathfrak{S}_0$ состоит из таких функций f что $f(\Lambda\otimes\Theta)=f(\Theta)$ если $\deg\Theta$ чётно и $\Lambda^2=1$, но если $\deg\Theta$ нечётно такого условия нет. Функция произвольна над $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, но неприрывна или с интегрируемным квадратом в зависимости от обстоятельств. Есть три другое подпространсто, $\mathfrak{S}_i$, $i=1,2,3$. Пусть χ_i, $i=1,2,3$ неединичный характер группы $\mathrm{Pic}_2(M)=\{\Lambda\in\mathrm{Pic}(M)\}$ такое что $\Lambda^2=1$. Я замечаю что порядок этой группы четыре и что квадрат каждого $\Lambda\in\mathrm{Pic}_2(M)$ тривиальный. Пусть $\mathfrak{S}_i$ множество таких функций f что $f(\Lambda\Theta)=\chi_i(\Lambda)f(\Theta)$, $\Lambda\in\mathrm{Pic}_2(M)$ и $f(\Theta)=0$ если $\deg\Theta$ нечётно. Для теорем полноты нужно требовать что квадрат, то есть его абсолютная величина, этих функций интегрируемен но иногда другое условие лучше, например для описания собственных функций и собственных сопряженных классов ореаторов Гекке. Следующая лемма непосредственное следствие первой леммы. Третье утверждение следствие уравнения (32.a).

Лемма 2. (a) Над каждым пространством $\mathfrak{S}_i$, $i=1,2,3$ оператор Θ_1 нуль. (b) Каждое пространство $\mathfrak{S}_i$, $i=0,1,2,3$ инвариантно при Θ_2. (c) Все собственные сечение возникают в $\mathfrak{A}$ с кратностей 1

Следовательно, для $i=1,2,3$ и всех $x\in M$ вид собственных классов

$$\begin{pmatrix}\alpha_x & 0\\ 0 & -\alpha_x\end{pmatrix}, \quad \alpha\in\mathbf{C},\ |\alpha|=1, \tag{32}$$

то есть его след нуль. В самом деле собственные функции f для $\mathfrak{S}_i$, $i=1,2,3$, такие функции что $f=0$ над $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$ и что $f(\Lambda\Theta)=\chi_i(\Lambda)f(\Theta)$ если $\Lambda\in\mathrm{Pic}_2(M)$. Полное множество этих собственных функций составлено ограничениями к множествому $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$ таких функций $\Lambda F_2 \to \chi(\Lambda)$, где ограничение характера χ к $\mathrm{Pic}_2(M)$ равно χ_i. Следовательно[18]

$$\alpha_x = \pm\sqrt{-f(z_x^{-1})}. \tag{32.a}$$

Знак не изменяет сопряженный класс (32). Мы можем выбрать квадратный корень непрерывным образом, а затем глобально определить его до знака.[19] Мы возвратимся к третьему утверждению докажется в §XI.

Оставленное пространство составлено функциями детерминанта, $\Theta \to f(\det\Theta)$. Которые из этих функций собственные функции операторов Гекке? Пусть $\rho(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathrm{Pic}_M$ равно $1/2$ если $\deg\Lambda$ чётно и 1 если $\deg\Lambda$ нечётно. Тогда собственные функции даны $\rho\chi$, где χ характер Pic_M. Собственные значения $\Theta_{1,x}$ и $\Theta_{2,x}$ равны $2\chi(x)$, $\chi^2(x)$ и собственный сопряженный класс дан матрицой

$$\begin{pmatrix} \chi(x) & 0 \\ 0 & \chi(x) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Комбинаторика несколько необычна. Я подчёркиваю, оказывается что кратность каждого собственного сопряженного класса в $L^2(\mathfrak{A})$ одна. Но эти оставленные собственные сопряженные классы появляются тоже в $L^2(\mathfrak{D})$. Это кажется мне удивительно.

Есть один пункт который нужно подчёркивать и несколько которые полезно помнить. Множество характеров группы $\mathrm{Pic}(M)$ объединение множества пар $\{\chi, \eta\chi\}$, где $\eta(\Lambda) = (-1)^{\deg(\Lambda}$. Каждой паре ассоциирован собственный класс.

Я замечаю тоже, что чрезвычайно трудно отличить собственные функции, собственные очки и собственные значения. Существует произвольный выбор, неявный в первом, но не в других. Важно различать их свойства, но не легко!

Лемма 3. Это построение инъективно.

След матрицы (32) нуль для всех x. Для следа класса нахожущегося в главном ряде, то есть присоединяется к паре характеров Pic_M, это невозможно. Следователбно, достаточно рассмотреть классы присоединены к $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда сдед единично нуль. Следовательно только детерминант уместен. Но соответственно уравнении (32.a) детерминант равен $f^2(z_x)$. Но допустимые функции такие, что если f_1, f_2 допустимы и $f_1 = \pm f_2$ всюду тогда $f_1 = \epsilon f_2$ всюду с константой ϵ.

Окончательная теория будет теория для редуктивных групп. Итак возможно что группа $GL(2)$ введёт в заблуждение. Следовательно мы рассматриваем кратку группу $SL(2)$ для которой параболический спектр конечен. Вероятно что это правдиво для всех полупростых групп. Мы не рассмотрели этой группы и её операторов Гекке но $\mathrm{Bun}_{SL(2)} \subset \mathrm{Bun}_{GL(2)}$ и их собственные функций получёны ограничением. Я ещё не проверил что явление преобладающих диагональных клеток[20] обосновано для умножения,

[18] Когда я впервые пришёл на этот вопрос, я не знал об осложнениях, незначительных, но важных, подразумеваемых в этом описании. Функция f однозначна, но функция α_x не всегда является так. То, что мы можем и должны сделать, это выбрать её так, чтобы она однозначна на одном из трех двойных покрытий M' кривой M. Тогда ясно, что собственные функции образуют полный ортогональный базис. Я надеюсь что это короткое объяснение достаточно.

[19] Чрезвычайно трудно различить собственные функции, собственные классы и собственные значения. Существует произвольный выбор, неявный в первом, но не в других. Важно отличать их свойства, но не лёгко!

[20] то есть равенство $AD = DA = 0$.

для всех операторов Гекке и для $SL(2)$, в частности для оператора определенного матрицой

$$\begin{pmatrix} z_x^{-1} & 0 \\ 0 & z_x \end{pmatrix}.$$

Тем не менее я этому употреблаю. Ограничение каждого пространства $\mathfrak{S}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, на $SL(2)$ одномерно. Следовательно параболический спектр группы $SL(2)$ четырехразмерен. Один из этих собственнчх сопряженных классов тоже параболический. Я склонен думать, что для всех полупростых групп параболический спектр конечен но я ещё не знаю как пересчитывать его.

Перед тем, как обратиться к окончательному вопросу есть несколько простых замечаний. Если два характера χ_1, χ_2 такие, что присоединенные функции f_1, f_2, $f_i : \Lambda F_2 \to \chi_i(\Lambda)$ дают тот же собственный сопряженный класс (31.a), то есть $\chi_1(z_x^-) = \pm\chi_2(x^{-1})$ всюду, тогда $f_1 = f_2$. Кроме того $\Lambda \to \det \Lambda F_2$ даёт естественное покрытие четвертого порядка. Может быть что неважно, но для $i = 1, 2, 3$ периоды сопряжённого класса (32) ω_1 и ω_2.

Периоды и функции. Я хотел бы, прежде чем мы закончим этот раздел, сделать очевидное мелкое наблюдение, потому что это дело, которое смутило меня, связано в конце с важными частями теории, которые просмотрели обычно проницательные авторы статьи [AB]. Кривая M дана решёткой $L = 2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_2\mathbf{Z}$, то есть её точки даны $\mathbf{C}/L$. Но функции, связности и т.д. даны $\mathbf{C}/\tilde{L}$, где $\tilde{L} = 2\eta_1\mathbf{Z} + 2\eta_2\mathbf{Z}$. Но мы встречаем выше не только эти параметры но тоже те даны $\mathbf{C}/2\tilde{L}$ из-за того, что есть двумерный детерминант который является, и в §IX по другим причинам. Последная возможность не была замечена в [AB].

VIII. **Связности и кривизна.** Теорема Атьи-Ботта описывана в следующем разделе но чтобы доказать эту теорему им нужны несколько основых построеных из глобальной дифференциальной геометрии, которые не были известны мне. Возможно что они известны читателям, но, скорее всего, они больше не знают о них, чем я. Следовательно я предпочитаю объяснить их здесь, хотя только те которые нам нужны. Дело то, что нам нужно быть знакомы не только с основными определениями дифференциальной геометрии, но нам также нужны некоторые способности в их использовании.

В [AB], прежде чем объяснить теорему, авторы ввели $U(1)$-расслоение Q которое я хочу описывать для кривы M. С словами [AB] “let $Q \to M$ be a $U(1)$-bundle with Chern class 1 endowed with a fixed harmonic or Yang-Mills connection. If we normalize the metric on M so that it has total volume 1 the curvature[21] of this harmonic connection on Q is $-2\pi i\omega$, where ω is the volume form on M The universal covering $\tilde{M} \to M$ is of course a flat $\pi_1(M)$-bundle, so that the fibre product $Q \times_M \tilde{M}$ is a $U(1) \times \pi_1(M)$-bundle over M

[21]Здесь есть недосказанное предположение или условие о котором я сделаю замечание позже. Введение сомножители $\pi_1(M)$ в [AB,6.5] действует на группу расслоении но не на её алгебру Ли. Следовательно понятие кривизны мало изменено. Тем не менее присутствие группы будет важно. Это будет объяснено более подробно позже. Мне понадобилось некоторое время, чтобы понять это важное строительство. Пока я ограничиваюсь одним замечанием. Если $G = \mathbf{U}$, $\rho|\mathbf{Z}$ обязательно равно единице. Если, однако, $g = 1$, а также если $g > 1$, но мы рассматриваем особые случай, мы можем изменить значение $\rho(A)$ и $\rho(B)$ как нам нравится. Потребность в этом проявляется в разделе X.

Оказывается, к моему большому удивлению, что в настоящей статье только расслоения $\mathbf{U}(1) = \mathbf{U}(1)^n$ нулевой степени $n = 0$ важны, итак тривиальное расслоение с постоянной метрикой. Я понял это только после значительного размышления над вопросами статьи и выводами [AB].

with connection still having curvature $-2\pi i\omega$. In particular this connection A is a Yang-Mills connection…" Утверждение что класс Чжерня равен 1 значит что у сечения есть ещё один нуль чем полюсы. Хотя для геометра эти предложения и эти утверждения ясны и привычны, для меня не так. Легко для меня и для нескольких других читателя неправильно понять. Следовательно я описываю понятия, особено расслоение Q и связность A, обстоятельно.[22] Но, откуда ни возьмись эта связность? Сначала трудно было понимать!

Есть объяснительная трудность. Это не вопрос одного или двух определений. В [AB] предположено что у читателя есть некоторые знания дифференциальной геометрии. Мне кажется что это неблагоразумно в этой статье. Для меня и для читателя необходимо пояснить некоторые понятия более подробно и приобрести подлинное знакомство с ними и их возможности. Понятие связности Янга-Миллса, последствия которого сложны, само по себе нелегко понять. Я начинаю с материала из статьи [AB], но только для эллиптических кривых.

Хотя это не нужно я предпочитаю описание в рамках более знакомой мной теории Вейерштрасса. В сущности связность дана локально функцией σ в (2.в), но полное описание сложнее. Необходимо тоже вывести из её расслоение Янга—Миллса. Но условие Янга—Миллса, которое я объясню позже, влияно не только метрикой на расслоении но тоже метрикой на M и, кроме того, оно вторичный вопрос.

Возможно что читатель так незнаком с комплексной дифференциальной геометрией как я. Следовательно я предлагаю, для его и для себя, несколько основных определений, которые находятся в [AB] и с которами геометры знакомы. Насколько мне известно, кривизна, которая так важна дла этой статьи, отсутствующая в русско-американской математической теорие [G], хотя возможно что уравнение Янга-Миллса, как физическая теория, в её задном плане. Оно существено для наших целей, потому что теорема Атьи-Ботта необходима, хотя второстепено. Мне кажется тоже, что полезно даже нужно не смешивать геометрическую теорию автоморфных форм с конформной теорией полей или теорией калибровочных полей. Я сперва кратко объясняю отношение теории в [AB] к собственным значениям операторов Гекке. Несколько понятий, связанные с кривизной и связностями, будут разъяснены следующим примером.

Дело в том, что собственные значения операторов Гекке даны функцией на M которой значение в точке $x \in M$ находится в эрмитовом компоненте алгебры Ли группы ${}^LG$. Если $G = GL(2)$, которого компактный вид унитарная группа $U(2)$, ${}^LG = G$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G прямая сумма $\mathbf{U} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h} = i\mathbf{U}$ пространство двумерных эрмитовых матриц. С другой стороны, есть связности которых значении в ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, но[23] мы интересуемся по большой части этими, которых значении в ${}^L\mathbf{U}$. Мы докажем что собственные значения[24] операторов Гекке даны интегралами связности Янга-Миллса с соответствующими начальными условиями и умножены на $i = \sqrt{-1}$. Я конечно полагаю что такое

[22][T] Что касается основные определения, книга Clifford Taubes, Differential Geometry, полезная дополнительная ссылка.

[23]Я признаюсь что обстоятельство, что касательное пространство n-мерного комплексного расслоения на одномерной комплексной кривой $4n$-мерное, всегда смущает меня.

[24]Лучше напоминать что локальная алгебра Гекке изоморфна к кольцу представленай ${}^LG$ и что характер этой кольца соотвецвующий $\gamma \in {}^LG$ дан следом $\pi \mapsto \operatorname{tr}\pi(\gamma)$. Обычно γ унитарно но у следа такого γ различающего свойства нет.

утверждение вообще правдиво, но даже для $GL(2)$ и эллиптической кривой нужно много понимать и много объяснить. Это соответствие следствие отношения подробностей этих двух множеств.

Понятие о связности Янга-Миллса определено только для унитарной связности. В любом случае я рассматриваю только такие связности. Следующие объяснения взяты из [AB, §3,4,5,6], хотя обозначение слегка изменено. Пусть P расслоение для группы $\mathbf{U} = \mathbf{U}(2)$, то есть для её алгебры Ли $\mathbf{U}(2)$). Связность A расщепление последовательности

$$0 \to T_F P \to \mathrm{TP} \to \pi^{-1}\,\mathrm{TM} \to 0, \tag{34}$$

где T обозначает касательное пространство и $_F P$ слой расслоения. Сверх того нужно что расщепление инвариантно относительно $\mathbf{U}$! То есть связность определёна $\omega_A : \mathrm{TP} \to T_F P$ с простыми нужными свойствами, которые ясны. Следовательно можно поднять векторное поле X с TM к TP. Пусть $X \to \tilde{X}$. Тогда $F_A(X,Y) = \omega_A[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ мера кривизны связностей. Как функция пары $\{X, Y\}$, F_A дифференцтальная форма которой значения находятся в алгебре Ли $\mathbf{U}$. Вообще к расслоению P и каждому представлению $\mathfrak{g}$ или $\mathbf{U}$ – первые получены из вторых – присоединено векторное расслоение. Очевидно что F_A сечение расслоения определеного тензорным произведением двумерной формы с присоединенным представлением. К счастью $*F_A$ простее. Оно сечение расслоения P и это сечение инвариантно.

Это замечание важно для доказательства теоремы в [AB,§6, Th. 6.7]. Итак нужно понимать его. Так как $F(A) \in \Omega^2(M; \mathrm{ad}(P))$, $*F_A \in \Omega^0(M, \mathrm{ad}(P))$, то есть $*F_A$ функция которой значения в слои лежут в $\mathrm{ad}(P) = \mathbf{U}$. Так как A инвариантно $*F(pg) = \mathrm{Ad}\, g^{-1} * F(p)$. Следовательно его сопряженный класс постоян внутри слоя. Глобальное постоянство следствие условия Янга-Миллса, которые объясним ниже. Я замечал что условие Янга-Миллса, хотя важно для теоремы Атьи-Ботта, первоначально не относится к делу.

Есть возможность путаницы. Построение расслоения Q как расслоение Янгп-Миллса нужно но его точное построение с постояной кривизной ненужно. Тем не менее оно полезно для сравнения с теорией операторов Гекке.

Мы рассматриваем связности на римановых поверхностях и у этих есть особенные свойстве.[25] Мне трудно не забыть то, что в первую очередь M в [AB] вещественное многообразие! Итак звезда Хожда[26]

$$* : \Omega^1_M(\mathbf{C}) = \Omega^1_M \otimes \mathbf{C} = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M) \to \Omega^1_M(\mathbf{C})$$

такая что $* = -i$ на $\Omega^{1,0}$ и $* = i$ на $\Omega^{0,1}$. Мы выбрали такую метрику, постоанную метрику, что соответствующая комплексная структура дана обычном $d' = \partial/\partial z = d/dx + id/dy$, $d'' = d/dx - id/dy$. С этим построением мы преобразуем действительое пространство в комплексное пространство. Это мы можем повторять с разложениями создавая d'_A и d''_A от $\mathbf{U}$-связностей dA. Так как эта статья не адресована дифференциальним геометрам я объясняю. Присоедины к звязности A и всем ассоциированным разложениям есть ковариантная производная и её сопряжённый дифференциальный оператор d_A.

[25] [AB,§4,5] или [GH] Principles of Algebraic Geometry, стр. 72, P. Griffiths, J. Harris.

[26] Как я замечаю многократно, я выучивался дифференциальную геометрию в то время как я писал эту статью. Следовательно иногда определение было дано преждевремено или неправильно или непольно. Например для построения [GH] метрика на M не относится к делу. Я вернусь к этому вопросу позже.

Я напоминаю что вышеизложение налично тоже для прислоения,

$$\Omega^1_{\mathbf{C}}(M,\mathrm{ad}(P)) = \Omega^{1,0}(M,\mathrm{ad}(P)) \oplus \Omega^{0,1}(M,\mathrm{ad}(P)). \tag{35}$$

Эти пространства собственные пространства оператора $\star$. Пусть d_A ковариантное дифференцирование присоединено к A.

$$\begin{tikzcd} \Omega^{1,0}(M,\mathrm{ad}(P)) \arrow[r, "d''_A"] & \Omega^2_{\mathbb{C}}(M;\mathrm{ad}(P)) \\ \Omega^0_{\mathbb{C}}(M,\mathrm{ad}(P)) \arrow[u, "d'_A"] \arrow[r, "d''_A"] & \Omega^{0,1}(M;\mathrm{ad}(P)) \arrow[u, "d'_A"'] \end{tikzcd} \tag{35.a}$$

Есть обратное построение к тому этой диаграммы, которое дано в [GH]. Полезно подчеркнуть различное отношение построения в [AB] и [GH] к этой диаграмме. В [AB] метрикой вместе с унитарной связностью к голоморфной структуре; но в [GH] метрикой вместе с голоморфной структурой к унитарной связности.

Я несомненно слишком объясняю но важно понимать основные определения точно. Действительно я не достаточно объяснил, потому что я по началу недостаточно понимал. В [AB] доказано что нижняя стрела в (35.a) определяет комплексно-аналитическую структу над расслоением. С другой стороны в [GH, стр. 72] объяснилось как векторное расслоение с комплексно-аналитической структой и эрмитовой метрикой определяет связность. В настоящем обсуждении это значит что диаграмма (35.a), в которой звязность только подразумеваема дана двумя разными множествами. Я понимал эту эквивалентность только медленно. Я повторяю что для меня настоящая статья повод к изучению комплексной дифференциальной геометрии. Эта теория даёт [AB,Th. 6.7] которая вдохновляет определение автоморфной группы Галуя. Мы объясним позже построение этой метрики для особого случая.

Сперва я хотел бы кратко объяснить отношение и [AB] и [GH] к диаграмме (35.a). В [AB] метрика дана и ограничивает связность, которая даёт стрелы; в [GH] метрика тоже дана но с стрелой $d''_A = \bar\partial$, и оба определяют связность. Следовательно, если размерность расслоения равна одну и если есть голоморфное сечение, и есть конечно такое сечение локально, оно и его переменная длина определают, по крайне мере локально, связность, которая совместимая с метрикой, или если мы так предпочтём, мы можем переменять метрику чтобы она совместима с связностей. Я подчёркиваю что есть две метрики, та на M и та на расслоении. Сейчас мы имеем дело с метрикой на расслоении. Эта связность независима от голоморфной сечений и следовательно она определена глобально.

Моё построение расслоения связно с теорией Вейерштрасса. Это не нужно и даже неуклюже, по крайней мере сначала, но, для меня, ставит его в более знакомую и более убедительную рамку. В начале всё было мне новым: построение связности если метрика на расслоении дана [GH,стр. 73]; кривизна; тесное отношение связностей Янга-Миллса с постоянством [AB].

Уместное расслоение Q для [AB, Th. 6.7] мы получаем от тривиального расслоения если мы позволяем полюс в нуле. Я написал эти слова несколько месяцев назад но не понимал их правильно, причиняющий себе значительное замешательство.[27] Это подразумевает что нет канонического выражения сечения в окрестности нуля. Функция ϕ с полюсом порядка одно выбрана, на пример σ^{-1} или ζ, и действительное сечение ψ, то

[27] Мне было неожиданно трудно понять построение пучков Q.

с полюсом, написано как $\psi(\cdot) = f(\cdot)\phi(\cdot)$. Сечение f не каноническая потому что ϕ не каноническое. Функция σ^{-1} лучше потому что она может использоваться везде в $\mathbf{C}$.

Чтобы пользоваться леммой в [GH][28] которая даёт связность, нам нужна эрмитова метрика на Q. Так как размерность Q равна 1, довольно вводить такую положительную функцию $s(z) > 0$ что[29]

$$\text{(36.a)} \quad s(z)|\sigma(z)|^{-2} = s(z+2\omega_i)|\sigma(z+2\omega_i)|^{-2} = s(z+2\omega_i)\exp(-4\,\mathrm{Re}(\eta_i(z+\omega_i))|\sigma(z)b|^{-2}.$$

Прежде тем, что мы доказываем что есть такая функция, я замечаю следствие. Пусть $g(\cdot)$, возможно, неголоморфное локальное сечение расслоения.[30] Тогда $f(z) = g(z)\sigma(z)$ всюду конечно и метрика на Q определена:

$$\text{(36.b)} \qquad (g(z), g(z)) = |f(z)|^2 s^{-1}(z).$$

У меня нет оснований для его введения, только то, что оно служило цели.

Управление (36.a) эквивалентно

$$\text{(36.c)} \qquad s(z+2\omega_i) = s(z)\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_i(z+\omega_i))).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} s(z+2\omega_1+2\omega_2) &= s(z+2\omega_1)\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_2(z+\omega_1+\omega_2))) \\ &= s(z)\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_1(z+\omega_1)))\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_2(z+\omega_1+\omega_2))); \\ s(z+2\omega_2+2\omega_1) &= s(z+\omega_2)\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_1(z+\omega_2=\omega_1) \\ &= s(z)\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_2(z+\omega_2)))\exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_1(z+\omega_2+\omega_1))). \end{aligned}$$

Это можно только если

$$\text{(36.d)} \qquad \exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_1) = \exp(4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_2)),$$

которое следствие уравнения $2\eta_1\omega_2 - 2\eta_2\omega_1 = \pi i$ [WW,стр. 446].

[28] Эта лемма не нужна для определения звязности потому что она даёт знакомую функцию, но этот очерк тоже повод узнать немного дифференциальной геометрии. Сверх того я начинался с этой леммы и только после полного размышления признал, что она не совсем уместна для потребностей статьи. В частности, я не признавал преимуществ, возможно, необходимость введения функции $s(\cdot)$.

[29] Читателю придется простить меня, но для вопросов дифференциальной геометрии есть две метрики, которые нужно учитывать, та, что на базисе, и одна на слое. Кривизна отражает и то, и другое. То есть кривизна определена разностей быстроты вращения в слое порожденного движением в базисе. На базисе есть, из-за его метрики, в каждой точке эталонная площадь, так что переменное действительное число эквивалентно изменяющейся площаде и наоборот. Связности Янга-Миллса, по крайне мере если размерность равна одному, такие что их кривизна F постояна, то есть она удовлетворяет уравнению $\star F = 0$. Мне трудно было понимать как это можно быть для связностй Q. Одна цель, начальная цель, этого раздела - понять это, но я быстро узнал что было гораздо больше которое я не понимал.

Построение которое объяснено в [GH] независимо от метрики на M, но кривизна зависима от её. С другой стороны связность Янга-Миллса такая, что кривизна постояна. Мне не ясно, как метрика на слое влияет на кривизну. Я предлагаю два примера, один ещё привлекательный, чем друг. Я замечаю, что конечная цель сравнение двух неземных вещей, сопряженных классов Гекке, которые меняются от точки к точке, и интегралов связностей Яанга-Миллса, которых природа объяснёна до некоторой степени в [AB]. Для эллиптических кривых трудности относительно простые.

Оказывается, что строительство в [GH] не совсем то, что нам нужно, но оно предлагает первоначальное понимание методов построения связностей с предписанными свойствами.

[30] То есть, если $\lambda \in L$ и g определено в точке λ, тогда функция $(z-\lambda)g(z)$ конечна в точке λ.

Мы сперва определаем s и потом напомним о доводе в [GH]. Пусть $z = 2a\omega_1 + 2b\omega_2$, $a, b \in \mathbf{R}$. Для настоящих целей a, b удобные действительные переменные.[31] Пусть

$$s(z) = s(a,b) = \exp(\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2 + \delta a + \epsilon b). \tag{36.e}$$

Тогда согласно (36.c) нужные уравненя

$$\begin{aligned} s(a+1,b) &= s(a,b)\exp(8\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_1 a) + 8\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_2 b) + 4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_1)), \\ s(a,b+1) &= s(a,b)\exp(8\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_2 b) + 8\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_1 a) + 4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_2)); \end{aligned} \tag{36.f}$$

но согласно (36.e) действительные уравнения

$$\begin{aligned} s(a+1,b) &= s(a,b)\exp(2\alpha a + \alpha + \beta b + \delta), \\ s(a,b+1) &= s(a,b)\exp(\beta a + 2\gamma b + \gamma + \epsilon). \end{aligned} \tag{36.g}$$

Сравнение этих уравнений даёт α, γ, δ, ϵ без трудности но для β есть два определения, которые дают самое значение из-за (36.d). Значения этих пяти числа:

$$\alpha = 4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_1),\ \beta = 4\,\mathrm{Re}(\eta_1\omega_2) = 4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_1),\ \gamma = 4\,\mathrm{Re}(\eta_2\omega_2),\ \delta = \epsilon = 0. \tag{36.h}$$

На этом месте мы уже выбрали метрику на слое, как в [GH]. Позже мы выбираем в качестве дополнительного опыта разную. Однако, мы отступаем сейчас от метода в [GH], в котором голоморфная структура обеспечивает дополнительное условие (то есть $D'' = \bar\partial$ [GH,стр. 73]) и ввести прямо угловое движение связности. Я вернусь позже к этому доводу в рамках попытки достаточно понять понятие кривизны, поскольку оно появляется в теории Янга-Миллса.

Кривая M, как вещественное многообразие, двумерна и связность двигается в $\mathbf{C}$ которое тоже двумерно. Следовательно эта связность определена инфинитезимально четырьмя вещественнами параметрами. Условие унитарностей уменьшает это до двух, которые чисто мнимы. Мы вернемся к этим двум параметрам позже потому что они дают кривизну. Глобально у нас есть сейчас комплексное линейное расслоение с метрикой. Я повторяю. Если $z_1 - z_2 \in L$, тогда $(z_1, \sigma(z_1)^{-1})$, $(z_2, \sigma(z_2)^{-1})$ представляют такую же точку в расслоении только если $\sigma(z_1) = \sigma(z_2)$ и это маловероятно. Если $f \in \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}$, и $\lambda \in L$ тогда (z, f) и $(z + \lambda, f)$ представляют такую же точку в расслоениию Ещё раз, главный предмет функцая $\sigma(\cdot)$ но она не однозначение. Тем не менее она определяет метрику на слое и комплексную структуру расслоения. Эта метрика $f(\cdot) \to s^{-1/2}(\cdot)|\sigma(\cdot)||f(\cdot)|$.

---

[31]Для следующих вычислениеи я замечаю что

$$z\bar\omega_2 - \bar z\omega_2 = 2a(\omega_1\bar\omega_2 - \bar\omega_1\omega_2);\ \ z\bar\omega_1 - \bar z\omega_1 = 2b(\omega_2\bar\omega_1 - \bar\omega_2\omega_1).$$

Следовательноб линейные отношения линейней переменых a, b к переменам $z, \bar z$ даны

$$a = \frac{1}{2}\frac{z\bar\omega_2 - \bar z\omega_2}{\omega_1\bar\omega_2 - \bar\omega_1\omega_2},\ b = \frac{1}{2}\frac{z\bar\omega_1 - \bar z\omega_1}{\omega_2\bar\omega_1 - \bar\omega_2\omega_1}; \tag{37}$$

и

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\bar\omega_2}{\omega_1\bar\omega_2 - \bar\omega_1\omega_2},\ \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\bar\omega_1}{\omega_2\bar\omega_1 - \bar\omega_2\omega_1},\ \ \frac{\partial a}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{-\omega_2}{\omega_1\bar\omega_2 - \bar\omega_1\omega_2},\ \frac{\partial b}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{-\omega_1}{\omega_2\bar\omega_1 - \bar\omega_2\omega_1}.$$

Для ясности мы устраним из этих выражений общий знаменатель $\eta = \omega_1\bar\omega_2 - \bar\omega_1\omega_2$ чтобы получить

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\bar\omega_2}{2\eta},\ \frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{\bar\omega_1}{2\eta},\ \ \frac{\partial a}{\partial \bar z} = -\frac{\omega_2}{2\eta},\ \frac{\partial b}{\partial \bar z} = \frac{\omega_1}{2\eta}. \tag{37.a}$$

Я добавляю что, умножитель ± 1 в стороне, число η дважды площадь параллелограмма со сторонами ω_1, ω_2

Писая эту статью я узнал что были несколько основных математических понятий, которых моё понимание было недостаточно или даже ошибочно. Я объясню их в следующих строках но не обращая особого внимания на мои недоразумения, на пример значения леммы Пуанкаре. В самом деле, то что нетривиальное дифференциалтное уравнение $\bar\partial f = 0$ такое, что множество его решении замкнутное относительно умножения, обстоятельство, которого непривычности я не признавал годами, хотя его важность очевидно. Итак построение Q, которого существование очевидно для Атья и Ботта, восполняет несколько пробелов в моём образовании.

Хотя я буду объяснять позже построение в [GH], вернуясь к этому обращению в рамках попытки достаточно понять понятие кривизны, поскольку оно появляется в теория Янга-Миллса, я предпочитаю начинать с простого описания и построения подходящих одномерных сиязностей. Обыкновенно и предпочтительно движение написано логарифмическо $\eta_1 = \exp(\rho_1 + i\theta_1)$, где ρ_1 и θ_1 вещественные функции. Функция ρ полностью определяется метрикой. Связность дана выражением

$$\frac{\eta_1'}{\eta_1} = \rho_1'(\cdot) + i\theta_1'(\cdot).$$

Можно определить η_1 в отношении данного сечения, которое может быть σ^{-1}, то есть определить

$$\eta_1(\cdot) = \eta(\cdot) - \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \eta = \rho + i\theta.$$

Обозначение так, что второй член, хотя с сзнаком минус, связность! Я замечаю, что она связность, которой кривизна равняется нулю, то есть её интеграл σ^{-1} однздзначно определен локально.

Поскольку связность унитарна ,

$$s^{-1}(\cdot)|\sigma(\cdot)|^2 \exp(2\rho) = \text{constant}.$$

Следовательно, $d\rho(\cdot)$ однозначно определено. Оно дано уравнением

$$2\frac{d\rho}{\rho} = \frac{ds}{s} - \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{d\bar\sigma}{\bar\sigma}.$$

Однако это не ρ которым интересуемся это θ. Хотя я долгое время не признавал это, есть очевидный выбор, мнимой аналог уравнений (36.g) и (36.h),

$$\frac{ds}{s} = (2\alpha a + \beta b)da + (\beta a + 2\gamma b)db,$$

то есть[32]

$$(2\tilde\alpha a + \tilde\beta_1 b)da + (\tilde\beta_2 a + 2\tilde\gamma b)db, \tag{36.i}$$

где $\tilde\alpha = 4\,\mathrm{Im}(\eta_1\omega_1)$, $\tilde\beta_1 = 4\,\mathrm{Im}(\eta_1\omega_2)$, $\tilde\beta_2 = 4\,\mathrm{Im}(\eta_2\omega_1)$, $\tilde\gamma = 4\,\mathrm{Im}(\eta_2\omega_2)$. Размещение двух чисел в значительной степени произвольно. Их можно переставлять. Следствие только замена знака. Те, которые знакомы с кривизной немедленно признают, что полученная кривизна $\tilde\beta_1 - \tilde\beta_2 = 2\pi$. Нужно однако признавать, что это кривизна относительно координат (a, b) и что относительно этих координат площадь фунаментальноя области равна 1! Итак эти вычисления совместимы с утверждениями в [AB]. Я подчеркиваю вопервых, что этот вывод предполагает особенный выбор метрики на M, именно линейно

[32]Обозначение вводит в заблуждение. Значения a и b являются сдвигами, но da и db являются дифференциалами в начальной точке, которая самая не имеет значения.

инвариантную метрику, и во-вторых, что выбор θ хотя естественный тоже произвольный.

Мы ввели изменение связности довольно случайно, но это очень важное изменение, которое даёт нам выбор расслоения Q, представленного на стр. 560 из [AB]. Так как кривизна расслоения постоянна и метрика на M инвариантна относительно переносов, эта измененная связность рода Янг-Миллс. Я признаюсь, что здесь я несколько нерешителен, потому что утверждение требует толкование уравнения [AB, 6.1] а именно для данной связности и для рассматриваемой метрики кривизна $\star F$ постоянна - кажется, что постоянная кривизна является свойством пары, связности и метрики. Кроме того, как я довольно робко замечу опять в другом месте статьи, действие d_A - это для обычных функций перевод, так что по отношению к нему $\star F$ не меняется. Это уравнение [AB,6.1]. Я считаю, что это толкование надумано, но оно подтверждано предложением (6.1) в [AB].

Чтобы убедиться в правильности нашего довода, мы должны повторить вычисления из (36.a) - (36.h), но в логарифмическом виде и только для мнимой части. Следовательно это очевидно. Тем не менее, чтобы успокоить себя и читателя, я проведу вычисление. По мере того, как я продолжаю пытаться достаточно понять [AB], чтобы применить его к геометрической теории автоморфных форм, я становлюсь более непринужденным с основными дифференциально-геометрическими понятиями. Тем не менее я продолжаю испытывать недостаток доверии при произвольной вставке полюса или нуля путем склеивания вокруг круга! Я не могу сказать, что я полностью это понимаю.

Например, изменение действительной части связностей, мультипликативно как в (36.a) или логарифмически, не изменяют кривизну, поскольку они определяются логарифмическая производная функции, определенной на покрытии $\mathbf{C}$ кривой M. Мы можем сделать то же самое для мнимой части, для которой кривизна важнее. Для $GL(1)$-расслоения над кривой отношение двух локальных параметров z_1 и z_2 дано показательной функцией

$$\frac{z_1}{z_2} = \exp(c + di), \quad c, d \in \mathbf{R}, \tag{36.j}$$

с c и d вещественными и с d локально однозначно определенными с точностью до константы в $2\pi\mathbf{Z}$. Число c однозначно определено. Просто выражено, в показательне присутствует аддитивная неоднозначность, и она лежит в $2\pi\mathbf{R}$.

Передышка для размышлений. Введение нулей и полюсов является особенностью теории линейных расслоений на кривых, и лучше спросить себя, что именно происходит? Я признаюсь, что в целом и, в частности, для $GL(1)$, мне трудно помнить, что связность даётся логарифмической производной. Дело в том, что обсуждение в предыдущем абзаце справедливо тоже для двух дивизоров с нулями и полюсами при условии, что порядки нулей и полюсов везде одинаковы, скорее для дроби двух функций, представляющих один и тот же дивизор. Предыдущее обсуждение (36.j) было для одного полюса или одного нуля. Я понимаю, что это разборчиво. Но одно дело что опытный геометр просматривает подробности, другое для престарелого нарушителя. Читатель может задаться вопросом, что меня беспокоит? Вопрос в том, «почему введение нулей и полюсов в унитарном расслоении, связанное с комплексным расслоением, является четко определенной операцией?» Ответ лежит в отношении (36.j)! ■

То, что я предлагаю с (36.i), состоит в том, чтобы воспроизвести порядок (36.a) - (36.j) для чисто мнимой части связности, в отличие от чисто реальной части. Таким образом, формулы для $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}$ достаточно ясны.

Ненужные или преждевременные объяснения. Тем не менее они все подходящи! Это скорее краткое отступление, значение которого для этой статьи не появляется до тех пор, пока мы не придем к уравнению (53). Он предвидит и частично совпадает с последующими объяснениями. Как я уже отметил в другом месте этого текста или как я буду отмечать ниже, главный вывод – это взаимно однозначное отображение между двумя множествами, и элементы этих множеств сами множественны, так что важно выбрать самые простые представители. Скорее, одно этих множеств определено только после того, как мы выбрали несколько других решительных параметров. Это особенно важно для связностей Янга-Миллса, для которых необходимо выбрать связность Q с классом Чженя 1 а также метрики на M и на Q. Я сделал это и невольно, больше от удачи, чем от хорошего управления, мы пришли к постоянным связям, как и выше, а затем, как показано ниже, при показательных функциях (53), которые мы можем сравнивать с выводами в VII. Случай $G = GL(1)$, конечно, особенный, потому что сопряженные классы имеют уникальные представители, но для $GL(2)$, которое перестает быть таким, это не так. Как мы увидим в XI, сравнение всё же возможно.

В §IX мы ссылаемся на комментарии [AB] на линейные расслоения, особенно те, которые имеют степень 0. Для эллиптических кривых они особенно просты. Они даются $\Lambda_0\Lambda_1^{-1}$, где Λ_0 - выделенное линейное расслоение первой степени, а Λ_1 - его перевод. Мы можем также предположить, просто чтобы быть определено что A_0 и Λ_0 связаны с $0 \in L$. Мы также можем просто перевести точку 0 на $z \in \mathbf{C}$ чтобы получить Λ_1. Кривизна произведения - это разность кривизны линейних расслоений, одна из которых является переходом другой. Связность, соединённая с произведением $\Lambda_0\Lambda_1^{-1}$, является разностью двух связностей вида (36.i), то есть

$$(2\tilde{\alpha}(a_0 - a_1) + \tilde{\beta}_1(b_0 - b_1))da + (\tilde{\beta}_2(a_0 - a_1) + 2\tilde{\gamma}(b_0 - b_1))db. \tag{36.k}$$

Коэффициенты теперь все постоянны, так что кривизна равна нулю. Двумерный вектор

$$\begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ b_0 - b_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \tag{36.l}$$

произволен но

$$\begin{pmatrix} 2\tilde{\alpha} & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 & 2\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \tag{36.m}$$

дано. Есть формулы для $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}$ как функции ω_1, ω_2, потому что существуют формулы для η_i $i = 1, 2$, [WW, стр.445-446]. Тем не менее я не знаю, как ведёт себя определитель этой матрицы, например, где он исчезает, но это не кажется соответствующих целям настоящей статьи. Мы вернемся к этому вопросу позже но без полностью обоснованного ответа на него. Можно что не очевидно читателю, что, выбирая метрику на слое, определяемую $s(\cdot)$ и связность, определяемую уравнением (36.i), я некоторое время не признавал, что я выбирал метрику и связность, введенные на [AB,стр.560]. Поиски связности с постоянной кривизной занимали мои мысли. Сначала я не понимал, что постоянная кривизна с стандартной метрикой на $M = \mathbf{C}/L$ подразумевает, по определению, что связность была связность Янга-Миллса. Целью была простота. Эта простота делает окончательное сравнение с выводы §VII намного проще. Я привлеку внимание читателя на то, что постоянство связности Янга-Миллса в (36.k) это не то, которое появляется позже в (53).[33]

Последное находится на тривиальном линейном расслоений на M, первое на расслоений, в которое введены нуль и полюс. Похоже, что первое не имеет отношения к нашей цели. Я упоминаю его только для того, чтобы поместить наше обсуждение в надлежащий свет. Существует такая путаница понятий, которая кажется неизбежным стороной сложной дифференциальной геометрии, что может быть полезно указать, что комплексной связностей к унитарной связности на унитарном расслоении, или, вернее, к связанному с ним вещественному линейному расслоению, означает, что иначе смущающие полюса исчезают.

С другой стороны, я не уверен, что моё понимание унитарных связностей достаточно. Я хотел бы привести его здесь к испытанию читатель. Речь идет о преобразовании локально мероморфного сечения комплексного расслоения в непрерывное сечение вещественного, то есть унитарного, расслоения, которое связанно с его, то есть определяемое мнимой частью его логарифма, то есть его полярной частью. Локально, мы пишем мероморфную функция как $az^k \exp(\varphi(z))$, $k \in \mathbf{Z}$, где $a = |a| \exp(i\eta) \neq 0$ с $\eta \in \mathbf{R}$ действительная константа, $\varphi(0) = 0$, $z = r \exp(i\theta)$, $r \geq 0$. Унитарная связность определена этой функцией дана $ik\eta + i \operatorname{Im} \varphi(z)$.

Это достаточно ясно, но характер унитарной связности, который так определен, трудно найти. Он определяется скеиванием, как и начальное мероморфное расслоение, но в центре разрывается. Клочки имеют небольшой центральный круг с внешним соединением, локальное определение которого в области, непосредственно окружающей клочок, не является трудным. Это, однако, влечет сдвиг вдоль прямой действительных чисел, поскольку введение (мнимого) логарифма потребовало замены окружность показательной функция с прямой её логарифма. Это происходит на границе малого круга, но только на границе. В центре круга остаётся какая-то тайна, некоторые рвутся.

Есть еще одно побочное замечание в связи с расслоениями как $\Lambda = \Lambda_0 \Lambda_1^{-1}$. Мы воображаем, что M - это море и что связьность описывает поток. На пример, поток Λ сочетание Λ_0 и Λ_1^{-1}. У первого есть особенность, водоворот; у второго есть тоже особенность, тоже водоворот, но в противоположном смысле. даже возможно, что они будут выбраны из разных сильных сторон. Если они имеют одинаковую силу, они будут отменяться, когда две точки будут перемещаться вместе. Мне это трудно понять, как геометрически, так и физически, но физический аналог облегчает его. Я предлагаю его тем математикам, которые, как я, с трудностей понимают сложности расслоений и связностей. ■

Но то, что для нас важно, кривизна постояна и она не равна нулю. Сечение, определенное функцией σ^{-1}, по-видимому не имеет кривизны, но это не так. Кривизна скрыта

[33]Напротив, они постояны с нулевой кривизной и линейными интегралами, как в (53). Таким образом, они являются связями Янга-Миллса, то есть они удовлетворяют уравнению [AB, 6.1]. Я оставляю это предложение, чтобы дать понять, насколько теория, представленная или поставленная в этой статье, зависит от подробностей и как медленно я понял эти. Я замечаю, попутно, еще одно обстоятельство, которой значение я не сразу понял. Расслоение Q из [AB] совпадает с расслоением A в [A], которое в настоящей статье стало A_0. Степень A_0^n, которая встречается в описании связки вида Янга-Миллса, соответствует коэффициенту $u \mapsto u^n$, $u \in \mathbf{U}(1)$ в соответствующем гомоморфизме $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в $GL(1)$, [AB,(6.6)]. В качестве дополнительного комментария к формализму, линейное расслоение Q является рассслоением вида Янга-Миллса потому, что уравнение [AB,(6.1)] аддитивно относительно тензорных произведений.

в полюсе в точке 0. Более важным является сравнение собственных сопряженных сечений с интегралами связностей Янга-Миллса. Эти предметы определяются их представителями, которые выбраны в некоторой степени произвольно. Трудно объяснить цель этой статьи, сравнение собственных сопряженных классов с связностей Янга-Миллса и с представлениями автоморной группы Галуя. По крайне мере, трудность является следствием двух факторов: класс сопряженности описывается выбором представителя, который является несколько произвольным, класса, который, сверх того, изменяется от точки к точке; к тому же понятие связности Янга-Миллса зависит от выбора метрики на M. Предпочтительнее выбирать те, которые делают природу выводов наиболее ясными. Я предпочитаю представить сейчас последствия неудачного выбор метрики и звязности. Эсть конечно две метрики, на M и на слое.[34]

Затянутое отклонение. Это отклонение несколько раскидчиво. Дело в том, что невозможно понять природу связностей без четкого понимания отношения между связностями и функциями. Эти могут быть действительнозначны, мнимозначны или комплекснозначны. Теория одинакова, хотя в третьем случае мы имеем дело с контурным интегралом, для которого кривизна нул. Проще всего думать о действительнозначных функциях.

Первоначальное вычисление для связности определенной (37.d) дано (2.e). Область фундаментальная область данная $\{a\omega_1 + b\omega_1 | -1 \le a, b \le 1\}$. Так как множество L не пересекает её границу, мы можем вычислять интеграл связности по этой границе без дополнительного определения. По причинам, требующим дальнейшего объяснения, которые мы откладываем, только мнимая часть выражения (37.d) имеет значение. Согласно (2.d) эта мнимая часть $\zeta(z)\partial z$. Интеграл по границе сумма

$$\begin{aligned}\int_{(-\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,-\omega_2}\zeta(z)dz+\int_{(\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,\omega_2}\zeta(z)dz &= \int_{(-\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,-\omega_2}(\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_2))dz\\ &= -\int_{(-\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,-\omega_2}2\eta_2dz = 4\omega_1\eta_2 \qquad (38.a)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\int_{(\omega_1,-\omega_2)}^{\omega_1,\omega_2}\zeta(z)dz+\int_{(-\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,-\omega_2}\zeta(z)dz &= \int_{(-\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,-\omega_2}(\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_1))dz\\ &= -\int_{(-\omega_1,\omega_2)}^{-\omega_1,-\omega_2}2\eta_1dz = -4\omega_2\eta_1. \qquad (38.b)\end{aligned}$$

[34] Читатель будет узнавать мою тревогу и неуверенность, как я пытаюсь освоить незнакомую дифференциальную геометрию. Я опять обращаю его - или её - внимание на одно уравнение, особенный вид которого важен для этой статьи. Это уравнение Янга-Миллса [AB,6.1], то есть $d_A \star F(A) = 0$, но для линейного расслоения на кривой так, что расслоения $\mathbf{U}(1)$. Напомним [AB, стр.548], что $F(A) \in \Omega^2(M, \mathrm{ad}(P)$. Как представление $\mathrm{ad}(\mathbf{U})$ тривиально $\Omega^2(M,\mathrm{ad}(P)) = \Omega^2(M)$ и $\star F(A)$ находится в тривиальном расслоением где связность тривиальна. Итак, связность, которую мы только что построили, связность Янга-Миллса. Хотя я ещё не понимаю многих последствий этого понятия, я утверждаю, что это замечание основно для статьи! Мы имеем дело с линейным расслоением, таким образом, с абелевой группой G. Это предвидение общего довода на [AB, стр.560], который так важен для этой статьи. За счет повторения себя, я подчёркиваю, что в наших обстоятельствах вместе, линейное расслоение и равномерная (инвариантная относительно переносов) метрика на базисе M, знак связности Янга-Миллса является постоянной кривизной. Значение кривизны определяется классом Чженя расслоения.

Следовательно эта сумма равна $4\omega_1\eta_2 - 4\omega_2\eta_1 = -2\pi i$, как объясняется в [WW], где это уравнение устанавливается аргументами из теории голоморфных функций одной переменной. Этот расчет явно связан с тем, что приводит к выражению (36.i) но их отношение, с первого взгляда, непонятно неясно. Прежде всего я замечаю, что соответственно (2.5) функция $\zeta(\cdot)$ логарифмичесная производная функции $\sigma(\cdot)$, так что интеграл функции $\zeta(\cdot)$ дан $\ln\sigma(\cdot)$, которое не однозначно.

Мы, однако, вызываем трудности, смешивая две разные операции или два понятия: интегрирование комплексной функции комплексная переменная и кривизна, которая влияет на интеграл от действительной функции двух вещественных переменных. Я вставляю признание.

Я признаваю что, хотя я пожилый я никогда не достаточно понимал понятия кривизны, но эта статья по необходимости был повод сделать это. Так как она написана главным образом как вклад в теорию автоморфных форм, я без колебаний включил свой обзор некоторых основных понятий. Изменение контекста является формальным. Я заменяю алгебру Ли $\mathbf{U}(1)$ алгебой Ли $\mathbf{R}$ и область $\mathbf{C}$ областей $\mathbf{R}+\mathbf{R}$. Это показывает то, что мне кажется сущностью понятия кривизны. Связность дифференциальная форма $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$. Вопрос в том, как может

$$\int_{(u_1,v_1)}^{(u_2,v_2)} \{\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy\} \tag{39}$$

не быть независимой от кривой интегрирования? Иначе говоря, как интеграл по замкнутой кривой C не может быть равен нулю?

Пусть в этом коротком отклонении ϵ малое, даже инфинитезимальное, число. Мы покрываем плоскость решёткой $\{m\epsilon, n\epsilon\}$,$m, n \in \mathbf{Z}$ и возьмём объединениеы X тех ячеек B которые находятся в внутренности Y этой (простой) замкнутой кривой. Эта внутренность (приблизительно!) это объединение, то есть

$$\int_Y f(x,y)dxdy = \sum_{B\subset X}\int_B f(x,y)dxdy + O(\epsilon). \tag{39.a}$$

Пусть $f(x,y) = d\alpha/dy - d\beta/dx$. Это будет кривизна. Граница каждого B дано четырьмя упорядоченными рёбрами в порядке против часовой стрелки $e_1(B), f_2(B), e_2(B), f_1(B)$, где, на пример, e_1 дано $\{(a,b),(a+\epsilon,b)$. Оставляя в стороне погрешность, мы получим для суммы в (39.a) сумму

$$\sum_{B\subset X}\{\int_{e_1(B)}\alpha dx + \int_{e_2(B)}\alpha dx + \int_{f_2(B)}\beta dy + \int_{f_1(B)}\beta dy.$$

Это равно

$$\begin{aligned}
&\sum_{B\subset X}\Big\{\int_{\tilde e_1(B)}\{\alpha(x,y)-\alpha(x,y+\epsilon)\}dx + \int_{\tilde f_1(B)}\{-\beta(x,y)+\beta(x+\epsilon,y)\}dy\\
&= \sum_{B\subset X}\Big\{-\epsilon\int_{\tilde e_1(B)}\frac{d\alpha}{dy}dy + \epsilon\int_{\tilde f_1}\frac{d\beta}{dx}dx = \sum_{B\subset X}\int_B\{\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\}dxdy\\
&= \int_Y\{\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\}dxdy + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{39.b}$$

где, чтобы быть ясным, я ввёл два осевых ребра, $\tilde{e}_1 = e_1, \tilde{f}_1 = -f_1$. Значит что (39) не зависит от кривой если кривизна

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0. \tag{39.c}$$

Просто выражено, разность переносов на противоположных горизостронах отличаются от $O(\epsilon^2)$. Если кривизна равна нуле эта разность $O(\epsilon^3)$. Эти рассмотрения поднимают два вопроса. До какой степени зависит кривизна от метрики и от координат? Я не уверен, что эти вопросы важен. В данный момент они неуместны. Важно то, что интеграл кривизны по внутренности простой замкнутой кривой равна нтеграл связности по самой криве. В любом случае замечания после уравнения (36.i) оправданы как есть, некоторой степенью, утверждение, взятое из статьи [AB].

Мы ещё не ввели метрики на M. Следовательно нам не можно говорить о связности Янга-Миллса. Тем не менее мы уже ввели пример связности, которой кривизна постояна. Это уже хороший знак. Я хотел доказать это с помощью геометрического довода, таким образом, что оно явно утверждение о кривизне. Но я был убежден, что пункт $0 \in L$ ничего не принесёт, и поэтому, запустив его, я неоднократно смутил себя Я неделями искал свою ошибку, которая оказалась довольно очевидной. Следующие несколько страниц, в качестве помощи читателю, пытаюсь объяснить себе источники своих ошибок, сами по себе поучительные.

Я много раз ссылался на лемму в [GH], которая предлагает построение связностей с тем или иным свойством, но упустил возможности очевидного факта, что логарифмическая производная функция к функции, которая нигде равна нулью и которая может быть либо положительной, либо с абсолютной величиной которая равна одному, либо помплексной, определяет связность, даже связность относящаяся к настоящему обсуждению. Это не было преднамеренным. Оно было поступок невиновного, ошеломленный сложностью предмета. Я осознавал возможности, которые предложены были, но только неявно. У меня не было здравого смысла заявлять их явно. Это значит, что понимание леммы в [GH] полезно но не обязательно для наших целей. трудно поверить, что я недостаточно сознавал утверждение о том, что нулевая кривизна, помимо некоторых тонкостей, является необходимым и достаточным условием того, что связность определяется функцией

В то же время я рассматриваю обратное построение которое дано в [GH,стр.72]. На комплексной плоскости или на римановой поверхности имеются три вида одномерных связностей: одномерная действительная связность, чисто мнимая одномерная связность, комплексная связность, то есть, на пример, $f(\cdot)dz$ или $f(\cdot)d\bar{z}$. Каждая из них представляет собой функцию на переменном одномерном комплексном пространстве, то есть на касательном пространстве, область значения первых двух является одномерным но для третьего она двумерная. Построение в [GH] даёт связность третього рода и полезно раздумывать о нём. Локально, связность присваивает направлению в двумерном касателтном пространстве направление во двумерном слое. То есть, локально или в точке она дана четырьми числами, потому что она приписывает к каждому из двух векторов другой вектор, но условие $D'' = \bar{\partial}$ ([GH], стр. 73) уменьшает это число до двух. Умный довод, который использует их второе условие, то есть совместимости с метрикой, затем определяет связность полностью.

Есть, однако, функция соответствующая нашему расслоению и эта $\sigma^{-1} = \epsilon \exp(i\theta)$, где $\epsilon > 0$, хотя она не однозначна. Её логарифмическая производная определает связность. Для этого довода выбор метрики на слоях важен и я выбрал $f(\cdot) \to s^{-1/2}(\cdot)|f(\cdot)|$, которое не та, которую мы только что использовали, хотя она похожа. У неё есть существенный недостаток, так как она даёт метрику, которая не определена в точках множества L. Это не важно мгновенно, но оно источник явления, с которым мы будем иметь дело. В предыдущом объяснении было можно не рассматривать точки в L. Они не были, по сути, особенными. Сейчас это не так. Я хочу объяснить, что с этой связностью точки в L вызывают трудности. Связность и метрика на слоях перестают определяться. Следоватнльно метрика на слоях должна быть изменена. Как следствие, связность перестает быть связность Янга-Миллс, понятия, которая еще предстоит определить. Но это лёгко. То, что неприятно, для восстановления свойства Янга-Миллса мы должны ввести искусственную и неприятную метрику на основе M любо искусственную связность. Это урок, для тех, которые хотят осматрипать общую теорию.

Мы напоминаем о нынешних обстоятельствах. Мы рассматриваем функции $f(\cdot)$ на комплексной плоскости, периодическая по отношению к решётке L, и допускающ полюс первого порядка в точках этого множества. Сперва метрика на слое $f(\cdot) \to |f(\cdot)|$ но это неудовлетворительно в L из-за возможных полюсов. Нужно изменить[35] её в окрестности L.

Для этого[36] мы умножим $s(z)$ на такую гладкую периодическую функцию $m(z) = m(|z-\lambda|)$, $\lambda \in L$, что $m(z) = |z-\lambda|^2$ если $|z-\lambda|$, $\lambda \in L$, очень мало, на пример $|z-\lambda| < \delta/2$, что $m(z) > 0$ если $z \notin L$ и $\delta/2 < |z-\lambda| < \delta$ для одного $\lambda \in L$, что $m(z) = 1$ если $|z-\lambda| \geq \delta$ для всех $\lambda \in L$. Если $\lambda \in L$ лучше предполагать что $\lambda = 0$. Это изменение метрики которое даёт сечениям с полюсом которого порядок равен одному и с ограниченной длиной в окрестности нуля. С этим построением σ^{-1} локальное сечение расслоения с конечной длиной. Другое толкованое то, что эти локальние сечения после умноженияи на $\sigma(\cdot)$, но это нам не нужно! С первом нужно вводить в построение сечения, в его бесконечно малой виде, дополнительный аддитивный член [GH,стр. 73]

$$\frac{1}{m(z)}\frac{\partial m}{\partial z}\partial z = \frac{1}{m(z)}\partial m = \frac{\partial m}{m(z)} \tag{41}$$

[35] Тут ужно поместить дополительное замечание. Функция σ^{-1} определает связность на голоморфном расслоении и, как мы объясним, на этом расслоении есть метрика. Согласно с леммой в [GH] голоморфная структура вместе с метрикой определает связность. Эта связность, связность Янга-Миллса но только по отношению к искусственной метрику на M. Этот пример поучителен.

[36] Я стараюсь сейчас пользоваться не только методом но тоже обозначением в [GH], которое обычно но хитроумное. На пример я различаю ∂ и $d = \partial + \bar{\partial}$. Тем не менее $d\sigma = \partial\sigma$! Я замечаю тоже что $d\sigma$ комплексный дифференциал которий мы можем интегрировать вдоль кривой в $\mathbf{C}$, то есть dz спарен с $1/dt$ и кривая дана $z = z(t) \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$. Современный дифференциально-геометрический язык разглажный и всеобъемлющий но он часто не раскрывает ключевого вопроса. Я замечаю тоже, что оператор $\partial/\partial z$ превращает вещественную функцию в комплексную функцию. Я повторяю, 'комплексная дифференциальная геометрия чужда мне.' С обозначением в [GH], которое мы иначе не используем,

$$\theta = \frac{1}{s(z)}\frac{\partial s(z)}{\partial z}dz - \frac{d\sigma(z)}{\sigma(z)} = \frac{\partial s}{s(z)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}dz, \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}dz = \frac{\partial \sigma}{\sigma(z)}, \tag{40}$$

потому что σ голоморфно.

Можно вычислять его независимо. Данное вычисление остаётся справедливым в области в которой коэффициент $m(\cdot)$ равен одному, но вне этой области есть дополнительный аддитивный член. То, что я не понял изначально, было то, что вклад выражения (40) был нуль и что вклад выражения (41) суть дела. Цель длиного отступления этого раздела приобретение понятий и вычислени, подразумеваемых в понятии кривизна и необходимо для понимания связности A. Главная тема отношение связь между интегралом связности по границе данной области и интегралом её кривизны по этой области.

Я хотел доказать это с помощью геометрического довода, таким образом, что оно явно утверждение о кривизне. Но я был убежден, что пункт $0 \in L$ ничего не принесёт, и поэтому, запустив его, я неоднократно получил нуль. Я неделями искал ошибку, потому что такая ошибка может быть легко вызвана неправильным знаком. Именно, лак добавление путаницы есть уравнение Коши-Римана.

Пусть[37] $\sigma = \epsilon e^{i\theta}$, $\epsilon \geq 0$, $\theta \in \mathbf{R}$. Тогда $\ln \sigma = \ln \epsilon + i\theta$ голоморфна. Следовательно

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Сверх того,

$$\frac{\partial^2 \ln \epsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial \theta}{\partial y}\} = \frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial \theta}{\partial x}\} = -\frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial y}\} = -\frac{\partial^2 \ln \epsilon}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \ln \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln \epsilon}{\partial y^2} = 0.$$

То есть $\ln \epsilon$ – и тоже θ – гармонические функции. Я пересматривал эти основые отношение частично, потому что очень давно, что я прочитал книгу Вейля, но тоже потому что знаки так важны при расчете кривизны. Мне казалось возможным, что я смог ошибочно прийти к $\partial^2\epsilon/\partial^2 x + \partial^2\epsilon/\partial^2 y$ а не к $\partial^2\epsilon/\partial^2 x - \partial^2\epsilon/\partial^2 y$. Имея это в виду, я искал долгое время для такой ошибки но тщетно. Наконец, поннявший что кривизна лежит в поведении на особой точке 0, я быстро понял правильные определения, чувствуя, конечно, довольно глупым.

В самом деле, эта статья дала мне повод подумать над понятием кривизны, чего я никогда не делал раньше. Но прежде чем мы перейдем к кривизному, я хотел бы признать что есть основное даже элементарное утверждение значение которого я не понимал, то есть уравнение

$$\frac{d}{dy}\{\frac{df}{dx}\} = \frac{d}{dx}\{\frac{df}{dy}\} \tag{42}$$

для функции двух переменных. В самом деле, по капризу моего образования возможно что я его признал без доказательства. Во всяком случае, одномерная унитарная связность дана локально определенным угловым изменением φ, которое изменяет скорость при линейной движении и которое само по себе линейно. Итак изменение φ при движении (dx, dy) дано $\alpha dx + \beta dy$. Однако возможно что это движение при интегрировании не производит функции потому что для такой функции f нужно будет, что

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d}{dy}\{\frac{df}{dx}\} = \frac{d}{dx}\{\frac{df}{dy}\} = \frac{d\beta}{dy}$$

и обычно для данной связности

$$\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \neq 0. \tag{42.a}$$

[37]Знак θ переопределяется.

Левая часть этого неравенства даёт определение кривизны. Это простое неравенство значит что кривизна часто не равна нуль. Но нам нужен был длинный ряд размышлении чтобы прийти к (42.a).

Так как выражение (42.a) линейное мы можем вычислять вклады выражений (40) и (41) отдельно. Прежде чем мы начнём замечание необхbодимо. Как определено нами, каждый слой расслоения отождествляется с **C**. Таким образом, на инфинитезимальном уровне движение связностей дано однозначно определеной суммой действительного движения и мнимого движения. Действительное движение однозначно определено метрической инвариантностью. Его цель - поддерживать постоянную длину. Итак только мнимое движение относится к делу.

Можно что полезно, если мы продолжим обсуждение кривизны с некоторыми краткими объяснениями прежде чем мы начнём вычисления необходимые для настоящих целей. Моё понимание более уверенно, если оно отражается в простых расчётах.

Мы начинаемся с мнимой части выражения (40), то есть с мнимой части выражения $\partial\sigma/\sigma(z)$, которая равна $\partial \ln\sigma = \zeta(z)dz$. Только мнимая часть этого выражения относится к делу:[38]

$$\partial \ln\sigma = \frac{1}{2}\{\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x} - i\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y}\}dz + \frac{i}{2}\{\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\}d\bar{z},$$

где θ угловая переменная. Мнимая часть этого выражения $i = \sqrt{-1}$ дважды

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x}dy - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}dx - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial \ln\epsilon}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial \ln\epsilon}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\right)dy\}.$$

Следовательно кривизна равна половине выражения

$$-\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \ln\epsilon}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \ln\epsilon}{\partial y^2} \tag{43}$$

Очевидно что сумма первых двух членов равна нулю, сумма вторых двух членов также равна нулю из-за уравнений Коши-Римана. Хотя я еще неспокойно отношусь к моим расчетам, они, по крайней мере, дают заключение согласующееся с признанной теорией.

Последное и решающие вычисление кривизны вклад функции переменной r, который дан (41). Я хочу сперва, просто улучшить свое понимание, описать вращательно-симметрическую связность. Она дана инфинитезимальным поворотом, гладкая даже в $r = 0$.

$$g^{-1}dg = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy.$$

Я хочу что эта связность вращательно симметричной, следовательно инвариантной относительно

$$(x,y) \to (\cos\varphi x - \sin\varphi y, \sin\varphi x + \cos\varphi y)$$

[38] Чтобы быть уверенным что я понимаю обозначение книги [GH], я вычисляю

$$\begin{aligned} dz\cdot\frac{\partial}{\partial z} + d\bar{z}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{z}} &= \frac{1}{2}dz\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}d\bar{z}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}(dx + idy)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(dx - idy)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= dx\cdot\frac{\partial}{\partial x} + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

или

$$\alpha(x,y) \to \alpha(x,y)\cos\varphi x + \beta(x,y)\sin\varphi x,\ \ \beta(x,y) \to -\alpha\sin\varphi x + \beta\cos\varphi x,$$

которое равно

$$\begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ -\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}, \tag{44}$$

где a and b фукций r и $(x,y) = r(\cos\psi, \sin\psi)$. Вычислим кривизну.

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dx} &= \frac{da}{dr}\frac{dr}{dx}\sin\psi + a\cos\psi\frac{d\psi}{dx} + \frac{db}{dr}\frac{dr}{dx}\cos\psi - b\sin\psi\frac{d\psi}{dx}\\ &= \frac{da}{dr}\cos\psi\sin\psi - a\cos\psi\sin\psi/r + \frac{db}{dr}\cos^2\psi + b\sin^2\psi/r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{da}{dr}\frac{dr}{dy}\cos\psi - a\sin\psi\frac{d\psi}{dy} - \frac{db}{dr}\frac{dr}{dy}\sin\psi - b\cos\psi\frac{d\psi}{dy}\\ &= \frac{da}{dr}\sin\psi\cos\psi - a\sin\psi\cos\psi/r - \frac{db}{dr}\sin^2 y - b\cos^2\psi/r\end{aligned}$$

Разность равна

$$0 + 0 + \frac{db}{dr} + b/r = \frac{db}{dr} + b/r = \frac{1}{r}\frac{d(br)}{dr}. \tag{45}$$

Итак кривизна не зависит от коэффициента a.

Согласно уравнениям на [GH, стр.72] дополнительный фактор $m(\cdot)$ вводит аддитивный член (41). Кривизна вычисляется так же как (43), но первые два члены отсутствуют и $\ln\epsilon$ заменяемся функцией $\ln m(\cdot)$. Но в противоположность члену $\ln\epsilon$ член $\ln m(\cdot)$ не гармоническая. Пропускаяя на мгновение множитель $1/2$, подразумеваемый в (41), мы вычисляем

$$\frac{\partial\ln m}{\partial x} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{dm}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{x}{r}\frac{dm}{dr}, \quad \frac{\partial\ln m}{\partial y} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{dm}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{m(x,y)}\frac{y}{r}\frac{dm}{dr}$$

Продолжая и дифференцируя ещё раз, мы находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ln m}{\partial x^2} &= -\frac{1}{m^2(x,y)}(\frac{x}{r}\frac{dm}{dr})^2 + \frac{1}{m(x,y)}\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2m}{dr^2} + \frac{1}{m(x,y)}\{\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\}\frac{dm}{dr}\\ \frac{\partial^2\ln m}{\partial y^2} &= -\frac{1}{m^2(x,y)}(\frac{y}{r}\frac{dm}{dr})^2 + \frac{1}{m(x,y)}\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2m}{dr^2} + \frac{1}{m(x,y)}\{\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\}\frac{dm}{dr}\end{aligned}$$

Сумма равна

$$-\frac{1}{m^2(x,y)}(\frac{dm}{dr})^2 + \frac{1}{m(x,y)}\frac{d^2m}{dr^2} + \frac{1}{m(x,y)}\frac{1}{r}\frac{dm}{dr} \tag{46}$$

и произведение этого выражения с функцией r и забытым сомножительнем $1/2$ равно производной функции df/dr если

$$f = \frac{r}{2m}\frac{dm}{dr} \tag{46.a}$$

Функция $m(x,y) = m(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Значение $f(0)$ однозначно определено и равно 2. Если $z > \delta$ значение $f(z) = 1$. Следовательно интеграл кривизны

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{\partial^2 \ln m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln m}{\partial y^2}\}dxdy = \pi\int_0^{\infty}\frac{df}{dr} = -2\pi. \tag{47}$$

С этим вычислением мы подверждаем, что касается кривизны наша связность, такая же как связность в [AB,стр. 560]. Возможно, что есть изменение в знаке, но это неважно.

Есть ещё две побочных предмета которые нужно объяснять, первый, чтобы сравнить определение кривизны, описанное выше, вторым определением, которое дано в [AB], вторый, чтобы объяснить в наших простых рамках понятие связности Янга-Миллса. Хотя это может быть важно в других случаях, особенно если размер больше чем одно, понятие связности Янга-Миллса вряд ли имеет существенное значение в данном случае. Действительно, цель нашего краткого объяснения, сделать это ясно. Тем не менее лучше приспособляться к условию [AB, стр. 560]. Дело то, что необходимо выбрать метрику на M, относительно которой данная связность связность Янга-Миллса. Это то, что я начально думал, и то что я сейчас объяснаю. Поучительно объяснять различные стороны этого понятия по одному, поскольку они представляют себя.

Мы можем сейчас пользуемся определением кривизни этой связности данным в [AB]. Исходы двух определений, того выведено из (39.c) и того в [AB], те же и самые определения едва различны. Но мы осматриваем то в [AB] потому что построение в [AB,§7] так важно для нас. Нужно объяснить осторожно понятие которыми мы пользуется. Действительно, читать [AB] удовольствие для меня но понимать его трудно. Доводы слишком легки, слишком свободны и трудны, не для его двух авторов но для меня, которому теория связностей была незнакома, пожалуй тоже для читателя. Если я не прибавляю несколько вычислений я непрваильно понимаю. Возможно что читатель так. Я действительно несколько раз непрваильно понимал. Итак я вывожу формулу для $F(A)$ [AB,§3] для простого случая которым интересуемся. Определение $F(A)$ важно для высказывания [AB, Th. 6.7]. Следовательно оно нужно нам. Кроме того оно связано с теорией Янга — Миллса.

Возможно что моё объяснение неясно, но мы перешли с метрики на унитарную связность. Мы можем сейчас пользуемся определением кривизни этой связности данным в [AB]. Исходы двух определений, того выведено из (39.c) и того в [AB], те же. Но мы осматриваем то в [AB] потому что построение в [AB,§7] так важно для нас. Нужно объяснить осторожно понятие которыми мы пользуется.

Вычисления локальны, слой одномерен, то есть $\mathbf{U}(1)$ или $\mathbf{U}(1)$, и база открытое множество в $\mathbf{C}$ с координатамы x, y. Уместные определения находятся в [AB, §3]. Достаточно рассматривать два касательных векторных поля $X = \frac{d}{dx}$, $Y = \frac{d}{dy}$. Связность придаёт каждому векторному полюсу или направлению над базисом горизонталтный векторный полюс так что

$$\begin{aligned} X &\mapsto \tilde{X} = \{\frac{d}{dx}, a(x,y)\frac{d}{d\theta_1}\}, \quad a(x,y) = \frac{\partial\theta}{\partial x} \\ Y &\mapsto \tilde{Y} = \{\frac{d}{dy}, b(x,y)\frac{d}{d\theta_1}\}, \quad b(x,y) = \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{aligned} \tag{48}$$

где θ_1, которое несвязано к θ, координата на слое и $d/d\theta_1$ только неподвижный касательный вектор в слое. Сверх того $a(x,y), b(x,y)$ существенно параметры которые определены функцией $\theta = \operatorname{Im}\log\sigma$. Я повторяю что $\tilde{X}, \tilde{Y}$ перемещения, опрделенные связностей.

Мы начинаем вычисления сейчас, но полезно объяснять руководство потому что есть ряд особенных обстоятельств которые дают вывод. Первое условия Коши-Римана и потом различные отношения в теории Вейерштрасса. Последовательность математики поразительна!

Вторые члены в скобках даёт отображение ω_A [AB,§3] и определяют кривизну, которая дана

$$\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}. \tag{48.a}$$

Мы можем заменять пару $\{X, Y\}$ парой $\{fX, gY\}$ но как замечано в [AB] легко проверять что $[fX_1, gY_1] = fg[X_1, Y_1]$ для всех $\{X_1, Y_1\}$. Следовательно достаточно рассматривать избранную пару. Связность определена функциией $a(\cdot,\cdot)$ и $b(\cdot,\cdot)$. В противоположность авторам [AB] я употребляю обыкновенные координаты для $\mathbf{U}(1)$ и $\mathbf{U}(1)$.

Хотя эта щепетильность, которая авторам [AB] не нужна, я вычисляю прежде $F_A(X, Y)$ и тогда $\int_M F(A)$. Мы начинаем с уравнениями

$$\tilde{X}\tilde{Y} = \frac{d^2}{dxdy} + \frac{db}{dx}\frac{d}{d\theta_1} + a(x,y)b(x,y)\frac{d^2}{d\theta_1^2};$$
$$\tilde{Y}\tilde{X} = \frac{d^2}{dydx} + \frac{da}{dy}\frac{d}{d\theta_1} + b(x,y)a(x,y)\frac{d^2}{d\theta_1^2}.$$

в которых термы

$$a(x,y)\frac{d^2}{dyd\theta_1}, \quad b(x,y)\frac{d^2}{dxd\theta_1}$$

отсутствующие потому что $d/d\theta_1$ независимо от x и y. Действительно, несмотря на обозначение, $d/d\theta_1$ вектор в $\mathbf{U}(1)$. Следовательно

$$\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} = \{\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}\}\frac{d}{d\theta_1}$$

и кривизна дана

$$F_A(X,Y) = \{\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}\}dx \wedge dy = \frac{db}{dx}dx \wedge dy + \frac{da}{dy}dy \wedge dx. \tag{48.b}$$

Это обозначение статьи [AB], где 2-форма $(X, Y) \to F_A(X, Y)$ написана $F(A)$.

Позвольте мне добавить слово о теории Янга-Милса. Чтобы определить связность Янга-Милса или звезду Ходжа нужно выбрать метрику на M. Эта метрика (met) дана, звезда Ходжа определена как в [T] уравнением,

$$v \wedge \star v' = (v, v')\,\mathrm{vol}_M, \tag{49}$$

где (v, v') даной метрикой и vol_M дифференциальная форма. Наше построение так, что оно не ссылается на метрику. Следовательно она свободна. Нужно выбрать её правильно. Условие дано как уравнение (6.1) в [AB,стр.559],

$$d_A \star F(A) = 0. \tag{49.a}$$

То есть, применение звезды Ходжа к кривизне $F(A)$ даёт сечение неподвижно относительно dA. В [AB] обозначение связностей A или d_A, но D обозначение в [GH]. Эта кривизна дана. До сих пор метрика не имела значения, но теперь она должна быть определена так, чтобы это условие удовлетворялось. Звезда Ходжа дана метрикой на M.[39]

Кривая M дана как факторпространство $\mathbf{C}/L$. Мы начинаем с обычными координатамы (x, y) на $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}/L$ и обычной метрикой $\sqrt{x^2+y^2}$. В областе где $|z-\lambda| \geq \delta$ для всего $\lambda \in L$ мы не меняем этого. В этой области кривизна равна нуле, $\star dx = dy$, $\star dy = -dx$, и (49.a) справедливо. Там, где $|z-\lambda| < \delta/2$, кривизна дана (43), которое равно

$$-\frac{1}{r^4} \cdot 4r^2 + \frac{1}{r^2} \cdot 2 + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2r = 0.$$

Следовательно мы не меняем метрику на $\mathbf{C}$ ипи на $\mathbf{C}/L$ в этой области. В кольце $\delta/2 \leq |\lambda| \leq \delta$, мы меняем метрику на коэффициент $g(\cdot)$, который вращательно-симметричен, то есть $g = g(r)$, который постоян внутрь и вне кольца и который гладок. Я замечаю, что мы не обращаем внимания на члены связности которые даны (40) потому что они ничего не вносят в кривизну. Я был как-то небрежен выше. То есть, кривизна $F(A)$ не действительна но чисто мнима. Но это не важно. Значение (49.a) то, что итог движения d_A и движения $F(A)$ отменяется сомножителью $\star$, то есть её инфинитезимальным действием . Это определяет объём, то есть площадь, в кольце $\delta/2 \leq |z| \leq \delta$. Вне кольца мы умножаем площадь на постоянную если нужно.

Я замечаю, что звезда Ходжа определена в [T] только для особенных расслоений но определение повсеместно справедливо. Особенная черта (49) та, что v, v' в слое но vol_M относится к касательному пространству. Хотя я описал довольно пространно этот пример связности Янга-Милса я не уверен, что это понятие важно для геометрической теории автоморфных форм в которой базовое пространство комплексной размерности одна. Предыдущий раздел, в которым начальное утверждение о существовании связности Янга-Миллса подтверждается, подготовка к следующему.

Трудность возникнет, но лучше отложить её разрешение до тех пор, пока она становится ясной. Тем не менее мы можем описать её сразу. Ниже в теореме я пользуюсь понятием связностей Янга — Миллса, то есть метрика на M выбрана. Потом я сравню следствия теоремы с следствиямы раздела VII, то есть с описанием собственных сопряженных классов. Но такой класс дан одним из его представителей. От удачи мы выбрали удобные представители. С другой стороны выбор метрики, то есть выбор связности не казался полезным. Хотя мы спасены общей теорией и овладением этой теорией обоими авторами, к счастью, мы можем тоже работать в рамках обычной метрики. Лучше сказать, что наш выбор метрики на расслоении нехорош и что необходимо было ввести несколько произвольных исправлений. Это было неуклюжно как мы объясним. ■

Дополнительное объясненение и исправление. Этот раздел было посвящен объяснению построения незаменимого расслоения $\mathbf{Q}$. Чтобы упростить мои усилия, я ввели

[39]Следующее соотношение, конечно, имеет основное значение для понятия уравнений Янга-Миллса и, как представляется, относится к несколько сложных понятий, но на данный момент мы имеем дело только с алгебраическими кривыми. Итак, $\star F$ - это просто вещественнозначная функция, поэтому сечение не какого-либо расслоения, которое должно быть определено, а тривиального линейного расслоения. Следовательно, уравнение означает, что $\star F$ постояно, но мы выбрали на эллиптической кривой постянную метрику с постоянной кривизной, так что это эквивалентно требованию, чтобы F была константой. Метрика относится к делу для формы с степенью один или даже два, но не для тривиального расслоения, где находится $\star F$. По этому вопросу я, возможно, повторяюсь или повторюсь. Сначала это было тонкое различие, которое мне не было ясно.

удобную метрику в отклонении. Но для нас главное утверждение в [AB] Th. 6.7, тема которого связности Янга-Миллса. Их определение так, что метрика на M оказывает решающее влияние на их свойства. Это особенно справедливо для эллиптических кривых, для которых существует естественные выбора метрики, то есть постоянные метрики. Это постоянство нарушено введением точки Q. Функция σ^{-1} многозначенное сечение расслоения $\mathbf{Q}$.

Я уже сказал это, но для меня дифференциальная геометрия лабиринт, в котором я вошёл потому, что сходство двух теорий, арифметической и геометрической, настолько поразительно. Кстати возникает вопрос, который я не пытался ответить. Именно в этой статье речь идёт о комплексной дифференциальной геометрий комплексных кривых и о теории Янга-Миллса связанной с ними. Я не знаю, относится ли теория Янга-Миллса для многообразий более высоких размерностей к теории автоморфных форм. Мне кажется маловероятно, но я ещё не знаком ни с первой, ни со второй из этих двух теорий, ни с другой теорией, то есть ни с дифференциальной геометрий ни с теории Янга-Миллса более высокой размерности. Это в сторону, мне кажется, что в [AB] главная особенность теорий её <u>линейность</u>.[40]

Эта линейность не проявилась в наших расчетах, для которых мы ввели несколько произвольный множитель $m(\cdot)$ но без изменения предлагаемой связности. Она проявилась с изменением связности. Мы лучше выберем её внизу. ■

IX. **Теорема Атьи-Ботта.** [41] Доказательсво будет более важное чем теорема но начинаем с теоремой. Чтобы заявить теорему нужно будеть вывести подходящую $\Gamma_{\mathbf{R}}$-связность. Тогда для каждого гомоморфизма[42] $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ есть индуцированная G-связность A_ρ. Утверждение теоремы просто ([AB,Th. 6.7]).

Теорема. Преобразованое $\rho \to A_\rho$ определяет взаимно однозначеное отображение между классами сопряженных гомоморфизмов $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ и классами эквивалентности связностей Янга — Миллса над M.

Помимо отступления предыдущая глава, уяснены и это первое появление связностей, итак дифференциальной геометрии, в доводе этой статье и причина предыдущего объяснения. Я не хочу давать польное доказательство этой теоремы но комплексная дифференциальная геометрия весьма развитая область, которой понимание требует опыта и понимания. Легко неправильно понимать рассуждение опытных геометров, и авторы

[40]Эта проявляется только с счастливым совпадением метрик на слое и на кривой M. Одна деиствует на построение взято частично из [GH], другая на понятие связности Янга-Миллса. Соответствующий выбор был сделан в этой статье.

[41]Читатель может или не может заметить, что есть существенное улучшение понимания и лёгкости между этим разделом и следующим. Этот раздел нуждается в пересмотре, но я предпочёл оставить его по двум причинам. Первая ленивость, и, возможно, более убедительная, во-вторых, потому что многие возможные читатели разделяют мое первоначальное невежество. Есть тоже моё убеждение в том, что, если будет обеспечено последовательное объяснение, ему лучше подождать, пока теория в целом лучше понятна.

[42]В самом деле в этом отображении нужно заменять группу G группой ${}^LG$ но если $G = GL(n)$ тогда $G = {}^LG$. Авторы статьи [AB] не сознавали понятия группы L. Есть точная последовательность

$$1 \to \mathbf{Z} \to \Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathbf{U}(1) \times \pi_1(M) \to 1.$$

Так как группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $U(1) \times \pi_1$ некомпактны, последующее построение не совершенно наглядно.

[AB] несомненно опытны, из-за недостаточого понимания существенного представления как кривизны. Для меня было так, но много заблуждений были исправлены при помощи классической теории эллиптических кривих.[43]

Есть столько сторон теории, что я изначально неправильно понял, что мне приходилось повторно пересматривать то, что я писал. На пример ни группа G в теореме ни $\Gamma_{\mathbf{R}}$ не обязательно связны. Тем не менее для доказательства в [AB] предполагается, что группа G связна. Мне кажется было бы полезно добавить слово об общем случае. В самом деле, мне казался, что их доказательство влечёт за собой переход к группе меньшей размерностей, которая может быть несвязной. Я объясняю трудность, хотя для нас она не тяжёла. На [AB,стр. 561], они предполагают что $G_X = G$, но было бы возможно что G_X несвязно даже если G звязно. Следовательно переход к группе $H \times S$ было бы поспешно. Однако, как я объясню ниже, это не так, хотя есть тонкость.

Большинство трудностей было вызвано моими недостаточными пониманиямы доводов. Сначала словосочетание '$\tilde{M} \to M$ is of course a flat $\pi_1(M)$-bundle' казалось мне пустымы словамы и значение и правда словосочетания 'A is a Yang-Mills connection' казались ясными. Оборот 'of course' соблазн для неопытного читателя не слишком тщательно думать о заявлении, которое он читает. Следовательно он этого не веполно понимает. Эти слова не пусты. Фундаментальная группа определена петлями выходящими из точки. Следовательно она локально однозначно определена но не глобально. Глобально она определяется до изоморфизма данного путью от одной точки до другой. Итак понятие фундаментальная группы тонко. Она скорее пучок или тоже пучок. Во всяком случае то, что я медленно оценил, это отношение $\Gamma_{\mathbf{R}}$ связности к G-связности. Это было вопросом неопытности. Переход так ровен. К тому же я не достаточно сознавал простейших примеров, например логарифимической функции на $\mathbf{C}^\times \in \mathbf{C}$ с тривиальном расслоении в котором введен полюс в точке 0. Важно понимать, что ни $\Gamma_{\mathbf{R}}$, ни G не обязательно связны.

Во всяком случае, как только мы поймем связь между M, $\tilde{M}$, $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и расслоением связанном с ними, мы понимаем как перейти от гомоморфизма $\Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ к G-расслоению Янга-Миллса. Нужно подтвердить, что таким образом мы получаем каждое G-расслоение. Что это построение даёт звязность ясно из определений.

Следующие строки для читателей которые так неопытные геометры как я, но чтобы понять довод на [AB, стр. 560/561] нужно схватить построения в простейшем виде. Например, вместо того, чтобы вставлять полюс или нуль, мы выбираем постоянную точку $n \in \mathbf{Z}$ и вставляем в окрестности данной точки простую функцию $f(re^{i\theta})$ с значениями в $\mathbf{U}(1)$ но склеивание с функцией g дано уравнением $f(re^{i\theta})\exp(in\theta) = g(re^{i\theta})$. Если $n \neq 0$, сравнение происходит только в клине. Невозможно что 'функция' или 'сечение' в полной окрестности точки. Это определение подходит для строительства $\mathbf{U}(1)$-расслоения на [AB,стр. 560]. Построение $\pi_1(M)$-расслоения из представления группы $\pi_1(M)$ знакома. Эти замечания позволяют нам следовать довод на страницам 560-561.

[43]Этот абзац и первые несколько из следующих абзацов были написаны как я старался утверждить подозрение или надежду что теорема Атьи-Ботта была один из ключей к взаимности в геометрической теории. Я решился сохранить их. Они отражают мои трудности с [AB], из которого обозначение берётся.

Довод в направлении: от гомоморфизма до связности - почти формальный. От связности до гомоморфизма первый шаг - использовать определение, главным образом постоянство функции $\star F$, то есть условие Янга-Миллса, чтобы определить $X \in \mathfrak{g}$, алгебре Ли.[44] Благодаря условиям, описанным в сноске,[45] группа $G_X = G$, введенная в начале страницы [AB,стр.562], связана. Это, по-видимому, подразумевается неявно в обсуждении на этой странице. Существование точки X и группы G_X необходимо для описания связностей на этой странице. На странице есть тоже разрешение трудности, которая беспокоила меня во время всех моих размышлений об этих вопросах. То есть собственное значение Гекке в данной точке класс сопряженных элементов, который дан путем выставления одного элемента класса. Которого? Есть ещё что-то, которое нужно объяснить. Но я в первую очередь хочу рассматривать классификацию[46] [AB,(6.12)] для группы $GL(2)$.

Мне кажется, что тоже полезно описывать сейчас возможные образы группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, по меньше мере, для неприводимых унитарных представлений ρ в $GL(2)$. Группа $\Gamma_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} \Gamma$ определена $A, B, 1 \in \mathbf{R}$ и $ABA^{-1}B^{-1} = J = 1 \in \mathbf{R}$, в котором 1 не единичный элэмент. Если $G = GL(1)$, ${}^LG = GL(1)$, и представления $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to GL(1)$ легко описываются. Они даны с отношениями: $A \to \alpha \in \mathbf{U}(1)$, $B \to \beta \in \mathbf{U}(1)$, $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $x \to \chi(x) \in \mathbf{U}(1)$, где χ характер группы $\mathbf{R}$. Если $G = GL(2)$, ${}^LG = GL(2)$, $\det \rho(J) = 1$, J центрально и есть две возможности:

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} \chi_1(A) & 0 \\ 0 & \chi_2(A) \end{pmatrix}, \quad \rho(B) = \begin{pmatrix} \chi_1(B) & 0 \\ 0 & \chi_2(B) \end{pmatrix}, \quad \rho(J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{50.a}$$

где $\chi_i(\cdot), \chi_i(\cdot)$ два непрерывных унитарных характера группы $\mathbf{Z} \times \Gamma$, определеной группой линейно эквивалентных дивизоров;

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \rho(B) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{50.b}$$

$a, b \in \mathbf{C}^\times$, $|a| = |b| = 1$. К тому же нужно, что связность определит ρ на $\mathbf{R}$ и $\alpha = \det \rho$ получается из ρ.

Сейчас нужно что я признаваю основную путаницу в моих размышлениях о собственных функциях и связностях Гекке. Связь между первой и второй косвено опосредствована двумя группами: $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и Γ_{aut}. Не нужно вводить посреднические связности. Увлеченный моим первоначальным невежеством связностей, я полностью потерял своё время на попытках понять их. Однако это не было потерей. Мы не понимаем арифметической взаимности в широком смысле, и тесная связь между теорией Янга-Миллса и геометрической взаимностью не может быть полностью случайностью, так что время не было потеряно. Кроме того, хотя я часто забываю природу отношения между этими

[44] С одной стороны мы ввели L-группой, с другой стороны мы не старались использовать или описать его формальные свойства, связанные с закручениями и расширениями полюса. Группы $GL(1)$ или $GL(2)$ никоим образом не закручены. Довод на [AB,стр. 561-562] иногда неясен, так что я хочу, чтобы мои предположения были чёткими.

[45] Согласно A. Knapp, Lie groups Beyond an Introduction, Second Edition,Birkhauser, Boston, 2002, Corollary 4.51, то есть “In a compact connected Lie group, the centralizer of a torus is connected.”

[46] **Предостережение.** Топологи не похожи на остальных из нас. То, что им ясно, нам трудно. Я хотел бы перевести два предложения из [AB, стр.561], чтобы быть уверенным, что я правильно их понял. ‘Any G-bundle P with connection induces a $\bar{G}$-bundle $\bar{P}$ with connection. Conversely if $\bar{P}$ lifts to P then P is unique and inherits a connection from that of $\bar{P}$. То есть группа $\bar{G}$ группа добрей группы G конечной подгруппой. То есть, если $\bar{g} \in \bar{G}$ пусть $G_{\bar{g}} = \{g \in G | g \to \bar{g}\}$.

двумя множествами, оно прямо! Собственные сопряженные сечения определяются как интегралы связности.

Как я объяснил, я понимаю что лицам следущим в теорий расслоений существование Q знакомо, но мне не так и я предпочитал, по крайней мере частично, описание в рамках более знакомой теории Вейерштрасса. Начально мне трудно было понимать как расслоение и связность даны локально функцией ζ в (2.e). Я тоже не понимал нужные изменение метрики на M и на расслоении. Я сделал всё возможное, чтобы представить необходимые объяснения в предыдущей главе, хотя, как, может быть, заметил читатель, мне было иногда трудно полностью выпитать первые абзацы раздела [AB,§4]. Итак мы можем в этой главе обсуждать доказательство теоремы Атьи-Ботта. Читателю тоже благоразумно справляться в статье [AB, стр. 560], где уравнение $d_A \star F = 0$ важно.

Загадочное заявление или переход на странице 561 - это неявное и неосторожное предположение при переходе от строки 5 к строке 6, что $G_X = G$ связно. Это всего лишь неосторожная ошибка, но нам будет важно изучить особый случай и описать необходимое изменение.

На этом месте необходимо чётко объяснить разницу между настоящими условиами, то есть условиами следующего раздела **IX**, и условиами [AB]. Мы хотим описать собственные сопряженные классы и собственные функции операторов Гекке. Эта функция на Bun_G которого есть бесконечное множество связных компоненты. Следовательно нужно рассчитывать на непрерывное множество собственных сопряженных класс. Это отражается в умножители $\mathbf{Z}$ в уравнении (1.d). С другой стороны, относятся к делу только те связности из непрырывного семейства данного теоремой Атьи-Ботта которых интеграл однозначен. Это будет обсуждено в следующем разделе. Сейчас мы рассматриваем довод статьи [AB].

Есть, однако, ещё одно затруднение. Нам нужно будет сравнивать описание Атьи-Ботта, которое предполагает данный класс связностей Янга-Миллса, то есть данную метрику на M, с нашим описанием собственных функций Гекке. Скорее, мы должны убедиться, что описание Атьи-Ботта не зависит от метрики, итак от неявной зависимости на ней понятия связностей Янга-Миллса. Нужно тоже понимать как оно зависит от выбора Q. В предыдущем разделе я старался объяснить это с примерами. Мне кажется что это достаточно. Столь брезгливости нужна, потому что геометры имеют опыт и понимание для отождествления разных осуществления такого же понятия но у меня этого опыта нет. Но лучше что я объясняю в первую очередь доказательсво теоремы Атьи-Ботта и потом осматриваю различные отождествления. Читателю несомненно лучше пропускать их сначала. Возможно, что я тоже не вернусь к ним. Как я уже писал, в данный момент предварительные объяснения достаточны.

Прежде чем я продолжаю обсуждение доказательства Атьи-Ботта, я хотел бы признать, что я неправильно, по меньшей мере недостаточно ясно, понял то, что я пытался доказать. Я продолжу введение двух множества параметров, чьи отношение, одно к другому, несколько сложно. Оба даны представлениями группы в ${}^LG$, которое в этой статье обыкновенно $GL(2)$, но недоскано $PGL(2)$ и $SL(2)$. Для теоремы Атьи-Ботта эта группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$; для теории Гекке эта группа Γ_{aut}. Итак они тесно связаны. Их представления параметризуют подобные предметы: для теоремы Атьи-Ботта эти связности Янга-Миллса, для теории Гекке эти собственные сопряженные сечения. Надо полагать, что это влечет за собой связь между множествами параметров. Очевидное построение интегрирование связности, но это требует начальное значение, итак дополнительные параметры. Точнее, начальное значение нужно на одном связном компоненте. Это тоже, как мы увидим, не совсем правильно.

Моя первоначальная цель состояла в том, чтобы создать начало теории автоморфной группы Галуа в рамках геометрической теории. Мне казалось, что оно находилось в [AB, Th.6.7], но оказалось, что не только понимание кривизны нужно но тоже понимание вариационного исчисления хотя и скромным образом. Также необходимо исправить теорему, насколько это уместно в наших условиах.

Наше описание собственных функций Гекке и собственных классов для эллиптической кривой показало, что на каждом компоненте множества Bun_G они даны матрицам которых коэффициенты даны показательными функциями которых показатель линейна, то есть каждой компонент дан как $\mathbf{C}/L$ и поднятая показатель линейна. Таким образом она дана интегралом плоской связности. То есть, по счастливой случайности связностью Янга-Миллса. Линейность показывается потому, что у множества M есть подразумеваемая структура группы.[47] Таким образом вообще мы ожидаем многообразия Якоби или дискретное скопление произведения таких многообразий. Но у меня нет ни времени, ни мужества предугадать общий случай.

Чрезвычайно трудно отличить собственные функции, собственные очки и собственные значения. Существует произвольный выбор, неявный в первом, но не в других. Важно различать их свойства, но не легко!

Я признаваюсь тоже, что вопрос о параметрах меня немного озадачивает. С точки зрения ореработоров Гекке, аддитивный или линейный параметр на M подходящий, особено для Θ_2. С точки зрения гармонической теории есть две возможности: сперва метрика тогда связность как в [AB]; сперва звазность тогда метрика как в этой статье, по крайне мере порой. Они могут навести на разные понятия гармонической звязности. Я выбрал вторую но в [AB] первая употреблена. Поэтому возникает вопрос об эквивалентности. Я оставляю его в стороне. Этот вопрос и другие подобные вопросы подразуемы в [AB] где они не обсуждались. Надо полагать что нужные доказательства нетрудны. В самом деле вопрос для них настолько лёгок, что я просмотрел их объяснение, например, уравнению (6.10), $F(A) = X \otimes \omega$, $X \in \mathfrak{g}$. Здесь я позволяю себе предположение. В теории Гекке это постоянство выражение влияния якобиана а в теории Атьи-Ботта оно отражает условие Янга-Миллса.

Воспоминание о строений множества Bun_G**.** Сперва есть несколько побочных вопросов. Прежде всего собственная функция операторов Гекке функция на Bun_G, которое несвязно. Следовательно она не дана везде интегралом. Но мы выбрали в [§IV] линейное расслоение $\Lambda_0 = \Lambda_{A_0}$, которое разрешает нам отождествлять множество непрводимых расслоений которых ранг, то есть размерность, равен r и степень равна $d+rn$, $0 \le r < d$, $n \in \mathbf{Z}$ с множеством расслоений которых ранг равен r и степень равна d, $M \leftrightarrow M \otimes A_0^n$ [A, Th. 6]. Для $d = 2$, случай который мы рассматриаем, это имеет отношение к $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$, $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$ в §5. Когда мы осмотрим следствия этого, мы поймём, что для группы $GL(2)$ необходимо в первую очередь различать два рода собственных функций, которых, как не странно, носители без общих элементов. Первый род соответстует прямой сумме двух линейных расспоений. Второй род описан в §VII. Наше намерение в

[47] Лучше не принимать этого утверждения всерьёз.

этом разделе объяснить теорему Атьи-Ботта.[48] Однако мы можем перейти к наложению кривой M. Комбинаторика [AB] требует, я считаю, большого внимания. Например, для $G = GL(1)$ и M эллиптической кривой одномерное представление произвольно на A и B, но обязательно равным 1 на J в (6.6) и, следовательно, на Z, но это не так для представлений более высокой размерности. Мне кажется что авторы объяснят это в (6.12) на стр. 561, но возможно что это не сразу ясно.

Это значит не только изменение заявления но тоже различия между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или Γ и Γ_{aut}. Второе множество связано с Bun_G для которого есть параметр, то есть степень, которая связана с помножением на $\Lambda_0 = \Lambda_{A_0}$. Это позволяет, для каждой собственной функция f и каждого числа $\alpha \in \mathbf{U}(1)$, введение другой функции $N \mapsto f(N)\alpha^{\deg N}$. Это умножитель $\mathbf{Z}$ в (1.d), который проверяет α. Этот умножитель отсутсвует в (1.a).

Это рассмотрение в стороне, есть вторая разница между связностями и собственными сопряжными сечениями кроме тех, которые очевидны. Прежде всего, величины первых лежат в алгебре Ли (группы ${}^LG$!) и величины вторых лежат в группе Ли (${}^LG$), но если $G = GL(2)$, $G = {}^LG$. Следовательно, для сравнения не только интегрирование нужно но тоже начальное значение.[49]

Мы будем вернуться к этому вопросу в следующому разделу, но сначала необходимо понять довод в [AB,§6], то есть доказательство теоремы 6.7 и нужные изменения. Мы начинаемся уравнением (49.a) и его значением, не забывая, что мы не занимаемся только линейными расслоениями, то есть только расслоениями которых размерность равна единице. Оно выражает отношение связности к метрике, на M и не на расслоении. Мы уже видели как переходить от связности на метрику. Авторы замечают, что эта связность, которой группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ [AB, стр. 596, (6.5)] не компактная.

Мы уже[50] осмотрели уравнение $d_A \star F = 0$ как уравнение которым F определен, но с другой целью. Я нахожу довод и заключение в [AB] чудесными. Однако, чем больше человек думает об этом, тем больше понятие в его простоте становится ясным, по крайней мере, на несколько часов. Я предполагаю, что для многообразий большей размерности, он действительно сложный

Есть важная подробность определения на [AB,стр.560/561]. В начале [AB,стр.526] группа G компактна но не обязательно связна. Это важно потому что $G_X = G$ [AB, стр.561], так что первая группа тоже не обязательно связна. Но она неожиданно и неуместно принято связной в следующем абзаце. Мне кажется, что в случае (50.b) G_X обязательно несвязно. Следовательно эсть в [AB] небольшая ошибка. По-моему это существенная ошибка, которую можно исправить, перейдя к конечному наложению M, которое для (50.b) тоже эллиптическая кривая. Мы вернёмся к этой.

Сначала $F \to \star F$ превращает кривизну $F \in \Omega^2(M, \mathrm{ad}\,\mathfrak{g})$ в $\star F$ функцию, которая эквивариантная в отношении действия G (вернее ${}^LG$). Авторы приходят сперва [AB,стр. 560]

[48]**Незначительный недосмотр.** В их доказательстве имеются незначительные упущения, как показывает пример уже группы $GL(2)$. Но, возможно, что я неправильно понял четвёртую строку в [AB, стр.561].

[49]Это дано значением в A_0 характера, определенного на дополнительном сомножителя $\mathbf{Z}$ в (1.d) Сверх того, нужно что интеграл, скорее его сопряженный класс, был однозначным. Это причина, что я вывожу группы Γ/Γ_n в (1.d).

[50]С геометрической точки зрения наши примеры очень просты! Полезно напоминать, что назначение $\star$ Ходжа перестановка функции и двуформ. Сверх того можно расширать его определение для всех векторных расслоений.

к выводу, что $\star F = \star F(A)$, $A = A_\rho$, постояно по горизонтальным кривым. Это позволяет им приводить структурную группу с G к G_X, стабилизатор точки X в $\star F = \star F(A)$. Точка X произвольно выбранный элемент из орбиты точки $\star F$. Пусть $P_X = \star F^{-1}\{X\}$. Тогда $P_X/G_X = M$. Следовательно $F = F(A) = X \otimes \omega$ где ω объём. Так как $X \in \mathfrak{g}$, возможно что его показательный интеграл, которого значения находятся в G и который определен начальным условием, даёт собстенное сопряженное сечение оператов Гекке. Мы будем овъяснять это в следующем разделе но только для эллиптических кривих. Вероятно, что вообще теория сходна. Но я хочу объяснить доказательство на [AB,p. 561] для эллиптической кривой и группой $GL(2)$.

Мы сначала продолжим обсуждение их доказательств, взяв $G = G_X$. Это важное упрощение, но прежде нам нужно понимать заявление, 'The Yang-Mills connection A_ρ defined by a homomorphism $\rho : \Gamma_R \to G$ has curvature $X_\rho \otimes \omega$ where X_ρ is the element of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G defined by $d\varphi : \mathbf{R} \to G$.' Я замечаю, что в предыдущем разделе размерность расслоения была равна единице. Сейчас она произвольна. Следовательно сейчас выражение (48.b) становится кососимметрической формой, которой значения в $\mathfrak{g}$. Следовательно [AB,стр.561] $\rho(\Gamma_R)$ коммутирует с $X = X_\rho$ и $\rho : \Gamma_R \to G_X = G$.

Мы интересуемся теорией в [AB] только в связи с автоморфными формамя, но полезно сначала описать их заключения для группы $GL(2)$ [AB,стр.561]. Пусть $H = GL(1)$, $S = SL(2)$, $G = GL(2)$. Есть гомоморфизм $H \times S \to G$ с ядром $D = \{\pm 1\}$. Пусть $\bar{G} = G/D$, $\bar{H} = H/D$, $\bar{S} = S/D$. Итак $\bar{G} = \bar{H} \times \bar{S}$ Скрытое в обсуждении на [AB, стр. 611] есть нечто похожее на отношение дискретной серии к компактным подгруппам Картана. Оно появляется в виде поднятия связности и её интегралов, который напоминает общую связь между подгруппами Картана и классификацией представлений или автоморфных форм. Однако с точки зрения, взятой в статье [AB] неявно или бессознательно, это означает переход к двойному наложению, которое сводит группу G к группе G_X. Другими словами, либо $G = G_X$ либо необходимо перейти на однозначно определеную вдвойне накривающую эллиптическую кривую перед введением описания, которое появляется на [AB,стр. 561]. Эта раздвоённость, которая появляется в [50.a/50.b]. Таким образом, появляется возможность трех параметров для одной и той же связности. Эта должна быть проверена.[51]

Соответствие описания (50.a) прямым суммам одномерных связностей ясно. В противном случае есть однозначно определеное квадратическое наложение кривой M над которым G заменяется его связной компонентой. После этого шага, мы можем обратиться к описанию [AB, (6.12)]. Отображение β в (6.12) проективный образ отображения ρ в (50.b). Однако на этом этапе, необходимо обратиться к предложению, появляющейся на нескольких строках раньше, 'Conversely if $\bar{P}$ lifts to P, ...' Я замечаю, что я исправляю их упущение только в рассматриваемом особенном случае, а не вообще. Это я оставляю другим. Я добавлю также, что существует три возможных квадратических наложений кривой M. Каждое возможно.

Случай (50.a) представляет меньший интерес. Он связано с непрерывным спектром. Мне кажется, что нужно сейчас остановиться и раздумывать о том, что хотим доказать. Прежде всего, мы рассматриваем только группу $G = GL(2)$ или группы тесно связаны с ними, $SL(2)$ и $PGL(2)$. Мой первое, приблизительное, предположение было

[51] На самом деле есть три. Я был очень смущен в течение очень долгого времени собственными сечениями вида $\mathfrak{D}$ и их отношения.

соответствие между собственными значениями или собственными сопряженными сечениями операторов Гекке и звязностями Янга-Миллса. Однако, соответствие не так! Первой очевидной причиной является то, что связности определяются на связных множествах но собственные сопряженные сечения определены на несвязанных множествах. Вторая причина та, что их параметры разны. Правильное утверждение состоит в том, что первые получены из второго за два шага, интегрирование, с которых мы держаем только некоторые исходы, и простые мультипликативные отождествления различных множеств. Мы объясним это в следующих двух разделах.

Прежде чем мы начнем нужные объяснение в следующем пределе, лучше всего составить чёткое, хотя тоже приблизительное представление о виде параметров для двух множеств, Bun_G и множества собственных функций операторов Гекке. Составные части множества Bun_G, множествы $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(1) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Если $G = GL(1)$, $\mathrm{Bun}\, G$ топологическо $\mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}$. Если $G = GL(2)$, Bun_G приблизительно — первый компонент состоит из пар, в которых порядок не имеет значения, но я не замечу переход к частному: это не относится к этому грубому описанию — объединение двух множеств —

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}$$

и

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U}.$$

Двойствено, для $GL(2)$ множество собственных функций Гекке,которое мы расмотрели в §VII тоже объединение двух множеств, но их грубое описание —

$$\mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

и

$$\mathbf{U} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Эти приблизительные замечания будут озадачивать читателя, но это не набор связностей, как мы изучали их в предыдущем разделе, а набор интегралы, полученные из них, которые мы введем в следующем пределе и которые соответствуют функциям Гекке. Существует дополнительный параметр, двойственный по степени связок, не прямо связан с связностями. Он является источником фактора $\mathbf{Z}$ в (1.d)

Следующее предложение - это всё, что осталось от ряда неподходящых страниц. Это отпечаток отчаяния, который иногда меня преодолевал при написании этой статьи. Я признался что для меня дифференциальная геометрия трудна потому, что существуют так много эквивалентностей при изменении координат или метрик.

Учитывая эти грубые отождествленя, мы начинаем понимать связь с вторым сомножителём в (1.d). Однако, начиная следующий раздел, я заметил, что, поглощенный особым случаем эллиптической кривой, я не заметил особенностей, появляющихся для проективной прямой. Они достойные краткого объяснения. Если род равен нулю определение на [AB, стр.559] возможно только если пустое произведение равно одному. Следовательно

$$\prod_1^g [A_i, B_i] = 1,$$

но этот 1 в мултипликативной группе и для когомологических причин он приклеиван к $0 \in \mathbf{R}$. Итак $\Gamma_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$. Согласно уравнениям [AB,(6.12)], для каждого $n \in \mathbf{Z}$ существует единственная связность Янга-Миллса с степенью равной n и размерностью равной одному. Прежде чем мы перейдим к следующей главе, возможно, стоит описать их, только чтобы лучше ознакомиться с понятием связности. Проективная правая, то есть $\mathbf{C}$ вместе с ∞ или $\{(z,1)|z \in \mathbf{C}\} \cup \{1,0\}$, фактор-пространство группы $\mathbf{U}(2)$. Лучше, она $\mathbf{C} \times \mathbf{C} - (0,0)$ по модуло $(z_1, z_2) \to (z_1 z, z_2 z)$, $z \in \mathbf{C}^\times$ или $\{(z,1)|z \in \mathbf{C}\} \cup \{1,0\}$, итак $\mathbf{C}$ вместе с ∞. Инвариантная метрика, то есть инвариантная по отношению к $\mathbf{U}(2)$, даётся выражением

$$\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \tag{51}$$

$z = x + iy$, или его квадратным коренём. Обозначение неясно! Выражение (dx, dy) касателтной вектор. Мы используем эту метрику для определения понятием метрики Янга-Миллса. Этот выбор метрики даёт тоже звезду Ходжа. Привычный объем дан частном

$$\frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

и с этим выбором

$$\star dx = -\frac{dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad \star dy = \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \tag{51.a}$$

Мы используем эту метрику, чтобы определить расслоение Q на сфере Римана. Следующие вычисления показывают, что она инвариантна относительно действия унитарной группы

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}.$$

Так как в этом случае фундаментальная группа тривиальна и $\tilde{M} = M$, этот случай малоинтересен.

Пусть

$$z_1 = \frac{az + b}{cz + d}, \quad dz_1 = \{\frac{a}{cz + d} - \frac{(az + b)c}{(cz + d)^2}\}dz = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}dz, \tag{51.b}$$

где

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

унитарно. Проверим, что преобразование (51.b) сохраняет метрику и объем, то есть

$$\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2} \tag{51.c}$$

и

$$\frac{dz d\bar{z}}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dz_1 d\bar{z}_1}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2}.$$

но эти две уравнения они одни и те же. Сверх того

$$\begin{gathered} dz_1 d\bar{z}_1 = \frac{|ad - bc|^2}{|cz + d|^4} dz d\bar{z} = \frac{dz d\bar{z}}{|cz + d|^4}, \\ 1 + x_1^2 + y_1^2 = 1 + \frac{|az + b|^2}{|cz + d|^2} = \frac{|cz + d|^2 + |az + b|^2}{|cz + d|^2} = \frac{1 + |z|^2}{|} cz + d|^2 \end{gathered} \tag{51.d}$$

потому что матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является унитарной. Следовательно уравнение (51.c) уверно.

После этого тщательного и, возможно, лишнего расчета, я хотел бы баловать некоторыми краткимы общимы размышлениями, потому что есть простые черты теории расслоенией, которые меня озадачивают. Авторы статьи не вводят расслоения Q, когда род равен нулю, поэтому что для проективной прямой есть только тривиальная звязность Янга-Миллса. Тем не менее эсть расслоение с полюсом в точке ∞. Мы рассматриваем их, но по отношению к координатам r, θ, полагая, что на бесконечности они имеют простой полюс, то есть с плоскимы координатами они даны около бесконечности выражением $f(1/z)z^{-1}$, $f(0) \neq 0$. Основные особенности его поведения задаются мнимой частью логарифма $\log 1/z$, то есть $-\theta$, которое неопрелено там где $r = 0$.

Другими словами, мое более раннее описание с точки зрения водоворота было неудовлетворительным. Ничего особенного, как водоворот, не вводится. Мы ввели совершенно новый предмет в теорию, поведение которого вблизи, но не в заданной точке, задается целым числом m, которое измеряет изменение $2\pi m$ по θ, когда мы обходим центральную точку. Его можно рассматривать только как новую и различную особенность, не буквально, а образно или понятийно. Это влияет на окрестности точки, потому что это приводит к изменению уровня как в круговой лестнице. Мы не возвращаемся, откуда мы пришли.

В данном случае мы можем попытаться использовать координаты r, θ во всей плоскости и предусмотреть связность, движущуюся в кругах неподвижного радиуса относительно точке $r = 0$. Мы встречаемся с трудностей, и в этом суть дела, то есть причина, по которой нет интересных связностей на проективной прямой. Когда мы приходим к $r = 0$, мы не можем закрыть связность. Мы сталкиваемся при $r = 0$ с невозможным выбором углового вращения, которое по причинам непрерывности . Это топологическое ограничение. Полное угловое движение вокруг замкнутой кривой не может измениться без резкого изменения природы связностей. Например, её кривизна не может оставаться равной нулю. Скорее, для того, чтобы возместить неявное введение кривизны особенностью, необходимо ввести что-то ещё, и это может быть выполнено переходя к покрытию, где замкнутые кривые перестают быть замкнутыми и ограничения наложенные кривизной удаляются. Мне потребовалось некоторое время, не только чтобы писать эту статью, но тоже чтобы оценить это. Это решение, однако, невозможно для проективной прямой.

Таким образом, для него на бесконечности связность будут иметь вид $a\theta + br$, где a отличная от нуля константа, скажем 1. Как новичок, я думал, что очень важно присоединяться к связностям, определенным голоморфными связностями, то есть, что понятие связностей сильно зависит от теории голоморфных или мероморфных функций. Это было незадумывающе. Голоморфные связности важны, главным образом мнимая или угловая часть логарифма, имеет большой независимый геометрический интерес и, переходя к логарифму и мнимой части, становится просто реальной связностью. Кривизна определяется им. Исходные ссылки на [GH] в какой-то мере являются отражением моей прежней веры в первичность голоморфной теории. В чём разница между сферой комплекса и эллиптической кривой? Почему мы можем вводить нетривиальные связности во втором, а не в первом. В настоящее время вопрос, пожалуй, не вызывает большой озабоченности, но стоит кратко остановиться на нем. Для эллиптической кривой мы могли бы взять простой полюс в одной точке и распространить его на мероморфную функцию на всей кривой без каких-либо дополнительных полюсов или нуля. Функция σ^{-1} такая. Тогда мнимая часть логарифма дала нам связность с одним полюсом, связность, которую мы могли бы затем изменить таким образом, чтобы кривизна была постоянной, но этот последний шаг был только ради изящества. Это были предыдущие шаги, которые имели значение.

Мы заплатили цену за это расширение, цену уже неявную в функции σ, а именно нам пришлось перейти на наложение, на комплексную плоскость, чтобы быть в состоянии где мы могли бы интегрировать и получить однозначную функцию. Это возможно, потому что эллиптическая кривая не односвязна, а сфера. Лёгко представить полученную функцию. Эллиптическая кривая покрыта плоскостью, таким образом, чтобы плоскость объединение параллелограммов и интеграл связности равномерен, равномерно поднимаяся и спускаяся от параллелограмма к параллелограмму, но в то же время оставаясь непрерывным. Для сферы Римана, которая односвязна нет покрытия на которое можно пройти. Близость любой точки, скажем, бесконечной точки, немедленно закрывается. Нет выхода. Структура сразу видна на плоскости, покрывающей эллиптическую кривую. Для кривых более высокого рода моя интуиция терпит неудачу.

Но почему бы не позволить себе два полюса? Вопрос очень хорош. Всё, что я могу ответить, это то, что на меня сильно повлияло [AB] и его введение Q. Читатели должны будут ответить на этот вопрос для себя. Это может иметь значение для разветвленной теории Гекке.

В настоящей работе мы, даже предположительно, не рассматриваем разветвленные собственные функции операторов Гекке. Они должны проявляться как неразветвленные собственные функции по разветвленному покрытию. Это принцип функториальности. Таким образом, если бы существовала общая неразветвленная теория и если функториальность верна в контексте геометрических автоморфных форм, разветвленная теория может быть исследована через разветвленные накрытия исходного базового многообразия. В отличие от арифметического случая покрытия кривых относительно доступны – или так я бы подумал! ■

Каждая связность Янга-Милса может выбрать собственное расслоение и собственную метрику.[52] То есть, можно дать связность только если расслоение налично но последующий выбор метрики на расслоении может быть приспособлен к различным целям, например, чтобы по отношению к ней. данная связность связность Янга-Миллса. Мы уже познакомились с этим раньше. Я также замечаю, что для нас связности Янга-Миллса только промежуточные понятие. Конечное соответствие между собственными сопряженными сечениямы и представлениями группы Γ_{aut}.

Я добавляю еще несколько слов о сфере Римана. Сейчас для каждого $k \in \mathbf{Z}$ мы ыберем её как тривиальное расслоение с полюсом произвольной степени k в бесконечности. Если $k < 0$ это не полюс оно нуль. Для настоящего примера $G = GL(1)$. Если $n = 0$ уместная связность Янга-Миллса тривиальна. Следовательно, она плоска по любой метрику. Как и раньше, я выберу вращательно-симметричную метрику, $d\theta^2 + m(r)dr^2$. Однако мы суйчас рассматриваем плоскость, подразумеваемо добавляя ∞, а не $\mathbf{C}/L$. Связность дана как (41) и дополнительного члена нет. Итак исчисление ведущое от (41) к (47) может повторяться, хотя происходит изменение направления и, следовательно, трудно учесть изменение знака и ориентации. Исход $2\pi k$ если $m(z) = |z|^{2k}$ в окрестности

[52] Подразумеваемым в этом утверждении является изучение классов эквивалентности связностей вместе с метрикой, которое я не предпринял!

точки ∞ и $m(e^{i\theta}z) = m(z) > 0$, $z \in \mathbf{C}$. Если мы хотим получить связность Янга-Миллса, последний шаг - изменить метрику на проективной прямой. Как в прежнее примере она остаётся свободной.

Так много произвола пугает. Однако, и это я хочу подчеркнуть, в конце концов, связности являются только промежуточными. Сравнение будет между собственными сопряженными сечениями и гомоморфизмами $\Gamma_{\mathrm{aut}} \to {}^LG$. Позвольте мне попытаться разобраться в сути дела. Прежде всего, определение связности Янга-Миллса предполагает, что метрики, и та на M и та на расслоении, даны. Тогда можно приписать каждому гомоморфизму ρ группы Γ_{aut} в ${}^LG$ гомоморфизм $\varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ в ${}^LG$, и следовательно тоже гомоморфизм Γ в ${}^LG$. Этот последний гомоморфизм даёт согласно [AB,Th. 6.7] связность Янга-Миллса. Выбирая подходящие исходные значения, мы можем интегрировать эти связности. Исход функция которых значения лежат в ${}^LG$. Несомненно, что эта функция зависит от выбора метрик, той на M и той на расслоении. Однако сама функция не имеет значения. Только её сопряженный класс, который переменяется от точки к точке, важен. Я не проверил, что классы в данной точке которые даны способом этой статьи не зависят от двух метрик которые использованы в определении. Мне не хватало ни силы ни времени!

Прежде чем я возвращу к применению теории в [AB], я хочу кратко обсуждать случай, что M дано проективной прямой, который не рассмотрено ими, потому что оно слишком просто, благодаря теореме Гротендика. Лучше, однако, срперва рассмотреть кратко употребления [AB, Th. 6.7]], из которых исключается кривая нулевого рода, только для убедимся, что мы их понимаем. В доказательстве появляются как $U(1)$, так и $M(1)$, и оба они влияют на связности, которые даёт теоремой. Для наших целей влияние первого не имеет значения. Другими словами, мы предполагаем, что представление группы $U(1)$ тривиально. Это означает, что мы имеем дело с одномернами представлениями, произвольными на A и B и очень простыми на прообразе группы $U(1)$

На предыдущих страницах было мало, только попытка познакомиться с теоремой [AB,Th.6.7] и ее последствиями. Есть однако ещё один вопрос, который лёгко просматривать. Возможно что ограничение $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ к $\mathbf{R}$ такое что $\rho(J) \neq 1$. Оно часто корень из единицы.

X. **Автоморфная группа Галуа и интегрируемые связности.** Это не самих связностей Янга-Миллса, а их определенные интегралы, которые соответствуют гомоморфизмам автоморфной группе Галуа в ${}^LG$. Началные значения интегралов находятся в унитарном виде группы ${}^LG$, которая для нас обычно $GL(2)$ и только попутно $GL(1)$ или изменение группы $GL(2)$ как $SL(2)$ и $PGL(2)$. И связности и интегралы относятся к связным множествам. Это может быть расслоения которых степень нуль.[53] Следовательно нужно начинаться с ними но удобно сперва объяснить последный шаг. Расслоение Λ_0 было введено а §4 и тензорное произведение $N \to \Lambda_0 \otimes N$ даёт изоморфизмы

[53]Мы еще не раскрыли нашей главной цели, описания классов собственных сопряженных сечений. Эти функции на M, которых значения сопряженные классы. Они задаются функциями точек в М, из которых в принципе ничто не отличается. Эти функции даны определыми интегралами с началными значениями. Так как функция, по крайней мере, класс сопряженности, определяемый интегрированием и начальными условиями должны быть однозначны, набор допустимых начальных условий может быть весьма малым. Для расслоений которых размерность больше чем одно понятие начального значения искуснее. Непрерывный параметр появляется как параметр двойственный к $z \in \mathbf{Z}$, которое параметр связанных компонент. Одна точка Λ_0^0, тривиальное расслоение, независима от Λ_0.

$\mathfrak{D}(m,n) \to \mathfrak{D}(m+1,n+1)$, $\mathfrak{A}(m,m) \to \mathfrak{A}(m+1,m+1)$, $\mathfrak{A}(m+1,m) \to \mathfrak{A}(m+2,m+1)$. Группа Γ_{aut} дана в (1.d) как произведение. Следовательно произвольное неприводимое унитарное представление этой группы дано как произведение из представления группы $\mathbf{Z}$: $1 \in \mathbf{Z} \to \epsilon \in \mathbf{C}$, $|\epsilon| = 1$ и группы $\varinjlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$. Нет смысла рассматривать сами собстенные функции с носителём в $\mathfrak{D}$. Они соответствуют (неупорядочено) прямым суммам двух одномерных представленией. Для одномерного представления можно заменить $\varinjlim_n \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ группой $\varinjlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \varinjlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Это даёт то, что необходимо. Помимо параметра ϵ и функций $n \in \mathbf{Z} \to \epsilon^n$, это даёт показательные функция $\exp(ak+bl)$, $k, l \in \mathbf{Z}$, на M с параметрами a, b данными в (36.e), которые дают полную ортонормальную систему на Bun_G если $G = GL(1)$. Напомним, что $\mathrm{Bun}_G \simeq \mathbf{Z} \times M$, хотя это отождествление несколько произвольно. Я замечею, что общее отождествление такого рода для всех групп влечёт за собой структуру на полным наборе собственных значений, рассматриваемых для всех групп одновременно, что не является присущей. Я замечаю тоже, что назначение группы G (${}^LG$!) в [AB,Th. 6.7] немного отличается от того, которое уместно здесь. Показательная функция $\exp(ak+bl)$ определенный интеграл связностей $(a,b) \to ak+bl$. Легко забыть, но не следует забывать, что в §III и §IV есть произвольный, но неизбежный выбор неподвижной точки $A_0 \in M$ и метрики на M и на тривиальном линейном расслоении.

Показателные функции с линейным показателем естественно появились в нашем обсуждении собственных значений Гекке, определение которых подразумевает ни метрику на M ни метрику на слоях любого расслоения. С другой стороны, оба они появляются в определении связностей Янга-Миллса, и метрика на M особенно важна. Она появляется в определении Q на [AB,стр.560] и в построении, в предыдущем разделе, связности ω на Q с особенно простым видом, тот с постоянной кривизной. Теперь читателю предлагается изучить [AB,стр.560] принимая, как и мы, благодаря вычисления предыдущего параграфа, метрику на M которая выведена из метрики на $\mathbf{C}$ инвариантной относительно переносов, таким образом что $\star$, $F = F(A)$ и ω все постоянными.[54] Следовательно вышеупомянутая связность тоже постояном и, как выше, показатель его интеграла показательная функция с линейным показателём. Именно это позволяет сравнивать выводы двух разделов, VII и IX.

Загадка. Эта предложение "$\cdots$ we can restrict ourselves $\cdots$ to the case $G_X = G$." на [AB,стр. 561]. Эта загадка, которую лёгко решить.

Трудность для кривой M, случай, с которым мы имеем дело, та, что присутствие A и B в группе Пуанкаре забывано. Этот случай должен быть типичным. Мы можем перейти к конечному наложению где описание в [AB] правильно. Я добавляю, что этот случай для нас самый интересный. Лучше рассмотреть $GL(1)$ до $GL(2)$. Тогда (50.a) заменено

$$\rho(A) = \big(\chi(A)\big)\,, \quad \rho(B) = \big(\chi(B)\big)\,, \quad \rho(J) = \big(1\big)\,, \tag{52}$$

[54] Я подчеркиваю, что в предыдущем разделе было непросто создать на расслоении Q связность с постоянной кривизной. Мы пользуемся этой. Ни в частном случае эллиптической кривой, ни в общем я не пытался понять, как кривизна изменяется с связностей. В целом, мне всё ещё непросто понятие связности, хотя я убедил себя в её важности для геометрической теории. Я добавляю здесь, потому что его нужно добавить где-то, что с метрикой, которую мы выбрали, связности Янга-Миллса на расслоении степени 0 постояны. Надлежащее изложение требует гораздо большего опыта, чем у меня, и многих добавочных страниц.

и (50.b) не появляется. Дополнительные параметры $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\chi(x) \in \mathbf{U}(1)$ заменены $X \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, потому что первое показательный интеграл функции iX, то есть $\exp(ixX)$. Есть ещё много функций второго порядка. Только те параметры второго рода, которых интеграл сдавают однозначную функцию на M относятся к делу.

Для группы $GL(1)$ собственные функции (то есть переменные сопряженные классы) даны характерамы χ группы Пикара, которые даются, прежде всего, их значением $\chi(A_0)$ в отмечённой точке A_0, следовательно характером группы $\mathbf{Z}$ в (1.d). Кроме того, необходим характер подгруппы, заданной дивизорами степени нуль, то есть точка самой группы $M = \mathbf{C}/L$. Такие характеры даны логарифмическами интегралыми линейных функций.

Для собственных классов рода $\mathfrak{D}$ отношение между собственными сопряженными сечениеями и собственными функциями объяснено формулами (30) и (30.a) вместе с промежуточным обсуждением.

Признание и беспокойство. Мы начинаем применять выводы из [AB, Th. 6.7]. Я узнал об уравнении Янга-Миллса, когда писал эту статью, потому что это важно для понимания её идеи, но мой опыт с ней и с дифференциальной геометрией ограничен. Теперь мы пытаемся понять её простейшие свойства. Для $G = GL(1)$ гомоморфизмы из группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, [AB,6.6], в $\mathbf{U}(1)$ разложятся как произведение $\mathbf{U}(1) \to \mathbf{U}(1)$ и $\pi_1(M) \to \mathbf{U}(1)$. В качестве простого но важного примера, мы рассмотрим аргумент на странице 560 в [AB,стр] с группой $G = \mathrm{Lie}\,\mathbf{U}(1)$, $\mathrm{Lie}\,G = \mathfrak{g} = \mathbf{R}$. Тогда $X \in \mathbf{R}$ постояно. Тем не менее, есть важный вопрос, что, будучи очевидным для них, авторы не объясняют чётко, но мне несколько трудно объяснять. Я привык заниматься редуктивными алгебраическими группами и их компактами формами, на пример $\mathbf{U}(1)$, но нет такого ограничения на группу G в формуле $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ на [AB,стр.560]. Можно что $G = \mathbf{R}$. У двух групп одна и та же алгебра Ли. Это только то, что второй выбор предлагает больше возможностей. Точнее, вместе с теоремой [AB, Th. 6.7], это обеспечит, что подынтегральные выражения в показателях уравнения (53) связность Янга-Миллса, но не без дальнейшего обсуждения. Возможность принятия $G = \mathbf{R}$ уже упоминалась в сноске 'незначительный недосмотр'.

Следующее уравнение (53) является первым шагом в нашем сравнении связностей Янга-Миллса, с одной стороны, и собственных значений Гекке, с другой стороны, но это тонкое сравнение. Собственные значения задаются как функции параметра в Bun_G, значения которых лежат в ${}^LG$, которое для нас равно $GL(1)$ или $GL(2)$, но этот параметр только класс сопряженных полупростых элэментов в этой группе. Таким образом, в выбранных представителях существует большая двусмысленность. С другой стороны, понятие связности Янга-Миллса требует метрики как на M, так на слоях. К счастью для эллиптической кривой существует очень маленький класс естественных метрик на $M \subset \mathrm{Pic}(M)$, те инвариантные относительно переносов. Вложение несколько произвольное! Более того, это понятие требует выбора линейное расслоение Q и на нём связности. К тому же, чтобы установить биекцию между связностями Янга-Миллса и гомоморфизмами $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}}$ [AB,стр. 560], необходимо выбрать метрику на данном линейном расслоении Q, а также $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$. Тогда соответствие зависит от всех этих параметров, возможно слабо, возможно сильно но должно, что в конце концов, мы прийдём к чётко определенной биекции между собственными сопряженными сечениями для данной группы и гомоморфизмамы автоморфной группы Галуа в ${}^LG$. Я наблюдаю, в частности, что мы должны понимать зависимость от Q. Сделанный выбор, ведущий к постоянной кривизне, был взят, прежде чем я узнал его важность, по крайней мере, в этой статье. Лёгко забыть большую часть произвола в построении соответствия этой статьи. ■

Вместо того, чтобы непосредственно начать с случаем $GL(2)$, которым мы занимаемся, мы изучаем группу $GL(1)$, для которой выводы просты, и щепетильность менее необходима. Во-первых, собственные значение, то есть сопряженный класс, поточечно единственное число. Кроме того сечение недвусмыслено, то есть оно функция и эти функции лёгко вычисляются. Они характеры группы Пикара. Эта группа произведение группы $\{\Lambda_0^n | n \in \mathbf{Z}\} \simeq \mathbf{Z}$, которая первый сомножитель в (1.d), с группой дивизорами $A - A_0$, $A \in M$, то есть с самой группой $M = \mathbf{C}/L$. Группа непрерывных характеров этой группы дана парам целых чисел $k, l \in \mathbf{Z}$, как в (53) ниже. Для наших целей необходимо преобразовать эти характеры в пару комплексных чисел с абсолютной величиной которая равна одному, чтобы мы могли прикрепить[55] каждому гомоморфизму $\mathbf{C}/L$ к $\mathbf{U}$ характер группы $\varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$. Если $k = l = 0$, этот гомоморфизм равен тривиальный гомоморфизм $A \to 1$, $B \to 1$. Вектор (k, l), конечно, подвержен унимодулярному преобразованию, потому что базис решётки L не определяется однозначно. Таким образом, если параметр не равен 0, можно предположить, что после унимодулярного преобразования он имеет вид $(k', 0)$, $k' \neq 0$. Хотя мы здесь имеем дело с чем-то очень простым, лучше всего что оно нам полностью явным. В противном случае возникает путаница, по крайней мере, в моём мозгу. Линейная функция $k'a'$, определяемая новыми координатами (a', b'), то есть теми, которые определены новым базисом как (a, b) в (36.e) начальным базисом $(2\omega_1, 2\omega_2)$, чётко определена и не зависит от выбора изменёных координатов. Нам остаётся объяснить возможные выборы.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z},$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $a' = k'$, $b' = 0$. Матрица определена за исключения фаптора

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{Z}.$$

Перемена базиса влечёт за собой перемену пораждающих элементов,

$$A \to A' = A^\alpha B^\beta, \quad B \to B' = A^\gamma B^\delta.$$

Поскольку мы пытаемся определить одномерное представление второго множителя группы Γ_{aut}, мы в сущности имеем дело с порождающими элементами A' и B' абелевой группы и представление $A' \to \exp(2\pi i/k)$, $B' \to 1$. Честно говоря, эта действия беспокоит меня.

Однако мы можем вернуть и выразить её как линейную функцию начальных координат. Она определает тоже одномерное представление группы $\varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ в (1.d), $A' \to \exp(2\pi i/k')$, $B' \to 1$. Поскольку мы имеем дело с одномерным представлением, мы можем также определить это представление через $A \to \exp(2\pi i a/k')$ и $B \to \exp(2\pi i b/k')$ просто путём выражения A' и B' по модулю группы, порожденной коммутаторами. Этот

[55] Это превращение имеет странный вид, часть числителя становится знаменателем, который озадачивает меня и может озадачить читателя. Итак, хотя это простой вопрос, я предпочитаю описать его подробно, чтобы убедить себя, если не читатель. Есть две несовестимые обозначения, то в [A] и то в [AB]. Значение знака A изменяется. Мы здесь внезапно меняемся с первого на второе.

способ имеет странную особенность, что часть числителя становится знаменателем, который озадачивает меня и может озадачить читателя.

Надеюсь, теперь очевидно, что то, что остаётся объяснить для группы $GL(1)$ является параметризацией ограничения собственного сопряженого сечения на множество $\{A - A_0 | A \in M\}$, которое связная компонента $\operatorname{Bun} GL(1)$. Для меня, как и для читателя, я замечаю, что для линейных расслоений большинство вопросов, возможно, все, можно свести к вопросам для расслоений которых степень равна 0, взяв тензорное произведение с Λ_0. Это не так для расслоений которых размер больше.

В следующем уравнении (53) показатель интеграл связности по кривой от z_0 до z,

$$\{z_0, z\} \mapsto \exp\{4\pi i \int_0^1 (ka + lb) d\theta\} = \exp\{4\pi i (ka + lb)\}, \tag{53}$$

где a, b координаты как в (36.e) точки $z - z_0 \sim A - A_0 = AA_0^{-1}$, $k, l \in \mathbf{Z}$ и $0 \leq \theta \leq 1$. Лёгко или, по крайней мере, мне было лёгко просмотреть назначение $\pi_1(M)$ в определении $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или различие между $G = \mathbf{U}$ и $G = \mathbf{R}^\times$ в соотношении $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ на [AB,стр.560]. Если $G = \mathbf{R}$, то целые числа k и l определяются ограничением ρ на π_M, то есть на его обратный образ. Не следует забывать, что для полного определения собственного значения Гекке нам нужно полностью указать собственную функцию и, таким образом, дать её значение при A_0. Это задаётся изображением $1 \in \mathbf{Z}$, элемента первого множителя в (1.d).

Целые числа k, l свободно выбраны. Цель этого условия, то есть что $k, l \in \mathbf{Z}$, состоит в том, чтобы подынтегральая выражение в (53) однозначной функцией переменной $z \in \mathbf{C}/L$. Простой вид интегруемой функции следствие обстоятелиства, что связность которая появляется в подынтегральном выражении связность Янга-Миллса. Эти связности самы по себе следствие тщательно подобранных метрикой на базе и на слоях расслоения Q. Я объясняю! Выбор метрики на M был несложен но выбор метрики на слоях был вдохновение без ясной целей. Следующий выбор связности был разумная догадка. Я уже был убежден или понял, что связности Янга-Миллса часто постояными.[56]

Напомнить, что интеграл (53) является определенным. Для нас важно то, что (53) определяет характер, то есть представление, второй группы в произведении (1.d), в данную минуту можно заменить второй умножитель в $\mathbf{Z} \times \varprojlim \Gamma/\Gamma_{n(k)}$ группой $\varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ потому что $GL(1)$ абелева. По этой причине k и l должны быть целыми.[57]

Эсть при обсуждении на страницах [AB,стр. 559/560] некоторые основые знания о дифференциальной геометрии подразумеваемы. Мы можем считать это само собой разумеющимся, но тем не менее я хотел бы что читатель осознает это. Оно просто повторение связи между нулевой кривизной и чётко определенными интегралами связностей но в многосвязных областях. Первое следствие их уравнение (6.10) и в частности, утверждение [AB, стр.561,ll. 7-9] - 'Now line-bundles with harmonic connection ... can be uniquely expressed as $Q^k \otimes L_0$ ... where L_0 is flat.' Слово «гармоническое» имеет много

[56]Точнее, важность нашего выбора - эстетическая. Окончательное сравнение гомоморфизмов $\Gamma_{\mathrm{aut}} \to {}^L G$ с собственными сопряхенными сечениями просто выражается.

[57]Мы взяли фактор 2 из [WW], но он иногда является препятствием. Есть еще одно обстоятельство, которое появляется при изучении расслоений, линейные расслоения степени 1, которые мы рассматривали с такой осторожностью в предыдущем разделе, не кажутся в теории Гекке для группы $GL(1)$.

значений, и лучший способ понять, что имеют в виде авторы [AB] - это изучить утверждение их теоремы 6.7 и ей применения. Сначала, насколько я понимаю, для них нет никакой разницы между словами ‘гармоническая’ и ‘Янга-Миллса.’

Предыдущее заявление из [AB] вызвало у меня некоторое смущение, потому что мое знание эллиптических кривых является поверхностным. Без подготовки я не могу доказать, что умножение линейных расслоений степени нуль эквивалентно сложению делителям степени нуль, а если точка фиксированный, как и для нашего Q, так что кривая становится группой, умножение просто сложением точек. Это отвечает на вопрос после (36.m), который остался открытым раньше.

Мы можем, в частности, воспользоваться этим утверждением из [AB], чтобы уточнить наше обсуждение уравнения (36.1). Эти замечания, конечно, не совсем удовлетворительны, потому что они предполагают полное понимание утверждения и его доказательства, но явно что это нас забрало бы слишком далеко. Кроме того, ясно, что мы имеем дело с вопросами, которые знакомы знатоками. В любом случае в заявлении выше подразумевается, что отождествление, которое оно описывает, влечет за собой отношение к тензорным произведениям линейных расслоений.

Переход от Γ_{aut} к $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Мы применяем [AB,Th. 6.7] к $GL(1)$ расслоениям и связностям, изучая гомоморфизмы $\Gamma_{\mathbf{R}} \to GL(1)$. Явно, что $ABA^{-1}B^{-1} \mapsto 1 \in GL(1)$. Итак, $z \in \mathbf{Z} \mapsto \exp(2\pi inz)$, $n \in \mathbf{Z}$. Образы A, B равны $\exp(2\pi i\alpha)$, $\exp(2\pi i\beta)$, где α, β на данный момент не определены. Теперь мы перестаем чтобы размышлять. Мы ищем представления Γ_{aut} связано с собстенным сопряженным сечением, сейчас в $GL(1)$. Одномерное представление Γ_{aut} дано представлением $\mathbf{Z}$ в $GL(1)$, $z \in \mathbf{Z} \to \exp(2\pi inz)$, и двумя числами α, β в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Эти два числа появились как α/n и β/n в обсуждении, предшествующем формуле (53). К сожалению, я не смог поддерживать последовательное значение. Итак два множества параметров одинаковы. Остается описать связности, определенные, согласно [AB, Th. 6.7], этими параметрами, то есть этими представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в $GL(1)$. Они являются произведениями представления $\mathbf{U}(1)$ с представлением группы $\pi_1(M)$. Представление группы $\mathbf{U}(1)$ дано целым числом. Это является степенью основного линейного расслоения Q, как фактор расслоения, которое связано с данным представлением. Второй фактор - плоское линейное расслоение, определяемая представлением $\pi_1(M)$, таким образом, непосредственно фундаментальной группой без расслоения Q двумя параметрами α, β. Однако нам не нужны все пары, тодько те, которые дают периодическую функцию. Для других групп это будет вопрос периодических сопряженных классов. ■

Читатель заметит, что группа $\mathbf{U}(1)$ в [AB,6.6] ещё не была важной частью нашего обсуждения. Это потому, что те одномерные представления группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которые уместны в данном контексте, тривиальны по его прообразу в этой группе. Я подчеркиваю, что теория Янга-Миллса является важной фактор в нашем обсуждении, но что нам нужна только небольшая часть этой теории. Прежде всего, мы имеем дело с теорией для кривых. Во-вторых, ограничение гомоморфизма $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \mapsto G$ к $\mathbf{U}(1)$ или его обратному образу в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ особенного вида. Оно так, что $\mathbf{Z} \to 1$. Другые возможности возникают для $GL(2)$, которое для нас главный случай.

Однако теория для этой группы будет выведена из теории для $GL(1)$, используя, прежде всего, эту теорию вместе с индуцированными представлениями в рамках групп Γ_{aut} с одной стороны, и групп $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с другой стороны.

Для $G = GL(1)$, мы выбрали особенный класс представленных ρ, и потом подмножество связностей Янга-Миллса связанных с этими представлениями. Для $G = GL(2)$ довод подобен. Если представление приводимое, мы рассматриваем две компоненты отдельно, придя к паре связностей и к паре функций как в (53) а с сходными условиями. Они будут соответствовать собственным функциям рода $\mathfrak{D}$. Итак пусть ρ неприводимо. Это подразумевает, что $\rho:\ ABA^{-1}B^{-1} \to -1 \in GL(2)$ и что, с подходящими координатамы,

$$A \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B \to \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{U}(1), \tag{54}$$

итак что

$$J = 1 \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{54.a}$$

Чтобы понять связность, которая определена этим представлением, лучше перейти к неразветвленному двойному наложению M' кривой M. Существуют три из них. Какой из них мы выбираем, это только вопрос условности или обозначения. Они дают сходные результаты, но невысказаная кратность, как мы увидим, подлина.[58] Предположим, на пример, что он определяется подгруппой, порожденной $\{A, B^2\}$.

Ещё одно отступление. Хотя толъко особенной случай следующого вычисления нам нужны, лучше понимать то, что обще верно и обще важно для других группых. Мы тоже начали изучать формальные свойства отношения между Γ_{aut} с одной стороне, а $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с другой, а также между Γ_{aut} и классами сопряженности с одной стороной а $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и его отношения с саязностями Янга-Миллс с другой. В частности, при $m = 1$ мы полностью понимаем соотношение. Хотя здесь нет нашего намерения рассматривать любую группу, кроме $GL(1)$, $GL(2)$, лучше всего включить некоторые общие наблюдения о собственных значениях $\rho(A)$ и $\rho(B)$ при неприводимых представлениях размерности n группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Каждое такое представление дано представлением группы Γ ([AB],стр.559) и совместим представлением группы $\mathbf{Z}$ ([AB],(6.5)). Хотя здесь нет нашего намерения рассматривать другую группу, кроме $GL(1)$ и $GL(2)$, лучше включить некоторые общие наблюдения о собственных значениях $\rho(A)$ и $\rho(B)$ для неприводимых представлений размерности n. Основное препятствие к теории для $GL(n)$ лежит не в теории связей Янга-Миллса, а в теории операторов Гекке, которая еще недоступна для $GL(n)$. Пусть $m > 0$, н.о.д.

[58] Я не знаю, как эта проявится для других групп. Для нашой группы это оказалось, но толико в конце концов, ложным утверждением. Я оставил его, чтобы вспомнить неопределенность, в которой я оставался очень долго.

$(m,n)=1$.

$$A=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \exp(2\pi im/n) & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \exp(2\pi im(n-2))/n) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \exp(2\pi i(n-1)m/n)\end{pmatrix},$$

(55)
$$B=\beta\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0\end{pmatrix},$$

так что $ABA^{-1}B^{-1}=J$ равно $\exp(2\pi im/n)$ умножению на единицу. Это выражение, конечно, не является однозначно определеным, так как только классы сопряжения имеют значение и образуя класс сопряженности по степеням матрицы A и B, мы умножим A и B независимо на любые n-е корни из единицы. Эти общие наблюдения важны и полезно их запомнить но они не неупосредственно уместны. ■

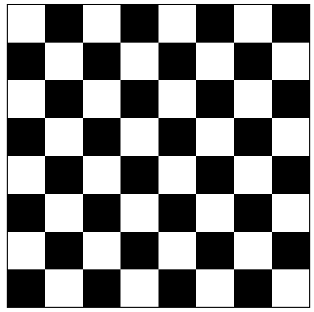
Мы выбрали M'. Я сейчас введу, сначала неуклюжным образом, потому что я был неопытен, тогда обычным образом, двумерную связность. Ограничение $\rho:\,\Gamma_{\mathbf{R}}\to GL(2)$ на соответствующую подгруппу $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является тогда прямой суммой и ассоциированным расслоением, существование которого обеспечивается предыдущими соображениями тоже прямая сумма. Затем рассмотрим линейное расслоение над наложении M', связанное с одной или другой его компонентой.

Вернёмся теперь к описанию двумерных расслоений, которое было прервано этими случайными замечаниями. Довольно ясно, что происходит с переносом или проекцией линейного расслоения на M' на двумерное расслоение на M. То, что сейчас нужно, словесное описание и проверка, что исход не зависит[59] от трех возможных выборов наложения M'. Я извиняюсь перед читателем за такое подробное объяснение, но для моего собственного назидания или поучения, это очень полезно.

Фундаментальная область Δ для M следует представить как параллелограмм, размещенный более или менее вертикально, от точки зрения читателя, в комплексной плоскости. Для M' это было бы параллелограмм вместе с его переводом вверх. В самом деле, я хочу тщательно осматривать построение, объяснив, что, например, как исход зависит от выбора пораждующих элементов A и B и от выбора подгруппы данной $\{A,B^2\}$ скорее чем данной $\{A^2,B\}$ чтобы определить M'. Чтобы включить простую диаграмму, я предполагаю, что A горизонтально и B вертикально, а что фундаментальная область

[59]Как уже отмечалось, наоборот, это зависит от выбора.

дана квадратом.[60]

(56) 

Одномерное расслоение на M' так как связность на нём тоже одномерное расслоение или связность на $\mathbf{C}$. Тогда возьмём прямую сумму этого расслоения и его переноса на $2\omega_2$. Это даёт двумерное расслоение или связность на M.

Но лучше думать как тополог. Если бы я был топологом, я бы просто сказал: «Возьмите прямой образ этого линейного расслоения относительно двойного покрытия $M' \to M$, чтобы получить двумерное векторное расслоение на M.» Это даёт желаемый исход. В самом деле, хотя для того, чтобы убедить себя в этом, мне нужно приложить несколько усилия, это всего лишь переформулировка определения на [AB,стр. 560]. Мы продолжаем обсуждение, прося читателя не забывать о трех возможных двойные покрытия.

Прежде чем мы продолжим, мы должны рассмотреть влияние перехода на M' на точную последовательность [AB,6.1]. Дело в том, как мы уже знаем, что J изменяется и становится

(57) $$J' = AB^2A^{-1}B^{-2} = (ABA^{-1})^2B^{-2} = (JB)^2B^{-2} = J^2.$$

Над этим наложением связность прямая сумма, которой компоненты неравны. Следовательно её строение ясно. Вопрос сводится к предыдущему случаю, но с заменой $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}' = 2\mathbf{Z}$ и $\mathbf{U}(1)$ заменяется его двукратным покрытием $\mathbf{U}'(1)$. В то же время группа $\pi_1(M)$ заменяется подгруппой с индексом два. Таким образом, сама $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является подгруппой группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с индексом два. Группа $\mathbf{U}$ также изменяется. Раньше это было $\mathbf{Z}\backslash\mathbf{R}$, но теперь это $\mathbf{Z}'\backslash\mathbf{R}$ и мы допускаем представления, которые на $\mathbf{Z}'\backslash\mathbf{Z}$ уникальным нетривиальным характером этой группы . Они определяют, согласно предыдущему объяснению, прежде всего, связность Янга-Миллса размерности одно на M' и, во-вторых, по описанной выше конструкции, связность Янга-Миллса на M размерности два. Первое связано с представлением группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ размерности единицы. Второе связано с индуцированным представлением группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, и это имеет размерность два. Оно неприводимо потому что $ABA^{-1}B^{-1} \to J$ и $J \to -1$.

Я не знаю, как это проявится для других групп, но для настоящего примера полезно рассмотреть явление с точки зрения пары групп $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ но тоже с точки зрения пары Γ_{aut} и Γ'_{aut}, одных геометрической и других арифметической. Для первой парой, для которой соответствующие определения появляются на [AB,стр.560], очевидно что

[60]Для M' существует три выбора. Для одного, фундаментальная область задаётся объединением квадратов в $(0,0)$ и $(1,0)$, для другого - объединением квадратов в $(0,0)$ и $(0,1)$, а третье объединение квадратов в (0,0) и (1,1). Они соответствуют трем ненулевым элементам $L/2L$, а именно $(1,0)$, $(0,1)$ и $(1,1)$. На диаграмме, представленной Энтони Пулидо, это последний, который представлен. Лучше всего представить его с другим выбором фундаментальной области, квадратом повернутым на 45 градусов.

ограничение представления ρ к группе $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является прямой суммой двух разных представлений потому что образ $\rho(A) \in GL(2)$ имеет два разных собственных значения ± 1.[61]

Вопрос совести. Есть важные замечания о $GL(1)$-расслоениях, которые я забыл объяснить, хотя были сделаны необходимые приготовления. Прежде всего, для $G = GL(1)$ гомоморфизмы на ρ [AB, стр. 560] равны 1 на $z = J = 1 \in \mathbf{Z}$. Это просто всё, что нам нужно. Дла группы $G = GL(2)$ это будет другое дело. На самом деле, для наших целей, для теории автоморфных форм они равны 1 на $\mathbf{U}(1)$ если $G = GL(1)$. Это значит, что они даны двумя числами в $\mathbf{U}(1)$. Существование связанных расслоений должно быть либо выведено из фразы на [AB,стр.561], цитированной ранее, либо из нашего обсуждения (36.k). Однако, на первый взгляд, мы имеем дело с различными понятиями плоскости. Во-первых, существует многозначный функция, в которой изменения определяются гомоморфизмом группы Галуа в $\mathbf{U}(1)$ а во-вторых линейная плоская функция, в которой склоны даны двумя действительными числами, изменениями по сторонам фундаментального параллелограма. Таким образом, они действительно одно и то же. Это второй вид, который был предпочителен в (53).

Также необходимо не упускать из виду условие [AB,6.6] и определение ρ. Если ограничение ρ на прообраз $\mathbf{U}(1)$ тривиально, то для определения связность связанная с ним мы можем просто заменить Q тривиальным одномерным расслоением потому что, построение, подразумеваемое в словах 'Given any homomorphism $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ we then get an induced G-connection,' подразумевает деление на ядро отображения ρ, то есть $Q \times_M \tilde{M}$ заменяется на $1 \times_M \tilde{M} = \tilde{M}$ или скорее $\mathbf{U}(1) \times_M \tilde{M}$. Такая связность обязательно постояна. В нашем особном случае постоянство кривизны и метрики означает, что степени $\mathbf{U}(1)$ дают плоскую связность. [62]

То, что становится прозрачным, когда мы начинаем размышлять о собственных значениях Гекке вида $\mathfrak{A}$, это сходство группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ с автоморфной группой Галуа, которая так важна в теории автоморфных форм и в теории представлениях. Это приводит, подобно этой теории, к некоторой функториальности в теории Янга-Миллса, но также вводит возможность прямых образов, и этого я не видел в обычной автоморфной теории или в теории локального представления. По крайней мере, если бы я это увидел, я его не узнал. Возможно что это замена базы? Тем не менее, в частности в теории для группы $GL(1)$ и $GL(2)$ что мы собираемся описать, есть намёк на что-то знакомое. То, что появляется в геометрической теории, а не в арифметической теории, это индуцированные представления и прямые образы. Основное понятие является $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которую я назову группа Атьи-Ботта. Она связана с группой Γ_{aut}, с которой мы уже знакомы. Теория над M' является частью теории над M. Как известно из арифметической теории – скорее, как ожидается от арифметической теории и от геометрической теории – ряд важных выводов в этой теории может быть в настоящее время выражен с точки зрени автоморфной группы Галуа, хотя мы далёко от общего понимания этой группыю. Присоединенная автоморфная группа Галуа не является просто произведением группы над M' с группой $\mathrm{Gal}(M'/M)$.

[61] Как было замечено, отношение $G_X = G_Y$, появляющееся в верхней части следующей страницы статьи [AB] не обязательно обосновано.

[62] Назначение $U(1)$ и его представлений неясно в этой статье, в которой рассматриваются только $GL(1)$ и $GL(2)$. Было бы яснее если мы рассматриваем группы более высокого ранга. Скорее оно покажется только в конце этой статьи но существенным образом.

Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ является аналог автоморфной группы Галуа, в том смысле, что его гомоморфизмы к группе G определяют связности Янга-Миллса со значениями в G. Однако автоморфная группа Галуа имеет также локальную форму. Возможно что некоторые читатели незнакомы ни с её глобальным видом ни с её локальнум видом.[63] Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ не имеет локального вида. Скорее мы рассматриваем только её частное, которое определено неразветвленными представлениями, то есть представлениями алгебры Гекке. Следовательно, возможно что это частное локальный вид просто локальное ${}^LG$, но мне кажется лучше осмотреть $GL(n)$ прежде чем прийти к заключению. Возможно что более сложно.[64]

Таким образом, перенос автоморфных форм от M на M', насколько мы понимаем этот, связан с отображением Γ'_{aut} в Γ_{aut}. В теории изменения базиса[65] мы переходим от одного поля к большему полю. Поле кривой M' больше, чем поле M, так что мы будем изучать здесь нечто подобное. Вкус тем не менее отличается. В самом деле, движение в противоположном смысле, и это путает. M' является накрытием M и мы имеем дело с прямыми образами.[66] В данном случае это соответствует индукции линейного расслоения на M к двумерному векторному расслоению на M'. Мы уже подробно описали это в простых выражениях. Теперь цель состоит в том, чтобы объяснить это как индукции из одномерного представления Γ'_{aut} в двумерное представление группы Γ_{aut}. Это, в свою очередь, может быть выражено как переход к двумерной связности на M, который при интегрировании, как и для $GL(1)$, чтобы определять возможные собственные сопряженные сечения. Затем это будет сравниваться в следующем разделе с классами Гекке, описанными в §VII. ■

Мы будем переходить от форм на M' к формам на M. С другой стороны, в теории Янга-Миллса, таким образом, в теории в которой связности являются главными предметами, существует прямой образ, а именно прямой образ слой слоем. Каково его отношение к гомоморфизмам Атьи-Ботта и гомоморфизмам автоморфных групп Галуа? В этой статье мы изучаем простой, но поучительный, случай этого вопроса. Есть много надоедливых второстепенных вопросов, которые нужно объяснить, но их представление неизбежно беспорядачное. Читателю придётся простить меня.

Первое дело, которое мне не явно, является соотношение между A_0 или Λ_0 и множителём $U(1)$ в (6.6). Мы также не чётко решили разницу между теорией Янга-Миллса и теорией собственных функций Гекке. Первая, на первый взгляд, для связных пространств, таким образом, для связных компонент множества Bun_G. Вторая для всего

[63]Один локальный вид появляется в статье On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups Math. Surveys and Monographs vol. 31, 1988 как группа Вейля. Локальный вид группы, поскольку речь идёт только о неразветвленных представлениях, но для всех базовых полей, то есть поля алгебраических чисел или поля функций, являются просто $\mathbf{Z}$, так что мы имеем дело с образом 1 в $\mathbf{Z}$ в ${}^LG$ и его сопряженным классом.

[64]Несколько мнемонических словов. Если $M' \to M$ гладкое конечномерное наложение тогда обратный образ расслоения на M расслоение на M' с такой же размерностей. С другой стороны размерность прямого образа расслоения A на M' равна $[M' : M] \dim A$. Первое построение изменение базиса но это влорое которое важно нам.

[65]Base change for GL(2), Annals of Mathematics Studies, vol. 96 (1980)

[66]В обычной теории группа над большим полем рассматривается как группа над меньшим полем. Отношение к прямым образу не сразу видно. Мы вернёмся к нему. Читатель заметит нескопько повторений. Это потому, что я только медленно понимаю то, что я объясняю.

Bun_G. У нас, как у Атии, есть фиксированные A_0 и Λ_0. Тензорное произведение с степенями Λ_0 принимает нас от одного компонента к другому. Если ϵ любое комплексное число абсолютного значения 1, то мы можем расширить функцию из одной связной компоненты Bun_G в другую с уравнением $f(\Lambda_0 \otimes \Lambda) = \epsilon f(x)$. Это означает, что при построении собственных функций Гекке или собственных значений мы можем сосредоточиться на нескольких связанных компонентах низкой степени. Для $GL(1)$ эта степень нуль и для $GL(2)$ степени 0 и 1. Возможно, я забыл это сказать, потому что я не знал о его значении, но расслоение Q Атьи-Ботта также является расслоением A Атьи. То есть понимается, что они равны (или, может быть, одно из них обратное к другому, в котором наше обсуждение должно быть слегка изменено.[67]

Кажется, нет никакого способа избежать введения A_0. К сожалению, это, по-видимому, предполагает выбор, насколько это возможно, A_0' для каждого неразветвленного покрытия M и в совместимом виде. Мы можем думать о A_0 просто как о точке в M и A_0' как точка в M'. Таким образом, можем предположить, что если $M'' \to M' \to M$, тогда $A_0'' \to A_0' \to A_0$. то есть мы предположим, что мы имеем последовательный набор базовых точек для всех неразветвленных покрытий M. Таким образом, у нас есть последовательный способ преобразования линейных расслоений на любой M' на расслоения степени 0. Для двумерного расслоения тензорное произведение с степени Λ_0 преобразует его в расслоение которого степень 0 или 1. Таким образом, достаточно рассмотреть эти две возможности. Конечно, выбор A_0' тогда определяет Λ_0'.

Тонкий вопрос. Чтобы взять прямое изображение, решётка L' должна быть подмножеством решётки L. В данном случае, $2L \subset L' \subset L$ С другой стороны, кажется что параметры линейных функций, которые связаны с L', получаются только как долю тех, которые связаны с L, $L' \subsetneq L$. Однако это не так потому, что [AB,Th. 6.7] позволяет нужную свободу. Неприводимые представления, которые существенные представления, даны как склеивание совместных представлений Γ и $\mathbf{R}$. $\blacksquare$.

Мы еще не описали пример связи между представлениями группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и линейными расслоениями. Пришло время сделать это. Сейчас ясно, что нам нужно рассматривать только расслоения степени 0. Согласно [AB] оно будет задано одномерным представлением π_M и что представление будет, прежде всего, тривиально на J, поскольку J является коммутатор, а во-вторых, что он будет тривиальным на $U(1)$, поскольку степень равна 0. Поскольку мы рассматриваем только эллиптические кривые, то означает, что оно задаётся образами $\exp(4ka\pi i), \exp(4lb\pi i)$ как в (53). Эти два числа лежат в $U(1)$, но в остальном произвольны. С другой стороны, для тех представлений $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которые имеют отношение к теории Гекке, два числа k, l должны быть целые числа. Согласно обсуждению на стр. 560 из [AB], в частности, уравнение (6.10), представление линейно на R, $x \to \epsilon x$, $x \in \mathbf{R}$, и $\epsilon J = 1$, поскольку $ABA^{-1}B^{-1} = J \in \mathbf{R}$. Это определение числа ϵ! Числа a и b лежат в $\mathbf{R}$. Условие в (53), что они лежат в $\mathbf{Z}$, не накладывается свойством Янга-Миллса, а отношением к собственным значениям Гекке. Более интересным вопросом является функция прямых изображений. Нам нужно только заботиться о том, что M' является двойным наложением M, поэтому мы рассматриваем квадратичное расширение полей.

[67] Мне трудно запомнить точное определение класса Чженя.

Некоторые общие замечания. Хотя наша главная тема сейчас является группой $GL(2)$, возможно что наши заключения более убедительные, если мы прервёмся некоторыми замечаниями о $GL(n)$-расслоениях для общих $n > 0$. Ограничимся неприводимыми расслоениями. Хотя наша тема в этой статье главным образом $GL(2)$, я бы предположил, что с помощью [A] случай общего n, если не простой, для этого что влечёт за собой нахождение всех классов собственных сопряженных сечений для $GL(n)$, по крайней мере, стоит размышления.

Мы уже начали изучать формальные свойства отношения между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ на одной стороне, а G_{aut} с другой, а также отношение между группой G_{aut} и сопряженными классами одной стороной и отношение между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и связностами с другой. В частности, при $m = 1$ мы полностью понимаем все соотношения.

Эти наблюдения связаны с другими второстепенными вопросами, которые, хотя они и связаны с натруднениями знакомыми с общей теорией автоморфных форм, были неожиданными в тепернешной статье. Поле функций кривой M' является квадратичным расширением того кривой M. Таким образом, L-группа группы $GL(1)$ для M' является расширением L-группы для M, а именно $GL(1, \mathbf{C})$ заменяется на $\mathbf{Z}_2 \times GL(1, \mathbf{C})$, потому что уместная группа Галуа $\mathbf{Z}_2$. Это изменение должно быть включено в соответствующие диаграммы [AB,6.5] и [AB,6.6]. Точнее, если мы рассматриваем геометрическую теорию над двойным наложением $M' \to M$, то группа Галуа $\mathrm{Gal}(M'/M)$ должна быть включена в группу Галуа диаграмма (6.6), которая изменяется для M' с тем, что $\pi_1(M)$ заменяется на $\pi_1(M')$, а $J \to 2 \in \mathbf{Z}$ но $J' \to 1 \in Z$, так что $(J')^2 = J$. Таким образом, представление π' группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является дано $z \to z$, $z \in \mathbf{U}(1)$ и данном представлением группы $\pi_1(M')$. То есть, соответствующие представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ расслоенное произведеное представления $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M')$. Другими словами, соответствующие представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ так что их ограничение к $\mathbf{Z}$ переводит J' в -1, но J в 1. Таким образом, включение G в теорию несколько тонкое, потому что при переходе от расслоений на M' и связанной с ним связности Янга-Миллса, который выполняется прямым изобразом, эсть расширение одномерного представления группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ к индуцированному двумерному представлению $\Gamma_{\mathbf{R}}$. ■

В качестве второго шага мы разъясняем дальше цель расслоения A_0 в данных обстоятельствах, собственных сопряженных сечений для $GL(2)$ по эллиптической кривой. Они изучались в §VI и делились на два класса: вид $\mathfrak{A}$ и вид $\mathfrak{D}$. Те, которых вид $\mathfrak{D}$ уже были рассмотрены, и их отношение к представлениям G_{aut} было выяснено, хотя и не к представлениям группы Атьи-Ботта. Мы занимаемся сейчас собственнами функционами вида $\mathfrak{A}$. Они имеют любопытное, но уместное свойство. Они исчезают на множестве $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, как утверждалось в предложении после уравнения (32). Они также равны 0 на множестве $\mathfrak{D}$. Таким образом, они могут быть однозначно выражены как тензорное произведение степени линейного расслоения Λ_0 и расслоения степени 0 или 1. Таким образом, эти собственные функции, помимо характера группы $\mathbf{Z}$, определяемый их значениями на расслоениях в $\mathfrak{A}$ степени 0 или 1. Именно, каждое расслоение Θ размерности два произведение линейного расслоения Λ и расслоения Θ' с степеней 0 или 1. Каждое собственное сопряженное сечение f так, что $f(\Lambda \cdot \Theta) = \chi(\Lambda) f(\Theta)$, где χ характер группы Пикара. В данном случае, двойственность навязала себя, но она требует некоторого объяснения.

Мы будем обращаться к теории Янга-Миллса, позволяя себе некоторую избыточность. Это теория, которая показывается на уровне связностей, таким образом, связанных многообразий, в противоположност теории Гекке, которые определяются одновременно в каждой степени. Эти связанные многообразия связаны друг с другом умножением с степенью расслоения A_0, поэтому каждому присваивается целое число. То есть, отдельные множества отождествлены друг с другом, несколько произвольным образом, так что функция или связность на расслоениях нулевой степени определяет функцию, соответственно связность, на всём Bun_G. Таким образом, функция на одном из многообразий может быть преобразована ко всем остальным, используя это целое число и данный характер $\mathbf{Z}$, первый умножитедь в (1.d). Таким образом, мы поняли цель расслоения A_0. Однако мы не понимаем этого в рамках связностей Янга-Миллса. Но есть трудность! Тензорное произведение с A_0 не меняет детерминант расслоения, оно меняет степень. Эта степень размерность расслоения. Так, например, для расслоения размерность которых равна двум этот умножитель равен A_0^2 , и это для нас важная задача, связности чётной и нечётной степени должны рассматриваться отдельно.

Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ связана не только со вторым множителем (1.d), но и с произведением. Первый фактор $\mathbf{Z}$ связан с множителем $U(1)$ в [AB,(6.6)]. Из [AB, (6.6)] и последующего объяснения видно, что мы можем изменить представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ степенью представления $\mathbf{U}(1)$ само по себе, производя его с $\Gamma_{\mathbf{R}} \to \mathbf{U}(1)$ и что это изменит степень на произведение этой степени со размерностей исходного представления. Вывод состоит в том, что в нынешних условиях нам нужно рассматривать только двумерные расслоения степеней 0 и 1.

Сравнение связностей Янга-Миллса, с собственными классами Гекке, с представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и с представлениями G_{aut} является разборчивым. Поэтому мы перестаем объяснять, что необходимо, и записывать то, что мы сделали. Соответствующее сравнение, сравнение множества $\{\rho \otimes \sigma^n | n \in \mathbf{Z}\}$, где σ представление $U(1)$ как самого себя и ρ представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$, потому что Bun_G несвязно и определение группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в [AB] приспособено к связанным кривым. Напомним, что в (1.d) имеется подразумеваемый выбор A_0. Вычисления, приводящие к (56), дают понять, что для сравнения с представлениями Γ_{aut} только $\Gamma_{\mathbf{R}}$-представлений, для которых J, который мы можем считать единицей 1 в R, имеет образ конечного порядка.[68]

Одномерные представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которые соответствуют одномерным расслоениям обязательно тривиальны на $\mathbf{R}$ из [AB, 6.5] и уже рассмотрены. Для них $J \to 1$. Напомним, что мы имеем дело с рядом представлений, бесконечным в обоих направлениях. Для центрального элемента этого ряда связностей и нашого выбора метрики и связности Q, связность постоянна. Остальные равномерно калебаются и все периодические с периодом, разделяющим один. Нет конечномерных представлений $\Gamma_{\mathbf{R}}$, для которых образ J иррационален.

Теперь остаётся открытие отношения собственных функций вида $\mathfrak{A}$, которые не также вида $\mathfrak{D}$, с одной стороны, к не приводимым двумерным неприводимым представлениям группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или Γ_{aut}, с другой стороны. Ещё раз есть условие рациональности, которое

[68]Мы можем ожидать, что проблемы установления функториальности в геометрическом контексте похожие на те, которыйе здесь рассматриваются, появляются также в арифметической теории. В этой теории они, несомненно, будут более сложными, включая одновременное использование формулы следа и расчётов, которые походят на расчёты в книге Хассе, Klassenkörpertheorie, хотя гораздо более трудны. Есть мало математиков с мужеством, чтобы рассмотреть эти проблемы, и я не среди них.

накладывается на первое. Три множества $\mathfrak{S}_i$ различны, а именно поведение каждого определено по ег отношению к трём характерам χ_i. Они соответствуют трём возможным неразветвленным квадратичным расширениям или трём покрытиям M' кривой M. Рассмотрим одно из них, скажем то, фундаментальная группа которого порождена A^2 и B.

Мы рассматриваем квадратичное покрытие M' кривой M. Какого влияние такого изменения на произведение группы Атьи-Ботта $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ с $\mathrm{Gal}(M'/M)$. Это достаточно ясно. Группа $\pi_1(M')$ в [AB,6.5] содержается в $\pi_1(M)$. Отсюда следует, что J' для M', то есть $J' \in \Gamma'_{\mathbf{R}}$ отображается как $2J$, то есть J^2, в $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Это определяет отображение из $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$, $x \in \mathbf{R}$ переходит в $2x$. Очевидно что индекс образа $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ равен двум. Это означает, благодаря теореме Атьи-Ботта, что одномерное расслоение Янга-Миллса для M' даёт двумерное расслоение Янга-Миллса для M. Геометрически, второе просто прямой образ первого, но стоит, лучше усвоить все эти понятия и построения, которые могут быть для читателя столько незнакомами как для меня, и продолжить изучение определений. В частности, полезно раздумывать о природе прямого изображения в связи с настоящими размышлениями.

Напомним, что автор этого статьи имеет понятие теории автоморфных форм и над полем алгебраических чисел и над полем функций на алгебраической кривой, сам по себе или над $\mathbf{C}$, но и над конечными полями хотя мы не рассматриваем их в этой статье. Руководящим принципом является то, что собственные функции Гекке параметризуются, возможно с второстепенными изменениями, гомоморфизмами гипотетической автоморфной группы Галуа в L-группую. Строение функториально, поэтому гомоморфизм от группы ${}^LG_1$ до ${}^LG_2$ приводит к отображению из собственных сопряженных сечений Гекке группы G_1 к тем группы G_2. С этим связаны много вопросов, в основном нерешенных. В этой статье мы имеем дело главным образом с $GL(1)$ и $GL(2)$.

Извинение. Есть много причин для объяснения. Возможно что некоторые из них являются повторением других. Это так. Для меня это просто подтверждение функториальных связей, в котором теория автоморфных форм, и поэтому другие теории, подобные теории Янга-Миллса, связанные с ней, вложены. Я прошу прощения у читателя за любую избыточность, которую он считает чрезмерной. Я не могу одновременно воспринимать все последствия. ■

Мы представили возможный выбор этой автоморфной группы Галуа Γ_{aut} по аналогии с теорией полей классов. Если бы мы имели дело с автоморфными формами над полем чисел, предположение состояло бы в том, что эта группа имела бы как фактор группу Галуа рассматриваемого поля, ещё точно, обратную предельную группу группых Галуа его конечных расширений. Здесь она точно обратная предельная группа группых Галуа неразветвленных конечных покрытий Галуа кривой M.

Для поля алгебраических чисел, она предположительна, ещё больше, так что она учитывала L-функции всех (возможно, всех гладких) алгебраических многообразий. То есть, эта группа была бы важной составной частью в создании теории L-функций для алгебраических многообразий над числовыми полями. Мы предложили выше группу Γ_{aut}, которая будет играть сходную роль для полей функций над кривой M, хотя мы исключали пока возможность разветвления.

Как мы уже отметили, связности Янга-Миллса являются признаком связных многообразий, поэтому любое сравнение происходит между бесконечной последовательностью, от $-\infty$ до ∞ связанных связностей и представлением $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Сверх того, если представления конечномерны, то образ J должен быть конечного порядка. Наконец, мы имеем дело с представлениями, в которых образы A и B имеют конечный порядок. Если это признало, существование биективного соответствия между такими семействами представления и представлениями Γ_{aut} ясно.

Если не быть осторожным, то обстоятельство, что расслоения вида $\mathfrak{A}$ двумерны, хотя они связаны с параметрами, которые являются одномерными, могут привести к путанице.

Что нужно объяснить сейчас, поскольку в этой статье мы рассматриваем только особенные кривые, это отношение индукции одномерного представления группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ к двумерному представлению $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и к собственным сечениям рода $\mathfrak{A}$. Кривая M' является одной из трёх возможных эллиптических кривых, покрывающих M как двойное наложение. Чтобы быть конкретным, мы считали, что это тот, чья фундаментальная группа порождена A^2 и B. Эти три кривые соответствуют трём характерам χ_i группы $\mathrm{Pic}_2(M)$

Важно отметить, ещё раз, что J заменяется на $J' = J^2$, то есть $J' = 2J = 2$ в $\mathbf{R}$. Основное отношение $ABA^{-1}B^{-1} = J$ или эквивалентно $BAB^{-1}A^{-1} = J^{-1}$. Следовательно $ABA^{-1} = JB$ и $A^nBA^{-n} = J^nB$. Фундаментальная группа $\pi_1(M')$, связанная с покрытием M', имеет индекс два в $\pi_1(M)$. Следовательно $[\Gamma_{\mathbf{R}} : \Gamma'_{\mathbf{R}}] = 2$.

Чтобы не путать себя и читателя, я рассматриваю собственные сечения Гекке только на связной компоненте Bun_G, хотя они не могут быть определены исключительно для этой компоненты, а связности Янга-Миллса без какой-либо явной ссылки на возможность тензорого произведения с представлениями группы $\mathbf{U}(1)$. Необходимое дополнительное обсуждение достаточно ясно. Чтобы быть точным, если представление $\mathbf{R}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ тривиальное представление, тогда, благодаря подготовке в §VII мы имеем дело с тривиальной связностью с постоянными интегралами, но если представление $\mathbf{R} \in \Gamma_{\mathbf{R}}$ не тривиально, то мы имеем дело с степенью связности Q [AB,стр.560] построенной чётким путём в §VII.

Существует три класса собственных сечений, каждая из которых соответствует подгруппе порядка два из $\mathbf{C}/L$ или решёткой L'/L. Кривая M' определяется как покрытие $M' = \mathbf{C}/L'$, $L \supsetneq L' \supsetneq 2L$, кривой $M = \mathbf{C}/L$, таким образом, что оно покрытие второго порядка. Прямой образ линейного расслоения на M' будет тогда расслоение размерности два на кривой M. С другой стороны, линейные связности Янга-Миллса на M' с однозначими интегралами параметризуются, как мы знаем, характерами M', но теперь мы знаем, как с этим обрашаться. Однако, только те, которые не являются характерами M, для которых условия периодичности более требовательны, уместны сейчас. В самом деле, точнее, они параметризуются одномерными представлениями группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или, еще точнее, одномерными представлениями, которые отображают $\pi_1(M)$ в конечное множество. Нам нужно показать, что функции на $\mathfrak{A}$, занимавшие нас, параметризуются даже заданными нами одномерными связностями Янга-Миллса на M' но тоже их прямыми изображениями на M, где M' двойное наложение кривой M.[69] Более чётко, что M'

[69]Окончательно будет необходимо учесть возможность того, что два разных линейных рассдоения имеют один и тот же прямой образ, но на данный момент мы это не замечаем. Это понятно, если не по какой-либо другой причине тогда из [AB, Th. 6.7]

определяется L' в L, где $L/L' = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ но мы обрабатываем функции на $\mathbf{C}/\tilde{L}$, которое является фактором $\mathbf{C}/L$ и которое изоморфное $\mathbf{C}/L'$.

В §VI мы видели, что собственные сечения вида $\mathfrak{A}$, которые не принадлежают к виду $\mathfrak{D}$, даны характерами группы $\mathbf{C}/L'$ которые не являются функциями на $\mathbf{C}/\tilde{L}$, $\tilde{L} = L/2$.

В конечном итоге необходимо будет учесть возможность того, что два разных линейных расслоения имеют один и тот же прямой образ, но на данный момент мы это не замечаем.

Обстоятельства таковы. Существуют параметры для M'. Они определяют в первую очередь линейные расслоения на M' с связностями а также одномерные представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Связанным с каждым из линейных расслоений с связностью является его прямое изображение, двумерное векторное расслоение на M с связностью. И начальная связность и её прямой образ являются соединениями Янга-Миллса. Каждый из них связан с представлением, одним группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, другим группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Нам нужно показать, что первое индуцировано из второго, так что необходимая совместимость ясна. Есть совместимости, которые мы должны чётко понимать. Формализм позволил нам провести проверку на линейные расслоения степени 0 и на определённый класс представлений $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Одно важное обстоятельство, которое позволяет сделать сходную редукцию для двумерных расслоений. Это то, что соответствующие собственные функции равны 0 на $\mathfrak{A}_{\mathrm{odd}}$, так что на этом множестве собственные сечения Гекке не определены. Это означает, что осматривая сопряженных сечений мы можем, взяв тензорные произведения с степенями Λ_0, уменьшить наше исследование до расслоения степени 0, как мы это сделаем. Наша озабоченность по поводу собственных сечений Гекке связана главным образом с их ограничением на расслоения степени 0, а их значения на остальных являются тензорным произведением с мощностью Λ_0. Это так же хорошо, потому что тензорное произведение с степеней расслоения Q, которое, хотя мы и построили его в явном виде для эллиптических кривых, является несколько неясным предметом, а не легко воспринимаемым. Это мы сделали в §V. Важным и интересным является прямой образ этих расслоений и их отношения к двумерным представлениям группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или Γ_{aut}. Для первого это объясняется в [AB]. Для второго это является следствием соотношение между $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и Γ_{aut}, а именно между Γ и Γ_{aut}, где Γ подгруппа $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которая покажется в [AB] и в (1.a). Мы объяснили выше назначение $\Gamma_{\mathbf{R}}$ как расширение Γ в [AB]. Мы действительно отложили его, хотя и не полностью, путем перехода к расслоениям степени нуль.

Прежде чем начать, позвольте мне объяснить, как развиваются отражения. Мы ввели раньше соответствие между одномерными представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и одномерными собственными сечениями Гекке. Это доступно для всех эллиптических кривых, в частности M'. Группа $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ вложена в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ как подгруппа индекса 2, таким образом, что J' отображает на $2J$. Индекс 2 задаётся через $[\pi_1(M) : \pi_1(M')] = 2$.

Параметры собственных сеченией Гекке вида $\mathfrak{D}$, которые не равны сечениям типа $\mathfrak{A}$, связаны с одним из трех возможных покрытий M'. Для данного M' параметры, которые даны в §VI, являются теми характерами группы M' которые не являются характерами M. Собственные сечения являются показателей интегралов от связностей Янга-Миллса.

Кроме того параметр, который характер M', можно сочетать с любым характером группы $\mathbf{R}$, который является -1 на J и 1 на J', чтобы определить одномерное представление $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Это определяет по индукции двумерное представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$, которое обязательно неприводимо, иначе образ J обязательно будет единичная матрица. С другой стороны, характер M' также определяет в описанной выше теории для $GL(1)$ линейное расслоение на M' с связностью, прямой образ которого является двумерным расслоением на M со связностью. Интеграл этой связностей затем даёт класс сопряженности Гекке.

Остается вопрос о том, какое представление или какой характер $\mathbf{R}$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$ мы должны принять. Диаграмма [AB,6.6] заменяется на

$$1 \to \mathbf{Z}' \to \Gamma'_{\mathbf{R}} \to \mathbf{U}'(1) \times \pi_1(M') \to 1, \quad Z' = 2Z, \quad \pi_1(M)/\pi_1(M') = \mathbf{Z}_2,$$

и последовательность

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{U}'(1) \to \mathbf{U}(1) \to 1$$

точна. Две группы вращения окружности, конечно, изоморфны.

Как я считаю, мы уже наблюдали, одномерное представление, от которых мы индуцируем, не являются тривиальными на J, так что следующее двумерное представление обязательно неприводимо. Каждый из этих характеров определяет связность на M' вида Янга-Миллса. Он имеет степень 0, и его прямой образ на M также будет иметь степень 0 и вид Янга-Миллса.[70] Мы хотим убедиться, что связанные двумерные соединения имеют вид Янга-Миллса и что интегрированные экспоненты соединений определяют связанные собственные части. Это в некотором смысле очевидно, но стоит попытаться разобраться в путанице определений.

Дополнительние общие замечания. Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ почти прямое произведение группы $\mathbf{R}$ с группой Γ [AB,стр.559]. Она равна этому произведению разделенному на $\{n \times J^{-n} | n \in \mathbf{Z}\}$. Имея это в виду. а также соотношения (55), я хотел бы рассмотреть неприводимые конечномерные представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Это, конечно, просто тензорное произведение неприводимого представления $\rho(\cdot)$ группы Γ, которые мы уже обсуждили, с совместимым характером χ группы $\mathbf{R}$, то есть $\rho(J)^{-1}\chi(1)$ равно единицу. Так как мы можем продолжить каждый характер группы $\mathbf{Z}$ до характера группы $\mathbf{R}$, из точной последовательности [AB,6.6] следует, что каждое неприводимое представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ является произведением представления ρ группы $\mathbf{R}$ и представления группы $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M)$. Мы уже управились с этим вторим сомножителём выше, скорее, с его первым сомножителём. Это означает, что мы должны рассматривать только неприводимые представления $\pi_1(M)$, но это мы сделали в (55). Сомножители α и β имеют мало строительное значение.

Если мы предположим, что, как бы то ни было, представление группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{U}(1)$ просто $x \to \exp(2\pi i x a)$ и если мы предположим, опять же, как мы можем, что a является рациональным, тогда мы можем записать его как $a = b + c/d$, где b, c, d целые числа и $0 \le c/d < 1$ и $c \ge 0$ и $d > 0$ взаимно простые. То, что я хочу сделать, это установить, что собственные сечения типа $\mathfrak{A}$ появляющиеся в §VII могут быть осуществены как прямые образы интегралов связности Янга-Миллса на квадратичных покрытиях M. Как только кто-то осознает эту возможность, возникает соблазн изучить её в более общих рамках, в частности, с покрытиями более высокой степени. Однако это сразу открывает слишком много возможностей. Я вполне доволен тем, что я оставлю эти исследования другим.

[70]Сейчас нам нужно общее замечание. Пусть $\hat{M}$ конечное накрытие Галуа кривой M. Мы можем сперва выбрать $\hat{Q}$ и тогда для каждое M', $M \subset M' \subset \hat{M}$, выбрать

$$Q' = \otimes_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\hat{M}/M')} \sigma \hat{Q}.$$

Это разумеется в следующем обсуждении, в котором $\hat{M} = \mathbf{C}/2L$. Вопрос возникает если это совместно с нашими выборами. См.[WW,стр.??].

Мы должны, однако, сначала понять, почему Атья-Ботт ввели поле $\mathbf{R}$ и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ в [AB, 6.4]. Ясно, что в наших условиах[71], это просто разрешить сложение к связности произвольного мнимого члена $i\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$. Для наших целей удобно ограничиваться рациональными множителями, потому что мы хотим ввести периодические связности. Тогда $\mathbf{R} \to \Gamma_{\mathbf{R}}$ в [AB,6.5] заменяется с $\mathbf{Q} \to \Gamma_{\mathbf{Q}}$, то есть образ J в $\mathbf{Q}$.

Точнее, если рассматриваются только неприводимые конечномерные представления $\pi_1(M)$, то согласно (55) существуют три параметра: a, b и образ J, который обязательно является корнем из единицы. Более того, для наших целей a и b являются корнями единства. Именно это отличает $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ от $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Образ J также обязательно является корнем из единицы, если представление конечномерно. Это означает, что представление построено в две части. Сначала характер группы $\mathbf{R}$ вида $x \to \exp(iax)\exp(ibx)$ с $a \in \mathbf{Q}$, и $0 \leq a < 1$, а с $b \in \mathbf{Z}$ целое число. Сначала и $a+b$ является произвольным действительным числом но для наших целей лучше что $a+b \in \mathbf{Q}$. Таким образом, $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ является обратной предельной группы. Второй из этих характеров группы $\mathbf{R}$, $x \to \exp(ibx)$, можно получить композицией $\Gamma_{\mathbf{Q}} \to U(1)$ (или $\Gamma_{\mathbf{R}} \to U(1)$) с степенью единственного представления $\mathbf{U}(1)$. Это представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или, скорее, $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, обратный предел конечных подгрупп в $\mathbf{U}(1)$, а скорее представления обратного предела $\mathbf{U}(1)$ в $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, который представляет собой группу. Они должны быть дополнены совместимым представлением $\pi_1(M)$, таким образом, совместимым с изображением J, как в (55) и следовательно конечного порядка.

Следующий шаг будет казаться сначала неуместным. Если мы имеем подрешётку L' заданной решётки L в плоскости и второго ранга, то мы можем выбрать базис L такой, что относительно этого базиса $L' = \{abc, bd\}$ $c, d \in \mathbf{Z}$ произвольны, $a, b \in \mathbf{Z}$, $a, b > 0$. Для настоящих целей, а именно для группы $GL(2)$, a будет равно 2 и b равно 1. Для других групп будет больше координат и больше возможностей. Для наших целей мы можем предположить, что $b = 1$. В настоящее время рассматриваются две эллиптические кривые, кривая M, с которой мы начали, и её решётку L и подрешётку L', таким образом, покрытие M', которое, в свою очередь, покрывается кривой определенной $2L$, которая сама M. Есть три такие покрытия M', подразумевые в §VI.

Объяснив это, мы вернёмся к анализу предыдущего параграфа.[72] Прежде всего, ограничение неприводимого представления на $\mathbf{Z}$, подгруппа, порожденная элементом J, задаётся корнем из единицы $\exp(2\pi ia/k)$, где либо $a = 0$ и k не имеет значения или $k > 0$ и $0 < a < k$, о.н.д.$(a, k) = 1$. Тогда представление на $\mathbf{R}$ задается формулой $x \to \exp(2\pi i(a/k + l))x$, где l целое число и $0 \leq a < k$. Затем l определяет характер группы $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, таким образом, что оно целое число, и это целое число определяет сначало представление $\mathbf{U}(1) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ которое, как видно из [AB, 6.6], в свою очередь определяет представление $\mathbf{R}$. Разница между этим представлением группы $\mathbf{R}$ и исходным представлением представляет собой представление $\mathbf{R}$, заданное дробью a/k, которое само дано его значение в $J = 1 \in \mathbf{R}$, которое корень единицы. Заметите что k длина полного периода и a число волны в периоде.

[71] То есть, представление $\Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ определено данным представлением $\Gamma_{\mathbf{R}} \to \pi_1(M)$ и $\pi_1(M) \to G$

[72] Возможно что эти по-видимому мелкие сложности самая суть неабелевой теории полей классов для поля функций алгебраической кривой определенной над $\mathbf{C}$. Итак лучше не гнушаться ими. К сожалению, построение, как моё объяснение, неуклужо и тоже повторяющиеся. Моё понимание полно, но ещё несколько неопределёно. Я ещё не могу объяснять его линейно! Наличие точных элементарных вычислений, по своему сходству с классической теорией от Гаусса до Хассе, обнадёживает.

Мы уже заметили что тензорное произведение с представлением группы $U(1)$ изменяет порядок целым числом. Таким образом, мы можем предполагать, что $l = 0$. Итак четыре числа рассматривается a, k и два числа α и β в (56), которые будут корнями из единицы, если мы исследуем $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Более того, наш предмет в этой работе теперь является только неприводимыми расслоениями для $GL(2)$, так что согласно замечанию, следующему (56) $a = 1$, $k = 2$. Этот случай, без сомнения, типичен. Нам дана кривая M и двукратное покрытие M'. Это покрытие подразумеваено обсуждается выше. Более того, мы также обнаружили ранее, следуя определениям [AB], что данные, имеющиеся под рукой, определяют одномерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Эти данные одномерное представление $\mathbf{U}(1)$, таким образом, целое число, вместе с характером конечного порядка группы $\varinjlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. и, наконец, образы, также конечных порядок, образующих A', B' в $\pi_1(M')$, выбранный для совместимости с представлением M' как частное $\mathbf{C}$ на решётке L'. Этот характер дан[73]

$$x \to \exp(2\pi i a x), \quad x \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z},$$

и совместимым образом на всех более высоких уровнях обратного предела.

Прежде чем продолжить, я наблюдаю то, что, хотя очевидно, возможно, было упущено. Ограниченое неприводимого двумерного представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ к подгруппе порожденной $\pi_1(M)$ вида (55). Кроме того, $J = -I$. Итак, единственный свободный параметр $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\chi(J) = 1$.

Я представляю это построение несколько иначе, так что оно ясно. Первым шагом в построении одномерного представления для $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$, но также и для $\mathbf{\Gamma_R}$, является построение представления $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(U)$, а затем совместимого представления группы[74] $\varinjlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Сейчас нужно оъяснить отношение между $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или то между $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Возможно что это уже ясно читателю. Достаточно объяснить это для второй пары. Единственная разность, кроме неравенства $\pi_1(M') \subsetneq \pi_1(M)$, отношение $J' = 2J$. Кроме того $[\Gamma_{\mathbf{R}} : \Gamma'_{\mathbf{R}}] = 2$, но это потому что M' двукратное покрытие M, то есть $[\pi_1(M) : \pi_1(M')] = 2$. Мы знаем как проходить из одномерной связности Янга-Миллса на M' к одном на M. Это прямый образ от одномерного расслоения к двумерному расслоению. Какова связь между соответствующими группами Янга-Миллса и связанными представлениями? Естественное предположение состоит в том, что одно индуцируется из другого.

Рассмотрим сначала вложение первого во втором. Для простоты вложение $\Gamma'_{\mathbf{R}} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$. Это чётко определяется вложениями $aJ' \mapsto 2aJ$, $a \in \mathbf{R}$ и $\pi_1(M') \subset \pi_1(M)$. Таким образом, каждое одномерное представление группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ определяет двумерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, обязательно неприводимым, поскольку образ J' равен 1, и образ J равен -1. Это условие на ограничении первого прелставления на $\mathbf{R}$. Оно даёт в данных обстоятельствах $x \to \exp(\pi m x)$, m нечётно. Значение этого условия станет очевидным позже. Я подчёркиваю, что мы обсуждаем здесь ключ этой статьи!

Последний вопрос, предварительный для нас, заключается в том, является ли это индуцированное представление, представлением связанным с прямым образом. Мы можем также предположить в настоящем обсуждении, так как это условие, имеющее для нас значение, что условие в последнем предложении предыдущего абзаца выполнено.

---

[73] Мы, к сожалению, перестали быть последовательными в наших обозначениях. координаты (x, y) здесь появляются в (36.c) и в других местах как (a, b). Полная последовательность не в моих силах.

[74] Если читатель немного смущен различными пределами, так что я.

То есть m нечётно. С одной стороны, это видно из начальных определений на [AB, стр. 560], с другой стороны, это определение довольно короткое. Тем не менее, я тоже буду краток. Это не место для широкого обсуждения их построения. В частности, фактор $\mathbf{U}(1)$ не играет роли в нынешних условиях,[75] так что речь идет о сравнении двух расслоений, одно над M, другое над M', каждое определено тем же расслоением над универсальным накрытием M. Следовательно наше утверждение тавтологмя.

Всё, что остается сейчас - сравнить эти выводы с заключениями §VII. Это тема следующего раздела.

Прежде всего мы должны чётко понимать соотношение между диаграммой [AB,6.5] и соответствующей диаграммой для M'. Вторая вложена в первую с $\mathbf{Z}' = 2\mathbf{Z}$, так что $U'(1)$ двойное покрытие группы $U(1)$. Группа $\pi_1(M')$ вложена инъективно в $\pi_1(M)$.

С уже выбранном расслоением Λ_0' группа M' отождествляется с компонентой связности его группы Пикара Pic_0, а характеры этой группы параметризуют, как мы видели, собственные сечения Гекке группы $GL(1)$ до дополнительного умножителя, связанного с дополнительным умножителём в (1.d). Последнее можно смело пропускать. Эти характеры также, как мы увидели, даны связностями Янга-Миллса, из которых мы можем взять прямой образ на M. Эти прямые образы являются двумерными связностями. Они в значительной степени соответствуют определениям в [AB] к представлению группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, индуцированному по отношению к $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Это, на мой взгляд, поразительный вывод.

Возможность общей теории предполагает себя, но мы не преследуем её здесь. Есть что-то ещё, равным образом поразительно, по крайней мере для тех, кто знаком с работой Хариш-Чандры. Кривая M имеет три неразветвленных накрытия M'. Мы обнаружили четыре класса $GL(2)$-расслоений на M, один класс связанных с разложимыми расслоениями, каждый из трёх других, связанных с одним из неразветвленных квадратичных расширений поля функций на M. Сходство со спектральной теорией полупростых групп над полем действительных чисел, а даже в более общих условиях, очевидно, но многое предстоит сделать.

Замечание в сторону За счёт избыточности, но для ясности я снова возвращаюсь к [AB, 6.1]. Выражение $\star F(A)$ является просто вещественнозначной функцией, а не сечением некоторого более сложного расслоения, а d_A просто обычным дифференциалом этой функции. Более того, для расслоения Q мы выбрали $F(A)$ и $\star F(A)$ постоянными, если A является Q или степенью Q. Как следствие, связности, введенные построением предшествующим определению ρ на [AB, стр.560], являются плоскими, в сильном смысле, что они задаются обычными производными на М, в этом случае (x, y)-плоскость. Это проявляется в (53). Замечу здесь, потому что необходимо пояснить, что, хотя эти связности очень просты, они содержат два свободных действительных параметра, скорости в двух независимых направлениях. С ограничением k, l в $\mathbf{Z}$, а не k, l в $\mathbf{R}$, мы покидаем область связностей и переходим к собственным значениям операторов Гекке, которые для $GL(1)$ задаются функциями со значениями в $\mathbf{U}(1)$, а не функциями, значения которых являются классами сопряженности. Мы вернёмся к этому. ■

Неожиданное следствие, которое будет исправлено ниже. Кажется что введение функции $s(\cdot)$ центральным открытием этой статьи, по крайней мере, для меня, потому что с этом отвлечённое понятие сделалось доступным. В первую очередь это привело к определениям (36.h) а затем к (36.i), которое, в свою очередь, привело к постоянной кривизне уравнения (47). Есть ещё одно приятное следствие. Это связано с природой

[75] Уместное $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ на стр. 560 тривиально на $\mathbf{U}(1)$.

кривизны в формуле (47) и её соотношением с выбор A_0 и Λ_0. Я утверждаю, что замена A_0 на A_0' приводит к постоянной (по отношению к плоским координатам) изменению в связности и, следовательно, нет изменения кривизны. Она остаётся постоянной. Более того, изменение самой связности очень просто. Добавляется постоянный член. ■

Еще многое предстоит сделать, но лучше остановиться и изучить наше положение. Однако в сущности, когда мы, наконец, обратились к доказательству [AB, Th. 6.7], большая часть приготовления была излишней. Однако, по крайней мере для меня, это было очень полезно. Пока мы имеем полное представление о строении линейных расслоений Янга-Миллса, и мы находимся сейчас на грани понимания строения расслоений Янга-Миллса размерности два. Конечно что это только для эллиптических кривых. Они являются прямыми образами линейных расслоений на одном из трех возможных двойных покрытий M. Проход от M и представлени $\Gamma_{\mathbf{R}}$ к покрытию M' и представлению ρ' его фундаментальной группы $\Gamma'_{\mathbf{R}} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$.

Со своей стороны, даже если не со стороны читателя, небрежность понимания, которая должна быть исправлена. При обсуждении следствий (36.i) мы ввели связность на расслоении $\Lambda_0\Lambda_1^{-1}$, и кривизна этой связности равна нуле. Поскольку метрика на M или на $\mathbf{C}$ является инвариантной относительно переносов эта связность (скорее эти связности) связность Янга-Миллс.

Они не являются связностями, входящими в (53). Эти просто постоянные связи на тривиальном расслоении. Они приведены в [AB, (6.12)] с H и β тривиальны, если заменить $U(1) \times \pi_1(M)$ на $\mathbf{R}^\times$ Если $G = GL(1)$, $\bar{S} = \{1\}$. Это правильное утверждение. Казалось бы, эсть другая небольшая, неосторожная ошибка. Слово «flat» не означает чётко определенного, оно означает чётко определенное на универсальном покрытии Читатель с ограниченным знакомством с дифференциальной геометрией, должен знать, что плоская связность, является тем, что её интеграл определяет функцией, локально однозначн, но глобально, возможно, многозначную. Она топологически отличается смещением между петель Таким образом, для эллиптической кривой его можно считать линейным. Есть что-то ещё, чтобы иметь в виду, две группы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}(1)\times$ очень близки. Прошу прощения за настолько сносок и отступления, но мы работаем в сложном контексте.

Полезные но лишние объяснения. В этой попытке обнаружить или начать создание теорию функториальности в рамке простейшего случая, но почти не понимая соответствующих идей, я обошел те же самые понятия, прокладывая себе путь через понятия, которые, хотя в значительной степени не относящие к делу, были в конечном счёте источником решения. Я приложил все усилия, чтобы отбросить ложные или ненужные идеи и сохранить только соответствующие, но это оказалось невозможным для того, что они были неразрывно связаны в моём уме с решениеи. Однако следующие строки явно не нужны. Я сохранил их чтобы подчеркнуть, что вся статья нуждается в пересмотре, но лучше всего подождать, пока не будет создана общая теория. То, что окончательно поражает в решении, это совершенная точность сравнения между собственнами сечениями и связностями Янга-Миллса. Однако, диаграмма для забавы.

На диаграмме (56) каждый квадрат, будь то чёрный или белый, представляет собой простое покрытие M. Объединение черного квадрата с белым квадратом над ним является простым покрытием M'. Одномерная связность Янга-Миллса на M' задается константой, которая сама определяется ограничением представления ρ' на $\mathbf{Z}$, то есть $z \to cz$, $c \in \mathbf{R}$. Одномерное (локальное) сечение $z \to (z)$ расслоения на M' это просто функция $f(\cdot)$ со значениями в $\mathbf{R}$. Это определяет (опяит локальное) сечение двумерного расслоения на M. Оно даётся $z \to (f(z), f(z+B)$. Таким образом, значения f в чёрном квадрате объединены со значениями в белом квадрате, лежащем над ним. Короткое размышление необходимо для понимания двумерного склеивания, которое это влечет за собой. Значения в данном черном квадрате должны плавно меняться, когда мы двигаемся в обоих направлениях вверх или вниз и влево или вправо, таким образом диагонально, не на соседний белый квадрат, а на черный квадрат. То же самое верно для движения от белого квадрата до белого квадрата. Однако есть еще больше. Движение включает в себя обмен двух координат, таким образом, два значения вектора, заданного сечения. Если мы имеем дело с связностей, то есть, таким образом, регулярное движение в диагональных направлениях. Для этого черные и белые квадраты можно рассматривать отдельно. Однако необходимо обеспечить, чтобы результат был тогда гладким, когда мы переходим от квадратов одного рода к квадратам другого. Это, несомненно, будет так для постоянных связностей и их интегралов. Что касается разделов, но не связей, поведение в центре черных квадратов не зависит от поведения на белом квадрате. Исправление происходит на границе квадраты. Я также отмечаю, что A и B играют одинаковые роли.[76]■

Есть еще одна подробность, которая не должна быть забыта. При переходе из M на M' мы заменяем J элементом J' и, таким образом, мы заменяем группу $U(1)$ сдругой группой, хотя он все ещё является $U(1)$. Как и в случае $GL(1)$ разрешенные связност задаются постоянными функциями, но теперь две постояннымы функциями, порядок которых не имеет значения.

Наконец, мы нашли двумерный вид выражения (53), но вопросы остаются. Каковы условия периодичности? Дело в том, что мы хотим представить собственный сопряженный класс как интегральную показательную функцию. Для $GL(1)$ сопряженный класс имеет единственный представитель, но для $GL(2)$ это не так. Вкратце вернёмся к уравнению (53), для которого есть два условия для обсуждения: периодичность и начальные условия. Мы уже говорили о периодичности. Это интегральность числого k и l. Начальные условия вводятся путем умножения (53) на произвольный элемент из $U(1)$.

Начальные условия. Именно этот элемент определяет характер на подгруппе $\mathbf{Z}$ группы Γ_{aut} в (1.d), то есть на $1 \in \mathbf{Z}$. Это $\mathbf{Z}$ состоит из степеней произвольно выбранного $\Lambda_0 = \Lambda_{A_0}$, которое сам определяет нижний предел интегрирования в (53).

Здесь что-то входит, что легко упускается из виду, произвол нашего выбора Λ_0 или A_0. Это необходимо и также вездесуще. В (53) движущаяся точка $a\theta + b\theta$, а связность даёт подынтегральное выражение. Само собой это выражение не даёт сопряженный класс в точке A_0. Его нужно умножить на значение класса сопряженности в точке A_0. Это может быть произвольно выбранным и является причиной дополнительного фактора $\mathbf{Z}$ в (1.d). Есть что-то, что легко забыть, когда мы достигаем желаемых пар - интеграла от связности Янга-Миллса, с одной стороны, и класса сопряженности для $GL(1)$ или собственного сопраженного сечения для $GL(2)$, с другой стороны. То есть,

[76]Это объяснение неудовлетворительное, и по причинам, связанным с сноской ‘незначительный недосмотр’, а именно, мы были неточными относительно склеивания. Мы имеем дело с плоскими связностями, и их можно интегрировать в однозначное сечение над $\tilde{M}$. Более того, прямая, соединяющая точку в одном из квадратов диаграммы с другим, определяет элемент фундаментальной группы и, следовательно, движение от сдоя на одном конце к слою на другом. Это склеивание, подразумеваемое здесь.

мы не пытаемся найти собственную функцию, в которой существует неопределенная константа, но семейство собственных значений, и это недвусмыслено.

Для $GL(2)$ построение более сложное. Как уже объяснялось, в геометрической теории собственное значение, изменяющееся от точки к точке, заменяется классом сопряженности, который меняется от точки к точке на M. Для $GL(2)$ это вопрос предоставления двух чисел, собственных значений класса и только двусмысленность - это порядок, в котором они даются. Более ясно выражено, что мы имеем дело с классом сопряженности два-на-два эрмитовых матриц, и это определяется его собственными значениями, оба из которых являются реальными. Однако они не указаны в определенном порядке. Таким образом, существует множество способов представления спектрального разложения. Группа $\pi_1(M)$ имеет три нормальные подгруппы индекса два, каждая из которых содержит только один из A, B, AB, и мы можем перейти к наложению, определенное любым из них. Когда мы это делаем, двумерное представление соответствующей подгруппы группы G имеет две различные неприводимые компоненты с размерностей один. Таким образом, у нас есть, по сути, шесть способшесть способов существует шесть способов следовать колебательным признакам, таким образом, шесть способов описания связанных связностей Янга-Миллса. Это вызвало у меня большую неопределенность и путаницу. Мое описание выводов может вызвать в читателя те же чувства. Однако, оно стало мне знакомым.

Для $G = GL(1)$ соответствие состоит из связности Янга-Миллса и связанного с ним представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$, с одной стороны, и соответствующего собственного сопряженного сечения и связанного с ним представления Γ_{aut} другой. Мы понимаем, как это действует тоже для $G = GL(2)$ поскольку представления или связности являются прямыми суммами соответствующих одномерных предметов. В общем случае для $GL(2)$ мы рассматриваем только связуности Янга-Миллса, и они, согласно [AB], задаются представлениями $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Кроме того, как мы уже обнаружили для $GL(1)$, для наших целей не все связности имеют значение. Это повлекло за собой, по крайней мере для ограничение на специальный набор представлений, тривиальных на прообразе $\mathbf{U}(1)$ в $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Для $GL(2)$ это не так.

Аналогом (53) будет показательная функция которой показатель матричный интеграл. Матрицу можно считать диагональной, поскольку координаты a и b определены по сторонам фундаментальной области. Условие состоит в том, что интегралы двух диагональных элементов являются периодическими, кроме общего знака.

Мы выбрали метрику на M инвариантную относительно переносов и точка A_0 дана. Первоначально она была $0 \in L$. Мы могли бы заменить её любой другой точкой, то есть переносом точки A_0, который даёт перенос функции $s(\cdot)$ а также формы (36.i). Первый произвольный и определяет два других. Изменения влекут за собой изменение связности Янга-Миллса. но, как мы увидим, нет изменение в его кривизне, которая является постоянной. Сама функция $s(\cdot)$ является функцией на плоскости, а не на M. Как мы опишем, замена A_0' для A_0 влечет за собой изменение связанной связности, хотя это изменение не в её кривизне. Изменение, то есть разница между связностями, связаны с A_0 и A_0', является плоской. Поскольку A_0 дано, только что упомянутое замечание позволяет нам определить связность Янга-Миллса для гпуппы $GL(1)$ с целым числами k, l и линейным расслоением с степенью нуль, само связано с различием $A_0' - A_0$. Для группы $GL(1)$ гомоморфизм ρ в [AB, Th. 6.7] обязательно так, что $\mathbf{Z} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$. Ограничение $\rho|U(1)$ дано целым числом и $\rho|\pi_1(M)$ дано двумя числами.

Всё это, пожалуй, лучше объяснить в связи с строками[77] ‘Now line bundles with harmonic connections … $\Gamma_{\mathbf{R}}$ now factoring through $\pi_1(M)$.’ Пусть $k = 0$, $L_0 = A \cdot A_0^{-1}$. Связность, присоединенная к $A_0 = 0 \in L$, уже введена, но она зависит от A (или A_0') как точки в $\mathbf{C}$ не от точки в $\mathbf{C}/L$. Расчёты, связанные с A_0 также применимы для A. Это всего лишь вопрос подставляя новое значение координат. В частности кривизна остаётся той же и она постояна. Новое расслоение - эта просто перевод, связанный с A. Что касается измененной связностей, эта просто перевод исходных данных, итак просто добавления постоянных к двум координатам a и b в (36.i). Эти две связности определают связность на новым расслоении L_0, кривизну которой мы можем вычислять. Она разность двух кривизен, кривизны для A и A_0. Другими словами, это изменение постояная связность в плоскости и все такие связиости появляются. Другими словами, постоянная в [AB,(6.10)] произвольна, хотя есть решение, которое я считаю неуместно и что вызывает недоумение, брать его по модулю 2π. Читатель может решить, должен ли он, как и я, просто исправить эти признаки поспешного сочинения или же он должен принимать их всерьёз. Вследствие разности [AB,6.10], что эти все связности Янга-Миллса для группы $GL(1)$.

В приведенном предложении есть определенная двусмысленность. Две разных связности могут приводить к изоморфным сечениям. Например алгебры Ли двух группы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}(1)$ равны так, что они имеют те же связности но с разными интегралами. Я обычно принимал первоначальное предложение.

Разъяснение. Когда две связности Янга-Миллса эквивалентны? Это лишь один из многих вопросов, возникающих при рассмотрении доводов в [AB,§6]. Например, поскольку соответствующие связности должны быть унитарными, они так как мы видели, зависят на метрике на слое и эта не инвариантна. Это означает, в частности, для обсуждаемых нами связностей, что они линейно изменяются с параметрами a и b и, следовательно, не являются L-инвариантными (36.i). Мне трудно понимать это. Интегральное изменение параметры a и b изменяет метрику на слоях, но не связность, и поэтому следует рассматривать её как изменение данных. То есть, семейство перестает быть тором и становится комплексной прямой. Это важно для нашего заявления и для [AB,Th. 6.7], которая без этого не имеет смысла. Условие [AB,6.1] линейно. ■

Это утверждение почти не совместимо с [AB, 6.10] ни с утверждением, что плоские связности на тривиальном расслоении типа Янга-Миллса.

Упущение исправлено или дьявол в деталях.[78] Этот очерк отклонится. Это потому, что мне невозможно было понять материал в [AB] на первом, втором или даже третьем чтении. Я должен часто возвращаться к источнику, чтобы полно понять значение заявлений авторов. Если M эллиптическая крива тогда $\tilde{M} = \mathbf{C}$ и легко представить

[77]Читатель с ограниченным знакомством с дифференциальной геометрией, должен знать, что плоская связность, является той, которая так что её интеграл определяет функцию, которая локально однозначна, но глобально, возможно, многозначна. Она топологически отличается смещением между петель. Таким образом, для эллиптической кривой его можно считать линейным.

[78]Поскольку в [AB] было так много, что я не совсем понял, а также один или два момента, которые были, в лучшем случае, недостаточно объяснены авторами, различные части этой статьи были написаны на разных этапах моей борьбы с материалом , Я решил, частично из-за лени, отчасти потому, что может быть лучше для тех, кто, как я, изучают основы дифференциальной геометрии вместе с её применением к теории автоморфных форм, оставляя часть материала в неупорядоченной форме в котором я сначала понял это.

его. Тоже лёгко представить группу $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и её представдения в $GL(1)$. Важно также отметить, что $\Gamma_{\mathbf{R}}$ имеет несколько автоморфизмов, так что некоторые из этих, по-видимому, разных представлений могут быть эквивалентными. Это было бы источником возможных равенств, описанных при обсуждении уравнения (36.k). Группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ порождается A, B и группой $\mathbf{R}$ действительных чисел с одним соотношением $ABA^{-1}B^{-1} = \exp(2\pi \cdot i)$. Мы записываем элементы x из $\mathbf{R}$ формально как $2\pi \cdot xi$. Некоторые, возможно все, автоморфизмы группы даются уравнениями $A \to \exp(i\lambda)A, B \to \exp(i\mu)B$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, и если $x \in \mathbf{R}$, $x \to x$.

Все одномерные представления группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ такие, что $\exp(2\pi \cdot 1) \to 1 \in \mathbf{C}$. То есть, есть $m \in \mathbf{Z}$, такое, что $\lambda \in \mathbf{R} \to \exp(2m\pi i\lambda$, которое равно 1 если $\lambda \in \mathbf{Z}$, но $A \to \alpha$, $B \to \beta$, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Эти два числа произвольны. На данный момент мы имеем дело только с линейными расслоениями и только с линейными расслоениями степени нуль. Это возможно, потому что мы вводим дополнительное линейное расслоение степени один, что позволило нам написать каждое линейное расслоение как произведение этого линейного расслоения с самим собой несколько раз и расслоение которого степень нуль. Можно ли это сделать иначе? Это вопрос, который на данный момент лучше оставить в стороне. Сейчас наша задача состоит в том, чтобы находить линейные расслоения, связанные с только что описанные гомоморфизмы. ■

Неуместные нерешительности. Умножитель $s(\cdot)$ или его обратный элэмент не определяют, с уравнением (36.b) метрику на M, они определяют метрику на её универсальном покрытии. Это означает, что большое количество наших утверждений справедливо только для универсального накрытия. Это в порядке, но необходимо помнить об этом. Только когда мы приходим к связностям, связанным с разностью $A_0' - A_0$ что двусмысленность устранена. Кроме того, огромное преимущество достигается. Звазности Янга-Миллса которые определяются метрикой инвариантой по отношению к переносу задаются двумя реальными параметрами, определяющими движение с постоянной скоростью в плоскости. Так мы пришли с менее объяснениями к (53). Что происходит? Сомножитель A в $A \cdot A_0^{-1}$ изменяется но возможно, что она возвращается к своей отправной точке в M но не в $\tilde{M} = \mathbf{C}$. Это можно потому, что $s(\cdot)$ функция на $\tilde{M}$ но не на M. ■

Непостижимое становится понятным. §VIII начинается с пяти предложений, полное значение которых только мне был открыто, а затем не полностью. В частности я не понял предложение, которое следовало за ними, 'Given any homomorphism $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ we then get an induced G-connection A_ρ also satisfying the Yang-Mills equations ...'. До этого момента мне удалось немного разобраться в построении расслоения Q и его последствий, без полного понимания его точного значения. Одно, особенно, полностью ускользнуло от меня. Это построение плоских связгостей с размерностью равной единице. Скорее, я это понял, но не его последствий, по крайней мере, не с их полным значением. Кроме того, исходя из классической теории, то есть теории Вейерштрасса и других, я не узнал, как далеко это осталось от перехода к унитарным связям. Я не оценил расстояние, отделяющее от него унитарную теорию. Это вопрос не столько из $\mathbf{U}(1)$-расслоений, сколько от соединённых $\mathbf{R}$-расслоений. Я испытываю трудности с представлением о последствиях введения нуля или полюса, как и при построении Q. Я не тополог! Более того, я ввел чрезвычайно важное связность Q очень небрежно, с определением $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}$ внизу формулы (36.i). Теперь мы должны рассмотреть её более тщательно, если мы хотим оценить определения, предшествующие [AB, Th. 6.7], поскольку это главная особенность их работы. Скорее, я думаю, что мы, наконец, в состоянии использовать эту теорему для сравнения собственных сопряженных сечениeй с связностей Янга-Миллса. ■

После всех наших усилий, в частности, после всех моих усилий возникает неожиданный вопрос в связи с применением [AB,Th. 6.7]. Возьмём мы ли произвольный гомоморфизм $\rho : \Gamma_{\mathbf{R}} \to G$ для наших целей или ограниченный класс? Чтобы продолжить, я предполагаю, что [AB,стр. 559/560] открыто перед читателем. Дело в том, что мы применяем теорему с ограниченным выбором ρ. Я удивлен, но меня часто удивляло, сочиняя эту статью. Выберём $G = GL(1)$ как аддитивную группу $i\mathbf{R}$, а с одномерным представлением ρ, значения которого произвольные на представителях A и B. На $\mathbf{R}$ их значения равны 0. В частности, сомножитель $\mathbf{U}(1)$ здесь не имеет значения. Гомоморфизм ρ тривиален на нем. С другой стороны, существует больше свободы в образе G of ρ, чем я оценил. $\mathbf{U}$ заменяется на $\mathbf{R}^{\times}$.

Итак показатели, которые появляются в формуле (53) связности Янга-Миллса, ограничены условием, что показательные функции определены их интегралами однозначны на M. При этом должно быть ясно, что основной вывод этого статьи установлен для простого случая $G = GL(1)$. Однако в качестве конечной цели мы надеемся доказать, что (1.d) по данной алгебраической кривой является автоморфной группой Галуа. Тем не менее, в этой статье мы занимаемся только группой $GL(2)$. Эсть два рода собственных функций: те которых носитель $\mathfrak{D}$ и те которых носитель $\mathfrak{A}$. Первые соответствуют неупорядоченной паре собственных функций для $GL(1)$, которых параметр дан (50.a). Для тех, которых параметр дан (50.b), параметра к собственной функции является более сложным. Связности Янга-Миллса вмешиваются. Переход так: гомоморизм $\Gamma_{\mathrm{aut}} \to {}^{L}G$; связность Янга-Миллса; выбранный набор интегралов, которые дают собственные сопряженные значения. Заключения затем сравниваются с выводами раздела VII.

Сначала нужно вернуться к второму сомнительному утверждению в [AB,p. 561]. Нет никакой причины, что $G_X = G$. Кстати, во избежание путаницы я вспоминаю, что $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и Γ_{aut} два разных, хотя тесно связанные группы.

Для $GL(2)$ существуют собственнии функции двух видов в соответствии с подмножеством B, на котором они определены: $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{A}$. Для первых, собственные сопряженние сечения прямая неупорядоченная сумма которой парпметр тоже сумма двух одномерного представления группы Γ_{aut}. Некоторые из них второго вида также относятся к первому виду. Мы можем спросить, почему они появляются, но нам не нужно найти для них новые параметры. Это другие, с которыми мы имеем дело, и каждое из них связано с одномерными представлениями трех подгрупп группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$, определяемых прообразами трех подгрупп индекса два в π_M. Заметим, что представление τ, индуцированное из тривиального представления каждой из этих подгрупп, одинаковы и их ограничение к данной подгруппе, является прямой суммой тривиального представления и единственного нетривиального представления, которое тривиального на M^2. Как особенный выбор, мы выбрали подгруппу, порожденную $A' = A$ и $B' = B^2$.

Переход к накрывающей кривой затрагивает не только $\pi_1(M)$, которое заменяется подгруппой $\pi_1(M')$ которой индекс два, но и группа $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и элемент J, который заменяется на $J' = J^2$. Группа $\mathbf{R}$, однако, не изменяется. Следовательно $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ является подгруппой второго порядка в $\Gamma_{\mathbf{R}}$. С другой стороны, мы начали с одномерной связности на M' и связали с ней двумерную связность на M. В то же время одномерная связность связана с одномерным представлением $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и двумерная связность также связана с двумерным представлением $\Gamma_{\mathbf{R}}$. То что мы хотим сделать, это проверить, что двумерная связность - эта та, которая задана теоремой Атья-Вотта для двумерного представления. Ещё раз, двумерные представления $\Gamma_{\mathbf{R}}$ не все уместны.

Теперь рассмотрим обсуждение на [AB,стр.560], применяя его к обеим группам $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Элементы X в $\mathfrak{g}$ будет одинаковым для $\Gamma_{\mathbf{R}}$ и $\Gamma'_{\mathbf{R}}$. Итак, мы переходим к G_X для них обоих, однако, не утверждая, что G_X связано. $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M)$-расслоение на M является просто прямым образом расслоения $\mathbf{U}(1) \times \pi_1(M')$ на M, хотя наше геометрическое описание, возможно, не показало этого ясно. Поскольку композиция двух прямых изображений снова является прямым образом, наш довод завершен.

Сейчас ещё только мало дел. Это просто вопрос остатков. В 'Переход от Γ_{aut} к $\Gamma_{\mathbf{R}}$' мы обсудили этот переход для одномерных представлений. Обсуждение одинаково хорошо относится к индуцированным представлениям двух групп для поля и поля расширения. **Другое признание.** Для меня трудно польностью понять теорию Янга-Миллса. Я никогда не осмотрел общей теории. Следовательно нужно постоянно напоминать её следствие. Извеняюсь! ■

Как я часто признал я только медленно понял, и я ещё только частично понимаю, отношение между собственными сопряженными сечениями и связностями Янга-Миллса. В частности, я был неосторожен когда я написал (53), скорее я не объяснил как выбирать начальные значения. Эти даны в степенях Λ_0, в частности в Λ_0^0, то есть в тривиальном линейном расслоении, где значение 1. Значения в других степенях даны как мы объяснили в 'Начальные условия.' Определения сложны но последовательны. Требуется более одного началного значения потому что Bun_G не связно. Собственные сечения для $GL(2)$ описываются не так просто. Кроме того, даже для $GL(1)$, только те условия, которые дают однозначный исход допускаются. Нужно тоже подчёркивать, что для данной группы G уместные связности ${}^LG$-связности, лучше ${}^L\mathfrak{g}$-связности или ${}^L\mathbf{U}_G$-связности, где ${}^L\mathbf{U}_G$ унитарный вид группы ${}^LG$. Только последное полностью точным. Обозначение нестрого. В противположность группе ${}^LG$, которая несколько неточна, потому что можно ввести компонент Галуа. Кроме того, ${}^L\mathfrak{g}$ двусмыслено только поскольку оно может быть алгебра Ли группы G или её компактной формы.

Чтобы продолжать, я буду предполагать, что $G = GL(1)$, $GL(2)$ или, возможно, $SL(2)$. Постоянная точка A_0 и постояное линеное расслоение Λ_0 были выбраны в §4, как в [A]. Согласно [A, Th. 5,Th. 6], после этого выбора, для $G = GL(2)$, связные компоненты Bun_G, представляющая для нас основной интерес. Они даны либо неупроядоченная пара $\{(m, \Lambda_1), (n, \Lambda_2)\}$, либо (m, Λ), m_1, m_2, m лежат в $\mathbf{Z}$. Мы уже знаем, что собственные функции ношены либо множеством точек первого рода либо множеством точек второго рода. Один сомножитель $\alpha^m\beta^n$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^\times$, $|\alpha| = |\beta = 1$ или α^m.

Намерение этого раздела убедить себя что у Γ_{aut} есть несколько убедительных свойств, по крайней мере для групп $GL(2)$ и $SL(2)$ и эллиптической кривой. Присутствие $\mathbf{Z}$ в определение групп $\tilde{\Gamma}$ и Γ_{aut} воизникает из-за наличия степени и его назначение ясно. Мы рассматриваем главным образом Γ и $\lim \mathbf{\Gamma}/n(k)\mathbf{Z}$.

XI. **Интегрируемые связности и собственные функции операторов Гекке.** Случай $G = GL(1)$ уже обработано в абзац 'некоторые подготовительные замечания.'.

Функции[79] (53) можно рассматривать как функции на самом M, являющиеся связной компонентой Bun_G. Затем они могут быть распространены на всё $\mathrm{Bun}\,G$, добавив фактор α^n для $\Lambda_0^n\Lambda$, если Λ_0^n член этой компонентой и $\alpha \in \mathbf{U}(1)$ дано. В этом абзаце объясняется также параметризация представлениями Γ_{aut}.

С другой стороны, для $GL(1)$ множество Bun_G является абелевой группой со связной компонентой. Его можно рассматривать как прямое произведение $\mathbf{Z}$ с M. Таким образом, две функции, та равна собственной функцией Гекке и та, которая определяется её собственными значениями, являются одной и той же функцией на M. Собственная функция, конечно, определяется только с точностью до мультипликативной постоянной

Но для $G = GL(2)$ в каждой точке нет чётко определенного элемента в ${}^LG$. Существует только сопряженный класс, и эта двусмысленность даёт о себе знать. Два по-видимому разных сечения могут находиться в одном классе. То есть в каждой точке их значения только сопряженые классы в ${}^LG$. Напомним, что эти значения обычно, возможно всегда, являются унитарными элементами в ${}^LG$.[80] Заметим, наконец, что естественное представление сопряженного класса может быть гладкой функцией на плоскости, значения которой в двух точках, отличающихся элементом L, могут быть сопряженными, но не равными. Это мы уже видели в §VII хотя недосказано потому, что знак в (32.a) неопределён. Однако функция $f(\cdot)$ однозначно определена на единвенственном покрытии M'. Это M', которое отличает три вида. Мы договоримся о одном. Что происходит, это то, что коэффициент α_x в (32) может меняться по знаку при движении по периоду, но класс сопряженности матрицы не меняется. Более того, это может появиться в трёх разных направлениях, заданных $L/2L$. Так же, как мы добавили дополнительный множитель[81]

$$\varprojlim \mathbf{Z}/nZ$$

в (1.d), мы можем добавлять его к $\Gamma_{\mathbf{Q}}$. Это позволяет нам перейти ко всем $\mathfrak{A}$, как только мы понимаем $\mathfrak{A}(0,0)$. Поэтому достаточно изучить следующее построение над $\mathfrak{A}(0,0)$. Логарифм функции $f(\cdot)$ или её производная определит одномерную связность на M' и её прямой образ двумерная связность на M. И та и другая связности Янга-Миллса. Ясно, что интеграл этой связности собственное сопряженное сечение связывано с функцией $f(\cdot)$.

Остаётся обсудить связь между этими расслоениями и представлениями $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ (или $\Gamma_{\mathbf{R}}$) и $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$ (или $\Gamma'_{\mathbf{R}}$). Напомним, что $[\Gamma_{\mathbf{R}} : \Gamma'_{\mathbf{R}}] = 2$ и что $J' = 2J$. Более того, и это ключ и разгадка этой статьи характер $\mathbf{R} \subset G'_{\mathbf{R}}$, связанный с характером χ определяющим $f(\cdot)$ в (32), равен -1 в точке J. Мы колебаюемся между Bun_G, итак несвязным множеством и его связным подмножеством, то есть множеством расслоения степени нуль. Несколько подробностей оставлены читателям.

[79]Эсть важный вопрос который озадачил меня, когда я написал эту статью и на что ответ, достигнутый только к концу, удивителен. Собственные сопряженные сечения задаются интегралами связности Янга-Миллса, но как вычислить начальные условия? Для $GL(1)$ это ясно. Мы наложим их с степенями Λ_0. Для $GL(2)$ не только расслоение, но даже начальные условия заданы прямым образом сечений $GL(1)$-расслоения. Возможно, что-то подобное верно в целом.

[80]Эта противоположность между явлениями знакомый над полем чисел, и тем, что мы наблюдали в этой статье о геометрической теории для $GL(2)$, удивила меня.

[81]Хотя я очень осторожно относился к выбору A_0, A'_0 и начальным условиям в (53), я часто забывал напомнить себе и читателю об этом. Тем не менее они присутствовали на протяжении всего нашего обсуждения и остаются таковыми, хотя и неявными.

Повторяю, что мы уже заметили. Характер группы $\mathbf{R}$ может быть записан как

$$\exp(2\pi i\alpha x)\exp(2\pi i\beta x), \quad \alpha \in \mathbf{Z},\ 0 \leq \beta < 1,$$

где первый умножитель имеет период 1, поэтому его длина волны равна $1/\alpha$, а второй умножитель имеет длину волны, равную целому числу, равному знаменателю частого β. В данном случае это 2, отображение группы $GL(2)$. Поэтому мы знаем, что ожидать если $G = GL(n)$. Я не знаю, чего ожидать для других групп.

Положение таково. Собственное сечение вида $\mathfrak{A}$ присоединено к одномерному расслоению M' которого значение в точке $J = -1$. В самом деле длино его волны относительно J равно 2. Оно определается одномерное представление группы[82] $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$. Мы уже понимает, что индуцированное представление группы $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ неприводимо.

Мы обнаружили, что соответствующие представители имеют два вида, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$. Параметры последних просто два неупорядоченных параметра для $GL(1)$. Итак двусмысленность тоже проста. Для первых, двусмысленность тоже возможно, но эта выглядит по-другому, и я очень долго путался. Конечно, представления вида $\mathfrak{A}$ изучались в §VII, и нам нужно только обратиться к нему. Мы обнаружили, что собственные сечения были заданы функциями со значениями в ${}^LG$, которые были периодическими либо с периодом L, либо с периодами в решётке между L и $L/2$, так что они могли быть связаны с одним из трех двойных покрытий M' кривой M. Они были обнаружены, прежде чем я понял соответствующие части из [AB,§6] достаточно хорошо и был большой загадкой для меня.

Важное напоминание. Эсть что-то так простое что оно, похоже, не стоит упоминать снова, но для нас очень важно его удерживать в памяти. Группа $\mathbf{R} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$ так, что $J = 1 \in \mathbf{R}$. Однако не нужно, что для данного представления $J \to 1$. Однако, мы рассматриваем только те характеры χ группы $\mathbf{R}$ так, что $\chi(J)$ корень из единицы. Тогда $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, так, что $\chi(x) = \exp(2\pi i(k+\alpha)x)$, $k \in \mathbf{Z}$ и, если мы рассматриваем $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, $0 \leq \alpha < 1$. У двух характеров $x \to \exp(2\pi ikx)$, $x \to \exp(2\pi i\alpha x)$ есть совершенно разные назначения. Значения первых характеров 1 в $\mathbf{Z}J$. Следовательно они давны на $\mathbf{R}$ как прообраз характера группы $\mathbf{U}(1)$, то есть $u \to u^k$. Мы уже обсудили их. Второй множитель значение J и мы уже обсуждил это в (55). Я подчёркиваю, $J = 1 \in \mathbf{R} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$ но возможно что $\rho(J)$ неединичный элемент. Эти рассмотрения важны для нас если мы осматриваем двойное наложение M' кривой M, так что $J' = 2J$. ■

На первый взгляд вывод в §VI состоит в том, что существует четыре вида собственных сопряженных сечений, которые относятся к виду $\mathfrak{A}$, каждое сечение дано характером χ на $\mathrm{Pic}(M)$ и его вид отличается его ограничением к $\mathrm{Pic}_2(M) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, которое то ли тривиально то ли одно из характеров χ_i группы $\mathrm{Pic}_2(M)$. Те χ, которые связаны с тривиальным характером этой группы, эквивалентны классам вида $\mathfrak{D}$. Это было установлено в §VI.

Те которые связаны с тремя другими характерами определны функцией $x \to \alpha_x^2$, как в (32), потому что только сопряженный класс матрицы (32) относащийся к делу. Но если два характера равны на $\mathrm{Pic}_{\mathrm{even}}(M)$, то они равны на $\mathrm{Pic}(M)$ до характера группы $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Хотя мы его не наблюдали, явно в §VI, что это имеет значение только для ограничения характера на $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$. Это ограничение на $\mathfrak{A}_{\mathrm{even}}$, то которое определяет собственную функцию и собственный класс. Следовательно, три разных класса собственных сопраженных

[82]Читатель завершит определение дополнительного умножителя.

сечений не пересекаются.[83] Я этого не ожидал. Прошло некоторое время, прежде чем я заметил это важное обстоятелство, и это вызвало у меня серьёзную путаницу. Мне несколько трудно объяснять очевидное следствое обсуждения, которое вызвало (32) и (32.a). Если квадраты двух неприрывных неисчезающих функций равны тогда они сами равны до постояного знака. Таким образом, если функции равны в некоторой точке связного множества, то они равны всюду. Отсюда следует, что три исключительные вида, обнаруженные в §VI, не пересекаются.[84] Две такие функции не могут быть равны всюду, если коэффициенты m, n не равны. Как следствие, собственные классы, связанные с $\mathfrak{A}$, все разные, даже те, которые также связаны с $\mathfrak{D}$. В частности, существует три вида тех, которые связаны только с $\mathfrak{A}$, каждый из которых определяется другим нетривиальным характером Pic_2 и, следовательно, другим квадратичным расширением. Разделение производится по остаткам m и n по модулю два. Целые числа определяют показательную функцию в (32).[85]

Сейчас мы имеем в классе представлений, связанных с $\mathfrak{A}$ четыре класса, один из которых связан тоже с классом $\mathfrak{D}$ и тремя связанными с тремя нетривиальными характерами группы $\mathrm{Pic}_2(M)$. Каждый из этих нетривиальных характеров определяет с его ядром квадратичное покрытие M' над M. Пара M' с характером определяет двумерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Всё, что нам нужно сделать, это показать, что эти представления различны, но это ясно из обсуждения выше, и что они включают в себя все двумерные представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ подходящего вида. Но это что? Ясно, что представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$ или $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ неприводимо только если его ограничение к Γ неприводимо. Эти мы понимаем из диаграммы (55). Они индуцированы и $J \to -I$.

Теперь это совершенно ясно. У нас есть три вида M', как и в §VII, каждый из которых однозначно определяется соотношением M' и M. Каждый затем определяет, снова недвусмысленно, характер M' с порядком два. Это именно то, что нам нужно в предыдущем разделе, чтобы определить представление $\Gamma_{\mathbf{R}}$, а затем $\Gamma_{\mathbf{Q}}$

С другой стороны, прямой образ одномерной связности Янга-Миллса представляет собой двумерная связность Янга-Миллса. Это является очевидным следствием определения на [AB,стр.560]. Построение Атья-Вотта явно связывает двумерное представление группы $\Gamma_{\mathbf{R}}$ (или $\Gamma_{\mathbf{Q}}$) индуцированное из одномерного представления $\Gamma'_{\mathbf{R}}$ (или $\Gamma'_{\mathbf{Q}}$) к прямому образу линейного расслоения которое связано с ним. Нужно только прочитать первые несколько строк стр. 560 тщательно. Мы могли бы принять это заключение как нашу теорему. Это, безусловно, вывод этой статьи, но в обсуждении есть гораздо более важное заявление, а именно точная общая теория, которую можно было бы рассматривать как основу геометрической теории автоморфных форм - теории, параллельной арифметической теории, которая сама по себе ещё предстоит построить.

Я ещё раз напомню читателю, но в последний раз, что $J \to -1$ является отношением для одномерного представления группы $\Gamma'_{\mathbf{R}}$!

---

[83]Если два класса такого рода совпадают, то мы будем иметь два характера χ_1 и χ_2 с периодами в $L = 2L/2$, такие, что χ_1/χ_2 было равно ± 1 всюду и следовательно было бы равно 1 всюду. Это невозможно, если оба характеры не равны.

[84]Хотя я оставляю этот довод в его нынешнем виде, было бы лучше заметить, что рассматриваемые собственные сопряженные сечения определяется их определителем и что эти показательные функции с линейным показателем $2ma + 2nb$, $m, n \in \mathbf{Z}$.

[85]Этот последный абзац ненужен и смущён, но правилен!

XII. **О возможности общей теории.** Задача ясна. Нам нужно сперва общий вид теории Атья и тогда с этим необходимо будет понять операторы Гекке. Это кажется мне доступным и многообещающим но трудным. У меня нет определённых предложений но мне кажется что формула Гаусса — Бонне для особых многообразий нужна будет, то есть изучение пфаффовой формы на Bun_G. Мне кажется, что это само по себе было бы значительного интереса в связи с операторами Гекке.[86] Я не знаю, какие дифференциальные геометрические трудности проявятся. Не ясно ли разветвленная теория может быть рассмотрена путем перехода к разветвленному покрытию начальной кривой.

[86] Есть предпечатное издание Gauss-Bonnet for singular varieties, которого авторы Paolo Aluffi и Mark Goresky но я не знаю другой отсылку.